ŽÁCI SE SPECIFICKÝMI VZDĚLÁVACÍMI POTŘEBAMI V MATEMATICE

Text vznikl v rámci projektu FR MU 2015:

Název projektu	**Příprava studijních materiálů v anglickém jazyce pro přípravu budoucích učitelů k práci se žáky se specifickými vzdělávacími potřebami v matematice**
Hlavní řešitel	Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Řešitelé a autoři textů	RNDr. Růžena Blažková, CSc. Mgr. Irena Budínová, Ph.D. Mgr. Lenka Pavlíčková, Ph.D. RNDr. Milena Vaňurová, CSc.
Překladatelé do AJ	RNDr. Jana Beránková Mgr. Helena Durnová, Ph.D.

ÚVOD

Předložený text je věnován specifickým poruchám učení v matematice a je zpracován ve dvojjazyčné verzi. Je určen jednak zahraničním studentům, kteří studují na Masarykově univerzitě, jednak studentům učitelství 1. stupně ZŠ, studentům následného magisterského studia učitelství matematiky pro základní školy, studentům speciální pedagogiky.

Procento dětí s výukovými problémy se na základních školách neustále zvyšuje. Mohou to být děti, u kterých je diagnostikována některá ze specifických poruch učení nebo chování, přitom děti mohou být v některých oblastech průměrně až nadprůměrně nadané. Tyto děti potřebují odbornou speciálně pedagogickou pomoc, pochopení vyučujícího příslušného předmětu i pochopení rodičů. V textu se zaměříme na specifické poruchy učení v matematice, zejména na dyskalkulii, avšak také na vliv ostatních specifických poruch učení na úspěšnost žáka v matematice. Nezanedbatelné je také sledování deficitů základních funkcí matematických schopností.

V odborné literatuře je možné nalézt mnoho názorů na možnosti poskytování péče dětem s diagnostikovanou dyskalkulií. Mohou vycházet z přístupů medicínských, psychoterapeutických, speciálně pedagogických, psychologických či pedagogických. Zpravidla není možné uplatňovat jednotlivé přístupy izolovaně, ale ve většině případů se jedná o komplexnější pohled na dítě a jeho problémy. Návrhy reedukačních postupů, které jsou uvedeny v učebním textu, vycházejí z pohledů pedagogických, avšak respektují přesnou výstavbu matematických pojmů v jejich návaznosti. I když text obsahuje minimum matematické teorie, měl by vést k zamyšlení nad matematickou správností používaných postupů, aby nebyly v rozporu s matematickou teorií a nezpůsobovaly tak dětem další problémy v budoucím studiu.

PŘEDPOKLADY

Dříve, než se zaměříme na konkrétní projevy a nápravu dyskalkulie, uveďme základní činnosti, které je nutné u každého dítěte provádět:

- Provedení řádné diagnostiky problémů dítěte z hlediska jeho matematických schopností, dovedností a znalostí i jeho vlastních dyskalkulických chyb.
- Respektování skutečnosti, že matematické poznatky jsou nepřenosné, každé dítě se k poznatkům dostává na základě svých vlastních manipulativních činností, zkušeností a myšlenkových pochodů.
- Nalezení tzv. „těžištního bodu“, od kterého je třeba nápravu začít.
- Respektování skutečnosti, že nápravné a reedukační postupy se v první fázi opírají o pochopení daného jevu.
- Využívání manipulativních činností k pochopení učiva, aby nastal tzv.“ „AHA efekt“, kdy dítě učivo pochopí vlastní myšlenkovou činností.
- Nebudovat znalosti na pouhém zapamatování si poznatků, uvědomit si, že pamětné zvládnutí nezbytného učiva se realizuje ve druhé fázi výukového procesu, poté, kdy dítě pochopí význam jednotlivých pojmů a operací.
- Nápravné postupy je třeba provádět po malých krocích, aby se dítě nezahltilo přílišným množstvím učiva.
- Je nutné respektovat vlastní myšlenkové pochody a strategie dětí.

Včasná diagnostika a včasné odhalení příčin problémů dítěte v matematice, pochopení jeho vlastních myšlenkových pochodů a nalezení vhodných postupů právě pro toto dítě je jedním z předpokladů úspěchu. Přitom rozhodujícími činiteli v tomto procesu jsou dítě samotné, jeho učitelé, jeho rodiče eventuelně prarodiče i vhodné výukové metody.

SPECIFICKÉ PORUCHY UČENÍ

Problematika specifických poruch učení a vzdělávání žáků se specifickými vzdělávacími potřebami je aktuálním tématem jak školy, tak mnoha rodin. Neustále se zvažuje problematika vzdělávání dětí se specifickými vzdělávacími potřebami v souvislosti s jejich zařazením do speciálně zaměřených škol nebo tříd, nebo se vzděláváním inkluzívním. Inkluzívní vzdělávání žáků s poruchami učení v běžných třídách základních i středních škol vyžaduje kvalifikovaný přístup pedagoga a jeho schopnost realizovat diferencovanou a individualizovanou výukou těchto žáků.

V minulosti (v první polovině dvacátého století) nebyla problematice specifických poruch učení věnována přílišná pozornost. Žáci, u kterých se projevovaly problémy v učení, byli řazeni do dvou až tří skupin – prostě jim "to nešlo", nebo byli považováni za hloupé, případně za líné. Přitom se řádně připravovali na vyučování a zvládání školních povinností vyžadovalo nepřiměřeně mnoho času a úsilí. Častokrát se problémy vyskytovaly v jednom předmětu a v ostatních předmětech dosahovali tito žáci průměrných až nadprůměrných výsledků. Avšak i v této době se mnoho učitelů matematiky snažilo hledat postupy, které by žákům s problémy v matematice učivo usnadnily.

Z historického hlediska se již od starověku, např. při výuce trivia, hledaly metody, které by žákům, kteří měli se zvládáním těchto základů problémy, vzdělávání usnadnily. Mnoho význačných vědců a pedagogů v dalších obdobích věnovalo pozornost žákům, kteří měli výukové problémy a přitom byli intelektově na dobré úrovni. Patří mezi ně např. Erasmus Rotterdamský (1567 – 1636), Jan Ámos Komenský (1592 – 1670), John Looke (1632 – 1704), Johan Heinrich Pestalozzi (1746 – 1827), Johan Fridrich Herbart (1776 – 1841) a mnoho dalších. Z našich vědců a pedagogů, kteří se poruchám učení věnovali, uveďme alespoň O. Chlupa, Z. Matějčka, L. Košče, J. Langmaiera, Z. Žlaba, ze současných např. M. Vítkovou, M. Bartoňovou, V. Pokornou, O. Zelinkovou, J. Nováka. Velká pozornost problémům žáků v matematice je věnována na katedře matematiky Pedagogické fakulty MU v Brně.

Specifické poruchy učení začaly být systematicky studovány psychology a speciálními pedagogy v minulém století. V roce 1976 vydal Úřad pro výchovu v USA definici specifických vývojových poruch učení v tomto znění: „*Specifické poruchy učení jsou poruchami v jednom nebo více psychických procesech, které se účastní porozumění nebo užívání řeči, a to mluvené i psané. Tyto poruchy se mohou projevovat v nedokonalé schopnosti naslouchat, myslet, číst, psát nebo počítat. Zahrnují stavy, jako je např. narušené vnímání, mozkové poškození, lehká mozková dysfunkce, dyslexie, vývojová dysfázie atd.*“

(Matějček, 1987)

Skupina expertů Národního ústavu zdraví ve Washingtonu spolu s experty Ortonovy společnosti a dalších institucí formulovali v roce 1980 následující definici: „*Poruchy učení jsou souhrnným označením různorodé skupiny poruch, které se projevují zřetelnými obtížemi* *při nabývání a užívání takových dovedností, jako je mluvení, porozumění mluvené řeči, čtení, psaní, matematické usuzování nebo počítání. Tyto poruchy jsou vlastní postiženému jedinci a předpokládají dysfunkci centrálního nervového systému, i když se porucha učení může vyskytovat souběžně s jinými formami postižení (např. kulturní zvláštnosti, nedostatečná nebo nevhodná výuka, psychogenní činitelé), není přímým následkem takových postižení nebo nepříznivých vlivů.*" (Matějček, 1987)

V roce 1992 byly v 10. revizi Mezinárodní klasifikace nemocí uvedeny v oddíle F 80 až F 89 Poruchy psychického vývoje a v části F 81 Specifické vývojové poruchy školních dovedností:

F 81.0 Specifické poruchy čtení
F 81.1 Specifické poruchy psaní
F 81.2 Specifické poruchy počítání
F 81.3 Smíšená porucha školních dovedností
F 81.8 Jiné vývojové poruchy školních dovedností
F 81.9 Vývojové poruchy školních dovedností nespecifikované
(Mezinárodní klasifikace nemocí 1992).

Postupně byly zkoumány poruchy čtení, psaní, počítání a dalších schopností a dovedností. Začaly se systematicky zkoumat příčiny těchto poruch a začaly se hledat edukační postupy, kterými by bylo možno pomoci žákům tyto problémy překonávat.

Současný pohled na definici specifických poruch učení uvádí např. Věra Pokorná (Pokorná, 2010) a ve své publikaci cituje některé přístupy autorů z USA. „*Specifické poruchy učení znamenají poruchu v jednom nebo více základních psychických procesech, zahrnujících porozumění nebo používání jazyka, mluveného nebo psaného, která se může projevit v nedokonalé schopnosti naslouchat, myslet, mluvit, číst, psát nebo provádět matematické výpočty. Termín zahrnuje takové podmínky, jako jsou percepční nedostatky, mozková poranění, lehké mozkové dysfunkce, dyslexie a vývojová afázie. Termín nezahrnuje jedince s problémy v učení, které jsou primárně důsledkem zrakového, sluchového nebo motorického handicapu, mentální retardace, emočního vzrušení nebo kulturně či ekonomicky znevýhodněného prostředí*" (Pokorná, 2010, s. 18, cit. Spear-Sweling 1999).

Podle našich výzkumů (Blažková, Pavlíčková, 2010) je na základních školách 16 % žáků s diagnostikovanými specifickými poruchami učení, z nich je 5 – 6 % žáků dyskalkulií. Z celkového zkoumaného vzorku žáků je 1 – 2 % žáků s dyskalkulií. Problémy dětí v matematice mohou mít nejrůznější příčiny. Mohou to být lehké mozkové dysfunkce, nesprávný způsob vyučování, negativní postoj k matematice a k učení vůbec, nechuť k práci a jakékoliv činnosti, nedostatečná příprava na vyučování a mnoho dalších. Příčiny jsou různé, avšak jejich hlubší analýza a pochopení problémů se dětem často nedostává. Dospělí velmi často neodkážou odhalit myšlenkové procesy, které probíhají v mozku dítěte při práci s matematickými pojmy, snaží se sice hledat pomoc, ale ta může být v mnoha případech neúčinná. Dospělí vedou dítě tak, jak by to vyhovovalo jim samotným, ale nevnímají specifické myšlenkové pochody dítěte. Pomoc je někdy založena na pouhém pamětném zapamatování si faktů, na uplatňování nevhodných výukových metod, někdy vychází z nesprávných předpokladů apod.

Současně se snahou o nápravu nedostatků v matematice je třeba sledovat i další problémy dítěte v oblasti deficitu dílčích funkcí matematických schopností, zejména zrakového a sluchového vnímání, jemné i hrubé motoriky, laterality, koncentrace a dalších (Pavlíčková, 2015).

TERMINOLOGIE

Při práci s dětmi se specifickými vzdělávacími potřebami se často setkáváme s různými odchylkami, které se projevují snížením vnímání, pozornosti, paměti, řeči, motoriky, aj. a které jsou zpravidla způsobeny odchylkami funkce centrálního nervového systému. Přitom mohou, ale nemusí mít vliv na úspěšnost dětí ve škole. Bývají uváděny následujícími zkratkami:

LMD – lehká mozková dysfunkce

Syndrom lehké mozkové dysfunkce se projevuje u dětí, které mohou mít průměrnou až nadprůměrnou inteligenci a jejich problémy v učení nebo v chování jsou způsobeny odchylkami funkce centrálního nervového systému.

SPD – Syndrom deficitu pozornosti (angl. ADD – Attention Deficit Disorder)

SDPH – Syndrom deficitu pozornosti s hyperaktivitou (angl. ADHD - Attention Deficit Hypeactivity Disorder)

SPU – Specifické poruchy učení (angl. SLD – Specific Learning Disabilities)

FORMY NĚKTERÝCH PORUCH

Ve školské praxi se častokrát setkáme s dětmi, u kterých se projevují některé z následujících problémů a ty ovlivňují úroveň osvojování si matematických dovedností a vědomostí:

- **Poruchy koncentrace**

Děti se obtížně koncentrují na určitou činnost, jsou snadno unavitelné, roztěkané, snadno odbíhají od problému, nechávají se vyrušit jakýmkoliv podnětem, který nesouvisí s právě prováděnou činností. Řešení jakéhokoliv matematického úkolu či problému vyžaduje plnou koncentraci a neúspěšnost při řešení může být způsobena právě neschopností dítěte se na problém soustředit. Děti trpí nedostatkem času, nestíhají, trvá jim déle, než proniknou do podstaty problému. Nejsou dostatečně pohotové, rychlé – projevuje se to např. tak, že jsou neúspěšné v soutěžích zaměřených na rychlost.

- **Poruchy pravolevé orientace –** nevyhraněná lateralita (preference při užívání jednoho z párových orgánů) způsobuje dětem problémy v matematice, např. při zápisu číslic jednostranně orientovaných, zápisu víceciferných čísel, chápání vztahů na číselné ose aj.

- **Poruchy prostorové orientace –** děti žijí v trojrozměrném prostoru a přirozeně vnímají vztahy mezi objekty a rozložení předmětů v prostoru (vztahy nad, pod, nahoře, dole, vedle, vpředu, vzadu, před, za). Problémy však činí pochopení znázornění prostorové situace v rovině pomocí některého ze zobrazení (např. volného rovnoběžného promítání) na obrázku. Dítě velmi dobře ví, co je to např. krychle, ale nechápe změť čar na papíře, které zobrazují krychli, a často nepochopí ani nakreslenou síť krychle a dalších těles.

- **Poruchy časové orientace –** děti vnímají časové následnosti nejprve během dne, zpravidla podle událostí a stále se opakujících činností, později pak v delším časovém období (týden, měsíc, rok). Problémy činí pochopení jednotek času a jejich převody, jednak proto, že se užívá číselné soustavy o základu šedesát (1 hodina = 60 minut, 1 minuta = 60 sekund) a jednak proto, že některým činí problémy pochopit vztahy na kruhovém ciferníku a lineárním plynutím času. Rovněž čtení časových údajů zapsaných digitálně může některým dětem přinášet problémy.

