DIDAKTIKA MATEMATIKY I

Růžena Blažková

BRNO 2013

OBSAH

ÚVOD

Vážené studentky, vážení studenti,

předložený text je věnován úvodním kapitolám didaktiky matematiky, které jsou východiskem k zamyšlení nad možností realizace efektivního vyučování matematice. Je určen studentům následného magisterského studia všeobecně vzdělávacích předmětů v kombinaci s matematikou.

Celý text je členěn do 7 kapitol. Každá z kapitol má vymezený cíl, který by měl být po jejím studiu naplněn, a měli byste být schopni odpovědět na kontrolní otázky, které jsou uvedené za kapitolou. Studium didaktiky matematiky vyžaduje aktivní, samostatný přístup, práci s odbornou i didaktickou literaturou i s učebnicemi matematiky. Stále se řeší problém, jak teoretické poznatky uplatnit v konkrétní pedagogické práci se žáky a neustálou konfrontaci s jejich úspěšností. Uvedené přístupy jsou obecné, avšak práce učitele s každou danou třídou i s každým jednotlivým žákem je neopakovatelná, je jedinečná a vyžaduje od učitele tvořivý přístup. Předpokládáme znalost matematiky jako nezbytného teoretického základu školské matematiky, znalost metod práce v matematice, znalost pedagogicko-psychologických zákonitostí učení a vyučování a zejména dobrý vztah k dětem.

První kapitola se zamýšlí nad vztahem didaktiky matematiky k jednotlivým disciplínám, s kterými úzce souvisí, tj. k matematice a k obecné didaktice.

Ve druhé kapitole jsou uvedeny současně platné kurikulární dokumenty, které jsou vydány Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy a vztahují se k vyučování matematice. Pro srovnání jsou zařazeny i ukázky dvou dokumentů z minulých let, ve kterých je možné poznat, jak bylo přistupováno k osnovám matematiky v minulosti.

Třetí a čtvrtá část jsou věnovány didaktickým principům a výukovým metodám, které již znáte ze studia pedagogiky a obecné didaktiky. Cílem těchto kapitol je uplatnění těchto principů a metod při vyučování matematice.

V páté kapitole je zdůrazněn význam různých typů komunikace ve výuce matematiky. Vedle běžné komunikace učitel – žák je v matematice nutné zvládnout další typy, zejména komunikaci symbolickou a komunikaci obrazově názornou.

Podstatnou částí textu je kapitola šestá, která je věnována budování pojmů v matematice. Nejdůležitější je, jaký přístup zaujme učitel při vytváření každého matematického pojmu a jeho vlastností tak, aby představy byly správné a aby se v průběhu vzdělávání rozšiřovaly tak, aby se postupně vytvářel systém poznatků.

V poslední kapitole je uveden stručný pohled na historii vyučování matematice v českých zemích. Sledování vývoje výuky matematiky na našich školách a sledování změn v obsahu vyučovacího předmětu matematika je pro učitele velmi poučné.Součástí textu jsou ilustrační příklady a ukázky, které mohou sloužit ke konfrontaci s vašimi vlastními přístupy k matematice i k jejímu vyučování.

Studium didaktiky matematiky je neustálý proces vzdělávání se a hledání efektivnějších způsobů výuky matematiky na základní škole. Přeji vám při studiu mnoho pěkných zážitků a úspěch.

Autorka

1 DIDAKTIKA MATEMATIKY A JEJÍ POSTAVENÍ V SYSTÉMU VĚD

Cíle: Prostudováním této kapitoly

- pochopíte, jaké jsou úkoly didaktiky matematiky
- budete schopni charakterizovat postavení didaktiky matematiky v systému věd
- dokážete pochopit důležitost znalosti matematického teoretického základu a jeho transformace do systému učiva matematiky základní školy

Průvodce studiem

V první kapitole jsou uvedeny některé přístupy k definování didaktiky matematiky a vztah didaktiky matematiky a ostatními vědními disciplínami, se kterými úzce souvisí. Za velmi důležité považujeme vztah didaktiky matematiky a vědecké matematiky jako nezbytného teoretického základu učiva školské matematiky.

1.1 Co rozumíme pod pojem „didaktika matematiky“

Nelze použít výstižnějšího vyjádření, než to, které uvedl J. A. Komenský ve své Didaktice analytické (Komenský, 1947): „*Didaktika jest umění jak dobře učiti. Učiti značí působiti, aby tomu, kdo něco zná, se naučil také někdo jiný a znal to*“.

Vymezení pojmu „didaktika matematiky“ se objevuje v různých publikacích většinou se snahou vyjádřit její postavení mezi vědními obory, kterými jsou matematika, pedagogika a obecná didaktika. Uveďme některé z nich.

Slovník školské matematiky (1981) pod heslem „didaktika matematiky“ uvádí: *„Didaktika matematiky – mezní vědní disciplína mezi matematikou a pedagogikou, která se zabývá různými otázkami školské matematiky na všech typech škol, tj. jejím obsahem i metodami jak vyučovat a jak se učit matematice“.*

P. Květoň (1982) chápe didaktiku matematiky takto: *„Didaktika matematiky je vědecká disciplína zkoumající zákonitosti vyučování matematice v souladu s cíli vyučování určenými společností“.*

B. Novák (2003) uvádí: *„Didaktika matematiky se považuje obvykle za speciální didaktiku (předmětovou, příp. oborovou didaktiku) ve smyslu teorie vzdělávání v matematice. Je vědou se svou vlastní strukturou, logikou a způsobem myšlení. Lze v ní rozlišit čtyři dimenze: obsahovou, pedagogickou, psychologickou a konstruktivní*.“

Didaktika matematiky je vědecká disciplína, která řeší speciální otázky výuky matematiky na jednotlivých stupních a typech škol. Vymezuje cíle a obsah učiva matematiky, doporučuje vhodné metody a postupy vyučování, organizační formy vyučování, respektuje psychologické zákonitosti učení a zajišťuje technologii vyučování. Didaktika matematiky v současné době studuje roli žáka a učitele ve vzdělávání, studuje procesy, které probíhají ve vědomí žáků i učitelů při výuce matematiky, při řešení problémových úloh i při využívání matematiky v praxi.

V minulosti se objevovaly také názvy jako Teorie vyučování matematice, Metodika matematiky, Pedagogika matematiky. Např. J. Mikulčák (1982) uvádí: *„Předmětem Pedagogiky matematiky je komplexní zkoumání systému matematického vzdělání, všech jeho prvků, vzájemných vztahů a vztahů k didaktickému a mimodidaktickému okolí systému.*

Úvahu o vztahu matematiky a didaktiky uvádí M. Hejný (1990):
„ Termín – vyučovanie matematiky – sa skladá z dvoch slov. Prve vyjadruje obsah toho, čo sa učí, druhé činnosť, ktorů učiteľ vykonáva. Matematika, rovnako jako vyučovanie, má svoju štrutúru, logiku, sposob myslenia. Medzi oboma oblasťami je značný rozdiel. Matematika pracuje s idealizovanými objektmi, axiomaticky presne, s úplnou argumenáciou. Vyučovanie sa týka ludí a každá snaha o axiomatizaciu štruktúry metodiky matematiky vedie nevyhnutne k znásilneniu skutočnosti. V metodike matematiky, jako konečne v každej „reálnej" vedeckej disciplíne, existujú javy, objekty, situácie, príklady, ktoré sú typické, kryštalické, ale existujú aj také, ktoré sú hmlisté, hraničné, nejasné. Nie je to nedostatkom našich vedomostí, ale podstatou vecí."

Úkol pro vás

1. Zamyslete se nad vlastním vnímáním disciplíny „Didaktika matematiky" a formulujte vaše očekávání od tohoto předmětu.

2. Zamyslete se nad vyjádřeními: „učit se sám něčemu", „učit někoho", „ naučit někoho něčemu".

1.1.1 Specifika didaktiky matematiky

Didaktika matematiky a matematika jako vyučovací předmět mají svá výrazná specifika, která je poněkud odlišují od ostatních oborových didaktik a vyučovacích předmětů.

Jde zejména tato specifika:

1. Vysoká abstraktnost matematiky. Matematické pojmy vznikly na základě abstrakcí z reálných situací (nikdo nikdy nemůže vidět přímku, rovinu či číslo, ale jejich představy v mozku téměř u každého existují). Pojmy se nejprve budují na základě intuice a teprve mnohem později je možné budovat systém vycházející z deduktivních přístupů.

2. Matematika je předmět, ve kterém je znalost a pochopení prvků vyšší úrovně podmíněna pochopením a znalostí prvků nižší úrovně.

3. V některých případech je problematická motivace matematického učiva, neboť buď je obtížné nalézt reálný model v praxi (např. pro násobení dvou záporných čísel), nebo je praktické využití hodně daleko (např. úpravy lomených algebraických výrazů).

4. Výuku matematiky nelze opírat jen o formulování vztahů, pouček a vzorců, které si mají studenti a žáci zapamatovat.

5. Přístupy typu: „já jim to řeknu“ (rozumějte: učitel žákům) nebo „jí jim to ukážu“ nepřinášejí potřebný výukový efekt. Poznatky jsou nepřenosné. K matematickým poznatkům by se žák měl dobrat vlastní konkrétní i myšlenkovou činností.

Didaktika matematiky nemůže naučit studenty všemu, co by bylo třeba k tomu, aby uměli učit a naučit matematice. To nemůže být ani jejím cílem, a to nejen vzhledem k rozsahu matematiky na školách všech typů. Ale může je naučit cennější hodnoty, kterými jsou metody práce a schopnost nazírání, aby se učitelé snažili vést své žáky po cestě poznání. Může jim doporučit některé postupy, které se v praxi osvědčily, ale měla by jim ponechat dostatek prostoru pro jejich vlastní tvořivou práci. V didaktice matematiky je třeba vyvarovat se dvou extrémů: přístupů, které vycházejí jen z matematiky, předkládají krásu její logické výstavby a jejích výsledků, avšak předpokládají žáka, který se matematiku učit chce a má zájem řešit problémy a přemýšlet (zdůrazňování teorie, přílišná odbornost), a nebo přístupů, které vycházejí z podrobných návodů, silně prakticistických, ovlivněných třeba jen jedinou zkušeností bez opory o zákonitosti vytváření matematických pojmů v hlavičkách dětí a někdy i s chybami (prakticismus, metodikaření).

1.1.2 Vztah matematiky a didaktiky matematiky

Matematika jako vědní disciplína nashromáždila v průběhu svého historického vývoje obrovské množství poznatků a dále se neustále rozvíjí. Poznatky jsou uspořádány v logické celky. Jednotlivé části matematiky jsou budovány deduktivním způsobem ze systému axiomů. Jednotlivé pojmy jsou přesně vymezovány, hledají se souvislosti mezi zavedenými pojmy, v rámci zobecňování se hledají pojmy obecnější, vznikají nové teorie, vzniká jazyk, kterým se teorie mohou popisovat apod.

V didaktice matematiky jde o to, stanovit, co z matematické teorie bude obsahem učiva základní školy, jak budou poznatky prezentovány, aby byly srozumitelné a přiměřené věku a schopnostem žáků. Hledá se cesta, jak poznatky žákům přiblížit, v jakém sledu, jakou formou, při respektování vědecké správnosti příslušného učiva. Vybraná témata by měla patřit k základům současné matematiky, měla by tvořit ucelený systém, na který by bylo možné navazovat v dalším studiu i v praktickém životě. Je třeba provést didaktickou transformaci učiva, tj. výběr poznatků z matematiky jako vědecké disciplíny a jejich zpracování do systému učiva matematiky základní školy. Je třeba vytvořit systém, který zajistí rozvoj vědomostí, dovedností, návyků, hodnot i osobnostních vlastností žáků. V současně platném Rámcovém vzdělávacím programu jsou tyto požadavky formulovány jako klíčové kompetence.

1.1.3 Vztah obecné didaktiky a didaktiky matematiky

Didaktika je teorie vyučování (řec. didakstein – učit, vyučovat). Obecná didaktika se zaměřuje na obecné otázky výuky, jednak na vzdělávací obsah a jednak na proces, který charakterizuje činnosti učitele a žáka, ve kterém si žáci obsah osvojují. Předmětem obecné didaktiky je obecné řešení cílů, obsahu, metod a organizačních forem ve vyučování.

