PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Speciální teorie relativity

Doc. RNDr. Petr Sládek, CSc.

Pedagogická fakulta
Masarykova Univerzita
Poříčí 7, 603 00 Brno

Pro potřeby přednášky zpracováno s využitím http://www.fyzika007.cz/specialni-teorie-relativity, a dalších materiálů např. zde uvedených

Úvodem

Klasická mechanika

↓

Klasická mechanika - vznik v 17. století (Newton, Galileo)

- shrnutí veškerých poznatků o pohybu těles do tří Newtonových pohybových zákonů:
  - **zákon setrvačnosti**
  - **zákon síly**
  - **zákon akce a reakce**

Úvodem

Klasická mechanika X nové teorie

Na počátku 20. století se objevily dvě teorie, zcela popírající samotné základy klasické fyziky a tvořící základ fyziky moderní:

● teorie relativity (speciální a později obecná) – makroskopické předměty, popis chování při velmi vysokých rychlostech, chování ve velmi silných gravitačních polích,

● kvantová teorie – mikroskopické jevy.

Společné rysy obou teorií:

● vychází z předpokladů, které v základech popírají klasickou fyziku,

● pro jevy z běžného života (malé rychlosti, větší rozměry) dávají velmi podobné výsledky jako klasická fyzika (a proto se jednodušší klasická fyzika v těchto situacích používá pořád),

● v oblastech, kvůli kterým vznikly (velké rychlosti, mikroskopické rozměry), dávají předpovědi, které jsou v příkrém rozporu s běžnou zkušeností,

● jejich přijetí znamená „zahození“ mnohého, na co jsme zvyklí se spoléhat.

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Prostor a čas v klasické mechanice

Pojmy rychlost, zrychlení, klid, přímočarý pohyb mohou být definovány pouze tehdy, když je předem daná **vztažná soustava** vzhledem k níž se pohyb tělesa vyšetřuje.

Pod vztažnou soustavou se rozumí soustava prostorových souřadnic udávajících polohu tělesa v prostoru

- dostatečně tuhé a přesné měřící tyče

a hodiny sloužící ke stanovování časových intervalů

- periodický proces, který souhlasí s periodičností jiných procesů

Prostor a čas v klasické mechanice

Obecně známé poznatky v klasické mechanice o prostoru a času:

- polohu tělesa v prostoru určujeme vždy vzhledem k okolním tělesům (vztažné soustavě):
  - pomocí souřadnic (x,y,z v prostoru; x,y v rovině)
  - událost je děj, který nastane v určitém místě prostoru a v určitém čase
- popisujeme jí 4 souřadnicemi (**x, y, z** - místo; **t** - čas konání)

Prostor a čas v klasické mechanice

Čas a prostor jsou v klasické fyzice absolutní, představují jeviště, na kterém se odehrávají fyzikální jevy, ale žádný z těchto jevů toto jeviště nijak neovlivňuje.

⇒

- Čas běží stejně rychle pro všechny pozorovatele (všechny správně běžící hodinky ukazují stejně).
- 1 metr je všude stejná vzdálenost, bez ohledu odkud se na ní díváme.
- atd.

⇒ Není problém zavést soustavu souřadnic.

Přesto všichni nevidí to samé.

Prostor a čas v klasické mechanice

V klasické mechanice o prostoru a čase platí: (pro v << c)

ČAS JE ABSOLUTNÍ - plyne stejně rychle ve všech vztažných soustavách

SOUČASNOST JE ABSOLUTNÍ - 2 události v různých místech současné v jedné soustavě, potom musí být současné ve všech soustavách (plyne z předchozího tvrzení)

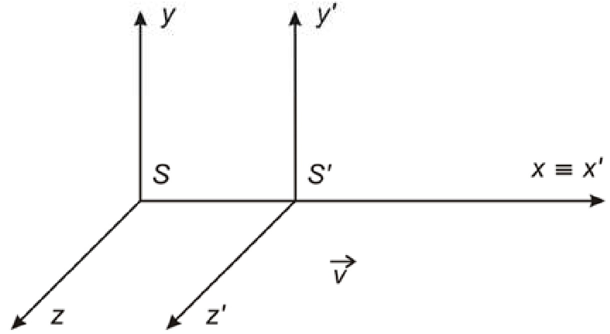
VZDÁLENOST JE ABSOLUTNÍ - v jedné soustavě je vzdálenost dvou míst 50 km, v ostatních soustavách vzdálenost stejných míst je také 50 km

HMOTNOST TĚLESA JE STÁLÁ a nezávislá na velikosti rychlosti, kterou se pohybuje

PLATÍ KLASICKÝ PRINCIP SKLÁDÁNÍ RYCHLOSTÍ

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



Prostor a čas v klasické mechanice

Galileiho (mechanický) princip relativity:

Žádným mechanickým pokusem nemůžeme rozlišit, zda je soustava v klidu nebo v pohybu.

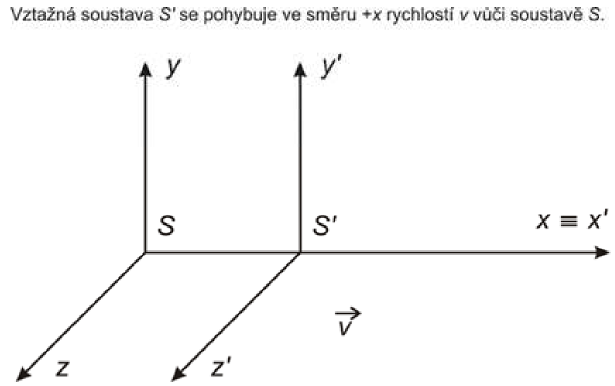
Př. Nádraží a vlak

⇒ Na nádraží naměříme u všech mechanických pokusů stejné výsledky jako ve vlaku, který nádražím rovnoměrně projíždí (předměty budou padat kolmo dolů, kyvadla budou kývat se stejnou frekvencí, kuličky se budou srážet stejným způsobem...).