- **Poruchy sluchového vnímání –** dítě nemá poruchu sluchu, slyší dobře, ale nevnímá, co se právě řeklo. Často se dotazuje právě na to, co bylo bezprostředně vysloveno. Toto by měl dospělý vítat, neboť dítě ví, na co se má zeptat, když mu to právě uniklo. Navíc ve třídě je určitě více dětí, které také nevnímají sluchově, avšak nezeptají se.

- **Poruchy reprodukce rytmu –** vnímání rytmu a jeho reprodukce je pro matematiku velmi důležité – např. při počítání po jedné, orientace v číselné řadě, sledování zákonitostí, závislostí aj.

- **Poruchy zrakového vnímání –** dítě dobře vidí, avšak nevnímá plně zrakově to, co by mělo vnímat jako matematické učivo – např. vidí sice, že 1 dm je rozdělen na 10 cm, ale matematický poznatek o vztahu těchto jednotek a jejich převodu v mozku nevznikne. Dítě není schopno rozlišit změny, orientovat se v geometrickém obrázku apod.

- **Poruchy řeči** – kromě logopedických problémů je v matematice nejdůležitější schopnost formulovat myšlenky vlastními slovy. Přesnost vyjadřování je odrazem přesnosti myšlení. Když dítě sdělí: „Já to vím, ale neumím to říci“, tak zpravidla neví, ale jen něco tuší. Pokud má dítě správně vytvořený poznatek, rozumí podstatě problému, pak jej dokáže slovně vyjádřit. Od dětí však nevyžadujeme definice matematických pojmů.

- **Poruchy jemné a hrubé motoriky** – projevují se zejména při manipulativních činnostech při vyvozování základních pojmů a operací, při zápisech čísel, zápisech algoritmů operací, zejména pak při rýsování.

- **Poruchy chování jako důsledek poruch učení –** pokud se dětem nedaří v matematice, pak buď na sebe upozorňují jiným způsobem (předváděním se v roli třídního klauna, nekázní), nebo se uzavřou a přestanou komunikovat, což je horší případ. Znovu navázat komunikaci s takovým dítětem bývá náročné.

KLASIFIKACE SPECIFICKÝCH PORUCH UČENÍ

Úspěšnost dítěte v matematice je ovlivňována i ostatními specifickými poruchami učení. Pro přehlednost uvedeme všechny popisované poruchy učení a zdůrazníme ty, které mají vliv na výkon žáka v matematice. V odborné literatuře jsou popisovány:

Dyslexie – porucha může postihovat rozlišování jednotlivých písmen, rychlost čtení nebo správnost čtení nebo porozumění čtenému textu. Pro dyslektika je obtížné číst s porozuměním slovní zadání matematických úloh, zejména pak slovních úloh, ve kterých je třeba provést přepis textu uvedeného českou větou do matematického jazyka. Pro některé dyslektiky je náročné číst i symbolický matematický zápis. Mezi dyslektiky můžeme však najít děti, které symbolickému matematickému zápisu rozumí a umí jej používat, a to je pak pro ně záchranou v matematice.

Dysgrafie – porucha postihuje osvojování si jednotlivých písmen, spojení hláska – písmeno, úpravu písemného projevu. V matematice má dysgrafik problémy s osvojením si jednotlivých číslic a znaků, spojení „číslo“ a „zápis čísla pomocí číslic“, rozlišení pojmů „číslo“ a „číslice“ a jejich zápisem, dále pak zápisu čísel v řádcích (např. neudrží stejnou velikost všech číslic v zápisu víceciferného čísla) nebo v zápisu čísel v algoritmech, kde záleží na přesnosti zápisu čísel podle jednotlivých řádů. Chyby v matematických operacích mohou být způsobené neupraveností zápisu nebo výraznou pomalostí při psaní.

Dysortografie – porucha pravopisu. Nejde o hrubé chyby způsobené neznalostí, ale o specifické problémy související např. s nerozlišováním sykavek, délky samohlásek, měkčení, vynechávání, přidávání, přesmyknutí písmen nebo slabik, hranice slov v písmu. Může se projevit při tzv. diktovaných pětiminutovkách, kdy má dítě v mysli zvládnout příliš mnoho jevů.

Dyskalkulie – porucha postihuje vytváření matematických představ, problémy spojené s operacemi s čísly, poruchy prostorových představ aj. Podrobně bude uvedena v celém dalším textu.

Dyspinxie – porucha v oblasti kresebných dovedností, neobratnost při zvládání jemné motoriky rukou a prstů - projevuje se zejména při rýsování. Rovněž znázornění prostorové situace v rovině, na obrázku, činí dětem obtíže.

Dysmúzie – snížení nebo úplná ztráta smyslu pro hudbu – melodii a rytmus. Zejména ztráta smyslu pro rytmus je pro matematiku problémem.

Dyspraxie – porucha obratnosti, může mít vliv na upravenost matematických písemných prací, na upravenost rýsovaných obrázků, což může být také způsobeno nešikovností dětí.

DEFINICE DYSKALKULIE

Pod pojmem dyskalkulie je označována specifická porucha matematických schopností. Dítě podává v matematice podstatně horší výkony, než by se daly vzhledem k jeho inteligenci očekávat. V literatuře jsou zveřejňovány různé definice dyskalkulie, uveďme alespoň některé. Podle 10. revize Mezinárodní klasifikace nemocí "Duševní poruchy a poruchy chování" patří dyskalkulie mezi "Specifické vývojové poruchy školních dovedností" pod kód F 81.2. (1992). *„Tato porucha zahrnuje specifické postižení dovednosti počítat, kterou nelze vysvětlit mentální retardací ani nevhodným způsobem vyučování. Porucha se týká ovládání základních početních úkonů (sčítání, odčítání, násobení a dělení) spíše než abstraktnějších dovedností jako je algebra, trigonometrie, nebo diferenciální počet."*

Poznamenejme však, že pokud má dítě problémy v oblasti zvládání základních početních úkonů, tak tyto problémy se projeví i v dalších oblastech matematiky, např. v algebře, kde pracuje s koeficienty v algebraických výrazech nebo v rovnicích, nebo s exponenty u proměnných.

Další definici dyskalkulie formuloval Ladislav Košč v roce 1985: *"Vývojová dyskalkulie je strukturální porucha matematických schopností, která má svůj původ v genově nebo perinatálními vlivy podmíněném narušení těch částí mozku, které jsou přímým anatomicko-fyziologickým substrátem věku přiměřeného dozrávání matematických funkcí, které však zároveň nemají za následek snížení všeobecných rozumových schopností."*

Na tuto definici navazuje J. Novák a podává rozšířenou definici dyskalkulie: *"Vývojová dyskalkulie je specifická porucha počítání projevující se zřetelnými obtížemi v nabývání a užívání základních početních dovedností, při obvyklém sociokulturním zázemí dítěte a celkové úrovni všeobecných rozumových předpokladů na dolní hranici pásma průměru nebo výše a s příznačnou vnitřní strukturou, v jejímž rámci je výrazně snížena úroveň matematických schopností a narušena skladba za přítomnosti projevů dysfunkcí centrální nervové soustavy podmíněných vlivy dědičnými nebo vývojovými*". (Novák 2004).

Na základě naší zkušenosti z konkrétní práce s dětmi, které mají rozumové předpoklady v pásmu průměru nebo dokonce nadprůměru a u kterých se vyskytovaly problémy v matematice, usuzujeme, že není v přístupu k dítěti rozhodující, zda je či není dyskalkulie diagnostikována, ale že je důležité pochopit individualitu dítěte, jeho specifické problémy v matematice a hledat adekvátní reedukační postupy právě pro toto dítě.

Je však nutné hledat zejména příčiny poruch a rozlišovat je alespoň pole tohoto schématu:

1. Příčiny, které jsou podmíněny vlivy tzv. částečně odstranitelnými, jako je např. styl učení, způsob výuky, vhodnost přípravy na výuku, motivace k učení apod.
2. Příčiny, které jsou odstranitelné obtížněji, jako jsou dědičné vlivy nebo narušení činností těch částí mozku, které mají vliv na utváření matematických schopností.
3. Příčiny, které jsou způsobeny nízkým nadáním pro matematiku nebo nízkým nadáním všeobecně.

Je tedy rozdíl, zda pracujeme s dětmi, které mají specifickou poruchu učení, a dětmi, které mají problémy v matematice zaviněné jinou příčinou. Volba nápravných reedukačních a kompenzačních cvičení je pro tyto děti odlišná v tom smyslu, že některé děti mohou matematické učivo zvládnout vhodným doučováním běžnými výukovými postupy, jiné však potřebují vypracování takových mechanismů, které nahradí postižené funkce nebo je vhodným způsobem rozvíjejí.

KLASIFIKACE DYSKALKULIE

Klasifikace podle L. Košče

Ladislav Košč (Košč, 1978) uvedl klasifikaci dyskalkulie podle základních problémů, které se u dětí vyskytují v souvislosti s vývojem a budováním matematických pojmů a vztahů, se čtením a psaním matematických výrazů a dělí ji následovně:

Dyskalkulie praktognostická

- porucha manipulace s konkrétními předměty nebo symboly,
- porucha při tvoření skupin předmětů,

- nepochopení pojmu přirozeného čísla,
- neschopnost porovnat počet prvků,
- neschopnost diferenciace geometrických útvarů,
- porucha prostorového faktoru.

Dyskalkulie verbální

- problémy se slovním označováním počtu předmětů, operačních znaků,
- neschopnost vyjmenovat řadu čísel v určitém uspořádání,
- nepochopení vysloveného čísla,
- nepochopení slovního vyjádření matematických symbolů a znaků.

Dyskalkulie lexická

- neschopnost číst matematické symboly (číslice, čísla, znaky pro porovnávání, znaky operací),
- záměna tvarově podobných číslic,
- porucha orientace v prostoru,
- porucha pravolevé orientace.

Dyskalkulie grafická

- neschopnost psát matematické znaky (číslice, čísla, a další),
- porucha při zápisu víceciferných čísel,
- neschopnost psát čísla podle diktátu,
- neschopnost zápisu čísel pod sebou (číslic téhož řádu),
- problémy při rýsování obrazců,
- porucha pravolevé a prostorové orientace.

Dyskalkulie operační

- narušená schopnost provádět matematické operace s přirozenými čísly (ale i s dalšími čísly),
- záměna jednotlivých operací
- poruchy při osvojování si pamětných spojů,
- neschopnost respektovat prioritu při provádění více operací různé parity,
- problémy při písemných algoritmech jednotlivých operací.

Dyskalkulie ideognostická

- porucha v oblasti pojmové činnosti,
- porucha chápání matematických pojmů a vztahů mezi nimi,
- porucha při zobecňování,

- problémy při řešení slovních úloh.

Klasifikace podle J. Nováka

Narušení matematických schopností má mnoho nejrůznějších příčin a projevů a klasifikaci v obecnějším náhledu uvádí J. Novák (Novák, 2004):

Kalkulastenie - rozumí se jí mírné narušení matematických vědomostí a dovedností způsobené např. nedostatečnou stimulací ve škole nebo v rodině, přitom rozumové i matematické schopnosti jsou v pásmu průměru.
Podrobněji klasifikuje kalkulastenie dále na kalkulastenie emocionální (nevhodné reakce okolí na problémy v matematice), kalkulastenie sociální (vliv sociálního prostředí, nedostatečná příprava do školy) a kalkulastenie didaktogenní (nevhodné výukové styly právě pro toto dítě).

Hypokalkulie - je porucha základních početních dovedností, jejíž příčinou může být nerovnoměrná skladba matematických schopností, při celkové úrovni rozumových schopností v pásmu průměru i nadprůměru.

Oligokalkulie - vyznačuje se narušenou strukturou matematických schopností a nízkou úrovní všeobecných rozumových schopností.

Vývojová dyskalkulie v podstatě používá klasifikaci dyskalkulie podle L. Košče.

Akalkulie - je porucha zvládání početních operací a početních dovedností, která mohla vzniknout např. na základě prožitého traumatu, přitom dříve byly dovednosti rozvinuty přiměřeně.

Klasifikace podle matematického obsahu (R.Blažková)

Klasifikace je zaměřena na oblasti učiva, ve kterých se projevují problémy dětí vzhledem k matematickému učivu. Pochopení a zvládnutí jedné oblasti je nezbytným předpokladem k pochopení a zvládnutí oblasti další. Jde zejména o tyto oblasti:

Vytváření pojmu čísla – nejprve přirozeného čísla, později čísla desetinného, zlomku, racionálního čísla, obecně reálného čísla. Pokud má dítě problém s pochopením pojmu přirozeného čísla a nedospěje k potřebné abstrakci (nepochopí např. číslo 5 bez konkrétních předmětů), nemá šanci pokračovat v dalších matematických tématech.

Čtení a zápis čísel, numerace, uspřádání, porovnávání čísel, zaokrouhlování čísel přirozených a desetinných. Problémy v oblasti numerace nevytvoří potřebnou představu o množině všech přirozených čísel a jejím uspořádání.

Operace s čísly, nejprve s čísly přirozenými, později s čísly v dalších číselných oborech. Problémy s operacemi (sčítáním, odčítáním, násobením, dělením) v jednotlivých číselných oborech jsou nejrozsáhlejší oblastí a zahrnují potíže s pochopením každé jednotlivé operace, zvládnutím pamětného počítání a počítání písemného.

Slovní úlohy, přepis slovního vyjádření do matematického symbolického jazyka, řešení matematické úlohy a její interpretace do reality. Řešení slovních úloh patří k nejproblematičtějším a nejobávanějším tématům školské matematiky a vyžaduje promyšlenou metodiku výuky.

Geometrická a prostorová představivost, chápání rozmístění a vztahů předmětů v prostoru a jejich znázornění v rovině. Pokud nemá dítě vytvořeny správné představy o tvaru, poloze a velikosti geometrických útvarů, obtížně zvládá geometrické úlohy.

Početní geometrie, uvědomění si velikosti útvarů, odhady, výpočty. Užívání vztahů pro výpočty obvodů a obsahů rovinných útvarů, povrchů a objemů těles vyžaduje pochopení těchto vztahů a správné přiřazení k dané úloze. Ve výpočtech se objeví problémy, které má dítě v souvislosti s operacemi v oboru přirozených a racionálních čísel.

Jednotky měr, pochopení každé z jednotek, převody jednotek. Práce s jednotkami měr patří k nejproblematičtějším částem učiva matematiky na všech stupních škol.

K tomuto třídění jsme dospěli po dlouholeté práci s dětmi. Ukázalo, že pokud dítě nepochopí podstatu matematického pojmu, neví a jak má postupovat a proč má tak postupovat, dále, kdy jsou výsledky operací vyvozovány pouze pamětně, bez opory o pochopení, bez zážitků, není náprava efektivní. Např. problémy se čtením (dyskalkulie lexická) se projevují jak při čtení matematických číslic, čísel, symbolů a výrazů, tak při pochopení zadávacího textu, textu slovních a aplikačních úloh apod. Analogicky problémy se psaním (dyskalkulie grafická) se projevuje ve všech tématech matematického učiva. Chyby v matematice v řadě případů nemusí mít příčinu v neznalostech v matematice, ale mohou vyplývat z nesprávného čtení či psaní, z nepochopení kontextu apod.