Didaktika matematiky řeší speciální otázky výuky matematiky na jednotlivých stupních a typech škol. Vymezuje obsah učiva matematiky, doporučuje vhodné metody a postupy vyučování, respektuje psychologické zákonitosti učení, zajišťuje technologii vyučování. Didaktika matematiky plní mnoho různých úkolů, z nichž nejdůležitější jsou transformace vědního oboru do systému školské matematiky, proces komunikace v rámci vyučovacího procesu a rozvoj klíčových kompetencí žáků.

1.2 Zaměření didaktiky matematiky

Nelze dávat přednost jednomu z dále uvedených požadavků, ale je třeba realizovat „a zároveň“ vše dále uvedené. Důvody pro tento přístup jsou ověřené dlouholetými zkušenostmi. Pokud má učitel vysoké odborné znalosti, avšak nedostatek emocionální inteligence a pedagogických schopností, je to stejně problematické, jako když má učitel velké nadšení, vztah k dětem, ale nedostatečnou odbornost.

1.2.1 Didaktika matematiky zaměřená na obsah učiva

Matematika jako vědní disciplína obsahuje obrovské množství poznatků a jen malá část tvoří obsah učiva matematiky jako vyučovacího předmětu na základních školách. Avšak vědecké matematické poznatky nemohou být ve většině případů zprostředkovávány ve své abstraktní a teoretické podobě ani v axiomatickém systému, jak jsou v matematice budovány. Pro výuku matematiky je nezbytné provést tzv. didaktickou transformaci teoretického matematického základu do učiva matematiky tak, aby učivo bylo přiměřené žákům příslušného věku, bylo podáno jazykem jim srozumitelným a s využitím matematického aparátu, který mají žáci právě k dispozici a zároveň aby nebylo v rozporu s matematickou správností. To, co se žák naučí na nižším stupni, by se měl naučit tak, aby se v budoucnu nemusel jisté poznatky učit jinak (tzv. „přeučovat“). Např. vysvětlení skutečnosti, že „nelze dělit nulou“ je možné zdůvodnit určitým způsobem ve 2. - 3. ročníku základní školy, jiným způsobem v 7. ročníku ZŠ, dalším na gymnáziu a ještě jiným na škole vysoké s využitím pojmu limita, ve všech případech však matematicky správně.

Učitelé matematiky by měli mít jasno v matematických pojmech a vztazích, měli by si ujasnit, co o pojmech vědí sami z odborné přípravy, co z toho je v učivu matematiky příslušného stupně školy a jakým způsobem jsou pojmy a vztahy mezi nimi zavedeny. Neměli by vidět propast ve své teoretické přípravě a učivem školské matematiky. Jako příklad lze uvést téma „funkce a funkce inverzní“, které jsou základními pojmy v matematické analýze již v prvním ročníku na vysoké škole a učivo „Druhá mocnina a odmocnina“ v 8. ročníku základní školy. Při probírání druhé odmocniny ji studenti správně zavedou, uvedou příklad $\sqrt{64} = 8$, ale na otázku žáka proč také $\sqrt{64} = (-8)$, když $(-8) \cdot (-8) = 64$ odpovědět uspokojivě nedovedou.

1.2.2 Didaktika matematiky zaměřená na poznávací procesy žáka

Hlavním kriteriem pro úspěšnou práci učitele matematiky je jeho vztah k dětem. Student, který má zájem pracovat s dětmi na základní škole, zejména na jejím druhém stupni, je velmi cennou devizou. Pokud se chce skutečně stát učitelem, zpravidla vyvine hodně úsilí, aby se jím stal. Pro úspěšnou výuku matematiky je nezbytné sledovat, jak vnímá žák to, co je mu předkládáno, jak se umí vyrovnat s abstraktními matematickými pojmy, jaké postupy jsou pro žáky optimální, zda žák vidí v poznávacím procesu to, co jeho učitel. Každé dítě je výrazná individualita, má svůj vlastní matematický model, který je třeba odhalit a rozvíjet. Přitom je nutné respektovat skutečnost, že vytváření matematických poznatků je nepřenosné (přenosné jsou pouze informace). Při konkrétní práci s dětmi si vnímavý učitel všímá myšlenkových pochodů žáka a vhodně je využívá, eventuelně citlivě usměrňuje. Zaměřuje se také na žáky se specifickými vzdělávacími potřebami v matematice, ať už jde o žáky nadané nebo žáky se specifickými poruchami učení. Také zvládnutí problematiky komunikace se žáky v matematice vyžaduje mnoho znalostí a hlavně mnoho přemýšlení. Učitel by tedy měl respektovat osobnost žáka, zajistit pozitivní klima při výuce, zajistit dostatek prožitků při poznávání nových vědomostí, a podporovat touhu po vzdělávání. Cílem je nejen žák vzdělávat v matematice, ale také formovat osobnost žáka, vytvářet citový vztah žáka k matematice i k práci.

1.2.3 Didaktika matematiky zaměřená na metody práce

Učitel matematiky ve své práci využívá jednak metod práce v matematice (analýza, syntéza, indukce, dedukce, zobecňování, abstrakce apod.), a samozřejmě výukových metod práce, včetně všech dostupných prostředků moderních informačních a sdělovacích technologií. Volba metod by měla být adekvátní danému učivu.

Mezi učiteli z praxe i studenty stále ještě převládá názor, že transmisívní přístup k vyučování matematice, kdy učitel předvede potřebné postupy a žáci je reprodukují, je časově nejoptimálnější a nejspolehlivější. Předávání hotových poznatků se jim jeví jako nejlepší. Snaha přesvědčit je o možnostech jiných přístupů se setkává s nedůvěrou. Avšak až sami na sobě poznají postupy některých jiných přístupů, např. konstruktivistických, uznají jejich přednosti. Uvědomí si, že nejvíce si žáci zapamatují zážitky, procesy vytváření pojmů vlastními objevy. Existuje jistá propast mezi teoretickým zvládnutím výukových metod a jejich uplatňováním ve vyučovacím procesu.

Zásady konstruktivních přístupů k vyučování matematice jsou formulovány např. v publikaci Hejný, Kuřina: Dítě škola a matematika (Hejný, Kuřina, 2009, s.194, Stehlíková 2004, s. 13). Jde o tyto zásady (uvedeno zkráceně):

„I. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, nejen její výsledek.

II. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.

III. Konstrukce poznatků, poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.

1V. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.

V. Základem matematického vzdělávání je vytváření podnětného prostředí pro tvořivost.
VI. k rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
VII. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturování poznatků.
VIII. Značný význam má komunikace.
IX. Vzdělávací proces je nutné hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
X. K formálnímu poznání vede poznání založené na reprodukci informací.“

Úkoly pro vás

1. Reflektujte svůj vztah k matematice, vzpomeňte si, zda jej někdo ovlivnil, ať v pozitivním či negativním směru.
2. Seznamte se podrobně se zásadami konstruktivizmu.
3. Prostudujte publikaci: Hejný, M., Kuřina, F.: Dítě, škola a matematika.
4. Zamyslete se nad možnostmi využití transmisivního a konstruktivistického přístupu ve vyučování matematice.

1.2 Příklady

1.3.1 *Řešený příklad*

Příklad ilustruje určení součtu nekonečné geometrické řady s využitím matematického učiva o nekonečných geometrických řadách a jejich součtu a transformaci tohoto tématu do učiva matematiky základní školy.

Určete součet řady $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\ldots$

a) s využitím vztahu pro součet nekonečné řady
b) prostředky žáka základní školy.

a) $s_n = \frac{a_1}{1-q}$

$$s_n = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

b) Označíme součet řady symbolem *x:* $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\ldots = x \quad | \, . \, 3$

Rovnost vynásobíme třemi a úpravami dostaneme:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\ldots = 3x$$

$$\frac{1}{2}+x = 3x$$

$$x = \frac{1}{4}$$

1.2.2 Kontrolní úlohy

Využijte uvedených postupů v příkladu 1.3.1 a vypočítejte:

1.Určete součet nekonečné geometrické řady $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$

2.Zapište pomocí zlomku s celočíselným čitatelem i jmenovatelem racionální čísla: a) $0,\overline{6}$ b) $0,\overline{75}$ c) $0,5\overline{8}$ d) $0,45\overline{25}$

Řešení: 1. $s_n = 2$

3. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{25}{33}$ c) $\frac{53}{90}$ d) $\frac{224}{495}$

Shrnutí

Matematika jako vyučovací předmět je významnou složkou vzdělávání i kulturního rozhledu člověka. Pro učitele matematiky na druhém stupni ZŠ je nezbytná teoretická příprava, která je předpokladem jeho úspěšného pedagogického působení. Profesní příprava by měla obsahovat složku odbornou matematickou i složku didaktickou a pedagogicko-psychologickou. Tyto složky by měly být účelně propojené a studenti by mezi nimi neměli vidět ostré hranice.

2 KURIKULÁRNÍ DOKUMENTY

Cíl

Po prostudování kapitoly byste měli být schopni

- chápat změny, které byly ve školství realizovány v souvislosti se zavedením rámcového vzdělávacího programu
- pochopit, jak může matematika přispívat k rozvoji klíčových kompetencí žáka
- podrobně prostudovat vzdělávací obsah vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

Pod pojmem „kurikulum“ jsou v Pedagogickém slovníku uvedeny tři významy:

„1. Vzdělávací program, projekt, plán.
2. Průběh studia a jeho obsah.
3. Obsah veškeré zkušenosti, kterou žáci získávají ve škole a v činnostech ke škole se vztahujících, její plánování a hodnocení.“ (Pedagogický slovník, 1998, s.118).

Kurikulární dokumenty jsou vytvářeny na dvou úrovních – státní a školní. Státní úroveň představují Národní program vzdělávání a rámcové vzdělávací programy. Školní úroveň přestavují školní vzdělávací programy.

2.1 Rámcový vzdělávací program

Rámcové vzdělávací programy vycházejí z nové strategie vzdělávání, která zdůrazňuje rozvoj klíčový kompetencí žáků, jejich provázanost se vzdělávacím obsahem a uplatnění získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě. Vycházejí z koncepce celoživotního učení, formulují očekávanou úroveň vzdělávání pro všechny absolventy jednotlivých etap vzdělávání. Dávají velký prostor autonomii škol, avšak tím také velké odpovědnosti učitelů za výsledky vzdělávání.

Rámcový vzdělávací program zdůrazňuje rozvoj klíčových kompetencí, což je souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena ve společnosti. V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání jsou uvedeny tyto klíčové kompetence:

Kompetence k učení, kompetence k řešení problémů, kompetence komunikativní, kompetence sociální a personální, kompetence občanské, kompetence pracovní.

Jednotlivé předměty jsou uvedeny v tzv. vzdělávacích oblastech. Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je uvedena charakteristikou vzdělávací oblasti, cílovým zaměřením, vzdělávacím obsahem pro 1. stupeň ZŠ a pro 2. stupeň ZŠ. V rámcovém učebním plánu je pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikace přiřazeno pro 6. – 9. ročník ZŠ celkem 16 hodin matematiky. Ředitel školy může tento počet posílit z hodin přiřazených disponibilní časové dotaci. Rámcový vzdělávací program dále obsahuje tzv. Průřezová témata a vyjadřuje se ke vzdělávání žáků se specifickými vzdělávacími potřebami.

2.2 Cíle vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

„Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:

- *využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech – odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace*
- *rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojováním si nezbytných matematických vzorců a algoritmů*
- *rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů*
- *rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů*

- *vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu*
- *vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely*
- *provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému*
- *přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu*
- *rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby*
- *rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základ zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů.*

2.3 Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru **Matematika a její aplikace** je rozdělen do čtyř tematických okruhů:

Číslo a proměnná

Závislosti, vztahy, práce s daty

Geometrie v rovině a v prostoru

Nestandardní aplikační úlohy a problémy

V každém tematickém okruhu jsou formulovány očekávané výstupy, které jsou závazné pro zpracování školních vzdělávacích programů a stručně je vymezeno učivo. Ukázka tematického okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty:

ZÁVISLOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY **Očekávané výstupy**	

žák ➢ vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data ➢ porovnává soubory dat ➢ určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti ➢ vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem ➢ matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů	

Učivo

- **závislosti a data** – příklady závislostí z praktického života a jejich vlastnosti, nákresy, schémata, diagramy, grafy, tabulky, četnost znaku, aritmetický průměr
- **funkce** - pravoúhlá soustava souřadnic, přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, lineární funkce.