Sledujeme libovolný fyzikální pokus:

Při pohledu z libovolného místa uvidíme stejný děj, ale souřadnice se budou lišit.

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita



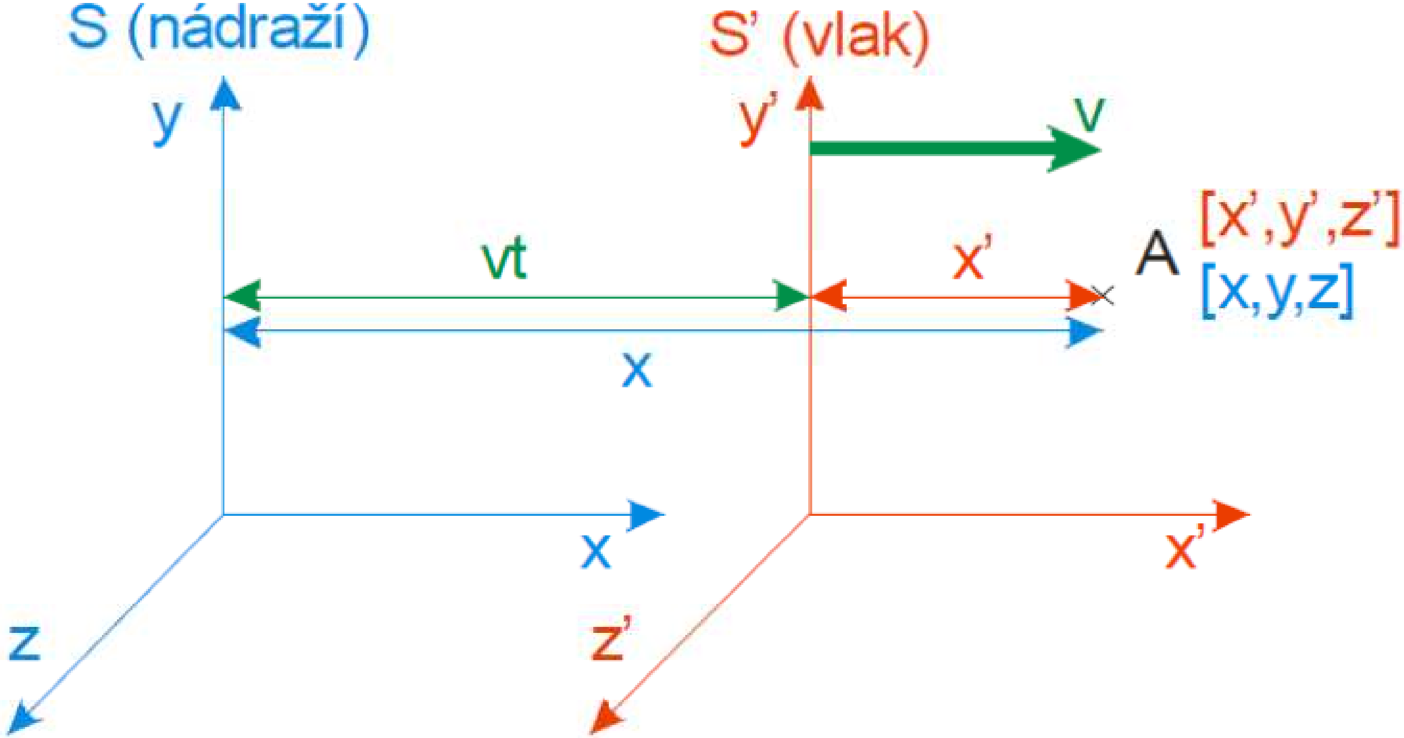
Prostor a čas v klasické mechanice

Galileiho (mechanický) princip relativity

- tvrdí, že zákony mechaniky jsou stejné pro každou inerciální vztažnou soustavu
- všechny inerciální soustavy jsou z hlediska klasické mechaniky rovnocenné
- žádným vnitřním mechanickým pokusem nelze zjistit, ujak rychle se daná soustava pohybuje.

Prostor a čas v klasické mechanice

Jak spolu souvisí souřadnice x a x' ?



Z obrázku je vidět, že platí: $x = x' + vt$.

Prostor a čas v klasické mechanice

- **GALILEIHO (speciální) TRANSFORMACE**
- udává přechod od souřadnic v jedné IVS k souřadnicím v jiné IVS
- platí pouze v klasické mechanice

$$x = x' + v.t$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

Shrnutí: V klasickém fyzice je prostor i čas absolutní transformovatelný pomocí Galileiho transformace.

Prostor a čas v klasické mechanice

Zákony klasické mechaniky jsou invariantní (neměnné) vzhledem ke Galileiho transformaci.

Př. 2.NZ

$$\vec{F} = m.\vec{a} = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}$$

$$F = m.a = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2(x' + vt)}{dt^2} = m\frac{d^2x'}{dt^2} = F'$$

Invariantní vůči Gallieiho transformaci jsou zákon zachování energie a zákon zachování hybnosti.

Vývoj fyziky v 19. století

Experimentální a zejména teoretické výsledky získané především v průběhu 19. století v optice ale zejména v oblasti elektřiny a magnetismu

1873 skotský fyzik James Clerk Mawxwell (1831 – 1879)

rovnice elektromagnetického pole

Tyto rovnice však **nebyly invariantní** vůči Galileiho transformaci.

Počátkem 20. století - holandský fyzik A. Lorenz

rovnice elektromagnetického pole jsou invariantní vůči jisté transformaci souřadnic a času, kterou dnes nazýváme Lorentzovou transformací.

Vývoj fyziky v 19. století

Rovnice mechaniky a elektromagnetického pole by měly být invariantní vůči stejné transformaci a bylo nutné uvedený rozpor řešit.

Rovnice elektromagnetického pole $\Rightarrow$ existence elektromagnetických vln šířících se **rychlostí světla - světlo je elektromagnetickým zářením.**

(existence byla potvrzena pokusy německého fyzika Heinrich Hertz)

Mechanické představy - „nosič" elektromagnetického vlnění

Huygensův pojem **éteru**.

