IMAp07 DIDAKTIKA MATEMATIKY

P 3 - TEXT K PŘEDNÁŠCE

R. Blažková

Porovnávání a zaokrouhlování přirozených čísel

Porovnávání přirozených čísel se provádí několika způsoby. Využívá se pojmu zobrazení, nebo se k porovnávání přirozených čísel používá číselná osa, nebo se využívá zápisu čísla v desítkové soustavě.

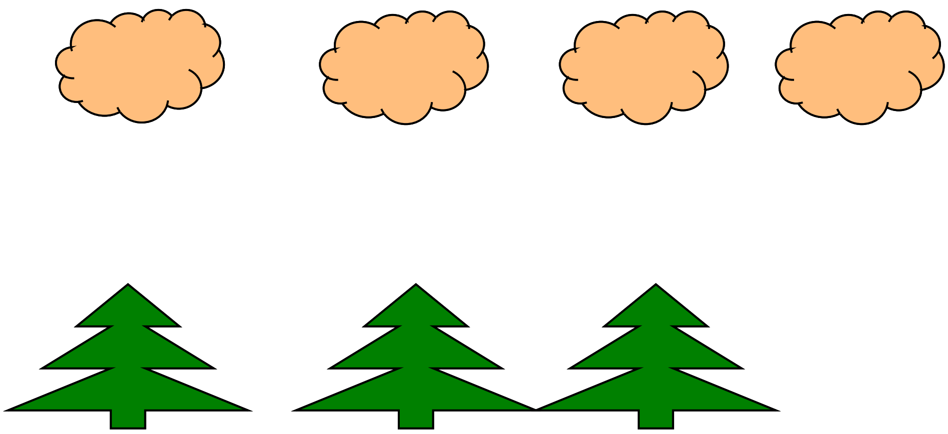
Odbornou podstatou porovnávání přirozených čísel je porovnávání čísel kardinálních.

K základním dovednostem žáka patří umět rozhodnout, která skupina má více či méně prvků a které číslo je větší či menší. Aby děti neměly problémy, které by byly způsobeny nedostatečnou nebo nevhodnou výukou, je třeba zachovat určitý metodický postup:

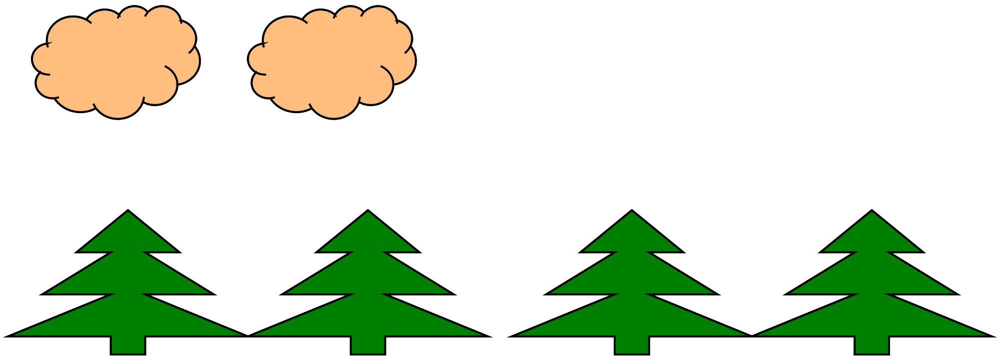
a) Nejprve se děti učí chápat vztahy „více“, „méně“, „stejně“. K tomu se využívá obrázků a tvoření dvojic.
b) Teprve ve druhé fázi se ke skupinám prvků přiřadí čísla a porovnávají se přirozená čísla pomocí vztahů „větší“, „menší“, „rovná se“ .
c) Zvládne se technika používání znaků „>“, „<“, „=“ (např. využití videí z internetu, využití numerické klávesnice). Mnoho dětí má problémy s pochopením a místěním znaků nerovnosti, ač se jim učitelé snaží nabízet nejrůznější mnemotechnické pomůcky.

1. Porovnávání přirozených čísel s využitím zobrazení (tvoření dvojic) - chápání vztahů „více“, „méně“, „stejně“ avšak bez čísel.