Pro matematiku jsou dále zpracovány Standardy, ve kterých jsou podrobně zpracovány indikátory k jednotlivým bodům z RVP a jsou uvedeny ilustrační úlohy. Např. k očekávanému výstupu „Žák určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti“ jsou vedeny indikátory:

1. Žák vytvoří tabulku, graf a rovnici pro přímou a nepřímou úměrnost na základě textu úlohy.
2. Žák určí přímou a nepřímou úměrnost z textu úlohy, z tabulky, z grafu a z rovnice.
3. Žák využívá při řešení úloh přímou a nepřímou úměrnost.

Ilustrační úloha:
Milan si přivydělává v reklamní agentuře přepisováním údajů z dotazníků do počítače. Počet zpracovaných dotazníků (*d*) je přímo úměrný počtu minut (*m*) strávených u počítače. Milan si změřil, že za 20 minut přepíše 8 dotazníků.

V tabulce doplňte čas, který Milan potřebuje k vyplnění uvedeného počtu dotazníků.

V tabulce doplňte počet dotazníků, které Milan přepíše v uvedeném čase.

Počet minut (*m*)		20	30	
Počet dotazníků (*d*)	6	8		20

Převzato z Standardy Matematika 2. stupeň, dostupné on line na www. MSMT.cz

Na základě Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání pak každá škola zpracovává svůj **Školní vzdělávací program**.

V minulosti byly zpracovávány osnovy matematiky. Pro porovnání s novým přístupem uplatněným v RVP uvádíme příklady dvou typů osnov.

2.4 Vzdělávací program Základní škola (1996)

Učební plán: 6. – 9. ročník ZŠ: 4 hodiny matematiky

Osnovy matematiky: učivo rozčleněno po ročnících a do témat. V závěru každého tématu je uvedeno, co má žák umět a rozšiřující učivo.

Specifické cíle

„Matematika spolu s výukou českého jazyka tvoří osu vzdělávacího působení základní školy. Matematika poskytuje žákům vědomosti a dovednosti potřebné pro orientaci v praktickém životě a vytváří předpoklady pro úspěšné působení ve většině oborů profesionální přípravy i různých směrů učiva na středních školách. Rozvíjí intelektuální schopnosti žáků, jejich paměť, představivost, abstraktní myšlení, schopnost logického úsudku. Současně přispívá k vytváření určitých rysů osobnosti jako je vytrvalost, pracovitost, kritičnost.

Poznatky a dovednosti získané v matematice jsou předpokladem k poznávání přírodovědných oborů, ekonomiky, techniky a využití počítačů.

Vyučování matematice směřuje k tomu, aby se žáci naučili:

- *provádět početní výkony s přirozenými čísly, desetinnými čísly a zlomky, a to pamětně i písemně; při řešení složitějších úloh užívat racionálně kapesní kalkulátor;*
- *řešit úlohy z praxe s užitím početních výkonů, včetně užití procentového počtu a jednoduchého úrokování;*
- *provádět odhady výsledků řešení a posuzovat jejich reálnost, provádět potřebné zaokrouhlení;*
- *číst a užívat jednoduché statistické tabulky a diagramy;*
- *užívat proměnnou, chápat její význam, řešit rovnice a nerovnice a užívat je při řešení úloh;*
- *zapsat a graficky znázornit závislosti kvantitativních jevů v přírodě a ve společnosti a pracovat s některými konkrétními funkcemi při řešení úloh z praxe;*
- *řešit metrické geometrické úlohy, vypočítat obvody a obsahy rovinných obrazců, povrchy a objemy těles, užívat základní vztahy mezi rovinnými obrazci (shodnost, podobnost);*
- *orientovat se v rovině a v prostoru, užívat soustavu souřadnic, chápat vztah mezi čísly a body jako základ počítačových znázornění projektů;*
- *dokazovat jednoduchá tvrzení a vyvozovat logické závěry z daných předpokladů.*

Ukázka tématu 9. ročníku: **Základy finanční matematiky**

	Učivo
- úrok	- výpočet úroku, určování počtu dní úrokové doby
- jistina	- jednoduché úrokování
- úroková doba	- složené úrokování
- úrokovací období	- řešení slovních úloh z praxe
- úroková míra	
- jednoduché úrokování	

- složené úrokování

Co by měl žák umět
- vypočítat úrok z dané jistiny za určité období při dané úrokové míře
- určit hledanou jistinu
- provádět jednoduché a složené úrokování
- vypočítat úrok z úroku

Příklady rozšiřujícího učiva
- řešení konkrétních problémů z praxe rodičů
- valuty, devizy, převody měn
- řešení úloh kombinovaného úrokování

2.5 Učební osnovy základní školy z roku 1979

Učební plán: 5. – 8. ročník ZŠ – 5 hodin matematiky týdně v každém ročníku.
Osnovy matematiky: učivo rozčleněno po ročnících a do témat, včetně hodinové dotace pro každé téma. V závěru každého ročníku je uvedeno opakování a shrnutí učiva.

Charakteristika pojetí matematiky na 2. stupni základní školy
Z celého textu uvádíme výběr:
„Žáci si v 5. – 8. ročníku pojem desetinného čísla, celého čísla, racionálního čísla i početní výkony s těmito čísly, seznámí se s některými iracionálními čísly (π, druhá, třetí odmocnina, hodnoty goniometrických funkcí), naučí se řešit praktické úkoly, matematizovat reálné situace pomocí rovnic a nerovnic …“
„Osvojí si pojem zobrazení a zejména pojem funkce (přímá úměrnost, lineární funkce, kvadratická funkce, nepřímá úměrnost, goniometrické funkce …“
„… osvojí si velikost úhlu, obsah a objem geometrických útvarů, naučí se používat vzorců k jejich výpočtům. …“.

Ukázka jednoho tématu – 6. ročník

Procento (15 hodin)
Opakování desetinných čísel. Procento. Jednoduché slovní úlohy na procenta.
Žáci si zopakují operace s desetinnými čísly. S pojmem procento se seznamují jako jednou setinou z čísla. Objasní se jim význam procent při porovnávání kvantitativní stránky přírodních a společenských jevů, zejména jevů hospodářského života, rozvoje průmyslu a zemědělství. Při řešení základních slovních úloh s procenty (tzn. i výpočet základu i výpočet počtu procent se využije vzorce $č = \frac{z}{100} . p$ (*č*- procentová část, *p*- počet procent, *z* – základ). Oborem proměnných je množina všech nezáporných desetinných čísel.
V každém období změn při stanovování obsahu matematického učiva se řeší poměr mezi teoretickým učivem a aplikacemi. Zajistit vyváženost mezi těmito oběma přístupy je poměrně

obtížné, vzhledem k počtu hodin matematiky na základní škole a vzhledem k narůstajícímu počtu matematických témat, která se do školské matematiky zařazují vzhledem k rozvoji matematiky jako vědy.

2.6 Učební osnovy matematiky ZDŠ z roku 1973

Učební plán: 5 hodin matematiky týdně v 6. – 9. ročníku, 1 hodina týdně rýsování v 9. ročníku. V učebním plánu je dále uveden nepovinný předmět Cvičení z matematiky s dvouhodinovou dotací.
Osnovy matematiky: Učivo rozčleněno do ročníků, do témat v každém ročníku, včetně hodinové dotace pro každé téma. Na závěr každého ročníku vyčleněno 4 – 6 hodin opakování, v 9. ročníku15 hodin.

Podrobně je zpracován úvod k osnovám matematiky, z kterého vybíráme:
„Matematické myšlení žáků se rozvíjí zejména osvojováním matematických poznatků v logickém systému a na základě vzájemných jejich souvislostí, rozborem vztahů mezi údaji, ve slovních úlohách a při sestavování a řešení rovnic, rozborem a zdůvodňováním řešení konstruktivních úloh a využíváním získaných poznatků v praxi. Žáci se učí provádět přiměřené důkazy pouček, logicky přesně se vyjadřovat. Učitel soustavně dbá i na dobrou jazykovou úroveň ústních i písemných projevů žáků a svým výstižným, přesným a jazykově správným vyjadřováním je jim vzorem.“
Dále jsou uvedeny podrobné pokyny k výuce aritmetiky, algebry a geometrie a didaktické zásady (spojení školy se životem, aktivnosti, trvalosti, přiměřenosti, názornosti, individuálního přístupu).

Ukázka jednoho tématu - 9. ročník:

Podobnost (40 hodin, z toho 5 hodin na topografické práce)
Podobnost geometrických útvarů, podobnost trojúhelníků. Věty o podobnosti trojúhelníků (bez důkazů), podobnost pravoúhlých trojúhelníků. Užití podobnosti v praxi.
Topografické práce: měřický stolek, zastaničení, rajónování.
Sinus, kosinus, tangens ostrého úhlu. Tabulky sin α, cos α, tg α k řešení pravoúhlého trojúhelníku v jednoduchých případech.

Úkol pro vás

1. Prostudujete podrobně jednotlivé klíčové kompetence a uveďte, jak výuka matematiky přispívá k jejich rozvoji.

2. Prostudujte Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, zejména část, která je věnována vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace.

2. Seznamte se se školním vzdělávacím programem na škole, na které realizujete svoji pedagogickou praxi.

Otázky k zamyšlení

- Co je podle vás pro učitele vhodnější - učivo zpracované v osnovách podle jednotlivých ročníků, témat, včetně hodinové dotace nebo rámcové uvedení učiva a velká volnost při tvorbě školních vzdělávacích programů?
- Je třeba stanovit určité výstupy a standardy pro jednotlivé stupně vzdělávání

Shrnutí

Matematika jako vyučovací předmět zaujímá významné postavení v rámci všech vyučovacích předmětů na základní škole a má také významné postavení v kurikulárních dokumentech. Vedle mateřského jazyka, cizího jazyka a informatiky má v RVP svoji samostatnou vzdělávací oblast. Pro učitele je nutná znalost všech dokumentů vztahujících se ke vzdělávání v matematice a zejména pak znalost očekávaných výstupů a standardů, aby jeho žáci mohli úspěšně pokračovat v dalším typu studia a byli vybaveni matematickými poznatky i do běžného života.

3 DIDAKTICKÉ PRINCIPY

Cíl:

- Uvědomit si, zda a jak mohou didaktické principy, jako nejobecnější pravidla, přispívat k dosažení lepších výsledků ve vyučování matematice.
- Sledovat, zda a jak mohou přispívat k rozvíjení celé osobnosti žáka

Z hlediska vyučování matematice můžeme rozlišit tyto tři skupiny didaktických principů:

a) Principy plynoucí z výchovně vzdělávacích cílů a rozvoje kompetencí žáků.

b) Principy týkající se obsahu výuky matematiky.

c) Principy, které prostřednictvím učiva ovlivňují proces učení a vyučování matematice.

Do jednotlivých skupin můžeme zařadit tyto principy:

Ad a): principy vědeckosti
princip cílevědomosti
princip výchovnosti vyučování
princip spojení školy se životem
princip spojení teorie s praxí

Ad b) princip přiměřenosti
princip soustavnosti
princip postupnosti

princip názornosti

Ad c) princip uvědomělosti
princip aktivnosti
princip trvalosti
princip individuálního přístupu k žákům
princip zpětné vazby

Princip vědeckosti

Při vyučování matematice respektujeme, že obsah matematiky jako vyučovacího předmětu vychází z matematiky vědecké, že vybrané poznatky, které tvoří učivo, patří k základům současné matematiky a tvoří ucelený systém. Princip vědeckosti není možné porušovat ani v úvodní fázi vytváření matematických představ. Didaktické zjednodušení nesmí znamenat zkreslení nebo deformaci pojmu a poznatky se nemohou zavádět tak, aby je bylo nutno v budoucnu přeučovat. Při dodržování principu vědeckosti by učitel měl promýšlet učivo podle schématu:

- Uvědomit si, co o daném pojmu zná z matematické teorie, jak jsou pojmy definovány a v jakém systému jsou uvedeny.
- Uvědomit si, jak jsou pojmy uvedeny ve školské matematice, které jejich vlastnosti jsou uvedeny, co a jak se zdůvodňuje.
- Jaký je systém učiva, které poznatky danému pojmu předcházejí, které budou následovat, jak žák využije učivo v dalším studiu nebo v praktickém životě.

Respektování principu vědeckosti neznamená, že se vyžaduje deduktivní přístup k budování pojmů. Od žáků se nevyžadují definice pojmů, ale pojmy jsou vytvářeny v duchu správných definic.