Současně s tím představa klidného a celý vesmír vyplňujícího éteru umožňovala ztotožnit éter s Newtonovým absolutním prostorem.

Fyzikům se tak zdánlivě otevřela možnost určení absolutního pohybu těles vůči nehybnému éteru optickými metodami.

Vývoj fyziky v 19. století

Úsilí fyziků koncem 19. století bylo tak soustředěno na experimentální důkaz existence éteru a podpory výběru jedné ze dvou možností:

- buď upravit Maxwellovy rovnice tak, aby byly invariantní vůči Galileově transformaci

- nebo upravit Newtonovy pohybové rovnice tak, aby respektovaly invariantnost vůči Lorenzově transformaci.

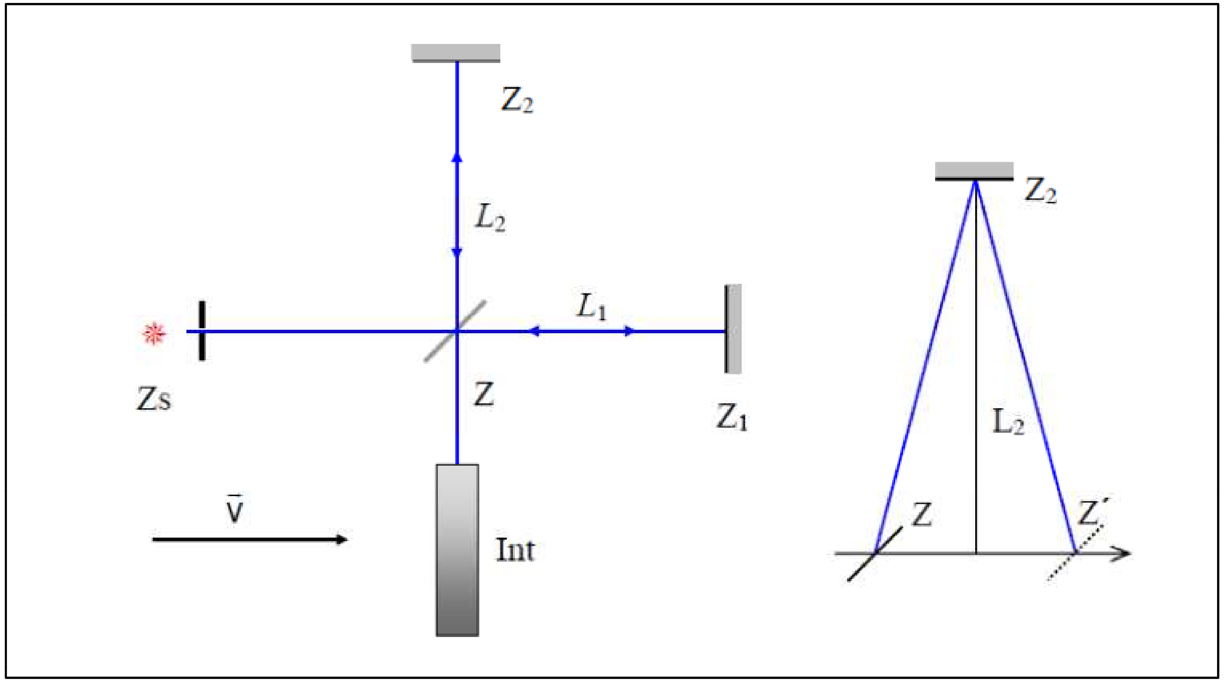
Klíčový experiment: **MICHELSON – MORLEYŮV POKUS**

Předpoklad: *Rychlost světla šířícího se klidným éterem je závislá na rychlosti a směru pohybu pozorovatele.*

O svém pohybovém stavu vůči klidnému éteru by tedy pozorovatel mohl rozhodnout podle jím naměřené rychlosti světla. Navrhnul proto pokus, při kterém se porovnávaly časové intervaly, během nichž světlo proběhne dvě stejné dráhy různě orientované vzhledem k Zemi, pohybující se s pozorovatelem vůči klidnému éteru.

MICHELSON – MORLEYŮV POKUS

První pokus, při kterém se porovnávaly časové intervaly, během nichž světlo proběhne dvě stejné dráhy různě orientované vzhledem k Zemi, pohybující se s pozorovatelem vůči klidnému éteru, provedl Albert Abraham Michelson v Postupimi, opakován byl r. 1887 s Edwardem Morleym v Cleevelandu.



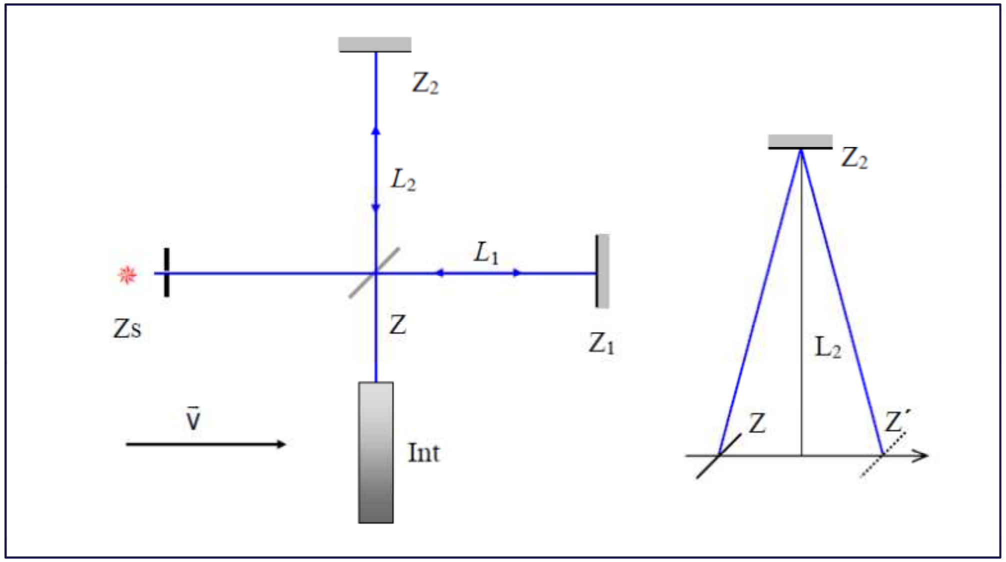
MICHELSON – MORLEYŮV POKUS

1. paprsek

$$t_1 = \frac{L_1}{c - v_Z} + \frac{L_1}{c + v_Z} = \frac{2L_1}{c}\frac{1}{1-\left(\frac{v_Z}{c}\right)^2} = \frac{2L_1}{c\left(1-\beta^2\right)}$$

