Repetitorium SŠ matematiky – 7. cvičení

Konzultace k tomuto cvičení proběhne v MS Teams 2. 12. 2020.

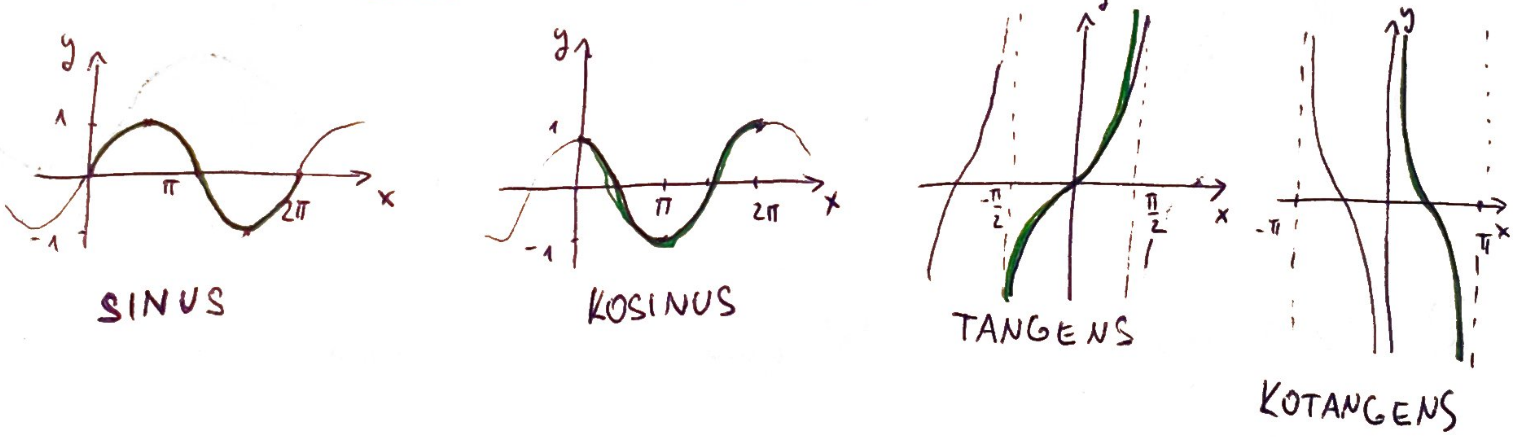
Do pátku 4. 12. 2020 je třeba nahrát do odevzdávárny:

- alespoň 2 varianty z každého příkladu

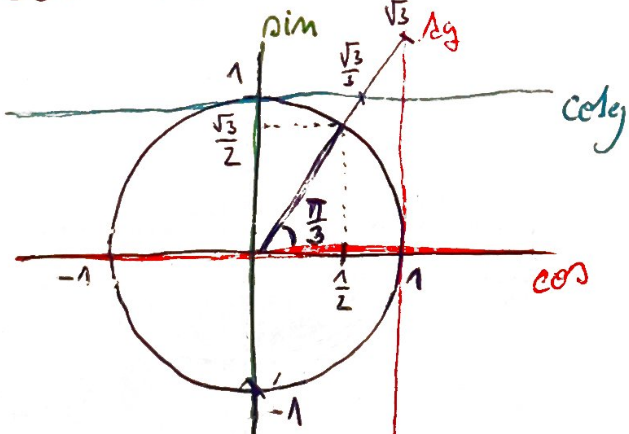
GONIOMETRICKÉ FUNKCE A ROVNICE

Pro studium matematiky je dobré znát určité „tabulkové" hodnoty funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens. Ty lze vyčíst z grafu funkcí, z jednotkové kružnice nebo ze základních geometrických útvarů.

GRAFY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ



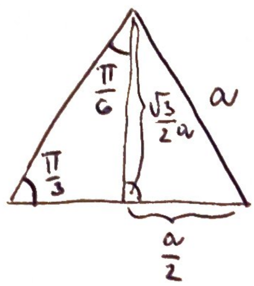
JEDNOTKOVÁ KRUŽNICE



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND	0
$\mathrm{cotg}\, x$	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	ND

ND – není definován

ZÁKLADNÍ GEOMETRICKÉ ÚTVARY

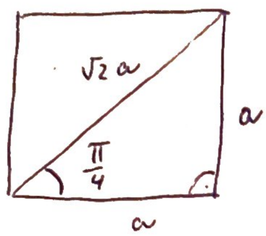


rovnostranný Δ - hodnoty pro $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{6}$

$a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$

např. $tg\ \frac{\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

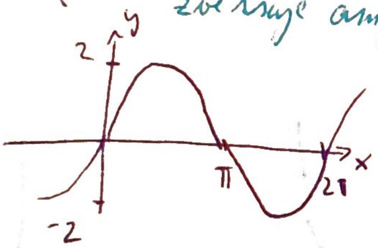


čtverec - hodnoty pro $\frac{\pi}{4}$

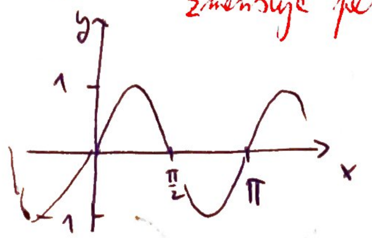
např. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