Princip cílevědomosti

Ujasnění si hlavního cíle vyučování matematice je jedním ze základních východisek učitelovy práce. Cílové zaměření vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace je explicitně formulováno v Rámcovém vzdělávacím programu. Cíle každé vyučovací jednotky by měly být formulovány tak, aby byly konkrétní, splnitelné a kontrolovatelné. Přílišná obecnost stanovení cílů nebo formální přístup při jejich formulaci nemá žádný význam.

Princip výchovnosti vyučování

Matematika jako vyučovací předmět přispívá svým obsahem i svými metodami práce výrazně k rozvíjení celé osobnosti žáka. Vede žáky k tvořivosti, vytrvalosti, systematičnosti, samostatnosti, rozhodnosti, smyslu pro přesnost, k odpovědnosti, chápání kulturních hodnot, schopnosti komunikace s jinými, spolupráci, zvídavosti, i k potřebě neustálého vzdělávání.

Princip spojení školy se životem

Výuka matematiky přispívá k realizaci tohoto principu výrazně, neboť matematika je součástí všech oblastí života společnosti. Žádný obor lidské činnosti se neobejde bez znalostí matematiky. Motivace jednotlivých témat školské matematiky zpravidla vychází z jejích aplikací v praktickém životě.

Princip spojení teorie s praxí

Matematika se rozvíjí na základě potřeb společností a zpětně na její rozvoj působí. Ve školské matematice je třeba citlivě zvážit podíl nezbytných teoretických poznatků jednotlivých témat a podíl aplikací. Při respektování tohoto principu je třeba varovat se dvou extrémních přístupů – jednak přeceňování pouhého prakticismu a podceňování úlohy teoretické podstaty učiva a jednak zdůrazňování teoretických poznatků bez potřebných vazeb na praktické využití.

Princip přiměřenosti

Výuka matematiky by měla odpovídat stupni vývoje žáka zejména vzhledem k rozvoji jeho logického myšlení a rozvoji schopnosti zobecňovat a provádět abstrakce. Přiměřený by měl být i obsah a metody práce ve výuce matematiky.

Princip soustavnosti

Učivo matematiky je uspořádáno systematicky, v logické návaznosti a to je třeba ve výuce respektovat. Nové učivo by mělo navazovat na dříve probrané, postupovat bychom měli od jednoduššího učiva ke složitějšímu učivu, od konkrétního k abstraktnímu. Prvky učiva vyšší úrovně vyžadují bezpečnou znalost prvků učiva nižší úrovně. Matematika vyžaduje pravidelnou a soustavnou práci, častěji a v menších kvantech. Žákům je příjemná soustavnost v práci učitele, nahodilost a chaos nesnášejí.

Princip názornosti

Nejvýstižněji tento princip formuloval J. A. Komenský: „*Aby všechno bylo předváděno všem smyslům, kolika možno. Totiž věci viditelné zraku, slyšitelné sluchu a hmatatelné hmatu a může-li něco býti vnímáno najednou všemi smysly, budiž předváděno více smyslům.*“

Matematické představy vytváříme na základě manipulativních činností s konkrétními předměty a později se symboly tak, aby docházelo k požadovaným abstrakcím. Ve výuce matematiky je chybná jak přemíra názoru (pokud ji žák už nepotřebuje), tak nedostatek názoru. Názor dobrým žákům usnadní chápání poznatků, slabším žákům dokonce umožní pochopení poznatků. Názor plní ve výuce matematiky funkci motivační – měl by připravit žáka k aktivnímu vnímání po stránce psychologické a měl by být zdrojem získání zájmu žáka, Dále plní funkci didaktickou – měl by vyvolávat a usměrňovat tvorbu správných představ na základě smyslového vnímání a usnadňovat pochopení učiva.

Princip uvědomělosti

Učivo matematiky by měl žák zvládnout na základě uvědomělého pochopení, aby učivu porozuměl, uvědomoval si smysl pro jeho další studium i běžný život. Chápání vztahů mezi matematickými pojmy, schopnost zdůvodňovat postupy, aplikovat učivo v nových situacích zabraňuje formalismu ve výuce matematiky. Neomezujeme se pouze na podávání návodů JAK si počínat při řešení matematických úloh, ale stavíme žáky před otázku PROČ takto postupujeme.

Princip aktivnosti

Kvalitní poznatky se mohou vytvářet jen na základě aktivních přístupů samotných žáků. Vyučovací proces respektuje samostatnou činnost žáka ve všech svých částech podle vzoru: Učiteli řízení, žáku práce. Aktivita žáka se projevuje jak v procesech poznávání, tak ve volní oblasti, kdy se žák musí přimět k náročné činnosti, kterou matematika vyžaduje.

Princip trvalosti

Ve výuce matematiky je třeba zajistit, aby osvojené vědomosti tvořily trvalý pojmový aparát, který by spolu se získanými dovednostmi mohl žák používat v dalším učivu i v praxi. Učitel využívá promyšleného systému opakování a využívání učiva v nových situacích. Přitom respektuje psychologické zákonitosti zapamatování a zapomínání.

Princip individuálního přístupu k žákům

Respektování individuálních zvláštností žáků je projevem pedagogického mistrovství učitele. Žáci se liší svými osobitými vlastnostmi, úrovní vzdělání, postoji k učení a k práci, tempem práce, charakterovými vlastnostmi, vnímáním, pamětí aj. Každý žák je osobnost, a tu je třeba respektovat. Zvláštní pozornost zasluhují žáci se speciálními vzdělávacími potřebami, mezi které patří žáci se zdravotním postižením a zdravotním znevýhodněním, žáci se sociálním znevýhodněním, žáci nadaní a mimořádně nadaní. Podmínky vzdělávání těchto žáků upravuje Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV, 2006, s. 99).

Princip zpětné vazby

Učitel matematiky by měl mít neustále přehled o tom, zda žáci učivu rozumí, jak jsou schopni využívat je v aplikacích, a podle toho přizpůsobovat probírání učiva, metody i formy práce. V matematice není možné stavět nové učivo na nedostatečně zvládnutém dříve probíraném učivu. Rovněž žáci by měli mít přehled o správnosti svých postupů, myšlenkových pochodů i případných chybách. Předpokládá to vzájemnou komunikaci mezi učitelem a žáky.

Kontrolní otázky:

1. Uveďte příklady nerespektování principu vědeckosti ve školské matematice.

2. Uveďte příklady učiva, ve kterém můžete realizovat princip názornosti:
   a) Konkrétní činností žáků.
   b) Využitím ITC technologií, interaktivní tabule apod.

3. Jak můžete realizovat princip individuálního přístupu k žákům se specifickými poruchami učení, zejména s dyskalkulií?

4. Jak budete rozvíjet matematicky nadané žáky?

5. Seznamte se se zadáním Matematické olympiády pro 6. – 9. ročník ZŠ (např. na stránkách Jednoty českých matematiků a fyziků). Úlohy vyřešte.

6. Seznamte se se soutěží KLOKAN a s úlohami pro 6. – 9. ročník ZŠ.

4 VÝUKOVÉ METODY

Cíl

- seznámení s výukovými metodami a jejich klasifikací z hlediska pedagogiky
- modifikace výukových metod pro výuku matematiky

Průvodce učivem

Kapitola podává stručný přehled výukových metod jednak z hlediska pedagogického pojetí, jednak z hlediska jejich využití v jednotlivých fázích vyučovacího procesu.

Z pedagogického hlediska je rozčlenění výukových metod podle autorů J.Maňáka a V Švece (Maňák, Švec, 2003, s. 49) následující:

4.1 Přehled výukových metod

Klasické výukové metody

Metody slovní (vyprávění, vysvětlování, přednáška, práce s textem rozhovor)
Metody názorně demonstrační (předvádění a pozorování, práce s obrazem, instruktáž)
Metody dovednostně - praktické (napodobování, manipulování, laborování, experimentování, produkční metody)

Aktivizující metody

Metody diskusní
Metody heuristické, řešení problémů
Metody situační
Metody inscenační

Didaktické hry

Komplexní výukové metody
Frontální výuka
Skupinová a kooperativní výuka
Partnerská výuka
Individuální a individualizovaná výuka, samostatná práce žáků
Kritické myšlení
Brainstorming
Projektová výuka
Výuka dramatem
Otevřené učení
Televizní výuka
Výuka podporovaná počítačem

E-learning
Využívání ITC technologií

4.2. Výukové metody z hlediska fází vyučovacího procesu

Z hlediska jednotlivých fází vyučovacího procesu můžeme rozlišovat vyučovací metody:

Metody motivační
- motivace úvodní
- motivace průběžná

Metody expoziční
- metody přímého sdělování poznatků (přednáška, vyprávění, popis, vysvětlování, instrukce
- metody zprostředkovaného přenosu názorem (pozorování, demonstrace, manipulativní činnosti, pracovní metody, hra)
- metody heuristické (metody dialogické, metody problémové)
- metody samostatné práce
- metody bezděčného učení

Metody fixační
- metody opakování vědomostí
- metody nácviku dovedností

Metody diagnostické a klasifikační
- metody didaktické diagnostiky
- metody hodnocení
- klasifikační metody

Výuka matematiky by měla zajistit, aby žáci byli vybaveni určitým množstvím vědomostí a dovedností, poznatků, faktů a zároveň aby uměli přemýšlet, rozhodovat se a aby byly rozvíjeny klíčové kompetence. Proto je třeba zbavit vyučování takových metod práce, při kterých se předávají hotové poznatky, které žáci pouze reprodukují. Volba výukových metod by měla přispívat k vytváření situací, aby si žáci poznatky vytvářeli sami na základě svých činností a myšlenkových procesů.

4.3 Transmisivní a konstruktivistický přístup

Transmisivní přístupy ve vyučování spočívají v předávání hotových poznatků. Tento způsob vyučování se zdá řadě učitelů jako nejefektivnější a jako časově nejkratší cesta k poznávání. Dominantní je učitel, žákům je vše vysvětlováno a očekává se od nich, že si budou učivo pamatovat.

Pro konstruktivistické přístupy je příznačné aktivní vytváření poznatků v mysli žáka. Dominantní je žák, který objevuje (buď sám, nebo za pomoci učitele) nové poznatky a od žáků se očekává, že budou učivo používat a tím si ho zapamatují. Při tomto přístupu se uplatňují metody, kdy žáci pracují samostatně, experimentují, modelují, provádějí manipulativní činnosti. Získané poznatky ověřují a využívají k řešení úloh různého typu a obtížnosti. Je známou zkušeností, že to, co žák získá vlastní myšlenkovou činností, nebo prostřednictvím zážitků, si snadněji zapamatuje.

Na oba tyto přístupy by se však nemělo nahlížet jako na protikladné. Ve výuce matematiky by se oba přístupy měly vhodně doplňovat, neboť žáci by měli mít zásobu určitých faktů, které mohou získat bez konstruktivních přístupů, avšak s porozuměním. Jako příklad z praxe lze uvést např. řešení úloh „o pohybu“. Mnoha žákům zpočátku vyhovoval přístup, který jim poskytoval instrukce, jak při řešení postupovat. Až vyřešili několik analogických úloh, začali o problematice přemýšlet, vnikli do problému a byli pak schopni řešit i úlohy náročnější.

Úkol pro vás

- Prostudujte publikaci: Maňák, J., Švec, V.: Výukové metody
- Uveďte příklad didaktické hry, která by žákům poskytla prostředí pro objevování matematických poznatků.
- Zamyslete se nad vašimi zkušenostmi z využívání transmisivních a konstruktivistických přístupů ve výuce matematiky.

5 KOMUNIKACE V MATEMATICE

Cíl

- Uvědomit si, jak matematika přispívá k rozvoji kompetencí komunikativních.
- Umět prezentovat jednu situaci prostřednictvím různých komunikativních prostředků (textem, obrázkem, symbolickým jazykem).
- Umět docenit význam komunikace obrazově názorné při řešení slovních úloh.