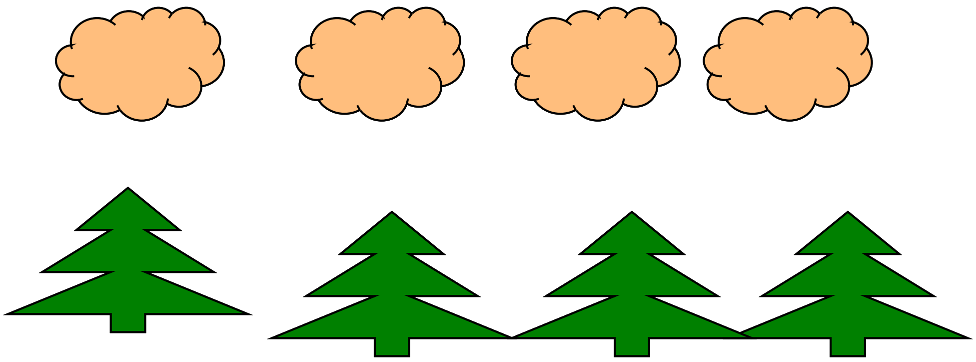
a)



Obláčků je více než stromů.

b) 

Obláčků je méně než stromů.

c) 

Obláčků je stejně jako stromů.

Takových podnětů na různých činnostech obrázcích potřebuje dítě mnoho. Již v předškolním věku se využívá činností s konkrétními předměty, zejména s hračkami (např. panenky – kočárky, auta – garáže, talíře – lžičky, děvčata - chlapci aj.) dále pak modelování a kreslení. Neustále se pracuje s objekty bez čísel a zdůrazňují se vztahy „více“, „méně“, „stejně“.

Teprve ve druhé fázi se skupinám objektů přiřadí číslo a děti porovnávají počet předmětů:

4 > 3 **2 < 4** **4 = 4**

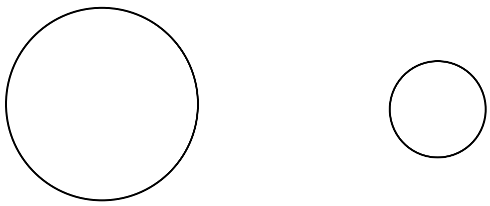
Varujme se **chybného grafického znázornění**, kdy buď nerespektujeme rozdíl mezi rovností množin a ekvivalencí množin, nebo nerozlišujeme porovnávání velikostí předmětů a jejich počtu.

Pozor: Mezi objekty nelze umisťovat znaménka pro porovnávání nebo rovnost – předměty se době nerovnají ani neporovnávají, **porovnáváme pouze jejich počet.**

Chybná grafická znázornění

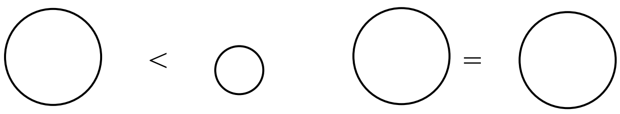
a) **Nerozlišování porovnávání tvaru předmětů a jejich počtu.**

Děti nejprve porovnávají předměty – např. velký míč, malý míč, velký kruh, malý kruh.



Chybné je, pokud mezi předměty umístíme znak nerovnosti, eventuelně rovnosti, protože dětem tak znemožníme rozlišit porovnávání počtu prvků a porovnávání jejich velikosti.

Chybná znázornění tedy jsou:



Správně:

větší kruh menší kruh 1 = 1

(porovnáváme velikost) (porovnáváme počet)

Pokud používáme grafického znázornění nesprávně, dítě má problém při řešení úlohy typu, kdy vidí tři malé kruhy a jeden velký. Tři malé kruhy mu připadají menší než jeden velký, avšak většinou v tomto případě má porovnávat počet kruhů.

Má zapsat 3 > 1 .

Nesprávné je i znázornění typu OOOOO > OOO ve smyslu 5 > 3,

nebo OOOOO > 3.

Správně: OOOOO OOO

5 > 3

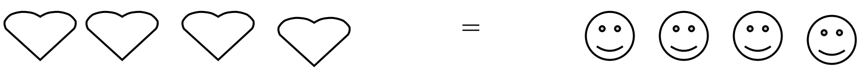
nebo lépe OOOOO 5

OOO 3

5 > 3

b) Nepochopení rozdílu mezi rovností množin a ekvivalencí množin.

Skupiny, které mají stejně prvků, se sobě nerovnají, ale rovná se pouze počet těchto prvků. Chybné je tedy znázornění typu



neboť ty předměty se sobě evidentně nerovnají.