2. paprsek

$$L_2^2 + \left(\frac{v_Z t_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{c t_2}{2}\right)^2 \Rightarrow t_2 = \frac{2L_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$



Časový rozdíl

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{L_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{L_1}{1-\beta^2}\right)$$

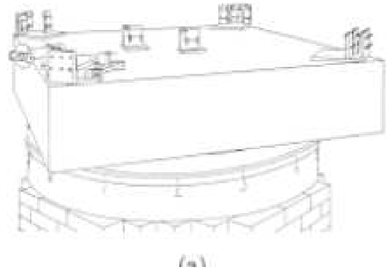
Po otočení o 90°

$$\Delta t_2 = \frac{2}{c}\left(\frac{L_2}{1-\beta^2} - \frac{L_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Při otočení celého zařízení by tedy mělo dojít k posunutí interferenčních proužků, které odpovídá časovému rozdílu $\approx \frac{L_1 + L_2}{c}\beta^2$

K překvapení experimentátorů i napjaté fyzikální veřejnosti však ani při opakování pokusu **nedošlo k žádnému posunutí** interferenčních proužků.

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita



Einsteinovy postuláty STR

K překvapení experimentátorů i napjaté fyzikální veřejnosti však ani při opakování pokusu **nedošlo k žádnému posunutí** interferenčních proužků.

Řešení i vysvětlení problému ⟹ Albert Einstein v r.1905.

Jeho **speciální teorie relativity** byla založená na dvou základních postulátech:

I. postulát speciální teorie relativity – princip relativity

Pro formulaci všech fyzikálních zákonů jsou všechny inerciální soustavy rovnocenné.

II. postulát speciální teorie relativity – princip konstantní rychlosti světla

Světelné signály se šíří ve všech inerciálních soustavách konstantní rychlostí (pro vakuum c= 299 792 458 ms-1).

Lorentzova transformace

Důsledkem Einsteinových postulátů ⟹ nalezení transformace souřadnicové soustavy, která má tu vlastnost, že ponechává nezměněnu rovnici kulové vlnoplochy světelné vlny vyslané z bodového zdroje.

Je-li z počátku souřadnicové soustavy ***x; y; z*** vyslán v okamžiku t = 0 světelný signál, pak v okamžiku ***t*** je jeho vlnoplocha určena rovnicí

$$(x)^2 + (y)^2 + (z)^2 = (ct)^2$$

2.Einsteinův postulát ⟹ v jiné inerciální soustavě ***x'; y'; z'*** **musí** být rovnice téže vlnoplochy

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (ct')^2$$

přičemž *čas už nepokládáme za veličinu absolutní*, plynoucí ve všech inerciálních soustavách stejně a v nové soustavě jej značíme ***t'***.

Lorentzova transformace, prostoročas

Zavedeme-li „časovou souřadnici ***(ct)***

$r^2 = (x)^2 + (y)^2 + (z)^2$

$$s^2 = (x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (ct)^2 = 0$$

$$s'^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2 = 0$$

- Z matematického hlediska začínáme tak pracovat s čtyřrozměrným prostorem se třemi prostorovými a jednou časovou souřadnicí, tzv. ***prostoročasem***, jeho jednotlivé body označujeme jako ***události***.

- Výraz ***s*** nazýváme *intervalem mezi dvěma událostmi*,

  (V případě s = 0 mezi událostí v počátku souřadnicové soustavy v okamžiku *t* = 0 (vyslání světelného signálu) a událostí v bodě vlnoplochy v okamžiku *t* (příchod světelného signálu)).

Interval může být zaveden pro libovolné události, jež nemusí být nutně spojeny světelných signálem $s_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - c^2(t_A - t_B)^2$

Lorentzova transformace, prostoročas

Pro dvě blízké události.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2$$

(pseudoeukleidovská metrika – záporné znaménko u časové souřadnice)

$$s_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - c^2(t_A - t_B)^2 = l_{AB}^2 - c^2 t_{AB}^2$$

Protože $(s_{AB})^2 = (s_{AB}')^2$ (viz dále) pak $l_{AB}^2 - c^2 t_{AB}^2 = l'^2_{AB} - c^2 t'^2_{AB}$

Existuje inerciální vztažná soustava, v níž budou obě události soumístné?

- Z podmínky $l_{AB} = 0$ pak dostáváme $(s_{AB})^2 = -c^2 t'^2_{AB} < 0$:
- Intervaly mezi takovými událostmi nazýváme *intervaly časové povahy* (*časupodobné*). Intervaly spojené se světočárami částic jsou vždy časupodobné ($v < c$), neboť částice v daném intervalu urazí vždy menší vzdálenost než světlo.
- U časupodobných intervalů se pozorovatelé ve všech inerciálních soustavách shodnou na jejich pořadí v čase, tj. např. událost *A* nastala před událostí *B* ve všech soustavách.

Lorentzova transformace, prostoročas

Existuje inerciální vztažná soustava, v níž budou obě události současné?

Z podmínky $t_{AB} = 0$ pak dostáváme $(s_{AB})^2 = l'^2_{AB} > 0$:

- Intervaly mezi takovými událostmi nazýváme *intervaly prostorové povahy* (*prostorupodobné*).
- Pro takové události jsou pojmy „dříve“, „současně“ a „později“ relativní..