Základní kriteria, podle kterých lze kvalifikovat dyskalkulii

Základní kriteria, podle kterých lze kvalifikovat specifickou vývojovou poruchu v matematice – dyskalkulii, jsou:

- u dítěte existuje značný rozpor mezi zjištěnou inteligencí dítěte a jeho úspěšností v matematice,

- úroveň jeho rozumových schopností není v pásmu podprůměru, problémy dítěte nevznikly na základě nemoci nebo na základě sociálním nebo emocionálním,

- dítě má problémy v matematice, a přitom je obklopeno normálním rodinným zázemím, které poskytuje pozitivní motivaci,

- na základě odborného vyšetření lze identifikovat dysfunkci centrální nervové soustavy, dysfunkci kognitivních center mozku.

Je třeba si uvědomit, že neexistuje úplná matematická negramotnost nebo tzv. matematická slepota, že každé dítě se určitým způsobem k matematickým pojmům dostane. Téměř každý dospělý využívá těch matematických poznatků, které jsou nezbytné v jeho profesi i v běžném životě.

DALŠÍ PŘÍČINY PORUCH UČENÍ V MATEMATICE

Kromě specifických poruch učení má na úspěšnost dítěte v matematice vliv řada dalších faktorů. Poruchy učení v matematice mohou být působeny jednak obsahem samotné matematiky, avšak můžeme je najít i v osobnosti žáka, v osobnosti učitele nebo i v rodičích.

Obsah učiva matematiky

Matematika je disciplína, která pracuje s abstraktními pojmy a jejich správné vytváření je náročné na psychiku žáka. Má přesnou logickou výstavbu a je budována deduktivně. Proces zobecňování a abstrakce vyžaduje schopnost postupně přecházet od konkrétních představ k obecnějším, a to je pro děti velmi složité. I když se ve školské matematice využívají vesměs induktivní přístupy, určité zobecnění a abstrakce jsou nutné (například již při vytváření pojmu přirozeného čísla). Navíc školská matematika je předmětem, kdy každý prvek nižší úrovně je nezbytným předpokladem zvládnutí prvků vyšší úrovně, tedy děti si musí to, co se již dříve naučily, neustále pamatovat. Například zvládnutí pamětného počítání je nezbytné při počítání písemném, tedy při výuce algoritmů početních operací. Přitom děti neustále využívají paměti dlouhodobé, krátkodobé i pracovní. Podrobně o jednotlivých příčinách problémů bude pojednáno v dalším textu. Zde můžeme uvést pouze zásadní stanovisko:

a) nejprve je nutné pochopení každého z matematických pojmů,
b) podle schopností dítěte je třeba stanovit míru vědomostí a dovedností, které je schopno vzhledem ke své poruše učení zvládnout,
c) neustále je třeba posilovat paměť.

Osobnost žáka

Děti se nerozvíjejí stejně rychle. Některé myšlenkové operace může mít dítě vyvinuty poněkud později, avšak přitom není snížena úroveň jeho rozumových schopností a ani nemusí trpět specifickou poruchou učení. Příčiny neúspěchů dítěte v matematice mohou být způsobeny určitou nedozrálostí vzhledem k danému učivu. Častokrát se stává, že dítě v daném okamžiku učivo nechápe, ale po určitém časovém úseku (např. za půl roku) chápe toto učivo již bez problémů.

Další příčiny problémů dítěte v matematice souvisejí s jeho volními vlastnostmi. Matematika vyžaduje každodenní systematickou práci (v malých kvantech). Pokud dítě není schopno k této práci se samo přimět a pokud v jeho okolí není nikdo, kdo by mu pomohl, nemá šanci na úspěch v matematice. Většinou se objeví problém v některém úseku učiva a dítě již není schopno samo navázat a zvládat učivo následující. S malou úspěšností dítěte v matematice souvisí také jeho nepozornost, nezájem, ale také malé sebevědomí, úzkost, ztráta naděje na úspěch, role outsidera mezi dětmi, aj.

Velmi důležité je sledovat tzv. psychické bariéry, kterými jsou např. syndrom bílého papíru – obavy z písemných prací, pětiminutovek, dále obavy ze sloupců příkladů, slovních úloh, některého tématu aj. Tyto psychické problémy jsou velmi závažné a je třeba je vnímat jako varovné signály v práci učitele a v komunikaci s dítětem. Podezírat dítě, že něco tzv. předstírá, může být velmi nebezpečné.

Osobnost učitele

Nejčastější příčiny poruch učení dětí v matematice, související s osobností učitele, jsou způsobeny nedostatečnou odbornou znalostí učitele, jak v oblasti matematiky, tak v oblasti pedagogické, psychologické a speciálně pedagogické. Dále jsou příčiny poruch ve stylu výuky, který může být pro většinu žáků dobrý, ale není vhodný právě pro toto dítě, volbě metod práce, dále pak v oblasti komunikace s dětmi, v neostatečné trpělivosti učitele, formálním přístupu k práci s těmito dětmi. Příčiny mohou být také v nedostatečné motivaci dětí k učení i nedostatečné motivaci matematického učiva, v nezvládnutí problematiky hodnocení a klasifikace apod. Pro dítě je velmi málo motivující učitelovo očekávání sníženého výkonu dítěte s poruchou učení bez naděje na zlepšení, nebo nedostatek empatie učitele k dětem s dyskalkulií.

Vliv rodičů

Reakce rodičů na poruchy učení v matematice je různá a můžeme uvést několik skupin rodičů podle jejich vztahu k dítěti a jeho problémům. Do první skupiny rodičů můžeme zařadit rodiče, kteří mají pro dítě plně pochopení, spolupracují s pedagogicko psychologickou poradnou i učitelem matematiky a snaží se dítěti pomoci vzhledem k jeho handicapu. Pomáhají mu překonávat problémy v matematice a neočekávají nereálné výsledky. Druhá skupiny rodičů jsou rodiče ambiciózní, nepřiměřeně ctižádostiví, kteří nejsou schopni smířit se s tím, že mají dítě s problémy v matematice. Tito rodiče buď dítě odmítají, nebo zaujímají trpitelské stanovisko (proč právě my máme takové dítě), nebo dítě přetěžují neustálým doučováním a nepřiměřenými nároky. Někteří rodiče děti trestají, třeba ani ne fyzicky, ale psychicky. Další skupinou rodičů jsou rodiče, kteří se snaží za každou cenu dítěti pomáhat tak, že vymýšlejí nejrůznější postupy a didaktická zjednodušení, která se však v budoucnu v dalším učivu projeví jako chybná a způsobí dětem další problémy. Další skupina rodičů se sice o dítě zajímá, ale rezignuje a nechá dítě bez odborné pomoci (nedá se nic dělat, my jsme na matematiku také „nebyli“). Existuje také skupina rodičů, kteří nespolupracují ani s poradnou, ani s učitelem a o dítě se nestarají. Práce s rodiči je někdy náročnější než práce s dětmi. Je obtížné přesvědčit rodiče, že jimi poskytovaná pomoc a doučování jsou naprosto neúčinné a vedou jen ke zvyšování odporu dítěte k matematice.

Osobnosti se specifickými poruchami učení

Dyskalkulie se může objevovat u dítěte, které má průměrnou až nadprůměrnou inteligenci a často nemusí ovlivnit ani jeho vysokoškolské studium dokonce technického nebo přírodovědného zaměření. Postavení člověka ve společnosti může být ovlivněno jeho vývojem v dětství a vztahem k matematice. Buď při rozhodování o volbě povolání vyhledává takové, kde se s matematikou příliš nesetká – např. obory umělecké nebo humanitní, nebo naopak jej jeho vývojová porucha nemusí ovlivnit v oborech přírodovědných. Mnoho význačných osobností mělo v dětství problémy v matematice, a přesto dosáhli vynikajících úspěchů, někteří právě v matematice a fyzice.

Např. o fyzikovi George Gamovovi v publikaci My World Line se lze dočíst, že známá astronomka Věra Rubinová, jeho studentka, o něm prohlásila:

„Neuměl psát ani počítat. Chvíli by mu trvalo, než by vám řekl, kolik je 7 krát 8. Ale jeho rozum byl schopen chápat vesmír.“ (Gamov 2000, str. 153).

Matematik N. N. Luzin patřil k lidem s pomalou reakcí. Také se pomalu vyvíjel, ve škole neprospíval, dokonce právě v matematice.

David Hilbert, jeden z největších matematiků 20. století dělal dojem tupého, pomalu uvažujícího člověka, který těžko chápe, co mu kdo vykládá. (Blažková a kol., 1995).

Albert Einstein, největší fyzik 20. století, ve škole propadal, měl velké potíže se čtením.

Thomas Alva Edison pařil k horší části třídy, nikdy nezvládl dovednosti jako je psaní, pravopis a také aritmetika.

Také o mnoha spisovatelích se uvádí jejich školní neúspěšnost např. v českém jazyce – jedním z příkladů může být vynikající spisovatel Bohumil Hrabal.

Mohli bychom uvést mnoho příkladů, kdy zdánlivě „tupý“ a ve škole neprospívající žák se v budoucnu projevil jako génius**.**

Je tedy nezbytné přistupovat k dětem s poruchami učení citlivě, snažit se pochopit jejich problémy a hledat cesty, jak jim učení usnadnit. Člověk s poruchou učení se v dospělosti s problémy nějakým způsobem vyrovná, avšak vždy, když řeší situaci, ve které jsou dominantní oblasti, které mu činí potíže, vždy si je uvědomí a musí vynaložit velké úsilí na to, aby je zvládl. Většina dospělých lidí své problémy tají z obavy ze společenské degradace. Pomocí kompenzačních pomůcek (kalkulátor, počítač) lze řadu problémů eliminovat, zejména z oblasti numerických výpočtů a zápisů matematických úloh. Avšak problémy se z oblasti operací s přirozenými čísly přesunou do dalších matematických témat, např. počítání s mocninami a s algebraickými výrazy, řešení rovnic, řešení slovních úloh, kde se znovu projeví dyskalkulické potíže na vyšší úrovni matematického učiva.

PROBLÉMY ŽÁKŮ V KONKRÉTNÍM UČIVU A MOŽNOSTI NÁPRAVY

Přirozená čísla, pochopení pojmu

Pokud se u dětí nevytvoří pojem přirozeného čísla na určitém stupni abstrakce, setkáváme se s těmito problémy:

- Dítě neumí vytvořit skupinu o určitém počtu prvků.
- Dítě neumí určit počet prvků dané skupiny.
- Při počítání prvků po jedné neumí vyjmenovat řadu čísel v řádném uspořádání, čísla vynechává, zaměňuje, opakuje.
- Změna konfigurace prvků vede k chybnému počítání.
- Nedokáže určit počet prvků počítáním po jedné.
- Nepochopí podstatu desítkové soustavy.
- Nechápe význam čísla 0.

Nápravná opatření

Zaměřujeme se zejména na nematematické činnosti, které souvisejí s různými hrami, např. Člověče nezlob se, domino, hry s krabičkami, kartičkami, pohádky, básničky a písničky, ve kterých se vyskytují číselné údaje apod.

Cílem je dosáhnout určitého stupně abstrakce při budování pojmu přirozeného čísla. Např. při vytváření čísla 5 postupujeme takto:

a) Nejprve dětem předkládáme různé skupiny předmětů, ve kterých je 5 prvků, např. panenky, auta, kuličky, jablka, banány, děti, kamínky aj.
b) K určité skupině prvků přiřadíme symboly, např. k pěti panenkám 5 tyčinek, nebo nakreslíme 5 puntíků. Cílem je, aby dítě pochopilo, že k jakýmkoliv předmětům přiřadíme stejný symbol (1. stupeň abstrakce).
c) K předmětům a symbolům přiřadíme číslo 5 (2. stupeň abstrakce – nezáleží na viditelných vlastnostech předmětů, ale jen na jejich počtu).

ČTENÍ A ZÁPIS ČÍSEL

Problémy dětí při čtení a zápisu čísel souvisejí jednak s rozlišováním a zápisem číslic – znaků a zápisem čísel jednociferných i víceciferných. Vliv může mít i dyslexie nebo dysgrafie, významnou roli zde hrají problémy s pravolevou orientací. Mezi časté problémy patří:

- Zápis číslic v přiměřené velikosti, dodržení lineatury.
- Rozlišování číslic tvarově podobných, např. 6 - 9, 3 – 8, 2 – 5, také rozlišování číslic zapsaných digitálně.
- Problémy se zápisem číslic jednostranně orientovaných, např. číslic 1, 3, 7 apod., kdy neví, na kterou stranu má číslici zapsat.
- Nepochopení zápisu čísla v desítkové soustavě a nerozlišování řádu číslice u dvojciferných čísel, např. nerozlišuje čísla 25, 52.
- Problémy při zápisu čísel s nulami, např. číslo 205 zapisuje tak, jak slyší – dvě stě pět 2005, nebo nulu vynechá – zapíše 25.
- Neschopnost psát čísla podle diktátu.
- Nezvládnutí čtení víceciferných čísel, čtení po jednotlivých číslicích.
- Špatná orientace v číslech vyšších řádů.

Nápravná opatření

- Pochopení správného tvaru číslice – modelování z drátu, zapojení hmatu a vizuální představy.
- Pro pochopení dvojciferných čísel jsou vhodné svazky tyčinek nebo brček na pití po desítkách a jednotkách, pomocí nich modelování čísel např. 24, 42.
- K modelování víceciferných čísel používat kartičky se všemi řády, např. k modelování čísla 4 586 klademe na sebe postupně kartičky 4 000, 500, 80, 6.
- Ke správnému zvládnutí posloupnosti přirozených čísel a přechodů mezi jednotlivými řády používáme kartičky k doplňování čísel:

78	__	__	81

396	__	__	__	400	__

742	___	___	___	738

- Využíváme různých druhů počitadel – desítkové, dvacítkové, stovkové, řádové počitadlo, stovková tabulka, aj.
- Učíme děti vyjmenovat řadu čísel vzestupně a sestupně (od daného čísla).

POROVNÁVÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Pro pochopení vztahů, které souvisejí s porovnáváním přirozených čísel je potřené, aby děti nejprve pochopily vztahy více, méně, stejně na skupinách předmětů (bez čísel) a aby měly představu o uspořádání prvků ve skupině. Teprve potom se ke skupinám předmětů zapíší čísla a porovnají se. Děti mohou mít problémy:

- s rozlišením porovnávání velikosti předmětů a jejich počtu.
- s rozlišením skupin, ve kterých je stejně prvků.
- s používáním znaků pro porovnávání >, <, =.
- s porovnáváním čísel na číselné ose.
- s porovnáváním víceciferných čísel.