Chybné je i znázornění OOOOO = 5

Zde je nesprávně použit symbol pro rovnost „ = „

Správné znázornění:

♡ ♡ ♡ ♡ 4 = 4 ☺ ☺ ☺ ☺

Nebo OOOO 4

XXXX 4

4 = 4

2. Porovnávání přirozených čísel pomocí číselné osy

Nejprve je třeba si uvědomit, co je číselná osa. Obecně je číselná osa přímka, na které znázorňujeme obrazy reálných čísel. Každému reálnému číslu je přiřazen právě jeden bod na přímce a naopak každému bodu přímky odpovídá právě jedno reálné číslo. Jde o zobrazení množiny všech reálných čísel na množinu všech bodů přímky.

Pokud pracujeme pouze s čísly přirozenými, tak znázorňujeme číselnou osu jako polopřímku, na které je počátek polopřímky obrazem čísla 0 a každému přirozenému číslu je přiřazen právě jeden bod (nikoliv úsečka), avšak není přiřazeno každému bodu přímky nějaké přirozené číslo. Jde o zobrazení množiny všech přirozených čísel do množiny všech bodů přímky.

Na číselné ose porovnáváme čísla podle jejich vzájemné polohy (nikoliv podle vzdálenosti od počátku – od 0).

Ze dvou čísel znázorněných na číselné ose je větší to, jehož obraz leží více vpravo.

Chybné používání číselné osy při porovnávání přirozených čísel.
Pokud se dětí naučí u přirozených čísel porovnávat čísla pomocí vzdálenosti od nuly - (ze dvou čísel je větší to, které je dále od nuly), má v budoucnu velké problémy při porovnávání záporných čísel, neboť tam tato poučka neplatí.

3. **Porovnávání přirozených čísel pomocí zápisu v desítkové soustavě**

a) U přirozených čísel platí, že ze dvou čísel je větší to, v jehož zápisu je více cifer, např.

7 542 < 12 509.

b) Pokud mají čísla ve svém zápisu stejný počet číslic, porovnáváme počet jednotek příslušných řádů, počínaje nejvyšším, až najdeme ten řád, ve kterém se liší, např. Porovnáváme čísla 49 567 a 49 576. Desetitisíců, tisíců a stovek je v obou číslech stejně, čísla se liší až počtem desítek. Protože $6 < 7$, je

$$49\,567 < 49\,576.$$

V některých případech děti při porovnávání čísel chybují, protože se nechají ovlivnit některými většími počty řádů, např. $985 > 1\,123$, protože $9 > 1$ (bez ohledu na příslušné řády).

Dětem, které porovnávání čísel zvládají bez problémů, nemusíme předkládat podrobný postup. Pokud mají některé děti problémy, předkládáme cvičení typu:

1. Děvčat je 6, chlapců je méně. Kolik může být chlapců? – vymodeluj, znázorni na obrázku, zapiš příslušnou nerovnost.

2. Králíků je 5, nakresli více mrkví, než je králíků. Zapiš.

3. Slepic je 8, nakresli méně vajec než je slepic. Zapiš.

4. Vymodelujeme dvě skupiny předmětů (např. jablka, hrušky) a ptáme se: čeho je více?

5. Znázorni obrázek k příkladu $7 > 4$.

Zaokrouhlování přirozených čísel

Motivace: používáte v běžném životě zaokrouhlování? Kde se setkáváte se zaokrouhlenými čísly?

Zaokrouhlování přirozených čísel se využívá průběžně během celé výuky matematiky. Má význam jednak praktický, jednak se používá k provádění odhadů výpočtů.
Mnoho čísel, kterých v praxi užíváme, neumíme určit přesně. Např. počet obyvatel státu, rozlohy určitých území, výsledky měření apod. Pracujeme s čísly, která jsou přibližná.

Zaokrouhlování přirozených čísel je nahrazení čísla přesného číslem jemu blízkým, a to podle určitých pravidel. Pravidla jsou stanovena státní normou.

Jestliže zaokrouhlujeme přirozené číslo na určitý řád, zajímá nás počet jednotek řádu o jednu nižšího, např. máme zaokrouhlit číslo 26 479 na tisíce. Zajímá nás počet stovek.

Pokud je počet jednotek řádu o jednu nižšího než je řád zaokrouhlovaný 0, 1, 2, 3 nebo 4, počet jednotek zaokrouhlovaného řádu ponecháme a na místa nižších řádů zapíšeme nuly.

$$26\,479 \doteq 26\,000$$

Čteme: číslo 26 470 se po zaokrouhlení na tisíce rovná 26 000.

Tomuto zaokrouhlování říkáme zaokrouhlování dolů.