- $y = 2 \sin x$ zvětšuje amplitudu

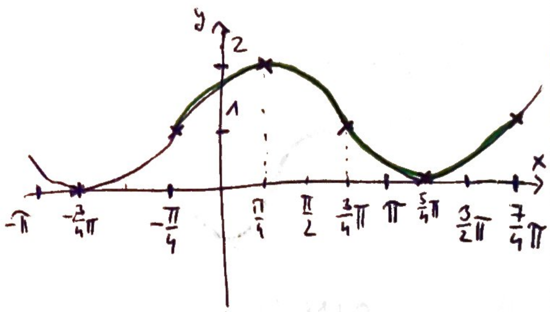


- $y = \sin(2x)$ zmenšuje periodu



- $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ posun na ose y

posun do nulového bodu na ose x



Př. 1: načrtněte grafy funkcí, určete průsečíky s osou x

a) $f:\ y = |\cos(2x)|$

b) $f:\ y = tg\,|x|$

c) $f:\ y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

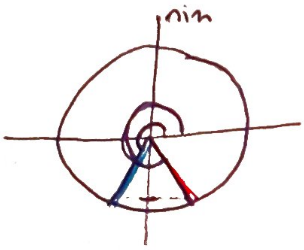
d) $f:\ y = \left||\sin x| - \frac{1}{2}\right|$

GONIOMETRICKÉ ROVNICE

K jednodušším goniometrickým rovnicím nepotřebujeme znát žádné vzorce, pouze hodnoty z výše uvedené tabulky. Musíme si ale uvědomit, že goniometrické funkce jsou periodické, často tedy získáváme více (i nekonečně mnoho) výsledků. Někdy proto bývá omezena množina, ve které rovnici řešíme.

- Řešte v $\mathbb{R}$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Výsledkem jsou dva úhly + libovolný celočíselný násobek nejmenší periody funkce sinus.

$$x_1 = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

pokud Vám více než hledání hodnot v jednotkové kružnici vyhovuje hledání hodnot v grafu, používejte ho

$$K = \left\{ \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi ; \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

- Řešte pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

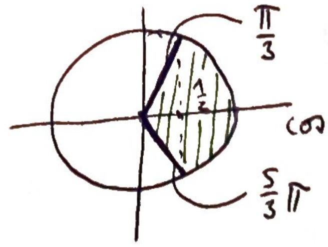
$$x_1 = \frac{4}{3}\pi$$

$$x_2 = \frac{5}{3}\pi$$

$$K = \left\{ \frac{4}{3}\pi ; \frac{5}{3}\pi \right\}$$

- Řešte pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$$\cos x \geq \frac{1}{2}$$



$$K = \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}\pi ; 2\pi \right\rangle$$

- $\sin x = 5$

$$K = \emptyset$$

Hodnoty sin a cos jsou vždy mezi -1 a 1!

Př. 2

a) Řešte pro $x \in \langle 0; 2\pi)$

$$\sin x = -0{,}5$$

b) Řešte pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$$\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$$

c) Řešte v $\mathbb{R}$

$$3 \operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$$

d) Řešte v $\mathbb{R}$

$$2 \sin(3x + \pi) = 1$$

Pro složitější rovnice je třeba využívat vztahů mezi goniometrickými funkcemi. Ty znáte ze SŠ a všechny lze pomocí znalostí SŠ matematiky odvodit, případně dokázat (viz učebnice nakladatelství Prometheus). Zde budeme využívat pouze následující vztahy:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

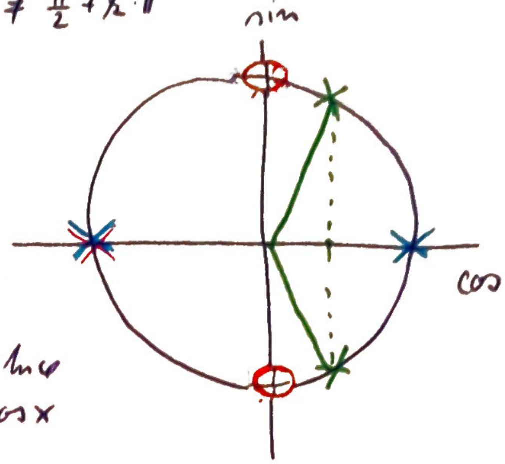
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

- Řešte v $\mathbb{R}$

$$\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$$

$$\sin x + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad / \cdot \cos x \,, \quad \cos x \neq 0$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$$



$$\sin x \cdot \cos x + 2\sin x \cdot \cos^2 x = \sin x$$

$$2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot (2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x_1 = k\cdot\pi \,, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

substituce $a = \cos x$

$$2a^2 + a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} = \cos x$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$-1 = \cos x$$

$$x_4 = \pi + 2k\pi \,, \; k \in \mathbb{Z}$$

Tento výsledek je již zahrnut v x_1, proto jej nebudeme zapisovat

$$K = \left\{ k\cdot\pi ;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ;\ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Př. 3 Řešte v $\mathbb{R}$

a) $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$

b) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x = 1$

c) $5^{\operatorname{tg} x} \cdot 5^{\operatorname{cotg} x} = 25$ (nápověda: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$)

d) $\cos(2x) + \sin x = 0$

e) $\operatorname{tg}(2x) \cdot \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(2x) \cdot \operatorname{tg} x$