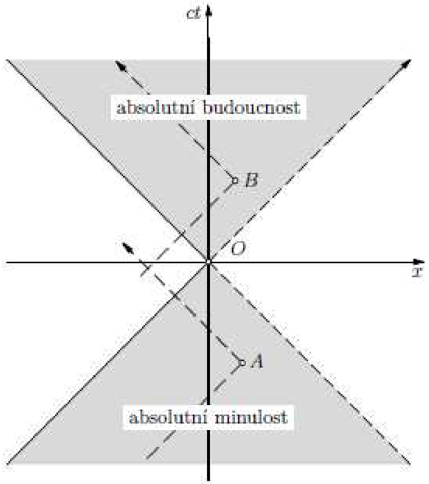
I v případě, že $l_{AB} \neq 0$ i $t_{AB} \neq 0$, může být splněna podmínka $s_{AB}^2 = l_{AB}^2 - c^2 t_{AB}^2 = 0$

Tj. $l_{AB} = c t_{AB}$

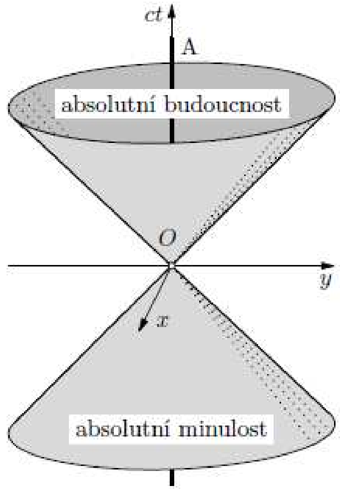
Vidíme, že vzdálenost mezi událostmi u takového intervalu odpovídá šíření světelného signálu, proto takové intervaly nazýváme intervaly světlupodobné (nulové).

Lorentzova transformace, prostoročas

Kauzální struktura prostoročasu:



(a) Absolutní minulost a budoucnost



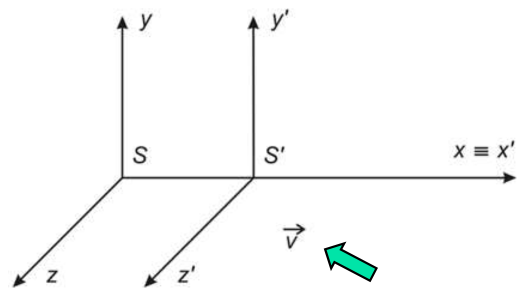
(b) Světelný kužel

- Přímky odpovídající pohybům částic procházejících počátkem a pohybujících se přímočaře museji ležet ve Vybarvených oblastech. Pro kteroukoliv událost z této oblasti a událost v počátku *bude platit* $c^2t^2 - l^2 < 0$, tj. intervaly mezi těmito událostmi jsou časové povahy. Dá se proto najít soustava, v níž kterákoliv událost z této oblasti proběhne v tomtéž místě prostoru jako událost v počátku, ale nedá se najít soustava, v níž by obě události byly současné. Pro oblast nad vodorovnou osou je $t > 0$, takže události z vyplněné oblasti nad osou proběhnou ve všech soustavách *po* události v počátku; tato oblast je proto oblastí *absolutní budoucnosti* vzhledem k události v počátku (i když zde používáme termín „absolutní“, vztahuje se tento pojem k určité události a nemá tedy význam absolutního budoucího času ve smyslu newtonovské fyziky). Podobně události z vyplněné oblasti pod osou představují *absolutní minulost* vzhledem k události v počátku.

Podobnou úvahou zjistíme, že události z nevyplněné oblasti mají tu vlastnost, že interval mezi kteroukoliv z nich a událostí v počátku je prostorupodobný (bez příčinné souvislosti).

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Vztažná soustava S′ se pohybuje ve směru +x rychlostí v vůči soustavě S.



Lorentzova transformace, prostoročas

Transformace souřadnic mezi inerciálními soustavami S a S´ musí splňovat následující podmínky:

- ***x´, y´, z´, t´*** musí být lineárními funkcemi ***x,y,z,t*** , protože podle principu relativity těleso pohybující se rovnoměrně přímočaře v soustavě **S** se bude pohybovat rovnoměrně přímočaře i vůči soustavě **S´**
- Pro velikosti intervalů mezi dvěma událostmi pak musí platit:

$$s'^2 = k \cdot s^2$$

Kde koeficient úměrnosti k musí vyhovovat následujícím

$k \neq k(x,y,z,t)$ homogenita prostoru a času

$k \neq k(\vec{v})$ isotropie (nezávislost na směru)

ale může být $k = k(|\vec{v}|)$ principiálně není omezena

⇓

Požadavky na transformaci intervalu mezi dvěma událostmi s

Lorentzova transformace, prostoročas

Požadavky na transformaci intervalu mezi dvěma událostmi s, s' :

$$s'^2 = k(|\vec{v}|)\ .\ s^2$$

opačná $\quad s^2 = k(|-\vec{v}|)\ .\ s'^2$

Pokud aplikujeme ještě jednou:

$$s'^2 = k(|\vec{v}|)\ .\ k(|-\vec{v}|)\ .s'^2$$

Protože $k(|\vec{v}|) = k(|-\vec{v}|)$, pak $k^2(|\vec{v}|) = 1 \longrightarrow k(|\vec{v}|) = \pm 1$

jediná možnost $k(|\vec{v}|) = +1$, pro zachování identické transformace při v = 0 .