Pokud je na místě řádu o jednu nižším, než je řád zaokrouhlovaný, některé z čísel 5, 6, 7, 8 nebo 9, počet jednotek zaokrouhlovaného řádu zvětšíme o jednu a na místa nižších řádů zapíšeme nuly, např. číslo 26 789 zaokrouhlené na tisíce:

$$26\,789 \doteq 27\,000$$

Čteme: číslo 26 789 se po zaokrouhlení rovná 27 000.

Tomuto zaokrouhlování říkáme zaokrouhlování nahoru.

Poznámka 1. V běžném životě se používají i jiná pravidla pro zaokrouhlování, ta však musí být explicitně a srozumitelně vyjádřena (např. v daňových přiznáních, placení zdravotního pojištění aj.).

Poznámka 2.

- Zaokrouhlené číslo představuje vždy určitý interval, např. číslo 250 získáme po zaokrouhlení čísel 245 až 254 na desítky.

- Zaokrouhlování postupné, v několika stupních, je nepřípustné, může vést k chybám. Např. číslo 34 498 správně zaokrouhlené na tisíce je 34 000. Kdybychom zaokrouhlovali nejprve na desítky, dostali bychom 34 500, kdyby se dále toto číslo zaokrouhlilo na tisíce, dostaneme

35 000, což je chybně.

- Názorně můžeme ilustrovat zaokrouhlování čísel na číselné ose. Můžeme využít dramatizace, např. na číselné ose do sta nakreslíme domečky na obrazech desítek, mezi desítkami jsou vyznačené jednotky. Umístíme figurku, ptáme se, do kterého domečku to má blíž.

Problémy dětí při zaokrouhlování

- Děti pracují pouze se dvěma číslicemi zapsanými na potřebných řádech, ostatní číslice nižších řádů opíší, např.: $942\,567 \doteq 940\,567$.

- Zaokrouhlují jen do daného řádu, další čísla vynechají:
Např. Zaokrouhlete číslo 344 653 na tisíce zapíší 5 000.

- Pracují podle nesprávné analogie – při zaokrouhlování nahoru počet jednotek zaokrouhlovaného řádu o jednu zvýší, při zaokrouhlování dolů pak počet jednotek o jednu sníží, např.: $942\,567 \doteq 930\,000$.

- Pokud mají čísla zapsaná v tabulce a mají dané číslo zaokrouhlit na desítky, stovky, tisíce, atd., zaokrouhlují již zaokrouhlené číslo (zaokrouhlování postupné).

Př. Zaokrouhlete čísla v tabulce:

Číslo	desítky	stovky	tisíce	desetitisíce
23 576				
670				
78 402				
40 905				
9 999				

Slovní úlohy na porovnávání pomocí vztahů o *n* více (méně), *n*-krát více, méně

Porovnávání přirozených čísel (později zlomků a desetinných čísel) se využívá také ve slovních úlohách.

Specifickým náročným učivem jsou slovní úlohy, ve kterých se vyskytuje porovnávání čísel pomocí vztahů o *n* více (méně), *n*-krát více (méně). Pokud tyto úlohy žáci správně nepochopí jako úlohy jednoduché, řešené v oboru čísel přirozených, nezvládnou řešení úloh složených a úloh řešených v jiných číselných oborech (desetinná čísla, zlomky).

Začněme složenou úlohou, které přináší, podle sdělení učitelů a učitelek, i podle našich zkušeností největší problémy.

Tomáš má 110 Kč, David má o 40 Kč více než Tomáš. Kolik Kč mají dohromady?

Nejčastější chybné řešení dětí je: 110 + 40 = 150. Sečtou obě čísla uvedená v zadání úlohy, bez ohledu na kontext.

Jak přispět k řešení tohoto problému?

1. Je třeba rozlišit slovní úlohy na pouhé sčítání (odčítání) od slovních úloh na porovnávání.
2. Neposkytujeme dětem mnemotechnickou pomůcku: více – sčítáme, méně – odčítáme, protože slovní úlohy mohou být formulovány tak, že je tomu naopak.
3. Využíváme rozboru slovní úlohy a zamyšlení nad vzájemnými vztahy mezi čísly (když jeden má méně než druhý, pak druhý má více než první).
4. Ve všech případech dětem k řešení napomůže vhodné grafické znázornění. Všimněme si podrobněji, jak se jeden příklad (5 + 3) může v různých slovních úlohách objevovat v různém kontextu. Sledujme zadání tří úloh, které se řeší stejným matematickým příkladem, avšak kontext je různý.
5. Děti by měly mít představu o významu každého čísla.