Při výuce matematiky se můžeme setkávat s těmito základními typy komunikace:

Komunikace v oblasti čtení matematického textu

Komunikace verbální
Komunikace verbálně symbolická
Komunikace grafická
Komunikace graficky symbolická
Komunikace obrazově symbolická
Komunikace obrazově názorná

Komunikace v oblasti čtení matematického textu

Čtení matematického textu, slovních a aplikačních úloh a přepis textu do matematického jazyka – zejména u slovních a aplikačních úloh je pro mnoho žáků tvrdým oříškem. Žáci mají problémy s přečtením celého textu, s porozuměním textu, se zvládnutím délky textu. Zpravidla nejsou schopni pochopit otázku úlohy v souvislosti se čteným zadáním a často odpovídají na otázku jinou, která nebyla v textu uvedena a třeba ani nesouvisí s řešením úlohy. Někteří žáci mají problémy s pochopením používaných výrazů v textu úlohy. Další problémy se objevují při čtení symbolického zápisu, tj. čísel, zejména víceciferných nebo desetinných, čtení číselných výrazů, mocnin odmocnin, výrazů s proměnnou apod.

Komunikace verbální

Předpokladem pro to, aby se žák mohl v matematice správně vyjadřovat, je pochopení, tj. porozumění matematickým pojmům, termínům a vztahům. To však vyžaduje, že má vytvořenou jasnou představu o každém pojmu v duchu jeho správné definice, i když se po žácích definice nevyžadují. Při verbálním vyjádření by bylo třeba, aby se učitel i žák zaměřili na podstatné jevy, na skutečnosti, které jsou pro daný pojem nebo dané učivo podstatné, omezili vlastnosti méně podstatné a charakterizovali daný pojem naprosto výstižně. Vyjádřit myšlenku svými vlastními slovy a přitom zachovat význam pojmu je velkým uměním.

Při rozvoji verbální komunikace bychom měli vnímat, zda

- mají žáci v matematice dostatek prostoru pro verbální vyjádření,
- rozumí slovnímu vyjádření učitele,
- rozumí otázkám učitele,
- nejsou odmítáni při slovním vyjádření, které není právě správné nebo nejlépe formulované,
- vidí a vnímají to, co předpokládá jejich učitel,
- jakou mají slovní zásobu a jak rozumí používaným pojmům.

Komunikace verbálně symbolická

Správná verbální interpretace matematických symbolů souvisí s pochopením významu jednotlivých znaků. Žáci by měly zvládnout verbální vyjádření zápisů číslic (znaky 0, 1, 2, …, 9), zápisů čísel pomocí těchto číslic, znaků vyjadřujících rovnost (=) , nerovnost (<, >), znaků operací (+. -, •, :), závorek, dále pak zápis mocnin, odmocnin, množinové symboliky apod. Pro mnoho žáků je problémem číst správně a s porozuměním matematické symboly, dodržet pořadí provádění operací, použít symboliku ke správnému výpočtu.

Komunikace grafická

Pěstování kultury grafického projevu je nejdůležitějším prostředkem grafické komunikace, neboť pokud jsou žáci schopni zachytit myšlenku písemně, svědčí to o jejich dobré matematické úrovni. Téměř všechny matematické zápisy, jako jsou např. zápisy číslic, zápisy čísel, zápisy algoritmů písemných operací, stručné zápisy zadání úloh, postupu jejich řešení i odpovědi, jsou řadu žáků náročné. Také úprava písemného projevu, která je předpokladem správnosti výpočtu, je pro některé žáky obtížně řešitelná. Příčinou mnoha chyb může být právě nedbalý zápis. Platí známé pravidlo, že žákův sešit je obrazem učitelovy tabule. Je však důležité uvědomit si, že upravený písemný projev žáka není zárukou porozumění a zvládnutí matematického učiva. Často se stává, že žáci opisují z tabule vzorně vedený učitelův zápis, mají vzorně vedené zápisy v sešitech, ale vůbec nerozumí tomu, co píší. V současnosti používají žáci stále více k zápisům počítače. Na některých školách se ověřuje výuka s použitím počítačů, bez učebnic a sešitů. I v tomto případě je nutné porozumět všem zápisům, které se na obrazovce počítače objeví.

Komunikace graficky symbolická

Analogické problémy, které se vyskytují v rámci komunikace grafické se objevují i při zápisu symbolickém. Vztah číslice, číslo – zápis čísla je projevem pochopení pojmu a jeho grafického zpracování prostřednictvím symbolu. Zápis všech dalších znaků vyžaduje vždy především pochopení té operace nebo těch vztahů, které symbol vyjadřuje. Je pozoruhodné, že pro mnoho žáků je právě symbolický matematický zápis čitelnější a srozumitelnější, než zápis textem a tedy je pro ně často záchranou při práci s matematickým textem.

Komunikace obrazově symbolická

Znázornění matematické situace prostřednictvím obrázku, např. symbolické znázornění slovní nebo konstrukční úlohy pomocí jednoduchého schematického obrázku slabým žákům řešení umožní, ale i šikovným žákům řešení usnadní. Důležité je, aby symbolické znázornění nebylo chybné a vyjadřovalo skutečnou situaci v úloze. Dalším příkladem snadnější ilustrace vztahů mezi číselnými údaji jsou např. diagramy užívané ve statistice. Symbolické znázornění čísel v diagramech je mnohem více čitelnější, než zápis čísel např. v tabulkách.

Komunikace obrazově názorná

Při komunikaci obrazově názorné žáci využívají obrázků ke ztvárnění matematických pojmů a vztahů. Pomocí obrázků je možné žákům přiblížit zadání slovních úloh, nástin jejich řešení aj. Při znázorňování geometrických útvarů obrázek častokrát usnadní řešení. Využití obrázku k zdůvodnění vlastností, eventuelně k důkazům geometrických vět (např. věty o vlastnostech stran a úhlů v trojúhelníku, Pythagorova věta, Euklidovy věty) velmi názorně objasňují dané učivo. Zvláštní pozornost vyžaduje grafické znázornění stereometrických úloh v rovině, např. ve volném rovnoběžném promítání. Grafické vyřešení úlohy vyžaduje kromě dobře zvládnutého teoretického základu úlohy i jistou úroveň prostorové představivosti. V této souvislosti je možno připomenout požadavek na úroveň písemného a grafického projevu učitele na tabuli.

Sledujme, jaké komunikační procesy probíhají při vyvozování nového pojmu. Např. při vyvození pojmu „zlomek“.

Komunikace verbální: žák řekne: polovina jablka, čtvrtina dortu, …

Komunikace obrazově názorná: žák vidí (nebo nakreslí) obrázky konkrétních objektů.

Komunikace obrazově symbolická: žák nakreslí kruh a rozdělí jej podle zadání, příslušnou část celku vybarví.

Komunikace symbolická: žák zapíše příslušný zlomek $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$.

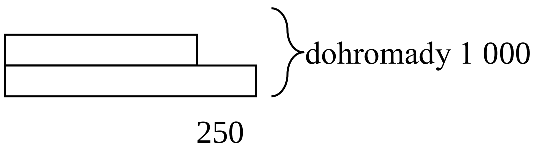
Ponecháme žákovi co největší prostor pro samostatnou práci. Tento přístup napomáhá tomu, že po mnoha podobných situacích jsou vytvořeny předpoklady k tomu, že žák z chápání významu zlomku jako části celku přechází k chápání zlomku jako čísla (racionálního) a dochází k požadované abstrakci.

Řešená úloha

Na příkladu slovní úlohy ilustrujme různé druhy komunikace:

Marek a Filip ušetřili dohromady 1 000 Kč, Marek ušetřil o 250 Kč více než Filip. Kolik ušetřil každý z nich?

Grafické znázornění: Filip
Marek



Komunikace symbolická: číselný výraz: (1 000 – 250) : 2 řešení aritmetické
rovnice: x + (x + 250) = 1 000 řešení algebraické

Řešení: Filip má 375 Kč, Marek má 625 Kč.

Kontrolní cvičení

V každé úloze uveďte grafické znázornění (komunikace obrazově symbolická), řešení aritmetické a řešení rovnicí (komunikace symbolická).

1.Sud s vodou má hmotnost 64 kg. Když se z něj první den odlilo 28 % vody a druhý den jedna třetina zbytku vody, byla hmotnost sudu se zbývající vodou 34 kg. Jakou hmotnost má prázdný sud a kolik kg vody v něm původně bylo?

2. Čerstvé houby obsahují 90 % vody, sušené houby jen 12 % vody. Vypočítejte, kolik kilogramů čerstvých hub musíme nasbírat, abychom získali 3 kg sušených hub.

3. S využitím obrázku dokažte Pythagorovu větu (několika způsoby).

Řešení:

1. Sud 14 kg, voda 50 kg.
2. 26,4 kg

Pozornost by zasluhovalo i zkoumání dalších typů komunikace, např. komunikace nonverbální, komunikace činem aj., které mají rovněž velký význam pro úspěšnost žáků v matematice.

Kromě výše uvedených typů komunikace ve výuce je třeba zamýšlet se i nad komunikací učitel – žák, nad komunikací pedagogickou, která významně ovlivňuje efektivitu práce učitele i žáka. Kultivované vyjadřování, taktní a citlivé jednání, snaha o porozumění, respektování názorů jiného, schopnost pracovat s otázkou jsou výrazem vysoké profesní úrovně pedagoga. Každé slovo učitele, způsob a tón, kterým je proneseno, má v konkrétní situaci svůj význam a výchovný dopad.

6 BUDOVÁNÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ V MATEMATICE

Cíl:

- Uvědomit si potřebu dobré znalosti matematických pojmů a možnosti didaktické transformace do učiva matematiky základní školy
- Pochopit rozdíl mezi induktivními a deduktivními přístupy při výuce matematiky na základní škole

Průvodce studiem

Vytváření všech matematických pojmů ve vyučování matematice na základní škole předpokládá, že učitel matematiky má o každém pojmu jasnou představu, že jej dokáže přesně definovat a že zná jeho další vlastnosti. Na základě svých odborných znalostí pak dokáže vytvářet správné představy pojmů u žáků, v duchu správných definic, ale po žácích definice nevyžaduje.

6.1 Pojmy a jejich vlastnosti

Nejprve uveďme, co rozumíme slovem pojem. Podle Slovníku spisovné češtiny (1998, s.286):

Pojem je:

1. Obecná představa (osob, předmětů, jevů, dějů), jejíž obsah je určen souhrnem podstatných vlastností.

2. Představa neboli názor, mínění, udělat si o něčem správnou představu, mít o tom pojem, chápat něco, rozumět něčemu.

My budeme chápat pojem jako jednu z forem vědeckého poznání, která odráží v myšlení podstatné vlastnosti zkoumaných objektů a vztahů.

Každý pojem má určitý obsah a rozsah.

Obsah pojmu – souhrn všech znaků, které jsou pro daný pojem charakteristické.

Rozsah pojmu – množina všech objektů, které mají vlastnosti stanovené obsahem

Jestliže se rozšíří obsah pojmu, zúží se jeho rozsah a naopak.

Příklad: Obsah pojmu rovnoběžník: je to čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné. Rozsah tohoto pojmu tvoří všechny rovnoběžníky. Jestliže rozšíříme obsah tohoto pojmu, např. připojíme shodnost sousedních stran, do rozsahu pojmu patří jen čtverce a kosočtverce.

Podle charakteru můžeme rozlišovat pojmy individuální a obecné. Individuální pojem je tvořen pouze jedním objektem, např. prázdná množina, euklidovský prostor. Obecný pojem obsahuje více než jeden objekt, např. trojúhelník, kružnice aj.

Dále rozlišujeme pojmy konkrétní a abstraktní. Konkrétní pojmy odrážejí konkrétní objekty, např. krychle, kvádr, koule. Abstraktní pojmy vznikají jako objekty myšlení, např. přímka, množina, číslo aj.

S jednotlivými pojmy se žáci seznamují postupně a čím více poznávají jejich obsah i rozsah, tím lépe pojmy chápou. Každý pojem, se kterým pracujeme, musíme žákům řádně vysvětlit, doprovodit nákresy, modely, ilustracemi z reality, aby získali dostatečnou zásobu představ daného pojmu.

Pojmy vytváříme v určitém systému. Pro přehlednost provádíme klasifikace (třídění) pojmů. Klasifikace pojmů musí splňovat všechny atributy rozkladu množiny na třídy:

- Třídění je nutno provádět vždy podle téhož znaku
- Třídění musí být vyčerpávající a úplné – musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu).
- Třídění musí být provedeno tak, aby jednotliví třídy byly disjunktní – každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy.