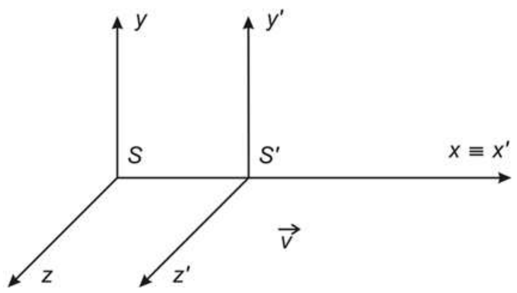
$\Downarrow$

- Pro velikosti intervalů mezi dvěma událostmi pak musí platit:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2 = s'^2 = s^2 = (x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (ct)^2$$

Požadavky na transformaci intervalu mezi dvěma událostmi s, s' :
$s'^2 = k(|\vec{v}|)\ .\ s^2$
opačná $s^2 = k(|-\vec{v}|)\ .\ s'^2$
Pokud aplikujeme ještě jednou:
$s'^2 = k(|\vec{v}|)\ .\ k(|-\vec{v}|)\ .s'^2$
Protože $k(|\vec{v}|) = k(|-\vec{v}|)$, pak $k^2(|\vec{v}|) = 1$ $k(|\vec{v}|) = \pm 1$
jediná možnost $k(|\vec{v}|) = +1$, pro zachování identické transformace při v = 0 .
Pro velikosti intervalů mezi dvěma událostmi pak musí platit:
$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2 = s'^2 = s^2 = (x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (ct)^2$

Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



Lorentzova transformace

Volíme-li $\vec{v} \parallel x$

Pak z linearity *x´, y´, z´, t´* na *x,y,z,t*

$$y' = y \qquad z' = z$$

$$x' = Ax + Bt \qquad t' = Px + Qt$$

kde A, B, P, Q jsou koeficienty lineární závislosti, platící při libovolné poloze a čase a splňující $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2 = s'^2 = s^2 = (x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (ct)^2$

Po dosazení: $(Ax + Bt)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (c(Px+Qt))^2 = (x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (ct)^2$

Platí pro libovolné *x, t* (dostáváme 3 rovnice)

(1) x^2: $A^2 - c^2P^2 = 1$

(2) t^2: $B^2 - c^2Q^2 = -c^2$

(3) xt: $2AB - 2c^2PQ = 0$

(4) Navíc pro počátek O´ platí: $x'_{O'} = 0$ $Ax + Bt$ $\quad -\dfrac{B}{A} = \dfrac{x}{t} = v \quad -B = Av$

Po dosazení: *$(Ax + Bt)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (c(Px+Qt))^2 = (x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (ct)^2$*

Platí pro libovolné *x, t* (dostáváme 3 rovnice)

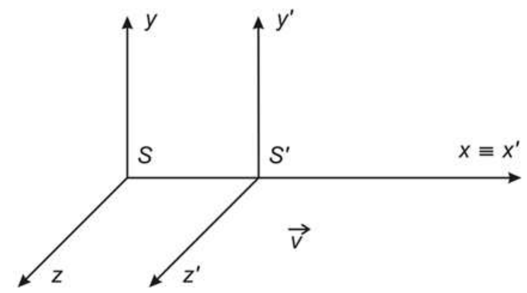
(1) x^2: $A^2 - c^2P^2 = 1$

(2) t^2: $B^2 - c^2Q^2 = -c^2$

(3) xt: $2AB - 2c^2PQ = 0$

(4) Navíc pro počátek O´ platí: $x'_{O'} = 0$ $Ax + Bt$ $\quad -\frac{B}{A} = \frac{x}{t} = v \quad -B = Av$

Vztažná soustava *S'* se pohybuje ve směru +*x* rychlostí *v* vůči soustavě *S*.



Lorentzova transformace

(1) $A^2 - c^2P^2 = 1$

(2) $B^2 - c^2Q^2 = -c^2$

(3) $AB - c^2PQ = 0$

(4) $-B = A\cdot v$

(4) dosadíme do (3)

$-A^2v - c^2PQ = 0$

(1) vynásobíme v (+) sečteme

$A^2v - c^2P^2v = v$

$-c^2P^2v - c^2PQ = v$

$Q = \frac{v + c^2P^2v}{-c^2P}$

(4) dosadíme do (2):

$A^2v^2 - c^2Q^2 = -c^2$ (−) odečteme

(1) vynásobíme v^2

$A^2v^2 - c^2P^2v^2 = v^2$

$-c^2P^2v^2 + c^2Q^2 = v^2 + c^2$

$-c^2P^2v^2 + c^2\frac{(v + c^2P^2v)^2}{(-c^2P)^2} = v^2 + c^2 \quad \Big| \frac{1}{c^2}$

$-P^2v^2 + \frac{v^2 + 2c^2P^2v^2 + c^4P^4v^2}{c^4P^2} = \frac{v^2+c^2}{c^2}$

$\frac{-P^4v^2c^4 + v^2 + 2c^2P^2v^2 + c^4P^4v^2}{c^4P^2} = \frac{v^2+c^2}{c^2}$

$\frac{v^2}{c^2P^2} + \frac{2c^2P^2v^2}{c^2P^2} = v^2 + c^2$

$\frac{v^2}{c^2}\frac{1}{P^2} = c^2 - v^2$

$P^2 = \frac{\frac{v^2}{c^2}}{c^2 - v^2} = \frac{v^2}{c^2(c^2-v^2)}$

$P = \frac{v}{c\sqrt{c^2-v^2}}$

$\boxed{P = \frac{v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

$Q = \frac{1v + c^2\frac{v^2}{c^2(c^2-v^2)}v}{-c^2\frac{v\,1}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

$Q = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2-v^2}}{-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{c^2-v^2+v^2}{c^2-v^2}}{-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}{-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$\boxed{Q = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

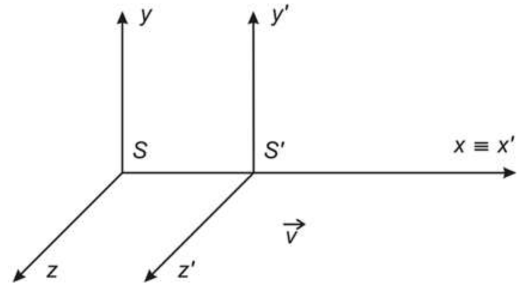
Q do (2)

$A^2v^2 - c^2\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = -c^2$

$A^2v^2 = \frac{c^2}{c^2-v^2}c^2 - c^2 = \frac{c^4 - c^4 + c^2v^2}{c^2-v^2}$

$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$ $\quad$ $\boxed{B = -Av = -\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