- Tomáš měl 5 modelů autíček, 3 dostal od dědečka. Kolik modelů autíček má celkem?

T O O O O O O O O   5 + 3 = 8   Tomáš má 8 modelů autíček.

Zkouška: Buď „krok zpět“, kdy slovní úlohu projdeme znovu, nebo formulací obrácené slovní úlohy (např. Tomáš měl 5 modelů, několik dostal od dědečka, potom jich měl 8. Kolik modelů dostal od dědečka?).

- Tomáš má 5 modelů autíček, David má o 3 modely více než Tomáš. Kolik modelů má David?

T O O O O O
D O O O O O O O O   5 + 3 = 8   David má 8 modelů autíček.

Zkouška: D T
8 5 8 > 5 o 3.

Chybným grafickým znázorněním by bylo: O O O O O O O O, protože není jasné, která autíčka jsou Tomáše a která Davida.

- Tomáš má 5 modelů autíček, a to je o 3 modely méně, než má David. Kolik modelů má David?

T O O O O O
D O O O O O O O O   5 + 3 = 8   David má 8 modelů autíček.

Zkouška: T D
5 8 5 < 8 o 3.

Poslední úloha se označuje jako úloha s tzv. antisignálem, kdy se vztah „méně“ řeší pomocí sčítání. V rozboru je třeba uvést vzájemný vztah mezi oběma chlapci, tj. když jeden má o 3 méně než druhý, má ten druhý o 3 více než první.

Analogické slovní úlohy lze formulovat pro odčítání.

- Pavel měl 8 kuliček, 3 prohrál. Kolik kuliček měl po hře?
  O O O O O ~~O~~ ~~O~~ ~~O~~ 8 – 3 = 5 Po hře měl Pavel 5 kuliček.

- Pavel měl 8 kuliček, Filip měl o 3 kuličky méně než Pavel. Kolik kuliček měl Filip?
  Při rozboru bychom si měli uvědomit, že když má Filip méně kuliček, Pavel jich musí mít více.
  P O O O O O O O O
  F O O O O O 8 – 3 = 5 Filip měl 5 kuliček.

  Zk: P F o 3
  8 5 5 < 8

Chybným grafickým znázorněním by bylo:

P O O O O O O O O

F O O O O O ~~O~~ ~~O~~ ~~O~~

Toto znázornění je znázornění slovní úlohy: Pavel měl 8 kuliček, Filip měl také 8 kuliček, ale 3 prohrál, avšak není znázorněním slovní úlohy na porovnávání.

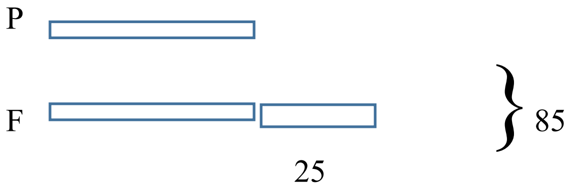
- Pavel měl 8 kuliček, a to bylo o 3 kuličky více, než měl Filip. Kolik kuliček měl Filip?
  Rozbor: Pavel měl o 3 více, tedy Filip měl 3 méně.
  P O O O O O O O O
  F O O O O O

- Pavel měl 8 kuliček, Filip měl 5 kuliček. O kolik kuliček měl Pavel více než Filip? (O kolik kuliček měl Filip méně než Pavel?)
  Úloha porovnává rozdílem.
  P O O O O O O O O
  F O O O O O 8 – 5 = 3

  Zk: P F **o 3**
  8 5 5 < 8

Náročnější úloha:

Pavel a Filip mají dohromady 85 modelů autíček, Filip má o 25 modelů více než Pavel. Kolik modelů má každý z chlapců?



Zápis příkladu: $85 - 25 = 60$ $60 : 2 = 30$ $30 + 25 = 55$

Filip má 55 modelů, Pavel má 30 modelů autíček.

Zk.: Zkoušku provádíme pro obě podmínky, vyloučíme tím chybné řešení.

$55 + 30 = 85$ $55 > 30$ o 25

Slovní úlohy se vztahy *n* krát více (méně), ve kterých se využívá operací násobení a dělení, jsou pro děti náročnější.

- Děti utvořily tři skupiny po pěti. Kolik bylo všech dětí?

o o o o o o o o o o o o o o o $3 \cdot 5 = 15$ Všech dětí bylo 15.