Nápravná opatření

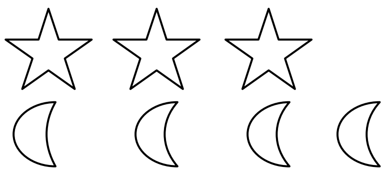
Nejprve procvičujeme vztahy „více, méně, stejně“ na konkrétních předmětech nebo obrázcích bez čísel (děti pouze přiřazují předměty nebo obrázky, vytvářejí dvojice a vyslovují závěr, čeho je více, méně, stejně), např.:

a)

Hvězdiček je více než měsíců. Hvězdiček je 5, měsíců 4, 5 je více než 4.

$$5 > 4$$

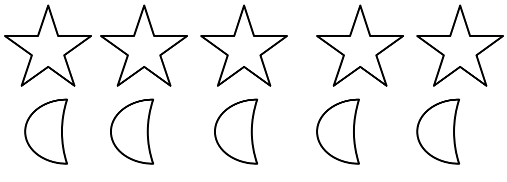
b)



Hvězdiček je méně než měsíců. Hvězdičky jsou 3, měsíců 4, 3 je méně než 4,

$$3 < 4$$

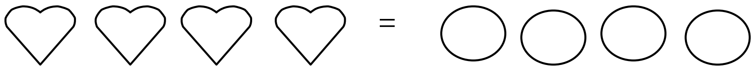
c)



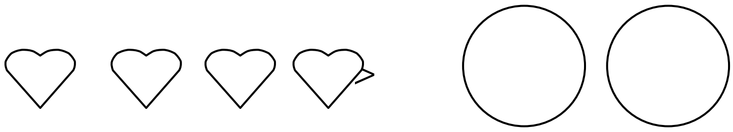
Hvězdiček je stejně jako měsíců. Hvězdiček je 5, měsíců je 5,

$$5 = 5$$

Vyvarujeme se chybného grafického znázornění rovností a nerovností, jako je např.:



kdy se srdíčka nerovnají kruhům (ale rovná se pouze jejich počet), nebo



kdy děti mají problém s porovnáváním velikosti předmětů a jejich počtu.

- Děti dokreslují obrázky, aby jich bylo více, méně, stejně, např. k obrázku dětí dokreslují balónky, aby jich bylo stejně, k obrázku zajíců dokreslují mrkve, aby mrkví bylo více apod.
- K dané nerovnosti, např. $6 < 8$ dokreslují obrázek.
- Při porovnávání čísel na číselné ose porovnávají čísla podle jejich vzájemné polohy, nikoliv podle vzdálenosti obrazu čísla od počátku číselné osy – od nuly (toto neplatí v záporné části číselné osy). Ze dvou čísel znázorněných na číselné ose je větší to, které má obraz více vpravo.
- U víceciferných čísel porovnávají čísla podle zápisu v desítkové soustavě, např.
    - $1075 > 986$, protože v prvním čísle jsou tisíce, ve druhém jen stovky.
    - $42\,189 < 42\,564$, protože čísla mají stejně desetitisíců a tisíců, ale liší se počtem stovek $1 < 5$.
    - $12\,345 = 12345$
- V případě chybných zápisů nerovností požádáme dítě, aby nerovnost znázornilo nebo nakreslilo obrázek.

OPERACE V OBORU PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Sčítání přirozených čísel

- **Pamětné sčítání**

Početní operace sčítání přirozených čísel je vyvozována na základě sjednocení dvou skupin předmětů (množin), které nemají společné prvky, což v praxi znamená, že předměty seskupujeme, dáváme dohromady, přidáváme apod. Aby děti dobře pochopily sčítání, měly by mít potřebu sčítat, měly by být k provedení operace správně motivovány (jinak mohou určit součet např. počítáním předmětů po jedné).

Postup vyvození operace sčítání by měl respektovat několik zásad:

1. Vycházíme z manipulativní činnosti s konkrétními předměty, např.
   Na misce jsou 3 jablíčka, přidáme ještě 2 jablíčka. Kolik jablíček bude na misce?
2. Situaci znázorníme pomocí obrázků (např. na tabuli nebo na papíře).
3. Znázorníme pomocí symbolů (puntíků, úseček apod.).

   ooo oo

   3 2

4. Zapíšeme příklad: 3 + 2 = (vysvětlíme význam znaménka „+“)
5. Příklad vyřešíme: 3 + 2 = 5
6. Vyslovíme a zapíšeme odpověď: Na misce bylo pět jablíček.
7. Přesvědčíme se o správnosti výpočtu. Zpočátku, když děti neznají vlastnosti operace sčítání ani operaci odčítání, provádíme zkoušku správnosti „krokem zpět“ – např. přesvědčíme se počítáním po jedné, že na misce je skutečně 5 jablíček.

Čísla, která sčítáme, se nazývají sčítanci, výsledek operace se nazývá součet. Při vyvozování sčítání je vhodné, aby oba sčítanci i součet měli stejný název (3 jablíčka a 2 jablíčka je 5 jablíček), teprve později formulujeme úlohu typu: Na hřišti si hráli 4 chlapci a 3 děvčata. Kolik dětí bylo na hřišti? Součet má název nadřazený.

Pozor: Vyvarujeme se nesprávného grafického znázornění typu:

ooo + oo = ooooo

3 + 2 = 5

které sice vypadá jako ilustrativní, avšak vůbec neodpovídá realitě, protože dítě potřebuje 10 předmětů, aby znázornilo součet 3 + 2. Velmi často se stává, že děti k tomuto znázornění zapíší příklad 3 + 2 = 10, protože položí 10 předmětů a spočítá je po jedné. Tento obrázek znázorňuje modely jednotlivých čísel, nikoliv model operace sčítání. Navíc v běžném životě nesčítáme předměty (ty k sobě přidáváme, přiřazujeme), tedy znaménko sčítání nepoužíváme mezi objekty, ale pouze mezi čísly. Také je dobré si představit zcela konkrétní situaci, kdy např. Na parkovišti stála 3 osobní auta a 2 nákladní auta a znázorňovala by se situace, kolik stálo na parkovišti celkem aut. Jak by se znázornila situace na pravé straně rovnosti?

Postup vyvození jednotlivých spojů sčítání je u dětí s poruchami učení rozčleněn do velmi jemných metodických kroků. Vždy by se mělo dbát nejprve na pochopení situace na základě manipulativní činnosti samotným dítětem spojenou s prožitkem a potom teprve na pamětné zvládnutí jednotlivých spojů sčítání. Pouhý mechanický nácvik spojů sčítání je málo efektivní, neboť děti rychle zapomínají mechanicky naučené učivo.

1. **Vyvození sčítání v oboru do pěti.**
   V tomto případě je jen několik základních spojů, které se děti naučí zpravidla zpaměti s oporou o konkrétní znázornění.

2. **Sčítání v oboru do deseti**.
   Zde je třeba brát v úvahu obtížnost jednotlivých spojů, neboť příklad 8 + 2 je pro dítě snadnější než příklad 2 + 8. V tomto období se také naučí přičítat nulu, tedy příklady typu 6 + 0 = 6, 0 + 6 = 6.

3. **Přičítání k číslu 10.**

   Některé děti potřebují zvlášť procvičit příklady typu 10 + 7, 9 + 10.

4. **Sčítání v oboru do dvaceti bez přechodu přes základ deset.**
   Jde o příklady typu 13 + 5.

   Jednou z možností je využití analogie ze sčítání v oboru do deseti:

   3 + 5 = 8, tedy 13 + 5 = 18.

   Další možnost je využití rozkladu: 13 + 5 =

   10 3

   Číslo 13 rozložíme na 10 a 3 a počítáme: 3 + 5 = 8, 10 + 8 = 18.

5. **Sčítání v oboru do dvaceti s přechodem přes základ deset.**
   Jedná se o příklady typu 7 + 8. Zpravidla se využívá rozkladu druhého sčítance tak, abychom prvního sčítance doplnili do deseti:

   7 + 8

   3 5

Počítáme: 7 + 3 = 10, 10 + 5 = 15, tedy 7 + 8 = 15.

Mnoho dětí s poruchou učení tento rozklad považuje za velmi obtížný, nechápou jej, ani nedokážou najít číslo, kterým je třeba prvního sčítance doplnit do deseti. Řada dětí rozkládá oba sčítance vzhledem k číslu 5 a počítají:

7 + 8

5 2 5 3

2 + 3 = 5, 5 + 5 = 10, 5 + 10 = 15, tedy 7 + 8 = 15.

Pokud si dítě vytvoří svůj vlastní postup, a ten je matematicky správný, ponecháme mu jej.

Vzhledem k tomu, že sčítání přirozených čísel je komutativní, tj. sčítance můžeme zaměnit a součet se nezmění, ponecháme dětem na vlastním rozhodnutí, kterému ze spojů dají přednost, zda budou počítat 2 + 8 nebo 8 + 2.

Při sčítání více sčítanců využijeme také asociativnosti sčítání, tj. sdružování sčítanců. Např. součet 4 + 9 + 6 je výhodnější počítat 4 + 6 + 9.

6. Sčítání v oboru do sta

Při vyvozování sčítání v oboru do sta zpaměti využíváme velmi jemného postupu při volbě příkladů tak, aby jeden typ příkladů byl předpokladem pro zvládnutí příkladů vyšší náročnosti. Využíváme přitom mnoho pomůcek pro grafické znázornění. Jde např. o stovkovou tabuli, svazky předmětů po deseti, modely peněz, číselnou osu apod.

- sčítání desítek – příklady typu 40 + 30
- sčítání dvojciferného čísla a čísla jednociferného – příklady typu:
  40 + 3, 42 + 3, 47 + 3, 46 + 7

- sčítání dvojciferných čísel - příklady typu
  40 + 30, 42 + 30, 42 + 34, 48 + 32, 48 + 36.

Pozor: V posledním případě dbáme na to, aby dítě rozkládalo pouze jednoho sčítance, nikoliv oba, protože návyk rozkládat obě čísla způsobí nepředstavitelné problémy při odčítání dvojciferných čísel s přechodem přes základ deset.

Počítáme tedy: 42 + 34 = 42 + 30 = 72, 72 + 4 = 76
30 4

48 + 32 = 48 + 30 = 78, 78 + 2 = 80
30 2

48 + 36 = 40 + 30 = 78, 78 + 6 = 84
30 6 2 4

S dětmi s poruchami učení počítáme takové příklady, které jsou pro ně zvládnutelné. Pokud se přes veškerou snahu dítě nemůže naučit sčítat zpaměti dvojciferná čísla, pak je buď naučíme sčítat písemně (pokud mu to vyhovuje), nebo použijeme kalkulátor jako motivační a reedukační pomůcku. Víceciferná čísla, která by dětem činila problémy, již nesčítáme zpaměti, ale buď písemně, nebo s použitím kalkulátoru.

Poznámka:

Respektujme i jiné rozklady dětí, pokud jim rozumí a počítají správně, např.

46 + 34 46 + 4 = 50 50 + 30 = 80

4 30

28 + 36 28 + 2 = 50 30 + 34 = 64

2 34

S jakými dalšími rozklady se můžeme setkat?

16 + 9 – 6 + 4 = 10 10 + 5 = 15 10 + 15 = 25

10 6 4 5

9 + 7 9 + 4 = 13 13 + 3 = 16

4 3

Některé děti si dokonce představí čísla pomocí rozdílu od čísla 10, např. 7 + 9 si představují 7 + 3 = 10, 9 + 1 = 10 tedy (10 – 3) + (10 – 1) = 20 – 4, avšak zapíší jen:

7 + 9 =

3 1 a počítají 20 – 4 = 16.

Podobně počítají příklad 8 + 5

2 5

8 + 5 = (10 – 2) + (10 – 5) = 20 - 7 = 13

Znovu opakujeme, že pokud si dítě vytvoří vlastní postup, který je správný a dítěti vyhovuje, respektujeme jej.

- **Problémy dětí při pamětném sčítání**

1. Děti nechápou rozdíl mezi zápisem čísla a operací sčítání, čísla zapíší vedle sebe např.:
   1 + 4 = 14, 32 + 4 = 324, 42 + 51 = 4251

2. Děti si v prvním seznámení zafixují nesprávné spoje a ty potom dále používají, např.:
   3 + 4 = 9, 6 + 7 = 14, 8 + 7 = 13, 8 + 7 = 14, 9 + 8 = 18, 6 + 8 = 15,

   26 + 27 = 51

3. Nepochopí poziční číselnou soustavu a sčítají čísla různých řádů, např.:
   7 + 20 = 90, 3 + 13 = 43, 3 + 13 = 34, 300 + 20 = 500

   Podobně počítají např. 44 + 32 = 67, protože 4 + 2 = 6, 4 + 3 = 7

4. Využívají postupu písemného sčítání v řádku (ač s písemným sčítáním ještě neseznámili) a nezvládnou přitom práci s řády, např:
   576 + 4 = 5 710

   počítají 4 + 6 = 10, zapíší 10 a další čísla prvního sčítance opíší, nebo opíší všechny ostatní číslice prvního sčítance: 576 + 4 = 57 610.

5. Používají zvláštní postupy, kdy čísla seskupují vedle sebe bez smyslu, nebo sčítají zvláštním postupem, např.:
   36 + 30 = 363, 24 + 40 = 82 (dominantní je spoj 4 + 4), 532 + 8 = 534,

   23 + 35 = 5 800 - počítá 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8, připíšeme dvě nuly, protože oba sčítanci mají dohromady 4 číslice, součet musí mí také 4 číslice.

6. Používají nesprávných analogií a zdůvodňují je, např. 8 + 6 = 18, protože: Mám 8, do deseti chybí 2, 8 + 2 = 10, 10 + 6 = 16, 16 + 2 = 18.

7. Při přičítání čísel „po jedné“ na prstech se děti dopouštějí chyby, kdy mají součet vždy o jednu menší, např. 6 + 4, protože počítají: šest, sedm, osm, devět, 6 + 4 = 9.

Nápravná opatření

1. Základní spoje sčítání vyvozujeme na základě opory o konkrétní předměty a znázornění, aby dítě vidělo podstatu sčítání. Nespoléháme na pouhé pamětné zvládnutí bez opory o pochopení dané operace.
2. Pokud dítě chybuje, hledáme spolu s ním příčinu chyby a vhodné modely, které pochopí.

3. Pro sčítání s přechodem přes základ deset hledáme modely a pomůcky,kterým dítě rozumí.
4. Respektujeme matematický postup tak, aby neměly děti v budoucnu problémy (např. při sčítání dvojciferných čísel nerozkládáme oba sčítance).
5. Vybíráme vhodné didaktické hry (Blažková 2007, Krejčová 2009).

- **Písemné sčítání**

Písemné sčítání se liší od pamětného sčítání tím, že při písemném sčítání začínáme sčítat od jednotek, zatímco při pamětném sčítání začínáme sčítat od nejvyšších řádů (přitom nezáleží na tom, zda se postup říká zpaměti nebo se zapisuje).