Lorentzova transformace

Po výpočtu

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad B = -\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad P = \frac{v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad Q = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Lorentzovy transformace:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

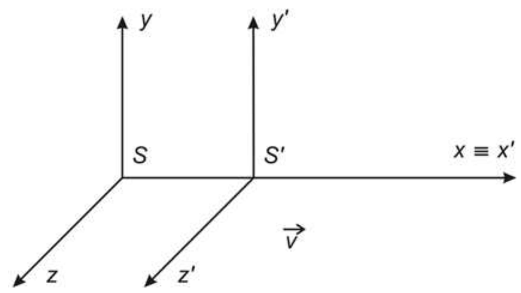
$$x = \gamma\left(x' + vt'\right) = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y = y,$$

$$z = z.$$

Obrácená transformace S´do S – změna znaménka u *v*

Vztažná soustava *S'* se pohybuje ve směru +*x* rychlostí *v* vůči soustavě *S*.



Důsledky Lorentzovy transformace

Relativita současnosti a soumístnosti

- Zatímco relativnost soumístnosti – tj. skutečnost, že když v jedné soustavě nastanou události na stejném místě, v jiné soustavě na místech různých – zažíváme denně v dopravních prostředcích,
- relativnost současnosti patří základním důsledkům Lorentzových transformací

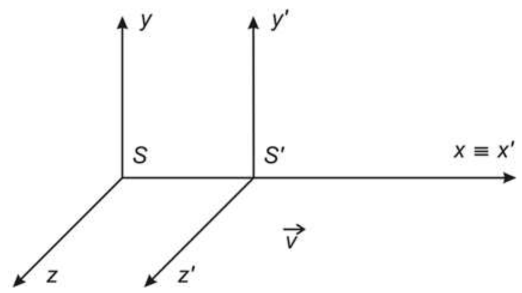
  Uvažujme dvě *současné* události *A* a *B*, které v soustavě *S* nastanou v místech x_A, x_B v časech $t_A = t_B = 0$.

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma\left[t_B - t_A - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)\right] = \gamma\left(\underbrace{\Delta t}_{=0} - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = -\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x.$$

- Vidíme, že pokud budou události *A* a *B* v soustavě *S* nesoumístné, tj. $\Delta x \neq 0$, bude také $\Delta t' \neq 0$ neboli události v soustavě *S'* nebudou současné.

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

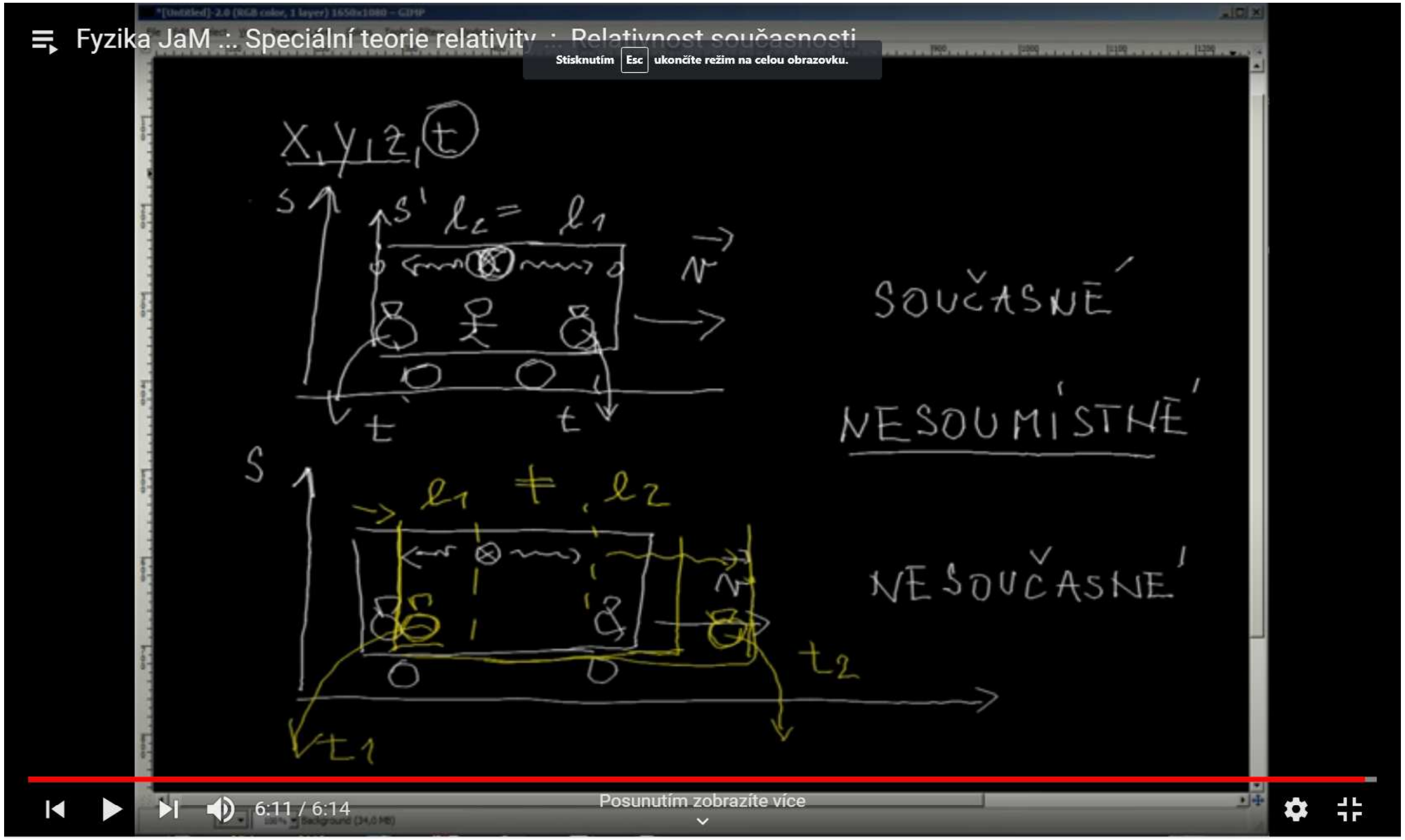
Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