Příklad: Klasifikace číselných oborů:

Čísla komplexní

Čísla imaginární Čísla reálná

Čísla iracionální Čísla racionální

Čísla záporná Čísla nezáporná

Nula Čísla kladná

Úkol pro vás

1. Uveďte klasifikaci vzájemné polohy dvou přímek v prostoru.
2. Proveďte klasifikaci trojúhelníků a) podle stran b) podle vnitřních úhlů.
3. Proveďte klasifikaci čtyřúhelníků.

6.2 Zavádění pojmů v matematice

Při výstavbě každé teorie má být splněn požadavek přesného definování všech pojmů v teorii používaných. Avšak tento proces by byl nerealizovatelný, kdyby se z některých pojmů nevycházelo jako z pojmů základních. Např. pro definici pojmu přímka by bylo nutné definovat např. pojem čára, tento pojem by vyžadoval definici dalších pojmů a tento proces by nikdy nekončil. Proto se v matematice vychází od tzv. základních pojmů, jejichž význam je přesně vymezen axiomy a ze základních pojmů se potom uvádějí pojmy odvozené pomocí definic.

6.2.1 Pojmy základní

Prvotní pojmy jsou pojmy, ze kterých daná teorie vychází, např. v geometrii jsou to pojmy: bod, přímka, rovina. Význam prvotních pojmů zavádíme pomocí axiomů.

Axiomy jsou věty, jejichž kriteriem pravdivosti je praxe. Axiomatická soustava musí být úplná, bezesporná, žádný axiom nelze odvodit z ostatních.
Jako první vybudoval axiomatickou výstavbu geometrie Euklides, který formuloval pět axiomů, tuto soustavu zdokonalil D. Hilbert. Axiomatická teorie aritmetiky byla uvedena až po objevu teorie množin.

6.2.2 Matematická definice

Další, odvozené pojmy se zavádí pomocí definic. Matematika bez definic by byla možná, ale byla by nepřehledná, neboť každý pojem by se musel neustále vymezovat.

Matematickou definicí rozumíme gramatickou větu, kterou přesně vymezujeme význam nějakého matematického pojmu (Drábek, 1985, s.41).

Podle Slovníku školské matematiky: definice – zavedení nového pojmu pomocí pojmů již dříve známých. Přesněji: definice je ekvivalence, na jejíž jedné straně je nový pojem a na druhé straně jsou jen pojmy dříve známé. (Slovník školské matematiky, 1981, s.28).
Z řady různých definic uvedeme definici nominální a definici konstruktivní, které se ve školské matematice vyskytují nejčastěji.

Definice, kterou se zavádí název definovaného pojmu se nazývá definice nominální. Např. Čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné, se nazývá rovnoběžník.

Definice, kterou se zavádí způsob konstrukce nového pojmu se nazývá definice konstruktivní. Např. Je dán bod S a nezáporné reálné číslo r. Kružnice je množina bodů v rovině, které mají od bodu S vzdálenost r.

Je pochopitelné, že některé pojmy lze definovat různými způsoby. Např. pojem trojúhelník můžeme definovat takto:

D 1. Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je průnik (společná část) polorovin ABC, ACB, BCA.

D 2. Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je množina všech bodů X v rovině, které náleží úsečce AY a zároveň bod Y náleží úsečce BC.

D 3. Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je uzavřená lomená čára ABC sjednocená se svojí vnitřní oblastí.

Na základní škole je třeba přistupovat k definicím pojmů velmi citlivě. Je důležitější, aby žák pojmům rozuměl, uměl uvést jeho reprezentace, všímal si vztahů k pojmům příbuzným a teprve potom byl schopen uvést verbálně, s porozuměním, definici pojmu. Mnoho pojmů se vytváří intuitivně a teprve na střední škole se přistupuje k definicím pojmů. Obtížně by žáci odpovídali na otázku, co je např. přímka, úsečka, číslo apod., avšak představy těchto pojmů mají vytvořeny.

Chybné definice

Při definování pojmů se setkáváme s řadou nedostatků, z nichž některé uvádíme:

Definice nadbytečná – obsahuje více znaků definovaného pojmu, než je nutné.

Definice široká – obsahuje méně znaků, než je potřeba k definování pojmu. Množina objektů, které náleží takto definovanému pojmu je obsažnější, než je množina objektů, které přísluší definici přesné.

Definice úzká – obsahuje více znaků, než je potřeba k definování pojmu. Množina objektů, které náleží takto definovanému pojmu je užší, než množina objektů příslušejících definici přesné.

Definice kruhem – první pojem se definuje pomocí pojmu druhého a vzápětí se druhý pojem definuje pomocí pojmu prvního.

Definice tautologií – pojem se definuje pomocí sebe sama, i když v jiném vyjádření.

Kontrolní otázky

A) Najděte chyby v uvedených definicích a pojmy definujte správně.

1. Kružnice je množina bodů, které mají od daného pevného bodu stejnou vzdálenost.
2. Rovnoběžník je geometrický útvar, který má protější strany rovnoběžné.
3. Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné a shodné.
4. Dva geometrické útvary jsou podobné, když se podobají.
5. Číslo je dělitelné dvěma, je-li sudé. Sudé číslo je číslo, které je dělitelné dvěma.
6. Dvě přímky jsou na sebe kolmé, jestliže svírají pravý úhel. Pravý úhel je úhel, který svírají kolmice.
7. Délka úsečky je vzdálenost dvou bodů. Vzdálenost dvou bodů je délka úsečky.

B) Definujte pojmy: obdélník, čtverec, obsah obdélníku, objem tělesa, desetinné číslo, zlomek.

Řešení

1. Definice široká, může zahrnovat i kouli.
   Je dán bod S a reálné číslo $r > 0$. Kružnice $k(S, r)$ je množina všech bodů X **v rovině**, které mají od bodu S vzdálenost r.

2. Definice široká. Existují i další geometrické útvary, jejichž protější strany jsou rovnoběžné, např. pravidelný šestiúhelník.

3. Definice nadbytečná.
   Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož obě dvojice protějších stran jsou rovnoběžné.

4. Definice tautologií.
   Dva geometrické útvary jsou podobné, právě když existuje reálné číslo $k > 0$ takové, že pro každé dvě dvojice bodů (X,Y), $(X´, Y´)$ platí $|XY| = |XÝ´|$.

   Definice 5., 6., 7. jsou definice kruhem.

5. Přirozené číslo je dělitelné dvěma, jestliže má na místě jednotek některou z číslic 0, 2, 4, 6, 8. Přirozená čísla, která jsou dělitelná dvěma se nazývají sudá čísla.

6. Správně je první věta. Pravý úhel je úhel, který je shodný se svým úhlem vedlejším.

7. Délka úsečky je nezáporné reálné číslo, které udává, jakým je úsečka násobkem úsečky jednotkové. Vzdálenost dvou bodů je délka úsečky.

6.2.3 Matematická věta

Vlastnosti pojmů uvádíme matematickými větami.

Příklad:

Jestliže je přirozené číslo *n* dělitelné třemi, pak jeho ciferný součet je dělitelný třemi.

Jestliže v trojúhelníku platí $a^2 + b^2 = c^2$, pak tento trojúhelník je pravoúhlý s odvěsnami *a, b* a přeponou *c*.

Matematickou větou rozumíme pravdivý výrok s konkrétním matematickým obsahem. Většina matematických vět má tvar obecné kvantifikace implikace výrokových forem o jedné nebo více proměnných. Pro jednu proměnnou můžeme matematickou větu zapsat symbolicky

$$(\forall x \in D)[A(x) \Rightarrow B(x)]$$

kde *D* je definiční obor výrokových forem, *A(x)* se nazývá předpoklad, *B(x)* tvrzení a říkáme, že věta je v podmínkovém tvaru. Každá věta má mít jasně vyslovený předpoklad. Ve větách formulovaných v učebnicích se často stává, že předpoklad není vysloven. Např. věta „Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý“ by měla být vhodněji vysloveny v podmínkovém tvaru: „ Jestliže je geometrický útvar trojúhelník, pak součet jeho vnitřních úhlů je úhel přímý.“

Z původní věty vytvoříme větu obrácenou tak, že zaměníme předpoklad a tvrzení:

$$(\forall x \in D)[B(x) \Rightarrow A(x)]$$

Jestliže vytvoříme negace výrokových forem *A´(x)* a *B´(x)*, získáme větu obměněnou

$$(\forall x \in D)[B'(x) \Rightarrow A'(x)]$$

Úkol pro vás

Najděte v učebnicích matematiky pro základní školu několik matematických vět.

6.2.4 Důkazy matematických vět

V matematice požíváme základní typy důkazů: důkaz přímý, důkaz nepřímý, důkaz sporem a důkaz matematickou indukcí. Tyto důkazy uvádíme zejména pro práci učitele mají největší význam. Na základní škole zpravidla věty nedokazujeme, avšak měli bychom každou větu ověřit, tj. najít cestu, jak tvrzení zdůvodnit. Najdou se žáci, kteří jsou rádi, když jim učitel důkaz věty ukáže.

Důkaz přímý

Přímý důkaz věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ spočívá v tom, že vycházíme z toho, že předpoklad platí a vytvoříme řetězec implikací, které na sebe navazují.

$A(x)$ platí

$A(x) \Rightarrow A_1(x)$, $A_1(x) \Rightarrow A_2(x)$ …. $A_n(x) \Rightarrow B(x)$

Příklad:

Jestliže je poslední dvojčíslí přirozeného čísla n je dělitelné čtyřmi, pak přirozené číslo n dělitelné čtyřmi.
Zapíšeme rozvinutý zápis přirozeného čísla n:
$n = a_n \,.\, 10^n + a_{n-1} \,.\, 10^{n-1} + \ldots + a_3 \,.\, 10^3 + a_2 \,.\, 10^2 + a_1 \,.\, 10^1 + a_0,$ pak
$n = 100 \,.\, (a_n \,.\, 10^{n-2} + a_{n-1} \,.\, 10^{n-3} + \ldots + a_3 \,.\, 10^1 + a_2) + a_1 \,.\, 10^1 + a_0$
první část výrazu je dělitelná čtyřmi (100 = 4 . 25), pokud bude ($a_1 \,.\, 10^1 + a_0$), což je poslední dvojčíslí čísla n, bude číslo n dělitelné čtyřmi.

Důkaz nepřímý

Podstata nepřímého důkazu spočívá v tom, že místo věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ dokážeme větu obměněnou $B'(x) \Rightarrow A'(x)$.

Příklad: Jestliže číslo n^2 je dělitelné třemi, pak číslo n je dělitelné třemi.

Z dané věty vytvoříme větu obměněnou: Jestliže číslo n není dělitelné třemi, pak číslo n^2 není dělitelné třemi.

Jestliže číslo n není dělitelné třemi, pak n je tvaru $n = 3k + 1$ nebo $n = 3k + 2$.
Pak $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3k(3k + 2) + 1$ nebo $n^2 = 9k^2 + 6k + 4 = 3k(3k + 2) + 4$. Tedy žádné z těchto čísel není dělitelné třemi a původní věta platí.

Důkaz sporem

Důkaz sporem je založen na skutečnosti, že nemůže platit současně nějaká věta a zároveň její negace. Předpokládáme, že věta $A(x) \Rightarrow B(x)$ neplatí, že platí její negace $(A(x) \Rightarrow B(x))'$.

Příklad: Dokažte, že $\sqrt{5}$ není racionální číslo.

Předpokládáme, že věta neplatí, tj. platí její negace: $\sqrt{5}$ je racionální číslo. Tedy
$\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá čísla, $q \neq 0$ a p,q jsou nesoudělná. Úpravami dostaneme:

$5 = \frac{p^2}{q^2}$, $5q^2 = p^2$ tedy p^2 je násobkem čísla 5, a také p je násobkem čísla 5. Můžeme psát $p = 5k$, pak $5q^2 = 25p^2$, $q^2 = 5p^2$, tedy q je násobkem čísla 5. Čísla p a q mají společného dělitele číslo 5, což je spor s předpokladem věty. Tedy $\sqrt{5}$ není racionální číslo.

Důkaz matematickou indukcí

Podkladem důkazu matematickou indukcí je jeden z Peanových axiomů aritmetiky přirozených čísel.

1. Dokážeme, že věta platí pro první prvek.
2. Předpokládáme, že věta platí pro nějaké k a dokážeme, že věta platí pro $k + 1$.