Algoritmus písemného sčítání se vyvozuje na číslech dvojciferných a potom se postupně zobecňuje. V současné době se používá zápis sčítanců pod sebe (v minulosti se využíval při písemném sčítání i zápis sčítanců v řádku). Nejprve se vyvozuje sčítání bez přechodu přes základ deset, potom s přechodem přes základ deset. Je vhodné dodržovat přesný postup algoritmu tak, aby se děti naučily jeden postup, který mohou využívat jak při písemném sčítání, tak při písemném odčítání, tj. začínají sčítat „odspodu“. Vždy provádíme zkoušku správnosti tak, že sčítance zaměníme. Dětem, které mají problém se zápisem čísel poskytneme sešit s většími čtverečky, aby se naučily správně zapisovat čísla jednotlivých řádů pod sebou a jednotlivé řády vyznačíme (D – desítky, J – jednotky jednotlivých sčítanců i součtu). Např.

Sčítání bez přechodu přes základ deset, např.:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \underline{36} \\ 78 \end{array}$$

Elementární kroky: 6 + 2 = 8 8 zapíšeme pod jednotky

3 + 4 = 7 7 zapíšeme pod desítky.

Zkoušku správnosti provedeme záměnou sčítanců (využitím komutativnosti sčítání):

$$\begin{array}{r} 36 \\ \underline{42} \\ 78 \end{array}$$

Sčítání s přechodem přes základ deset:

$$\begin{array}{r} 48 \\ \underline{36} \\ 84 \end{array}$$

Elementární kroky: 6 + 8 = 14, 4 zapíšeme pod jednotky, 1 desítku přičteme k desítkám 1 + 3 = 4, 4 + 4 = 8, 8 zapíšeme pod desítky.

Zkouška: 36
48
84

- **Problémy dětí při písemném sčítání**

1. Děti neumí zapsat sčítance správně pod sebe podle jednotlivých řádů, např.

528	350
<u>45</u>	<u>4279</u>
978	7779

2. Při sčítání s přechodem přes základ deset nepochopí podstatu desítkové soustavy a přechod nerealizují, např.

59	176
<u>36</u>	<u>209</u>
815	3715

3. Děti nepochopí podstatu algoritmu a přičítají částečné součty, např.

396 počítají: 8 + 6 = 14, správně zapíší 4,
<u>528</u> avšak dále počítají 14 + 2 = 16,
3354 16 + 9 = 25, správně zapíší 5 a pokračují

25 + 5 = 30, 30 + 3 = 33.

4. Sčítají všechna čísla v obou sčítancích bez ohledu na řády, např.

59 počítají 7 + 9 + 6 + 5 = 27
<u>67</u>
27

5. Sečtou všechna čísla v obou sčítancích a dále počítají podle algoritmu, např.

59 počítají 7 + 9 + 6 + 5 = 27, 7 zapíší pod jednotky a počítají dále
<u>67</u> 2 + 6 + 5 = 1
137

6. Přičítají druhého sčítance k oběma číslům prvního sčítance, např.

$$\begin{array}{r} 58 \\ \underline{7} \\ 1215 \end{array}$$ počítají 7 + 8 = 15, 7 + 5 = 12, oba částečné součty zapíší

7. U čísel zapsaných v řádcích používají částečně postup písemného sčítání, částečně postup pamětného sčítání, např.
   378 + 2 = 3710   počítají 2 + 8 = 10, 10 zapíší a ostatní čísla opíší.

8. Používají zvláštní postupy, např.
   24 + 35 = 5900   počítají 2 + 3 = 5, 4 + 5 = 9 a připíší dvě nuly, protože oba sčítanci mají dohromady 4 číslice.

Nápravná opatření

1. Vyvozujeme přesně algoritmus písemného sčítání.
2. Neustále opakujeme základní spoje sčítání v oboru do dvaceti.
3. Využíváme čtverečkovaných sešitů, aby pro každý řád mělo dítě jedno políčko.
4. Využíváme barevných zápisů, např. jednotky červeně, desítky modře apod.
5. Vždy vyžadujeme zkoušku správnosti prováděnou dítětem.
6. Pro jednodušší postupy využíváme komutativnosti sčítání, (např. místo 2 + 8 je pro dítě snazší 8 + 2) a asociativnosti sčítání (např. místo (12 + 9) + 8 je snazší (12 + 8) + 9).
7. V případě, že přes veškerou snahu a veškeré úsilí dítěte se výsledek nedostavuje, zvážíme, zda je vhodným kompenzačním prostředkem kalkulátor.

Poznámka: *Písemné sčítání předpokládá zvládnutí sčítání pamětného, které musí přecházet. Vždy provádíme zkoušku správnosti záměnou sčítanců.*

Odčítání přirozených čísel

- **Pamětné odčítání**

Odčítání přirozených čísel je definováno jako operace inverzní ke sčítání, tj. jestliže pro přirozená čísla a, b, c platí $a + b = c$, pak $c - a = b$, $c - b = a$.

(např. 1 + 2 = 3, 3 – 2 = 1, 3 – 1 = 2).

Ve školské matematice je odčítání vyvozováno jako operace dynamická, která souvisí s ubíráním, zmenšováním, oddělováním apod. Děti by měly být dostatečně motivovány, aby pochopily význam operace odčítání i význam znaménka „–„.

Postup vyvození operace odčítání by měl respektovat několik zásad:

1. Vycházíme z manipulativní činnosti s konkrétními předměty, např.
   Na misce je 5 ořechů, 2 ořechy Jirka snědl. Kolik ořechů zbylo na misce?

2. Situaci znázorníme pomocí obrázků (např. na tabuli nebo na papíře).
3. Znázorníme pomocí symbolů (puntíků, úseček apod.).

o ǿ nebo o o o ǿ ǿ

o o

ǿ

Při práci s konkrétními předměty dva z nich oddělíme, na obrázku je škrtneme. Předměty mohou být znázorněny buď v řádku uspořádaně, nebo i volně jako na hromádce. Ponecháme na dítěti, které dva předměty škrtne nebo odstraní.

4. Zapíšeme příklad (s bohatým slovním komentářem – kolik jsme měli ořechů, kolik jsme jich snědli, jak zapíšeme, že ubylo, kolik ořechů zbylo, …, aby dítě za každým napsaným číslem i znakem vidělo jeho význam):
   5 – 2 = 3

Později s děti seznámí s názvy jednotlivých čísel jsou: menšenec, menšitel, rozdíl.

5. Příklad se zapíše, přečte nahlas a provede se zkouška správnosti. Protože v této době ještě děti neznají souvislost mezi sčítáním a odčítáním, je vhodné přesvědčit se o správnosti tzv. krokem zpět – znovu situaci zopakovat.

Pozor: Vyvarujeme se chybného grafického znázornění typu:

ooooo – oo = ooo

5 – 2 = 3

Když dítě položí 5 předmětů, napíše „-„ , přidá další 2 předměty, napíše „=“ a přidá další 3 předměty, dítě musí naskládat 10 předmětů, aby mohlo odečíst 5 – 2. Takovýmto způsobem se v běžném životě neodčítá.

Odčítání v oboru do pěti obsahuje deset spojů, které se děti učí zpaměti, ale až po pochopení (umí znázornit příslušný příklad pomocí předmětů nebo obrázků):
5 – 4, 5 – 3, 5 – 2, 5 – 1,
4 – 3, 4 – 2, 4 – 1,
3 – 2, 3 – 1,
2 – 1.

Dále se děti naučí odčítat čísla v oboru do deseti. Je třeba si uvědomit, že příklady jsou nestejně obtížné, např. 8 – 2 je snadnější než 8 – 6, nebo 10 – 3 je snadnější než 10 – 8. Častěji tedy opakujeme ty spoje odčítání, které jsou pro děti obtížné. Vždy vyžadujeme znázornění pomocí konkrétních předmětů. Není možné opírat se o pouhé pamětné naučení, neboť děti s poruchou učení mívají s pamětí problémy a velice rychle zapomínají.

Děti se také naučí počítat příklady, kdy menšitel je 0, příklady typu 7 – 0 = 7. Děti se učí vždy příslušné odčítání v období, kdy probírají sčítání, avšak zde uvádíme jednotlivé operace zvlášť, aby byla patrna návaznost jednotlivých částí učiva při vyvozování téže operace.

- **Postup pamětného odčítání**

1. Odčítání v oboru do pěti
2. Odčítání v oboru do deseti
3. Odčítání v oboru do dvaceti bez přechodu přes základ deset, úlohy typu 17 – 4 .

Menšence rozložíme na desítku a jednotky

17 – 4
10 7

Počítáme: 7 – 4 = 3, 10 + 3 = 13, tedy 17 – 4 = 13

4. Odčítání s přechodem přes základ deset, úlohy typu 12 – 5.

Menšitele rozložíme tak, abychom od menšence odečetli jednotky:

12 – 5 =
2 3

Počítáme: 12 – 2 = 10, 10 – 3 = 7, tedy 12 – 5 = 7

Při řešení příkladů tohoto typu je třeba respektovat:

- Děti potřebují neustále opakovat rozklady čísel.

- Může se stát, že si dítě vytvoří svůj postup odčítání a ten, pokud je správný a může se použít i v dalších typech příkladů v oboru do sta, atd., dítěti ponecháme. Jde např. o počítání typu (rozloží menšence, avšak odčítají od deseti):

$$\begin{array}{c} 12 - 4 = \\ \swarrow \quad \searrow \\ 10 \qquad 2 \end{array}$$

Počítáme: 10 – 4 = 6, 2 + 6 = 8, tedy 12 – 4 = 8.

- Není nejvhodnější, když děti odčítají „po jedné“ s ukazováním si na prstech, protože často vede k chybě: 12 – 4 dítě počítá takto: dvanáct, jedenáct, deset, devět, tedy 12 – 4 = 9

5. Odčítání v oboru do sta

Ve všech následujících typech příkladů využíváme vždy aplikačních úloh, které ilustrují použití v praxi, grafického znázornění a dále respektujeme jemnou metodickou řadu, kdy s každým novým příkladem zařadíme vždy jen jeden nový jev.

a) Nejprve se odčítají násobky deseti, příklady typu 50 – 20.

Můžeme využít grafického znázornění pomocí čtvercové sítě, kdy děti vyznačují (např. vybarví příslušné desítky a ty, které odčítají, škrtnou. Dále je možné používat svazky brček na pití svázaných po deseti, modelů peněz, předmětů, které jsou baleny po deseti (např. hygienické kapesníčky, obaly od vajíček aj.).

Také je možné využít analogie, kdy děti využívají dříve naučeného učiva:

6 – 2 = 4

6 desítek – 2 desítky = 4 desítky

60 – 20 = 40

b) Odčítání jednociferného čísla od dvojciferného

Vycházíme od nejsnadnějšího typu úloh: 64 – 4,

pak následují postupně úlohy typu: 68 – 3, 60 – 3, 64 – 8.

Děti mohou využívat rozkladů, nebo analogie z odčítání v oboru do 20:

$$\begin{array}{c} 68 - 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 60 \quad 8 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 60 - 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 50 \quad 10 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 64 - 8 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 4 \quad 4 \end{array}$$

Pokud rozklady děti nepotřebují, nevyžadujeme je. Pokud si zvolí vlastní postupy a jsou matematicky správné, ponecháme jim je.

c) Odčítání dvojciferných čísel

Počítají se příklady typu 64 – 20, 65 – 25, 65 – 23, 63 – 28

Pokud počítají děti tyto typy příkladů s rozkladem, je dobrým pravidlem naučit je rozkládat pouze menšitele. Když se naučí rozkládat menšence i menšitele, mohlo by to u odčítání s přechodem před základ deset vést k následujícím chybám: 63 – 28 = 25, neboť počítají: 60 – 20 = 40, 3 – 8 nejde, tak odečítají 8 – 3 = 5, jako by řešily příklad 68 – 23.

Správně počítáme: 65 – 23: 65 – 20 = 45, 45 – 3 = 42

63 – 28: 63 – 20 = 43, 43 – 8 = 35.

Víceciferná čísla odčítáme zpaměti pouze v případě, obsahují-li v zápisu pouze jednu nebo dvě nenulové číslice, např. 30 000 – 20 000, 1 500 – 300 apod. Pokud se dětem nedaří pamětné odčítání, využijeme odčítání písemného.

Poznámka:

Opět respektujeme vlastní přístupy dětí, pokud jim rozumí a jsou správné, např.

31 – 3 = 1 – 3 chybí 2, příklad si nahradí příkladem 30 – 2 = 28

Další možné rozklady používané dětmi:

14 – 8 = 8 – 8 = 0 14 – 8 = 6
6 8

19 – 7 = 17 – 7 = 10 10 – 2 = 8
17 2

19 – 7 14 -7 = 7 7 + 5 = 12
14 5

19 – 7 19 – 4 = 15 15 – 3 = 12
4 3

16 – 9 6 – 6 = 8 10 – 3 = 7
10 6 6 3

16 - 9 9 – 9 = 0 0 + 7 = 7

9 7

16 - 9 10 – 4 = 6 6 – 5 = 1 6 + 1 = 7

10 6 4 5

54 - 26 54 – 4 = 50 50 – 22 = 50- 20 -2 = 28

4 22

V ojedinělých případech se může stát, že dítě dostane správný výsledek po chybném postupu, např. 14 – 9 = 5, když počítá 9 – 4 = 5. Proto postup počítání pečlivě sledujeme.

- **Problémy dětí při pamětném odčítání**

1.Dítě vůbec nepochopí operaci odčítání a buď čísla sčítá, nebo je libovolně zaměňuje, je mu jedno, zda napíše 5 – 3 nebo 3 – 5.

2. Při odčítání po jedné je rozdíl vždy o jednu větší než správný výsledek, např. 16 – 5 počítají a ukazují na prstech, až mají 5 prstů: šestnáct, patnáct, čtrnáct, třináct, dvanáct,

tedy 16 – 5 = 12.

3. Pokud odčítají po jedné a neumí bezpečně vyjmenovat řadu čísel sestupně, některé číslo vynechají, např. 15 – 6 počítají: čtrnáct, dvanáct, jedenáct, deset, devět, osm,

tedy 15 – 6 = 8.

4.Nepochopí postup pamětného odčítání, počítají např. 44 – 5 = 11 jako

5 – 4 = 1, 5 – 4= 1.

Nebo počítají, např. 18 – 13 = 50, protože 1 – 1 = 0, napíší 0 a dále počítají

8 – 3 = 5. Číslo nemůže začínat nulou, proto 50.

5. Počítají s čísly různých řádů, např.

80 – 6 = 20   počítají jako 8 – 6 = 2 a připíší nulu,

64 – 40 = 60 počítají jako 4 – 4 = 0 a 6 opíší,

45 – 3 = 12, počítají jako 4 – 3 = 1, 5 – 3 = 2,

56 – 2 = 36 jako 5 – 2 = 3, 6 opíší,

93 – 3 = 60 jako 9 – 3 = 6, 3 – 3 = 0

300 – 50 = 200.

