Rekreační matematika – cvičení 6

Narozeninový paradox

Určete minimální velikost skupiny, ve které je pravděpodobnost nalezení alespoň jedné dvojice se stejným datem narození (den a měsíc) alespoň 50 %.

Řešení:

Spočítejme si pravděpodobnost, že bude mít každý se skupiny osob narozeniny jiný den. Pravděpodobnost, že budou mít alespoň dvě osoby narozeniny ve stejný den, spočítáme jako doplněk do 100 %.

Uvažujme libovolnou osobu. Pokud k ní přidáme osobu druhou, má tato druhá osoba narozeniny v jiný des s pravděpodobností $p = {}^{364}/_{365}$, jeden den z roku už je totiž „zabraný“ první osobou. Teď jsou již zabrané dny dva, pokračujeme stejnými úvahami např. pro 5 osob dostáváme:

$$p = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5} = \frac{365!}{365^5 \cdot (365-5)!} \sim 97\ \%$$

Obecně můžeme zapsat $p = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}$. Hodnota tohoto výrazu poměrně rychle klesá (a tím stoupá pravděpodobnost narozenin ve stejný den), například pro $n = 10\ \rightarrow\ p = 88\ \%$, pravděpodobnost stejných narozenin je 12 %. Poprvé stoupne pravděpodobnost narozenin ve stejný den nad 50 % pro 23 osob (50,7 %). Pro vyšší počet osob pravděpodobnost dál rychle roste, např. pro 50 osob už je tato pravděpodobnost 97 %.

Hypochondrův problém

Ondřej Hypoch dostal od lékaře balení 48 prášků. Celé balení musí vypotřebovat za 30 dní, přičemž každý den si musí vzít alespoň jeden prášek. V příbalovém letáku se ovšem vyskytovala dvě zneklidňující upozornění. Pokud v některých po sobě jdoucích dnech pacient užije právě 18 prášků (každý den polyká pacient všechny prášky najednou), vypadají mu všechny zuby. Navíc pokud pacient užije v některých po sobě jdoucích dnech právě 11 prášků, upadnou mu palce u rukou. Otázka zní, zda se bude moci Ondřej po skončení léčby kousnout do palce. Předpokládejme, že Ondřej udělá vše pro to, aby mu zůstaly palce i zuby.

Řešení:

Zuby může vyřešit například tak, že si prvních 15 dnů bude brát po jednom prášku, 16. den si vezme 19 prášků a dalších 14 si vezme opět vždy po jednom prášku.

S palci je to horší. Označme p_1 počet prášků, které Ondřej spolykal za první den, p_2 počet prášků spolykaných za první dva dny a tak dále. Platí: $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48$. Přičteme-li ke každé hodnotě číslo 11 následovně: $11 < p_1 + 11 < p_2 + 11 < \cdots < p_{30} + 11 = 59$, nerovnosti zřejmě zůstanou zachovány. Pokud by Ondřej spolykal v některých 11 po sobě jdoucích dnech právě 11 prášků, muselo by se některé číslo p_i rovnat některému číslu $p_j + 11$. To se ovšem nutně stane, protože zeleně označených hodnot je právě 60, všechny jsou celočíselné kladné a nejvyšší z nich je hodnota 59. Proto musí být alespoň jedna hodnota z první řady rovna alespoň jedné hodnotě z druhé řady a Ondřej přijde o palce u rukou.

Odpověď tedy zní kladně, avšak bude se moci kousnout pouze do palce u nohy.

Zrádné kostky (Kabinet matematických kuriozit)

Anička vyzvala Pepu ke hře v kostky. Její tři kostky, se kterými chtěla hrát, však nebyly úplně obyčejné. Na červené kostce se nacházela čísla 3, 3, 4, 4, 8 a 8, na žluté kostce 1, 1, 5, 5, 9 a 9 a na modré kostce 2, 2, 6, 6, 7 a 7. Aby měl Pepa výhodu, nabídla mu Anička, aby si jako první vybral nejlepší kostku, sama si pak vybrala ze zbylých dvou kostek. Hráli 3 dny a 3 noci s jediným pravidlem: kdo hodí vyšší hodnotu, vyhrává dané kolo. Jakou kostku si má Pepa vybrat?

Řešení:

Anička je mazaná, ať si Pepa vybere jakkoli, ona si pak může vybrat výhodnější kostku. Platí totiž, že mezi modrou a žlutou kostkou je pravděpodobnější vítěz modrá kostka, mezi žlutou a červenou je to žlutá kostka a mezi červenou a modrou má větší šanci na výhru kostka červená. Pro lepší znázornění si stačí zakreslit jednoduchou tabulku výher pro jednotlivé dvojice kostek.

Krájení dortu (Truhlice matematických pokladů)

Na jaký nejvyšší počet kousků mohu rozkrojit dort pomocí nejvýše 5 řezů?

Řešení:

1 řez -> 2 kousky

2 řezy -> 4 kousky

3 řezy -> 7 kousků

4 řezy -> 11 kousků

5 řezů -> 16 kousků

Obecně n řezů -> 0,5n(n+1)+1 kousků

Kavárna (777 matematických her a zábav)

V kavárně bylo 12 lidí, kteří se posadili ve skupinkách ke stolům. Každý z nich při odchodu podal ruku všem osobám, které seděly u jeho stolku. Celkem si vyměnili 19 podání ruky. U kolika stolů hosté seděli a kolik jich sedělo u každého ze stolů?

Řešení:

Spočítejme si, kolik podání ruky proběhne u stolu, kde sedí 2, 3, 4, nebo více osob. Pokud jsou u stolu dvě osoby, proběhne pouze jedno podání rukou. Pokud jsou 3 osoby, proběhne 2+1 podání rukou – když odchází první host, podá ruku dvěma osobám, dál je situace stejná jako u stolu s dvěma osobami.

2 osoby	1
3 osoby	2+1=3
4 osoby	3+2+1=6
5 osob	4+3+2+1=10
6 osob	5+4+3+2+1=15
7 osob	6+5+4+3+2+1=21

Nyní už jen potřebujeme určit správnou kombinaci počtu osob u stolů, aby proběhlo 19 podání ruky. Správné rozmístění hostů je jeden stůl pro 3, jeden stůl pro 4 a jeden stůl pro 5 osob.

Ulice New Yorku (777 matematických her a zábav, upraveno)

Manhattan má velmi pravidelné uspořádání ulic, které v některých místech tvoří téměř perfektní obdélníkovou síť. Ulice probíhající vzájemně rovnoběžně ve východo-západním směru jsou označeny St. (Street), ulice k nim kolmé se značí Av. (Avenue). Kolika cestami je možné projít mezi bloky domů, jestliže stojíte na rohu 14. St. a 5. Av. a chcete se dostat na roh 18. St. a 5. Av.? Cestou se nikdy nevracíte, to znamená, že postupujete zásadně na sever nebo východ.

Řešení:

Nakreslete si mapu a postupně od levého dolního rohu číslujte pro každou křižovatku počet cest, kolika se do ní lze dostat. Takto se dopracujete až k pravému hornímu rohu, kam se můžete dostat 70 způsoby.