Příklad: Dokažte, že platí $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

2.5.1 V(1): $1 = 1^2$

2.5.2 $V(k) \Rightarrow V(k + 1)$

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Kontrolní otázky

1. Jakou matematickou průpravu z hlediska budování pojmů by měl mít učitel 2. stupně základní školy?
2. Jak zdůvodníte žáku 8. ročníku ZŠ, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo?
3. Jak zdůvodníte žáku 6. ZŠ, že nulou nelze dělit?
4. Uveďte geometrickou interpretaci věty o součtu lichých čísel:
$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$
5. Definujte osu úsečky, vyslovte větu o vlastnostech každého bodu osy úsečky a větu dokažte.
6. Definujte osu úhlu, vyslovte větu o vlastnostech každého bodu osy úhlu a větu dokažte.

S matematickými pojmy se žáci seznamují postupně a tyto pojmy se jim stávají jasnější, čím lépe poznávají jejich obsah a rozsah. Zpravidla se to děje postupně – na určitém stupni není zpravidla možné, aby se žáci seznámili s celým obsahem i rozsahem pojmu. Učitel nevyžaduje od žáků definice pojmů, avšak v duchu správného významu pojmu pojem postupně vytváří.

Na závěr kapitoly uveďme příklady ze starších učebnic, jak jejich autoři přistupovali k uvedení základních pojmů bod, přímka, rovina:

1.Učebnice Josef Vinš: Geometrie pro čtvrtou třídu středních škol, vydáno v Praze r. 1927:

Základní pojmy prostorové

„Drobné předměty, jako zrnka písku, částečky křídy neb tuhy, vrchol krychle, vedou nás k představě bodu. Napiatá nit, hrana krychle neb pravítka vzbuzují v nás představu přímky.

List papíru, deska stolu, stěna krychle jsou nedokonalými představami roviny. Bod, přímka a rovina slují základními útvary měřickými.
Pohybem bodu vytvoříme čáru (přímku neb křivku).
Pohybem přímky neb křivky vytvoří se plocha (rovina neb plocha křivá).
Pohybem plochy vzniká těleso.

Dále pokračuje:

Postup a metoda geometrie

„Předměty, jimiž znázorňujeme body, přímky, roviny a ostatní útvary geometrické, jsou nedokonalými obrazy těchto útvarů: dokonalé útvary geometrické ve skutečnosti neexistují a jsou jen našimi představami.
1. Poznatky, jež nalézáme na jednoduchých útvarech základních a jež jako samozřejmé čerpáme ze zkušenosti, z názoru, vyslovujeme zásadami (axiomaty).
2. Základní útvary geometrické spojujeme v nové geometrické útvary složitější; při každém novém útvaru geometrickému jest třeba udati, ze kterých útvarů vznikl a jak byl zbudován. To děje se výměry (definicemi).
3. Zkoumáním těchto nových útvarů přicházíme k novým poznatkům a vlastnostem, jež pronášíme poučkami (teorémy).V každé poučce shledáváme předpoklad a tvrzení.

2. Učebnice Jan Vojtěch: Geometrie pro IV. třídu středních škol, vydáno v Praze r.1921:
„Za první základní pojem a za prvek všech geometrických útvarů volíme bod. Za pojmy základní volíme dále přímku jako nejjednodušší čáru a rovinu jako nejjednodušší plochu.
Představu přímky poskytují napjatá nit, paprsek světelný; představu roviny dává list papíru, tabule, hladina vody v klidu. Přímku i rovinu si myslíváme (jako čáry a plochy vůbec) složeny z bodů. Jako základní věty přijímáme z pozorování především:

- *Dvěma různými body lze vést vždy a jedinou přímku.*
- *Třemi body, jež neleží v téže přímce, lze položiti vždy a jedinou rovinu.*
- *Obsahuje-li rovina dva body přímky, obsahuje ji celou.*

3. Učebnice Eduard Čech: Geometrie pro 1. třídu středních škol, vydáno v Praze v r. 1946:

Rýsování přímek

„Myšlená čára nemá tloušťku. Čáry jsou přímé a křivé.
Slovem přímka označujeme celou neomezenou přímou čáru.
Slovem úsečka označujeme přímou čáru na obou stranách omezenou.
Bod nemá velikost, jen určitou polohu.“

Úkol pro vás

1.Připomeňte si axiomatický systém budování základních geometrických pojmů.

2. Vyhledejte v současně používaných učebnicích matematiky, jakým způsobem jsou uvedeny základní geometrické pojmy bod, přímka, rovina.

3. Vyhledejte v současně používaných učebnicích matematiky, jak jsou uvedeny pojmy polopřímka, polorovina, úsečka, úhel.

6.3 Pojmotvorný proces

Pro učitele matematiky je velmi důležité sledovat, jak se vytváří jednotlivé pojmy u žáků na základě jejich vlastního poznání, bez přispění dalších osob. Příkladem může být vytvoření pojmu přirozeného čísla, kdy tříleté až čtyřleté dítě začne chápat kvantitu a postupně si vytváří, zcela samostatně, představy přirozených čísel do pěti. Skutečnost, že jej dospělý učí číselnou řadu („počítat do deseti)“ na to nemá žádný vliv. Poznávací proces prochází několika etapami, z nichž k základním můžeme uvést motivaci, zkušenosti, poznání. Podrobně o tomto procesu pojednává např. Hejný (1990, s.23)

Teorii pojmotvorného procesu můžeme najít zejména v pracech J. Piageta (1966), L.S.Vygotského (1970) a dalších psychologů. Hejný (1990, s.28) uvádí výsledky:

„Pojmotvorný proces je

1. *Je výsledkem konkrétní činnosti člověka a jeho komunikace s jinými lidmi. Touto aktivitou si člověk přivlastňuje hotové, historicky utvořené významy.*
2. *Je organickou součástí rozvoje celé psychiky člověka.*
3. *Neutváří ve vědomí pojmy izolovaně, ale strukturalizovaně ve složitých sémantických sítích.“*

Pojmotvorný proces studujeme jako proces rozložený do čtyř etap (Hejný, 1990, s. 28):

1. *„Synkretická etapa – z množství zážitků se vyčleňuje skupina takových, které jsou asociované s budoucím pojmem. Ve skupině se ještě nediferencovalo ani v představě, ani v činnosti, ani ve slovníku. Např. manipulace s oblými předměty (kulatý tvar).*
2. *Etapa předmětných představ – pojem se postupně předdiferencuje, ale zůstává vázaný na konkrétní jevy reality. Manipulace s pojmem je předmětná. Např. odděluje se koule od kruhu (míč, kolečko).*
3. *Etapa intuitivně abstraktních představ – pojem se stává prvkem rodících se idealizovaných a abstraktních představ. Manuální operace jsou postupně nahrazovány myšlenkovými. Např. kružnice a její rýsování.*
4. *Strukturální etapa – pojem se stává prvkem axiomatizované teorie. „*

Nedostatky pojmotvorného procesu:

a) Slovům či znakům je přiřazena chybná představa

Představa některých pojmů se vytvoří nedokonale, např. pojem úhlu žáci chápou jen v dosahu nakreslených ramen na papíře, nebo pouze obloučku, kterým je vyznačen, pojem trojúhelníku chápou jen jako jeho hranici, bez vnitřních bodů, nerozlišují pojmy číslo, číslice, pojmy kružnice, kruh apod. Žáci se seznamují s postupy, jak co provádět, ale chybí informace proč to takto provádět. Např. při dělení zlomků – dělej to tak že druhý zlomek převrátíš a první jím násobíš. Operace se vyvodí bez jakéhokoliv porozumění.

Je upředňosťován verbalismus, pamětné učení pouček bez pochopení a formalismus, kdy žáci formálně vybudované poznatky považují za správné.

b) Slovům a znakům není přiřazena představa

Žáci používají mnoho pojmů, aniž by chápali jejich význam. Neví, co je desetinné číslo, co je zlomek, vůbec nechápou pojem funkce aj. Formálně s pojmy pracují, avšak správná představa pojmu chybí.

c) Představám chybí jazykové vyjádření

Často žáci argumentují větou „Já to vím, ale neumím to říct." Učitel odpoví: „Pouze to tušíš, kdybys to věděl, umíš to formulovat." Avšak je třeba si uvědomit, že žák, který přemýšlí a svojí vlastní myšlenkovou činností objeví nějaký poznatek, nemusí umět hned najít jeho verbální vyjádření a potřebuje určitý čas i vynaložení úsilí, aby svoji myšlenku vyjádřil slovy. Cennější je vytvořit správné představy pojmů a postupně je slovně vyjadřovat a přiměřeně věku žáků definovat.

Jak můžeme přispívat k nápravě těchto nedostatků?

d) Od 1. ročníku základní školy budujeme všechny pojmy na základě konkrétních činností žáka, tedy nejprve na předmětné úrovni a později na abstraktně intuitivní úrovni. Používáme co nejvíce reprezentací pojmu, který chceme vytvořit.

e) Vyučovací proces zbavíme pouhého verbalismu a formalismu, které zpomalují kognitivní vývoj žáků a vedou k nezájmu o matematiku. Např. pouhé uvedení vztahu pro výpočet objemu jehlanu bez odvození je formálním přístupem.

f) Provádíme včasnou diagnostiku porozumění pojmům tím, že se žáky o pojmech diskutujeme, sledujeme myšlenkové pochody žáka. V písemných projevech sledujeme celý postup, nejen výsledek.

g) Naučíme žáky pracovat s chybou.

h) I přesto, že uvedené postupy jsou náročné na čas a na pedagogické mistrovství učitele pro zapojení celého třídního kolektivu, doceníme jejich kognitivní hodnotu.

Příklady

Práce s chybou. Kolik chyb najdete?

$5a + 4b = 9ab$	$4a^2b + 4ab^2 = 8a^2b^2$	$a^2 + a^3 = a^5$
$7a - 4a = 3$	$6xy^2 - 2xy^2 = 4xy^2$	$a^2 . a^3 = a^6$

$3a + 5a = 8a^2$ $\quad$ $8a^2 : 2a^2 = 4a^2$ $\quad$ $\frac{a}{b}.3 = \frac{3a}{3b}$

$3a \, . \, 5a = 15a^2$ $\quad$ $2x^3y^2 \, . \, 5\, x^3y^2 = 10x^6y^4$

$\frac{ax+y}{az} = \frac{x+y}{z}$ $\quad$ $\frac{ax+by}{a+b} = x+y$ $\quad$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ $\quad$ $\frac{x}{y} : \frac{p}{z} = \frac{xz}{yp}$

Najděte chybu v řešení úlohy:

$a = \frac{3}{2}b$ obě strany rovnosti vynásobíme čtyřmi

$4a = 6b$

$14a - 10a = 21b - 15b$ zapíšeme rozdíl např. takto

$15b – 10\,a = 21b - 14\,a$

$5(3b – 2a) = 7(3b – 2a)$

$5 = 7$

Shrnutí

Ve výuce matematika je jedním z nejdůležitějších faktorů, aby žáci učivu porozuměli, aby měli vytvořené jasné představy o každém pojmu, uměli formulovat vlastnosti pojmů a zdůvodňovat je. Aby toto učitel mohl zajistit, musí mít sám dokonalé znalosti o každém pojmu a jeho vlastnostech a měl by vyslovené věty umět dokázat. I když se na základní škole důkazy vyslovených tvrzení neprovádějí, téměř v každé třídě se najde žák, který uvítá, když se dozví, proč určité tvrzení platí a je schopen důkaz pochopit.

7 HISTORIE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

Historii vyučování matematice nelze oddělit od rozvoje české matematiky.

7.1. Založením pražské univerzity Zlatou bullou královskou vydanou Karlem IV. 7. dubna 1348 se dostává českým zemím vysokého učení. Univerzita měla čtyři fakulty: svobodných umění, lékařskou, právnickou a teologickou.

Vyučovalo se gramatice, rétorice, dialektice a kvadriviu: aritmetice, geometrii, astronomii múzice.

Z významných učitelů působících na Karlově univerzitě můžeme uvést: Jan Křišťan z Prachatic (1368–1439), Jan Šindel (1373– asi 1455) - hvězdář, astronom, Staroměstský orloj, Tadeáš Hájek z Hájku (1525–1600), Tycho de Brahe (1546 –1601), Johan Kepler (1571–1630), Joost Búrgi (1552–1632).

První učebnice počtů:

1530 – Ondřej Klatovský z Klatov:

Nowe knižky wo počžtech na Cifry a na lyny, przytom niektere velmi užytečné regule a exempla mintze rozlyčžně podle biehu kupetzkeho kratze a užytečznie sebrana.