6. Zaměňují čísla v menšenci a menšiteli, zásadně odčítají od většího čísla menší, i když je v menšiteli.

62 – 28 = 46, protože 6 – 2 = 4, 8 – 2 = 6,

640 – 350 = 310, protože 600 – 300 = 300, 50 – 40 = 10.

7.Může se projevit i porucha pravolevé orientace, kdy příklady typu 74 – 26 počítají: 20 – 70 = 50, 6 – 4 = 2 a místo výsledku 52 zapíší 25.

7. Při odčítání dvojciferných čísel s přechodem neustále rozkládají menšence i menšitele a odčítají vždy od většího čísla menší:

82 – 57 počítají   80 – 50 = 30, 2 – 7 nejde, tak 7 – 2 = 5, 82 – 57 = 35.

8. Velké problémy dětem dělají příklady typu   70 – 8, kdy se obtížně orientují v desítkách.

9. Při nepochopení operace odčítání část menšence odčítají, část přičítají, např. 45 – 12 počítají: 45 – 10 = 35, 35 + 2 = 37

10.Nedokážou vidět odčítání v úlohách formulovaných s tzv. antisignálem, kdy odčítání není formulováno přímo, např. úlohu „Na drátě sedělo 8 vlaštovek, několik odletělo a zůstalo jich na drátě 5. Kolik vlaštovek odletělo?“ počítají   8 + 5 = 13.

Nápravná opatření

1. Nejdůležitější je vyvození operace odčítání a znaménka „ – „ na konkrétních situacích.

2. Neustále se opakují základní spoje odčítání v oboru o 20.

3. Hledají se vhodné komunikační cesty, aby dítě chápalo odčítání s přechodem přes základ deset.

4. Aktivně se pracuje s chybou, vhodně ilustruje se jak chybný postup, tak správný postup.

5. Využívá se vhodných motivačních a aplikačních úloh.

- **Písemné odčítání**

Algoritmus písemného odčítání se vyvozuje nejprve pro čísla dvojciferná a potom se zobecňuje na čísla víceciferná. V učebnicích se můžeme setkat s postupy, které využívají tzv. dočítání nebo odčítání „shora“ Vzhledem k pozdějšímu počítání s víceciferným i čísly a čísly, v jejichž zápisu se vyskytují nuly, je vhodné vyvozovat odčítání pomocí „dočítání“.

a) Písemné odčítání bez přechodu přes základ deset.

Odečtěte písemně 68 – 25. Čísla zapíšeme pod sebe (např. do tabulky)

$$\begin{array}{r} 68 \\ \underline{-25} \\ 43 \end{array}$$

Počítáme: 5 plus kolik je 8 ? 5 + **3** = 8, zapíšeme **3** jednotky.

2 plus kolik je 6 ? 2 + **4** = 6 zapíšeme **4** desítky.

Zkoušku správnosti provedeme sečtením rozdílu a menšitele, součtem je číslo zapsané v menšenci zadaného příkladu:

$$\begin{array}{r} 43 \\ \underline{25} \\ 68 \end{array}$$

Poznámka: I když v tomto typu příkladů by děti mohly odčítat 8 – 5 a 6 – 2, není tento postup vhodné uplatňovat, protože při odčítání s přechodem přes základ deset by mohlo docházet k chybám. Stává se, opak děti odčítají vždy od většího čísla číslo menší bez ohledu na to, zda je zapsáno v menšenci nebo menšiteli.

b) Písemné odčítání s přechodem přes základ deset.

Při písemném odčítání s přechodem přes základ deset využíváme skutečnost, že rozdíl se nezmění, jestliže menšence i menšitele zvětšíme o stejné číslo, např. jestliže 8 – 5 = 3, pak

18 – 15 = 3,   13 – 10 = 3,   28 – 25 = 3, atd. Abychom mohli čísla odečíst písemně, zvětšíme menšence i menšitele o deset, ale tak vhodně, že menšenec zvětšíme o 10 jednotek a menšitel zvětšíme o 1 desítku.

Odečtěte písemně   62 – 28. Čísla zapíšeme pod sebe:

$$\begin{array}{r} 62 \\ \underline{-28} \\ 34 \end{array}$$

Počítáme: 8 plus kolik je dvanáct ? (k jednotkám menšence přičteme 10 jednotek 2 + 10 = 12)
8 + **4** = 12   Do rozdílu zapíšeme **4** jednotky.

Dále k desítkám přičteme 1 desítku a počítáme:
2 + 1 = 3,   3 plus kolik je 6 ?   3 + **3** = 6, zapíšeme do rozdílu **3** desítky.

Zde jsme menšence i menšitele zvětšili o 10 - menšence o 10 jednotek a menšitele o jednu desítku.

Zkoušku správnosti provedeme sečtením rozdílu a menšitele:

$$\begin{array}{r} 34 \\ \underline{28} \\ 62 \end{array}$$

c) Písemné odčítání čísel, v jejichž zápisu je nula, např.

$$\begin{array}{r} 86 \\ \underline{-40} \\ 24 \end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ \underline{-46} \\ 24 \end{array}$$

počítáme analogicky jako v předchozích případech: 0 a kolik je 6, 0 + **6** = 6, 5 plus kolik je 8, 5 + **3** = 8.

nebo
6 plus kolik je 10 ?   6 + **4** = 10,   1 + 4 = 5, 5 plus kolik je 7, 5 + **2** = 7.

- **Problémy dětí při písemném odčítání**

1. Při odčítání s přechodem přes základ deset děti neustále odčítají od většího čísla číslo menší, např.

$$\begin{array}{r} 62 \\ \underline{-38} \\ 36 \end{array}$$

Protože 2 – 8 nejde, tak počítají 8 – 2 = 6, 6 – 3 = 3, jakoby počítaly 68 – 32.

2. Děti část příkladu odčítají, část sčítají, např.:

$$\begin{array}{r} 43 \\ -\underline{29} \\ 74 \end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{r} 612 \\ -\underline{348} \\ 964 \end{array}$$

počítají: 9 plus kolik je 13, 9 + 4 = 13, správně zapíší 4, dále pak počítají 2 + 1 = 3, 3 + 4 = 7,

nebo 8 plus 4 je 12, 1 + 4 = 5, 5 + 1 = 6, 3 + 6 = 9.

3. Děti odčítají „shora“ a nedokážou správně provádět přechod. Např. rozdíl 7 036 – 867 počítají (nad jednotlivá čísla menšence zapíší 1):

$$\begin{array}{r} 111 \\ 7\,036 \\ -\underline{\;867} \\ 7\,279 \end{array}$$

počítají: 16 – 7 = 9, 13 – 6 = 7, 10 – 8 = 2, 7 sepíšeme. Vůbec jim nevadí, že rozdíl je větší než menšenec.

4. Uplatňují přechod přes základ deset i tam, kde není, např.

$$\begin{array}{r} 7\,912 \\ -\underline{\;657} \\ 6\,255 \end{array}$$

Nápravná opatření

1. Vyvodíme přesně postup písemného odčítání.

2. Volíme vhodné motivační úlohy z praktického života, na kterých je odčítání patrné.

3. Neustále opakujeme pamětné odčítání.

4. Vždy vedeme děti k posouzení výsledku, zda je reálný a dále je vedeme k provádění zkoušek správnosti.

5. V případě stálých neúspěchů i přes veškeré úsilí volíme kompenzační pomůcku, kalkulátor.

Násobení přirozených čísel

Násobení v oboru násobilek

Zvládnutí operace násobení a základních spojů násobilky je pro děti dobrým východiskem pro zvládání dalšího učiva, kterým je dělení, dělení se zbytkem, písemné násobení a dělení, počítání se zlomky i praktické využití v aplikačních úlohách. Děti by měly nejprve pochopit, co je to násobení a teprve potom se snažit postupně zvládat jednotlivé spoje násobilky. Proto nejprve vyvozujeme násobilku dvou, tří, čtyř, pěti, následně další (šesti, sedmi, osmi, devíti). Až děti pochopí princip násobení, teprve potom učíme násobení číslem jedna, číslem 0 a číslem 10, protože na těchto specifických číslech děti princip násobení nemohou pochopit. Dále zařazujeme slovní úlohy na násobení tak, aby se děti naučily používat násobení v praktických situacích.

Násobení přirozených čísel je vyvozováno na základě sčítání několik sobě rovných sčítanců. Při vyvozování této operace vycházíme z dramatizace a z konkrétních situací, které jsou dětem blízké.

Např. Maminka dá každému ze svých čtyř dětí dva pomeranče. Kolik pomerančů maminka dá dětem celkem?

Děti:	A	B	C	D
Pomeranče:	oo	oo	oo	oo

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$4 \,.\, 2 = 8$$

Názvy jednotlivých čísel jsou: činitel, činitel, součin.

(Poznámka: Pozor! Při vyvozování násobení pomocí sčítání sobě rovných sčítanců jsou reálné situace odpovídající spojům 4 . 2 a 2 . 4 různé! Spoj 2 . 4 se musí znázornit dvěma skupinami po čtyřech prvcích: o o o o   o o o o.)

Při vyvozování násobení používáme konkrétní situace, které děti osloví, např.

- Při vyvozování násobilky čísel 2, 4, 6, 8 využíváme zvířátka, např. kolik nohou 1, 2, 3. 4 … papoušci, pejsci, včely nebo mouchy, pavouci.
- Při pečení buchet nebo vánočního cukroví sledujeme a počítáme, jak jsou na plechu umístěny v řadách jednotlivé druhy.
- Využíváme modelování ve čtvercové síti.
- Ukážeme dětem „prstovou násobilku“ (podrobný popis viz Blažková a kol. 2007).
- Učíme vyjmenovat násobky čísel vzestupně i sestupně.
- Vyznačujeme násobky čísel ve stovkové tabulce.
- Využíváme deskových her, např. loto, domino, pexeso, bingo.

- Hrajeme hru na „obchod“ a nakupujeme zboží, např. 4 jogurty po 8 Kč, 3 žvýkačky po 6 Kč, 5 lízátek po 4 Kč aj. a počítáme, kolik Kč zaplatíme.
- Využíváme obrázky různého zboží, např. ovoce a zeleninu (8 trsů banánů po 6 kusech, broskve v krabici 5 řad po 6 broskvích, 9 sáčků cibule po 10 kusech apod.), počítáme, kolik kusů je celkem.
- Využíváme oporu součinů sobě rovných činitelů, např. 6 . 6, 8 . 8, 4 . 4 aj.

Násobení přirozených čísel má mnoho vlastností:

Násobení přirozených čísel je komutativní. Činitele můžeme zaměnit, součin se nezmění, např.

3 . 4 = 12, 4 . 3 = 12 obecně a . b = b . a

Komutativnost násobení ilustrujeme na jednom objektu, např. máme bonboniéru, v ní jsou bonbóny uspořádány:

Ve třech řadách a čtyřech sloupcích 3 . 4 = 12

O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

Nebo bonboniéru pootočíme a bonbóny jsou uspořádány ve čtyřech řadách a třech sloupcích 4 . 3 = 12

O	O	O
O	O	O
O	O	O
O	O	O

Násobení přirozených čísel je asociativní. Činitele můžeme sdružovat, součin se nezmění, např.

(4 . 2) . 5 = 4 . (2 . 5) obecně a . (b . c) = (a . b) . c

8 . 5 = 4 . 10 = 40

Asociativnosti násobení využíváme pro výhodnější počítání nebo při násobení mimo obor násobilek.

Násobení číslem 1
Násobíme –li přirozené číslo číslem 1, číslo se nezmění, např.

6 . 1 = 6, 1 . 6 = 6 obecně a . 1 = 1 . a = a

Násobení číslem 0
Násobíme-li přirozené číslo číslem 0, součin je roven 0, např.

5 . 0 = 0, 0 . 5 = 0 obecně a . 0 = 0 . a = 0

Násobení mimo obor násobilek zpaměti

1. Příklady typu 4 . 30

Vhodné je využít rozkladu čísla 30 asociativnosti násobení, tj.

4 . 30 = 4 . (3 . 10) = (4 . 3) . 10 = 12 . 10 = 120

Stačí tedy, abychom vynásobili počet desítek a tento součin vynásobili deseti.

2. Příklady typu 5 . 12

Využijeme rozkladu čísla 12 na desítku a jednotky a pěti násobíme desítku a jednotky:

5 . 12 = 5 . (10 + 2) = 5 . 10 + 5 . 2 = 50 + 10 = 60

- **Problémy dětí při pamětném násobení**

- Děti vůbec nechápou význam operace násobení přirozených čísel, vůbec nevědí, co mají s čísly udělat.

- Děti zaměňují operaci násobení a zápis čísla, např.:
  4 . 4 = 44, 6 . 5 = 65
- Chybují při vyvození násobení, dominantní je pro ně jeden činitel, např.
  5 . 7 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5
- Děti stále používají pouze řadu násobků a nejsou schopny naučit se spoje nezávisle na řadě násobků.
-
- Děti některé násobky zaměňují, např.
  7 . 8 = 54, 9 . 6 = 56, 8 . 9 = 80,

  7 . 8 = 64, 7 . 7 = 53, 5 . 7 = 37, 8 . 4 = 34

- Převažuje dominance některého čísla, např.
  2 . 9 = 19, 4 . 4 = 14, 8 . 8 = 68

7. Děti zaměňují operace násobení a sčítání, např.

   50 . 4 = 54

8. Nerozlišují mezi rozvojem čísla v desítkové soustavě a násobením, např.:

   13 . 2 = 1 . 10 + 3 . 2 = 16

   32 . 3 = 30 + 2 . 3 = 36

Nápravná opatření

1. Prvotní je vyvození operace násobení a teprve potom pamětné zvládnutí.

2. Neustále se snažíme o to, aby děti pochopily podstatu násobení, aby věděly, co se s čísly při násobení děje. Největší potíže při násobení činí dětem to, že nevědí, co s činiteli udělat, takže většinou napíší jako součin číslo, které je napadne.

3. Pamětné zvládnutí spojů násobení vždy opíráme o konkrétní představy. Násobilku učíme v malých krocích, ale procvičujeme neustále.

4. Při vyvození vždy začínáme násobilkami čísel 2, 3, 4, atd. Zdánlivě jednoduché případy násobení čísly 1, 0 a 10 nemohou být jako prvotní, protože nedostatečně ilustrují význam násobení.

5. Co nejvíce využíváme praktických příkladů, které děti zajímají.

6. Volíme vhodné didaktické hry (Blažková a kol.2007, Krejčová 2009).

Písemné násobení

Zvládnutí algoritmu písemného násobení vyžaduje jednak znalost pamětného násobení, jednak schopnost přesně postupovat a zapisovat čísla do schématu násobení. Písemné násobení vyžaduje zapojení všech typů paměti dítěte. Uvědomme si, co všechno musí dítě zvládnout, když např. násobí písemně

$$\begin{array}{r} 156 \\ \underline{.\ \ 8} \end{array}$$

Nejprve z dlouhodobé paměti vyvolá spoj 8 . 7 = 56. 6 zapíše, 5 uloží do pracovní paměti. Dále násobí 8 . 5 = 40 – opět využívá dlouhodobou paměť, potom přičte 5, které má uloženo v pracovní paměti, 40 + 5 = 45, zapíše 5 a násobí dále 8 . 1 = 8 , přičte 4, 8 + 4= 12 a zapíše.