Zkouška: $5 + 5 + 5 = 15$

- Na hřišti bylo 5 děvčat, chlapců tam bylo třikrát více než děvčat. Kolik bylo na hřišti chlapců?

D O O O O O
CH O O O O O O O O O O O O O O O $3 \cdot 5 = 15$ Na hřišti bylo 15 chlapců.

Zkouška: CH D
15 5 $15 > 5$ třikrát.

- Na hřišti bylo 5 děvčat, a to bylo třikrát méně než chlapců. Kolik bylo na hřišti chlapců?

D O O O O O
CH O O O O O O O O O O O O O O O $3 \cdot 5 = 15$ Na hřišti bylo 15 chlapců.

Zkouška: D CH
5 15 $5 < 15$ 3 krát.

Rozbor – u úloh s antisignálem využíváme vzájemného vztahu: když děvčat bylo třikrát méně než chlapců, chlapců bylo třikrát více než děvčat.

Poznámka: Při tomto grafickém znázornění je možné setkat se žáky, kteří v obrázku nevidí „třikrát více“, ale „o dvakrát více“. Někteří žáci potřebují slovní vyjádření „třikrát tolik“, jiní lépe chápou jiný obrázek, např.:

D O O O O O

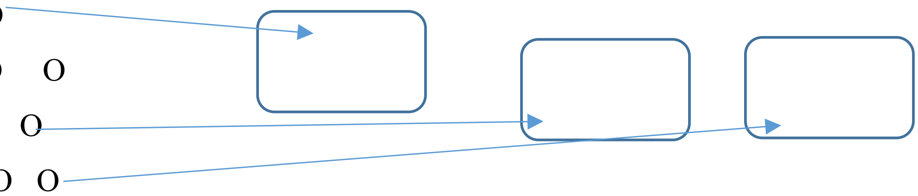
CH O O O O O
O O O O O
O O O O O

Analogické slovní úlohy se formulují pro operaci dělení.

- Rozdělte 15 dětí do tří skupin. Kolik dětí bude v každé skupině?

  Využijeme dramatizace (jako při vyvozování dělení na části). Vytvoříme 3 přihrádky a postupně do nich dáváme prvky po jednom z hromádky 15 prvků, až všechny vyčerpáme. Sledujeme, kolik prvků bude v jedné přihrádce.

  O O O
  O O O O O
  O O O O
  O O O

  Zapíšeme příklad: 15 : 3 = 5

  V každé skupině bude 5 dětí.

  Zk.: 5 + 5 + 5 = 15 nebo 3 · 5 = 15

- Na hřišti bylo 15 chlapců, děvčat tam bylo třikrát méně. Kolik bylo na hřišti děvčat?

  Zamyslete se nad možností grafického znázornění této úlohy, aniž bychom znali dopředu výsledek. Znázornit 15 prvků (později více) a rozdělit je na tři stejné skupiny bez znalosti výsledku je obtížné. Proto je vhodnější znázornit počet děvčat úsečkou nebo obdélníčkem, počet chlapců pak úsečkou třikrát delší (když děvčat je třikrát méně, chlapců je třikrát více).

  D
  CH

  15

  Zápis příkladu: 15 : 3 = 5

  Děvčat je 5.

  Zk: D CH

5 15 $5 < 15$ 3 krát

- Na hřišti bylo15 chlapců, a to bylo třikrát více, než bylo děvčat. Kolik děvčat bylo na hřišti?

  Znázornění a řešení této úlohy je stejné, jako předcházející, jen zadání se liší – signál „více“, přitom dělíme.

  Porovnávání podílem:

- Na hřišti bylo 15 chlapců a 5 děvčat. Kolikrát více bylo chlapců než děvčat? (Kolikrát méně bylo děvčat než chlapců?)

CH O O O O O O O O O O O O O O O

D O O O O O

Zápis příkladu (kolikrát se 5 „vejde“ do 15?): $15 : 5 = 3$

Chlapců bylo třikrát více než děvčat.

Zk.: $5 \cdot 3 = 15$

Náročnější úloha:

Jitka a Eva ušetřily dohromady 580 Kč. Jitka ušetřila třikrát více Kč než Eva. Kolik Kč ušetřila každá z nich?

Zápis příkladu: $580 : 4 = 145$ $145 \cdot 3 = 435$

Jitka ušetřila 435 Kč, Eva ušetřila 145 Kč.

Zk.: zkoušku provádíme pro obě podmínky, vyloučíme tím nesprávné řešení.

$145 + 435 = 580$, $435 > 145$ 3 krát.