1567 – Jiří Brněnský:
Knížka, v níž obsahují se začátkové umění aritmetického tj. počtům na cifry neb na liny pro pacholata a lidi kupecké.

7.2. Ve druhé polovině 16. a počátkem 17. století nastává rozvoj řemesel, a tím potřeba přesného určování vzdáleností, výměr pozemků, rozvoje obchodních styků a tím se zvyšují požadavky na matematické znalosti širších vrstev obyvatelstva. Vznikají **měšťanské školy**, na kterých se vyučuje čtení a psaní čísel (numerace), sčítání, odčítání, zdvojování, půlení, násobení, dělení, zlomky, trojčlenka, dělení v daném poměru, přepočítávání měr aj. Úroveň byla nízká, učení bylo zpravidla mechanické. Praktickým úkolům zeměměřičským a zvláště měrám zemským je věnován spis Šimona Podolského z Podolí (nar. 1562), který je věnovaný měrám a přispěl k zavedení jednotných měr v českých zemích.

Nelze nezmínit osobnost J. A. Komenského (1592–1670), který formuloval mnoho požadavků na vzdělávání a školu obecně. Zejména jeho principy, které by usnadňovaly poznávání světa ve výchovně vzdělávacím procesu platí do dneška (cílevědomosti, postupnosti, systematičnosti, uvědomělosti, názornosti, aktivnosti, emocionálnosti, přiměřenosti, trvalosti).

7.3. V 17. a 18. století nastává ve světě bouřlivý rozvoj matematiky, zejména v oblasti funkcí a infinitezimálního počtu. V našich zemích je po bitvě na Bílé hoře a tím určitá stagnace. Elementární školy byly přenechány obcím a církvi. V roce 1707 byla založena pražská inženýrská škola, na této škole byla velká pozornost věnována matematice.

7.4. Ve druhé polovině 18. století nastává renesance české matematiky, její rozvoj je spojen se jmény jako např. Josef Stepling (1716–1778), který vychoval řadu žáků a s jeho finanční pomocí byla v roce 1751 zřízena hvězdárna v Klementinu. Mezi jeho žáky patřili např. Jan Tesánek (1728–1788), Stanislav Vydra (1741–1804), který na pražské univerzitě přednášel elementární matematiku (spis Počátkové aritmetiky). Vydrovým žákem byl také Bernard Bolzano (1781–1848).

V šedesátých letech 18. století začíná soustavné pěstování matematiky v českém jazyce. Z mnoha matematiků můžeme uvést Vojtěcha Sedláčka, Rudolfa Skuherského, Josefa Studničku.

Významným činem bylo založení Jednoty českých matematiků a fyziků, která vznikla v roce 1869. Jejím předchůdcem byl Spolek pro volné přednášky z matematiky a fysiky založený v roce 1862.

7.5. Koncem 18. a v 19. století se české země vyznačují rozvinutým průmyslem, podnikáním, osvícenstvím, představou pokroku, vymaněním se z nevědomosti, požadavkem vzdělávání. Tyto požadavky přispěly k reformám, které zavedla osvícená panovnice Marie Terezie. Pro rozvoj školství mělo význam vytváření jednotného školského systému a demokratizace školství. Uveďme nejdůležitější změny:

1774 – reforma elementárního školství

- zavedeny školy normální a kurzy pro učitele
- trojtřídní školy hlavní (alespoň v jednom městě kraje)
- škola triviální (v malých městech nebo na farách), v nich se učilo česky
- vzdělání mělo na sebe navazovat a rozšiřovat se
- doporučena šestiletá docházka

1775 – reforma gymnaziálního studia

- pro přijetí na gymnázium se požadovalo 10 roků věku a příslušné vědomosti prokázané přijímací zkouškou

1869 – zákon o obecném školství

- rozhodující úloha státu ve vzdělávání
- osmiletá povinná docházka
- čtyřleté vzdělávání učitelů
- zavedeny nové předměty – i matematika

1877 – České školy obecné

- cílem vyučování počtům je obratnost v ústním i písemném řešení praktických početních úkolů

- České školy měšťanské

-cílem je jistě a hbitě provádět elementární operace početní, řešit počty měšťanského živobytí, jednoduchého účetnictví živnostenského

(*Cíl vyučování počtům: „Žáci, naučte se jistě a hbitě konati elementární operce početní a čísly zvláštními a s užitím obvyklých výhod a zkrácením, jakož i obratně řešiti počty měšťanského živobytí. Konečně vycvičte se v jednoduchém účetnictví živnostenském.)*

7.6. 20. století

1915 – České školy obecné

- praktické početní úlohy ze života – účetnictví, spoření, míry a váhy, měna, výpočty délek, obsahů, objemů, odhady. Čtyři základní operace s čísly celými (tj. přirozenými), **desetinnými**, často se vyskytujícími **zlomky**.

1932 – měšťanské školy

- hbité řešení početních úkolů podle potřeb podnikání a veřejného života, návyk počtářského **myšlení**, počítání s **čísly obecnými.**

1948 – první školský zákon –přechod na jednotnou školu

- 1. stupeň pětiletý – obecná škola
- 2. stupeň čtyřletý – střední všeobecně vzdělávací škola
- 3. stupeň – gymnázia a odborné školy

1953 – 54 – druhý školský zákon

- osmiletá školní docházka – (základní vzdělávání)

- jedenáctiletá střední škola - (3 roky středoškolského vzdělávání)
- složkami matematiky jsou aritmetika, algebra, geometrie, trigonometrie.

1960 – základní devítileté školy

- první stupeň pětiletý
- druhý stupeň čtyřletý
- postupná přeměna jedenáctiletých středních škol na samostatnou ZDŠ a Střední všeobecně vzdělávací školu (SVVŠ).
- **Obsah matematického učiva**:
- **Aritmetika**: Čtyři základní početní výkony s čísly celými, desetinnými, zlomky, vlastnosti operací, užití na příkladech z praxe. Rozvoj matematického myšlení.
- **Algebra:** počítání s obecnými čísly.
- **Geometrie** – planimetrie, stereometrie – řešení praktických úloh.

1968 – zákon o čtyřletých gymnáziích

1976 – postupné ověřování nového pojetí výuky matematiky

- Zařazení množinově logického pojetí výuky matematiky od 1. ročníku základní školy.
- První stupeň čtyřletý
- Druhý stupeň čtyřletý
- 5. – 8. ročník - posílení algebry, zejména pojmů: zobrazení, funkce, rovnice, nerovnice.

1983 – zařazení množinového pojetí do všech tříd základní a střední školy

„Cílem vyučování matematice na 1. stupni ZŠ je zajistit, aby si děti pomocí názorného poučení o množinách a v bohatě rozvinutých činnostech osvojily základní poznatky o přirozených číslech a geometrických útvarech v prostoru a naučily se své vědomosti a dovednosti aplikovat v reálných situacích a využívat jich jako specifického nástroje myšlení. (Početní výkony s přirozenými čísly, rovnice, nerovnice, geometrické útvary.)

Vyučování matematice v 5. – 8. ročníku navazuje na 1. – 4. ročník a má umožnit žákům osvojit si matematické metody jako účinný aparát pro řešení praktických situací a současně má vytvořit pevný základ pro další studium na středních školách. (Početní výkony s racionálními čísly, rovnice, soustavy rovnic, kvadratická rovnice, nerovnice, úpravy výrazů, zobrazení, funkce, geometrická zobrazení aj.)“

1986 – úprava osnov matematiky z roku 1983 (zjednodušení)

- Osnovy – učivo rozčleněno do ročníků a do témat, hodinová dotace

1990 – změny ve školském systému

- Školy státní, soukromé, církevní

1996 – povinná devítiletá školní docházka

- Vzdělávací programy: Základní škola – většina škol
  Obecná škola – některé školy – 1. stupeň
  Občanská škola – některé školy – 2. stupeň
  Národní škola – málo škol – 1. stupeň

Osnovy Vzdělávacího programu Základní škola – učivo rozděleno do ročníků a témat, bez hodinové dotace

7.7. 21. století

2004- Rámcové vzdělávací programy
Od 1. 9. 2007 výuka v 1. a 6. ročníku podle ŠVP

Centrem vzdělávacího procesu se stává žák a rozvoj jeho klíčových kompetencí (kompetence k učení, k řešení problémů, komunikativní, personální a sociální, občanské a pracovní).
Vzdělávací oblast **Matematika a její aplikace**

Čtyři tématické okruhy (matematika 2. stupeň ZŠ):
- Číslo a proměnná
- Závislosti, vztahy, práce s daty
- Geometrie v rovině a v prostoru
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Školy zpracovávají své vlastní Školní vzdělávací programy, ve kterých učivo rozčlení do ročníků a naplňují tak, aby byly splněny očekávané výstupy a rozvíjely se klíčové kompetence žáků.
Podrobněji jsou zpracovány Standardy pro matematiku.

LITERATURA

[1] BALADA, F.: *Z dějin elementární matematiky.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1959.

[2] BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy, 1. část.* Brno: Masarykova univerzita, 1987.

[3] BROCKMAYEROVÁ- FENCLOVÁ, J., ČAPEK, V., KOTÁSEK, J.: *Oborové didaktiky jako samostatné vědecké disciplíny.* In: Pedagogika roč. XLX, 2000, s. 23 – 37.

[4] ČECH, E.: *Geometrie pro1. třídu středních škol.* Praha: JČ MF, 1946

[5] DIVÍŠEK, J. a kol.: *Didaktika matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989.

[6] DRÁBEK, J. a kol.: *Základy elementární matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985.

[7] GAVORA, P. a kol.: *Pedagogická komunikácia na základnej škole*. Bratislava: Veda, 1988.

[8] HEJNÝ, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky.* Bratislava: SPN, 1990.

[9] HEJNÝ, M., KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika.* Praha: Portál 2009.

[10] HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. (eds.): *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1. a 2. díl*. Praha: PdF UK, 2004.

[11] KOMENSKÝ, J. A.: *Didaktika analytická*. Praha: 1947.

[12] Kolektiv: *Slovník spisovné češtiny.*Praha: Academia 1998.

[13] Kolektiv: *Slovník školské matematiky*. Praha: SPN, 1981.

[14] KVĚTOŇ, P.: *Kapitoly z didaktiky matematiky*. Ostrava: PdF, 1982.

[15] LEBLOCHOVÁ, J.: *Historie vyučování matematice v českých zemích. Diplomová práce*. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2005.

[16] MAŇÁK, J., ŠVEC, V.: *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003.

[17] MAREŠ, J., KŘIVOHLAVÝ, J.: *Komunikace ve škole*. Brno: CDVU 1995.

[18] MIKULČÁK, J.: *Didaktika matematiky*. Praha: SPN, 1982.

[19] NOVÁK, B.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 1*. Olomouc: PdF, 2003.

[20] NOVÁK, B.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 2*. Olomouc: PdF, 2005.

[21] ODVÁRKO. O.: *Přehled matematiky.*Praha: Prometheus, 2004.

[22] PIGET, J.: *Psychologie inteligence*. Praha: SPN, 1996.

[23] PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J.: *Pedagogický slovník*. Praha: Portál 1998.

[24] SPAGNOLO, F., ČIŽMÁR, J.: *Komunikácia v matematike*. Brno: PřFMU , 1993.

[25] STEHLÍKOVÁ, N.: *Některé komunikační jevy v hodinách matematiky*. In: Sborník příspěvků Dva dny s didaktikou matematiky 2003. Praha: PedF UK, 2003.

[26] ŠIMONÍK, O.: *Úvod do školní didaktiky*. Brno: MSD, 2005.140 s. ISBN 80-86633-33-0.

[27] VINŠ, J.: *Geometrie pro čtvrtou třídu středních škol.* Praha: 1927.

[28] VYGOTSKIJ, L. S.: *Myšlení a řeč.* Praha, SPN, 1970.

[29] VOJTĚCH, J.: *Geometrie pro IV. třídu středních škol.* Praha: 1921

[30] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Dostupné: www.vuppraha.cz

[31] Učební osnovy základní devítileté školy. Matematika. Praha: SPN, 1973.

[32] Učební osnovy základní školy, matematika 5. – 8. ročník. Praha: SPN, 1979.

[33] Učební osnovy pro 1.- 9. ročník Vzdělávací program Základní škola. Matematika. Praha: Fortuna 1996.