To je velký nápor na myšlenkovou činnost dítěte. Zároveň se ale zdokonaluje v koncentraci, protože při provádění tohoto algoritmu se musí plně soustředit na prováděné operace a postupy při zápisu čísel a nemůže myslet na nic jiného. Je však třeba počítat s tím, že pokud má dítě problémy s násobilkou, tak buď se plně soustředí na správnost násobení a chybuje v zápisu v algoritmu, nebo algoritmus zapisuje správně, ale chybuje v násobilce. Některé děti nejsou schopny soustředit se současně na obojí.

Nejprve se vyvozuje písemné násobení jednociferným činitelem, a to ve velmi jemné metodické řadě, kdy v každém novém příkladu je vždy jen jeden nový jev. Pokud by bylo možné, ukážeme dětem, jak by se postupovalo při pamětném počítání a jak se výpočet zjednoduší písemným algoritmem.

Př. vynásobte 123 . 3

Při pamětném postupu bychom násobili od stovek:

$$123 . 3 = (100 + 20 + 3) . 3 = 300 + 60 + 9 = 369$$

Při písemném násobení postupujeme od jednotek:

$$\begin{array}{rll} 123 & \text{elementární kroky:} & 3 . 3 = 9 \\ \underline{.\ \ 3} & & 3 . 2 = 6 \\ 369 & & 3 . 1 = 3 \end{array}$$

První příklady jsou voleny tak, aby násobení bylo bez přechodu přes základ a aby děti zvládly postup při zápisu jednotlivých součinů.

Další příklady volíme tak,

a) aby byl nejprve přechod mezi jednotkami a desítkami 125
. 3

b) aby byl přechod mezi desítkami a stovkami 162
. 3

c) aby byly přechody mezi všemi řády 265
. 7

Násobení dvojciferným činitelem se vyvozuje ve dvou fázích, nejprve se násobí násobky čísla 10, např. 123 a potom dvojciferným činitelem, např.
123 123
. 30 . 32

Respektuje se analogický postup, jako při násobení jednociferným činitelem.

Příklady typu 123
. 30

je vhodné ilustrovat takto: 30 = 3 . 10, nejprve tedy vynásobíme deseti (napíšeme nulu) a potom třemi: 123
. 30
3690

Příklady typu 123
. 32

řešíme s využitím obou dříve naučených postupů.

123
. 32
násobíme číslem 2 246
násobíme číslem 30 3690 (nulu později nepíšeme, částečný součin
3936 posuneme jedno místo doleva).

V posledních letech se v některých učebnicích uvádí postup písemného násobení indickým způsobem (viz např. učebnice nakladatelství Fraus).

- **Problémy dětí při písemném násobení**

1. Děti přenášejí postup z písemného sčítání, násobí mezi sebou jednotky a desítky, např.:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \underline{.23} \\ 86 \end{array}$$

násobí: 3 . 2 = 6,   2 . 4 = 8.

2. Zapisují součin do jednoho řádku, např.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \underline{.21} \\ 8442 \end{array}$$

násobí 1 . 2 = 2, 1 . 4 = 4, 2 . 2 = 4, 2 . 4 = 8 nebo   1 . 42 = 42,   2 . 42 = 84

3. Násobí pouze jedním číslem druhého činitele, násobení nedokončí, např.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \underline{.\ 23} \\ 126 \end{array}$$

násobí 3 . 2 = 6,   3 . 4 = 12.

4. Nezvládají přechody přes základ:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \underline{.\ \ 8} \\ 3240 \end{array}$$

počítají   8 . 5 = 40, 8 . 4 = 32

5. Mají problémy s čísly s nulami:

$$\begin{array}{r} 304 \\ \underline{.\quad 2} \\ 68 \end{array} \quad \text{násobí jako} \quad \begin{array}{r} 34 \\ \underline{.\ \ 2} \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 564 \\ \underline{.\ 205} \\ \end{array} \quad \text{násobí jako} \quad \begin{array}{r} 564 \\ \underline{.\ 25} \\ \end{array}$$

6.Nezapisují správně částečné součiny:

```
 257
.  35
1285
  771
2056
```

7. Přičítají v přechodech vždy druhého činitele, např.:

```
 75
.  5
405
```

počítají   5 . 5 = 25,   5 . 7 = 35, 35 + 5 = 40

8. Vynásobí vzájemně jednotlivá čísla a součiny sčítají, např.

```
 608
.  65
  40        5 . 8
  30        5 . 6
  48        6 . 8
  36        6 . 6
 154
```

9.Zaměňují algoritmy sčítání a násobení tak, že čísla sčítají, ale postupují podle algoritmu násobení, např.:

```
  48
. 39
8247
```

počítají: 9 + 8 = 17, 7 zapíší pod jednotky, 1 desítku přičtou k dalšímu
1 + 9 + 4 = 14,   4 zapíší pod desítky
1 + 3 + 8 = 12,   2 zapíší pod stovky
1   + 3 + 4 = 8.

10.

Nápravná opatření

1. Znovu se přesvědčujeme o tom, zda děti chápou význam operace násobení, na praktických příkladech, např.: Koupím si 5 jogurtů, cena jednoho jogurtu je 12 Kč. Kolik Kč zaplatím?

2. Neustále (každodenně) opakujeme základní spoje násobení.

3. Nápravná opatření pro písemné násobení spočívají ve vypracování vhodných, velmi jemných metodických řad příkladů, zpočátku s menšími čísly.

4. Pokud mají děti problémy s násobilkou, mohou používat tabulky násobků a vyhledávat v nich potřebné spoje. Je však třeba si uvědomit, že používáním tabulky násobků se děti násobilce nenaučí – naučí se pouze hledat v tabulce.

5. Je vhodné, aby děti prováděly zkoušky správnosti používáním kalkulátorů, pokud umí čísla správně zadat.

6. Znovu vysvětlíme princip algoritmu písemného násobení.

7. V případě neustálých neúspěchů i přes veškeré úsilí volíme kompenzační pomůcku kalkulátor.

Dělení přirozených čísel

Pamětné dělení

Dělení přirozených čísel je definováno jako inverzní operace k operaci násobení. Jestliže pro přirozená čísla a, b, c platí $a \, . \, b = c$ pak pro $a \neq 0, b \neq 0$ platí $c : a = b$, $c \, . \, b = a$.

Dělení je nejnáročnější operací, proto je vyvozujeme pomocí konkrétního rozdělování předmětů. S tím mají děti zkušenosti již z předškolního věku z běžného života. Konkrétní předměty můžeme rozdělovat mezi několik dětí tak, aby všechny měly stejně (dělení na stejné části). Nebo můžeme rozdělit předměty na skupiny tak, aby v každé skupině byl určitý daný počet předmětů. (dělení podle obsahu). Při vyvozování dělení vycházíme proto z konkrétní situace, kdy děti rozdělují konkrétní předměty, přitom je mohou rozdělovat na části např. mezi několik dětí, nebo podle obsahu, tj. po několika předmětech. Formulujeme proto dvě úlohy.

1. Dělení na části

Rozdělte 20 kuliček mezi pět dětí tak, aby měly všechny stejně a všechny kuličky jste rozdělili. Kolik kuliček bude mít každé dítě?

a) dramatizace – konkrétní provedení
b) grafické znázornění situace – postupně přikreslujeme každému z dětí po jedné kuličce.

děti	A	B	C	D	E
	o	o	o	o	o
	o	o	o	o	o
	o	o	o	o	o
	o	o	o	o	o

c) zápis příkladu: 20 : 5 = 4

Každé dítě bude mít 4 kuličky.

Zkouška: (např. sečtením kuliček každého z dětí) 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20.

Názvy čísel jsou: dělenec, dělitel, podíl.

V tomto příkladu je dělenec 20, dělitel 5, podíl 4 a podíl vyjadřuje počet prvků každé z částí.

2. Dělení podle obsahu

Rozdělte 20 kuliček na hromádky po pěti. Kolik hromádek vytvoříte?

a) dramatizace – zde děti pracují samostatně – každý má 20 kuliček a vytváří hromádky po pěti kuličkách.
b) grafické znázornění

   o o o o o   o o o o o   o o o o o   o o o o o

c) zápis příkladu : 20 : 5 = 4

Vytvoříme čtyři hromádky.

Zkouška. 5 + 5 + 5 + 5 = 20

I v tomto příkladu je dělenec 20, dělitel 5, podíl 4, podíl však vyjadřuje počet vytvořených částí.

Je třeba si uvědomit, že jeden příklad vyjadřuje dvě zcela jiné situace a obě je třeba děten prezentovat zejména proto, aby v budoucnu uměly řešit slovní úlohy, které povedou na operaci dělení.

Specielní případy dělení:

a) dělení číslem 1 5 : 1 = 5
   vyvodíme na příkladu: Pět bonbónů rozděl po jednom, kolik dětí podělíš?

b) dělenec je roven děliteli 5 : 5 = 1

vyvodíme na příkladu: Pět bonbónů rozděl mezi 5 dětí, kolik bonbónů bude mít každé dítě?

c) dělení nuly $0 : 5 = 0$

vyvodíme na příkladu: Nula kuliček rozděl mezi 5 dětí, kolik kuliček bude mít každé dítě?

d) dělení nulou $5 : 0 = ?$

Děti se seznamují s větou „Nulou nedělíme“, avšak často bez jakéhokoliv zdůvodnění a proto v příkladech chybují a píší buď $5 : 0 = 0$ nebo $5 : 0 = 5$. Je nutné pomocí zkoušky dětem ukázat, že $0 . 0 = 0$, nikoliv 5 a také $5 . 0 = 0$, nikoliv 5. Dále můžeme zkoušet a hledat jiná čísla, která by vyhovovala zkoušce správnosti. Taková čísla však nenajdeme. Obecně platí, že součin libovolného čísla a nuly je nula, nikoliv číslo různé od nuly. Tedy neexistuje přirozené číslo, pro které bychom mohli po vydělení nulou provést zkoušku správnosti.

(Poznámka. Obecně jestliže by platilo pro $a \neq 0$ $a : 0 = x$, *pak by muselo platit* $x . 0 = a$. *To však neplatí, protože* $x . 0 = 0$ *pro každé přirozené x.)*

Postupně děti zvládají základní spoje dělení zpaměti a pokud chybují, měly by mít možnost vždy situaci znázornit konkrétními předměty.

Dále se děti seznámí se souvislostí operace násobení a operace dělení v oboru přirozených čísel, např. jestliže $5 . 7 = 35$, pak $35 : 7 = 5$ a $35 : 5 = 7$.

- **Problémy dětí při dělení v oboru násobilek**

1. Děti nepochopí význam operace dělení, zejména pokud nemají dostatek konkrétních činností a nácvik se opírá pouze o pamětné zvládnutí spojů dělení.
2. Děti zaměňují některé příklady dělení (základní spoje), např. $54 : 9 = 7$, $56 : 8 = 9$, apod. Jedná se zejména o čísla 42, 48, 54, 56, 63, 64 aj.
3. Chyby z nepozornosti, např. $40 : 5 = 10$
4. Ve slovních úlohách nepochopí, kdy se užívá operace dělení.
5. Zaměňují dělence a dělitele, např. $2 : 8 = 4$

Nápravná opatření

1. Nejprve vyvozujeme dělení na konkrétních příkladech, rozdělujeme předměty mezi děti, nebo na hromádky po několika předmětech.
2. Postupně (po malých krocích) učíme základní spoje zpaměti.

3. Vždy provádíme zkoušku správnosti pomocí násobení.

4. Volíme vhodné didaktické hry. (Blažková a kol.2007, Krejčová 2009).

Dělení mimo obor násobilek

- **Dělení se zbytkem**

Dělení se zbytkem uvádíme takto: Jestliže máme dvě přirozená čísla *a*,*b* taková, že *a* není násobkem *b* a *b* je různé od nuly, pak k těmto číslům existují přirozená čísla *q*, *z* tak, že platí $a = b \,.\, q + z$ a z je menší než *b*.

Číslo *a* se nazývá dělenec, *b* dělitel, *q* neúplný podíl, *z* zbytek. Přitom zbytek musí být vždy menší než dělitel.

Dělení se zbytkem se vyvozuje analogicky jako dělení beze zbytku.

Nejprve formulujeme úlohu: 17 sešitů máme rozdělit mezi 5 dětí. Kolik sešitů dostane každé dítě a kolik sešitů zbude.

A B C D E

أ أ أ أ أ أ

أ أ أ أ أ أ

أ أ أ أ أ

17 : 5 = 3 (zb.2)

2

Zkouška. 3 . 5 + 2 = 17 nebo 3 . 5 = 15 15 + 2 = 17

Každé dítě bude mít 3 sešity a 2 sešity zbudou.

Další úloha: 17 sešitů máme rozdělit na hromádky po pěti. Kolik úplných hromádek vytvoříme a kolik sešitů zbude?

أ أ أ أ أ أ أ أ أ أ أ أ أ أ أ أ أ

17 : 5 = 3 (zb 2)

2

Zkouška: 3 . 5 + 2 = 17

Vytvoříme 3 hromádky a 2 sešity zbudou.

Je nutné, aby děti viděly pod každým číslem jeho význam, tj. které číslo je ve významu dělitele, dělence, neúplného podílu i zbytku.

Vhodné je využití násobků čísel a vyznačení nejblíže menšího násobku daného čísla k danému číslu.

Problémy dětí při dělení se zbytkem

1. Nezvládnutí základních spojů násobení a dělení, které jsou zde nezbytné.
2. Pokud je dělenec blízko dalšího násobku dělitele, děti počítají např.

   41 : 7 = 6 (zb 1)

   1

   Zapíší vyšší násobek a do zbytku zapíší číslo, které do vyššího násobku chybí.

3. Děti zapisují přímo násobek, např.: 38 : 7 = 35 (zb.3)

4. Nevědí si rady s případy, kdy je dělenec menší než dělitel, např.

   3 : 5 = děti uvádějí, že nemá řešení

   Přitom 3 : 5 = 0 (zb.3) – toto je nutné zvládnout pro písemné dělení.

5. Provádějí chybný zápis zkoušky správnosti, např.: 3 . 5 = 15 + 2 = 17. Zde je porušena tranzitivita rovnosti (3 . 5 není rovno 17). V průběhu výpočtu není možné nic přičítat nebo odčítat a zapisovat tak chybné rovnosti.

- **Dělení mimo obor násobilek zpaměti**

Jedná se o příklady typu 72 : 4.

Je třeba najít vhodný rozklad čísla 72 na dvě čísla tak, aby byla, pokud možno, obě dělitelná číslem 4. V tomto případě jsou to čísla 40 a 32.

Počítáme: 72 : 4 = (40 + 32) : 4 = 40 : 4 + 32 : 4 = 10 + 8 = 18

Stručný zápis: 72 : 4 = 18

40 32

Zkouška: 18 . 4 = (10 + 8) . 4 = 10 . 4 + 8 . 4 = 40 + 32 = 72

Příklady tohoto typu se počítají zpaměti pouze v jednodušších případech, eventuelně je možné je v rámci individuálního plánu vynechat.

Nápravná opatření

1. Dělení se zbytkem modelujeme na konkrétních situacích, volíme dramatizaci,

Poukazujeme na význam jednotlivých čísel.

2. Aktivně pracujeme s chybou.

Písemné dělení

Písemné dělení se od ostatních algoritmů písemných operací liší jednak tím, že narozdíl od algoritmů pro písemné sčítání, odčítání a násobení, které začínají vždy od jednotek, dělení začíná od nejvyššího řádu a schéma algoritmu dělení musí děti zvládnout jak v horizontálním, tak ve vertikálním směru. Navíc, aby mohly děti úspěšně provádět písemné dělení, je třeba, aby měly zvládnuté všechny pamětné operace – zejména dělení se zbytkem a odčítání. Pro nácvik písemného dělení je vhodné sestavit velmi jemnou metodickou řadu, kdy se v každém dalším příkladu objeví jen jeden nový jev.

- **Dělení jednociferným dělitelem**

1. První série příkladů je volena tak, aby děti dělily dvojciferné číslo číslem jednociferným a aby počet desítek dělence byl násobkem dělitele a aby dělení bylo beze zbytku. Děti se učí postupným krokům algoritmu (co čím dělit, kam co zapsat). U každého příkladu provádíme ihned zkoušku správnosti. Jednak tím opakujeme násobení a jednak učíme děti přesvědčit se o správnosti výpočtu vlastními silami. Např.:

```
  9 : 3
  6 : 3
69 : 3 =  23          Zkouška:   23
09                              .  3
  0                               69
```

2. Ve druhé sérii příkladů volíme takové, kdy je počet desítek dělence větší než je dělitel, ale není jeho násobkem. Je třeba, aby děti zvládly zapsání zbytku při dělení a vytvoření nového částečného dělence, např.:

```
25 : 5
 7 : 5
 75 : 5 =  15         Zkouška:   15
 25                             .  5
  0                               75
```

3.Třetí série obsahuje příklady, kdy na místě nejvyššího řádu dělence je číslo menší než dělitel, např.:

```
  36 : 6
  15 : 6
156 : 6 = 26          Zkouška     26
 36                              .  6
  0                               156
```

4. Dělení je se zbytkem, např.

```
  34 : 4
  23 : 4
   6 : 4
634 : 4 = 158        Zkouška:   158     632
23                              .  4    + 2
 34                             632     634

  2(zbytek)
```

6. Dělení čísel s nulami. V tomto případě je třeba vést děti tak, aby uplatňovaly důsledně naučený postup a nevynechaly některý z kroků nebo některé z čísel.

```
     34 : 5
      3 : 5
     10 : 5

1 034 : 5 = 206      Zkouška:   206       1 030
   03                           .  5       +  4
    34                         1030       1
     4 (zbytek)
```

Dělení dvojciferným dělitelem

Postup dělení dvojciferným dělitele kopíruje metodickou řadu dělení jednociferným dělitelem. Pro děti s poruchami učení je však náročný. Obtížně odhadují částečné podíly, hůře se v algoritmu orientují. Pokud se jim podaří zvládnout jednodušší příklady, je to velký úspěch. V opačném případě volíme jako kompenzační nástroj kalkulátor. Avšak je nezbytné, aby děti počítání na kalkulátoru ovládaly bezpečně a aby měly určitou představu o řádu podílu, tj. uměly určit správně odhad výsledku.

Problémy při písemném dělení

1. Numerické chyby vyplývající z nezvládnutí pamětných operací.
2. Formální provádění zkoušky.
3. Nedodržení přesného postupu algoritmu, např.
   2535 : 5 = 57, 422149 : 7 = 639
4. Nezvládnutí čísel s nulami, např.:
   2 408 : 6 = 41, zb. 2 82 000 : 4 = 205

   3 000 : 10 = 30

Nápravná opatření

1. Pro děti s problémy v matematice volíme pro písemné dělení jednodušší příklady – je přínosnější, když zvládnou jednoduché příklady, než když si neví rady s příklady složitějšími.

2. Vždy provádíme zkoušku správnosti.

3. Neustále opakujeme pamětné počítání.

4. Vhodně zařazujeme používání kalkulátoru.

Používání závorek a pořadí operací

Teoretická východiska

V praxi často řešíme úlohy, ve kterých pracujeme s více čísly (např. při řešení složených slovních úloh) a potřebujeme stanovit postup výpočtu v číselných výrazech. Děti používají ustálených pravidel, které se jednak týkají používání závorek (pokud jsou vyznačeny) a jednak různé parity jednotlivých operací.

Pokud se v číselných výrazech vyskytují závorky, pak výrazy v závorce se provádějí nejdříve, např.

26 – (12 -8) = 26 – 4 = 22

(3 + 5) . 6 = 8 . 6 = 48

Pokud se v číselném výrazu vyskytuje pouze sčítání a odčítání a nejsou vyznačeny závorky, při výpočtu postupujeme zleva doprava, např.

42 + 14 – 16 = 56 – 16 = 40

100 – 25 – 30 = 75 – 30 = 45

Jestliže se v číselném výrazu vyskytují operace sčítání, odčítání, násobení a dělení a nejsou vyznačeny závorky, pak platí, že násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním, např.

3 + 5 . 6 = 3 + 30 = 33

28 – 6 : 3 = 28 – 2 = 26

3 . 9 + 8 . 4 = 27 + 32 = 59

Problémy dětí

1. Děti počítají výraz v závorce jako první, avšak zapomenou na první číslo, např. 60 – (50 – 30) = 20.
2. Vypočítají výraz v závorce jako první, také jej jako první zapíší a pak si neví rady, např. 60 – (50 – 30) = 20 – 60.
3. Děti nerespektují poučku o pořadí operací a vždy postupují zleva doprava, např. 3 + 5 . 6 = 8 . 6 = 48
   48 – 8 : 4 = 40 : 4 = 10.
4. Počítají podle svých postupů, např. 6 . 5 + 4 : 2 počítají
   5 + 4 = 9, 6 . 9 = 54, 54 : 2 = 27.

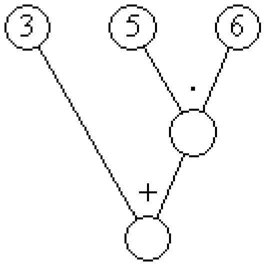
Nápravná opatření

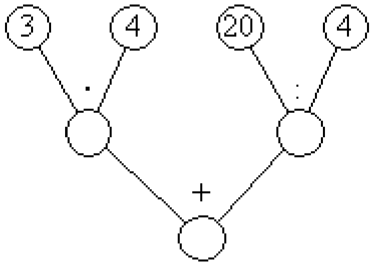
1. Je vhodné napsat výsledek výrazu v závorce nad závorku a vést děti k zápisům všech čísel:

$$60 - \overset{20}{(50 - 30)} = 60 - 20 = 40.$$

2. Postup provádění operací znázorníme pomocí stromu, např.

3 + 5 . 6 3 . 4 + 20 : 4





V první úrovni shora násobíme nebo dělíme, ve druhé úrovni sčítáme nebo odčtáme.

3. Použijeme závorky i ve výrazech s násobením nebo dělením, např.
5 + (6 . 7) nebo (3 . 4) + (20 : 4)

Literatura

BARTOŇOVÁ, M. (ed.): *Specifické poruchy učení v kontextu vzdělávacích oblastí RVP ZV*. Brno: Paido, 2007, 276 s. ISBN 978-80-7315-162-1.

BARTOŇOVÁ, M.: *Kapitoly ze specifických poruch učení I. Vymezení současné problematiky*. Brno: PdF MU, 2007, 128 s. ISBN 978-80-210-3613-0.

BARTOŇOVÁ, M.: *Kapitoly ze specifických poruch učení II*. Brno: PdF MU, 2007, 152 s. ISBN 978-80-210-3822-6.

BARTOŇOVÁ, M., VÍTKOVÁ, M. (eds.): *Přístupy ke vzdělávání žáků se specifickými poruchami učení na základní škole* Sborník z konference s mezinárodní účastí. Brno: Paido, 2007. ISBN 978-80-7315-150-8.

BARTOŇOVÁ, M.: *Profesní orientace žáků se specifickými poruchami učení – závěry z výzkumného šetření*. In: Friedmann, Z. et al. (eds.): Profesní orientace žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a jejich uplatnění na trhu práce. Brno: Masarykova univerzita, 2011, s. 155 – 166. ISNB 978-80-210-5602-2.

BARTOŇOVÁ, M., NAVRÁTILOVÁ, .: *Osoby s SPU v dospělosti a strategie pro volbu povolání.* In Bartoňová, M. (ed.): Specifické poruchy učení v kontextu vzdělávacích oblastí RVP ZV. Brno: Paido, 2007, s. 97 – 105. ISBN 978-80-7315-162-1.

BLAŽKOVÁ, R.: *Dyskalkulie a další specifické poruchy učení v matematice.* Brno: Masarykova univerzita, 2009, 108 s. ISBN: 978-80-210-5047-1.

BLAŽKOVÁ, R.: *Dyskalkulie a některé další obtíže v matematice.* In: Kucharská, A. (ed.): *Specifické poruchy učení a chování. Sborník 2000.* Praha: Portál, 2000, s. 27–38. ISBN 80-7178-389-7.

BLAŽKOVÁ, R.: *Training teachers for teaching pupils with leasing disorders.* London: Lewisham college 2005.

BLAŽKOVÁ, R.: *Školní vzdělávací program a možnosti podpory žáků se specifickými vzdělávacími potřebami v matematice.* Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě školního vzdělávacího programu. Praha: JČMF, 2006. ISBN 80-7015-097-1.

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M., BLAŽEK, M.: *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy.* Brno: Paido, 2000, 94 s, ISBN:80-85931-89-3.

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně ZŠ.* Brno: PdF MU, 1992, 78 s. ISBN 80-210-0468-1.

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Kapitoly z didaktiky matematiky. Slovní úlohy a projekty. Druhé vydání.* Brno: PdF MU, 2011, 78 s. ISBN 978-80-210-5419-6.

BLAŽKOVÁ, R.: *Dyskalkulie II. Poruchy učení v matematice na 2. stupni ZŠ.* Brno: Masarykova univerzita, 2010, 107 s. ISBN 978-80-210-5395-3.

BLAŽKOVÁ, R., PAVLÍČKOVÁ, L.: *Inkluzivní vzdělávání dětí s poruchami učení v matematice na základních školách.* In: Filová, H., Havel, J. (eds.): Inkluzivní vzdělávání v primární škole. Brno: Paido, 2010, s. 249–258. ISBN 978-80-7315-202-4.

BLAŽKOVÁ, R., PAVLÍČKOVÁ, L.: *Problematika dyskalkulie v rámci inkluzivního vzdělávání na základních školách.* In: Vítková, M., Havel, J. (eds.): Inkluzivní vzdělávání v primární škole. Vzdělávání žáků se speciálními potřebami. Brno: Paido, 2010, 22s. ISBN 978-80-7315-199-7.

HEJNÝ, M., KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál, 2009, druhé, aktualizované vydání, 192 s. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky.* Bratislava: SPN, 1990. 554 s. ISBN 80-08-01344-3.

KREJČOVÁ, E.: *Hry a matematika na 1. stupni základní školy.* Praha: SPN, a.s., 2009, 163 s. ISBN 978-80-7235-417-7.

LANGOVÁ, H.: *Dyskalkulie a možnosti její reedukace.* Diplomová práce. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2008.

MATĚJČEK, Z: *Dyslexie – specifické poruchy čtení.* Jinočany: H&H, 1993, 270 s. ISBN 80-85467-56-9.

NOVÁK, J.: *Dyskalkulie.* Havlíčkův Brod: Tobiáš, 2004, 125 s. ISBN 80-7311-029-6.

PETTY, G.: *Moderní vyučování.* Praha: Portál, 1996, 380 s. ISBN 80-7978-070-7.

PIAGET, J.: *Psychologie inteligence.* Praha, SPN, 1966.

PISA 2003. Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003. UIV Praha

POKORNÁ, V.: *Teorie, diagnostika a náprava specifických poruch učení.* Praha: Portál, 1997, 312 s. ISBN 80-7178-135-5.

POKORNÁ, V.: *Cvičení pro děti se specifickými poruchami učení*. Praha: Portál, 1998, 153 s. ISBN 80-7178-228-9.

POKORNÁ, V.: *Vývojové poruchy učení v dětství a dospělosti*. Praha: Portál, 2010, 240 s. ISBN 978-80-7367-773-2.

PRŮCHA, J.: *Moderní pedagogika.* Praha: Portál, 1997, 495 s. ISBN 80-7178-170-3.

PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J.: *Pedagogický slovník.* Praha: Portál 1998. 328 s. ISBN 80-7178-252-1.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Dostupné: www.rvp.cz

SIMON, H.: *Dyskalkulie.* Praha: Portál, 2006, 166 s. ISBN 80-7367-104-2.

SINDELAROVÁ, B.: *Předcházíme poruchám učení.* Praha: Portál, 1996, 63 s. ISBN 80-85282-70-4.

SLAVÍK, J.: *Hodnocení v současné škole.* Praha: Portál, 1999, 190 s. ISBN 80-7178-262-9.

STEEN, L. A. (ed.) *Oh the shouders of giants: New approaches to numeracy.* Washington, D.C.: National Research Council, 1990.

ŠIROKÁ, L.: *Problematika dyskalkulie na základních a středních školách.* Diplomová práce. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2008.

VAŠÍČKOVÁ, M.: *Péče o žáky s dyskalkulií na 1. stupni základní školy.* Diplomová práce. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2007.

VÍTKOVÁ, M. (ed.): *Integrativní školní (speciální) pedagogika. Základy, teorie, praxe.* Brno: PdF MU 2003, 248 s. ISBN 80-86633-07-1.

ZELINKOVÁ, O.: *Poruchy učení*. Praha: Portál, 1996, 196 s. ISBN 80-7178-096-0.

ZELINKOVÁ, O.: *Pedagogická diagnostika a individuální vzdělávací program*. Praha, Portál, 2001, 207 s., ISBN: 80-7178-544-X.

ZELINKOVÁ, O.: *Specifické poruchy učení, nové poznatky, výsledky výzkumů.* In: Sborník Edukace žáků se speciálními vzdělávacími potřebami (ed. M. Bartoňová), Brno 2005, s. 55–61. ISBN 80-86633-3-1.