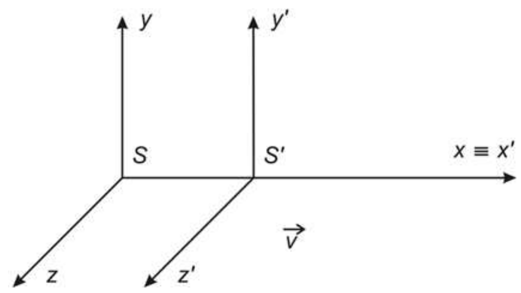
Důsledky Lorentzovy transformace

Relativita současnosti a soumístnosti

https://youtu.be/aZI0klbG4o4?list=PLLOs9FbkODkI8T_5sFJ6-uqU61EHJErci



Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Důsledky Lorentzovy transformace

Dilatace času

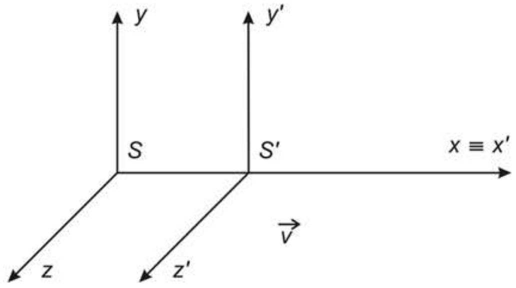
Uvažujme dvě soumístné události A a B v soustavě S v časech t_A a t_B v místech o souřadnicích $x_A = x_B$, které v soustavě S′ nastanou v časech t'_A a t'_B v místech o souřadnicích x'_A, x'_B. Např. zapálení a zhasnutí zápalky.

$$t_A' = \frac{t_A - \frac{v x_A}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_B' = \frac{t_B - \frac{v x_B}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- $$\Delta t' = t_A' - t_B' = \tau' = \frac{t_A - \frac{v x_A}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_B - \frac{v x_B}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_A - t_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

V klidové soustavě (vůči níž se těleso nepohybuje) je časovému intervalu přisouzen index $_0$.

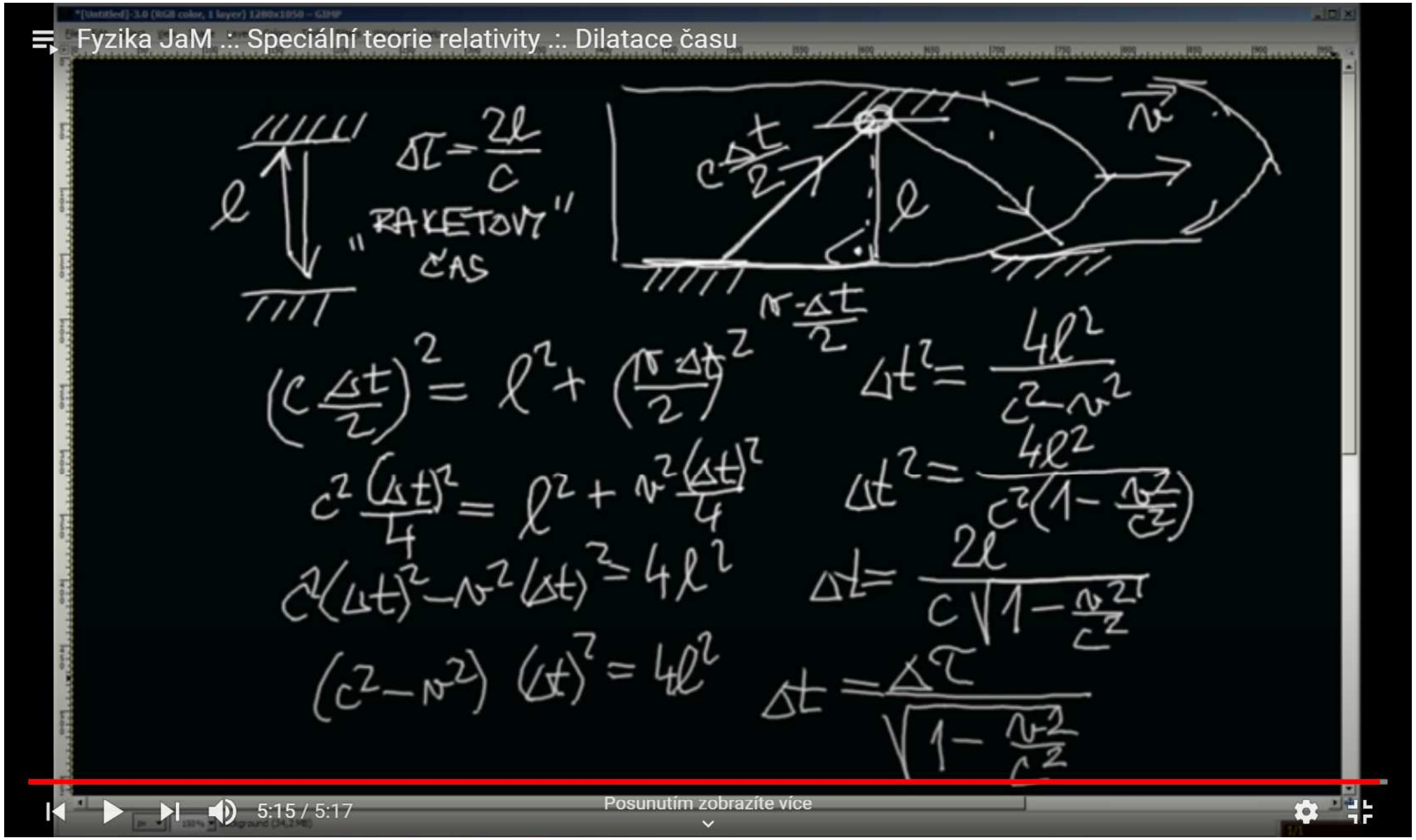
Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



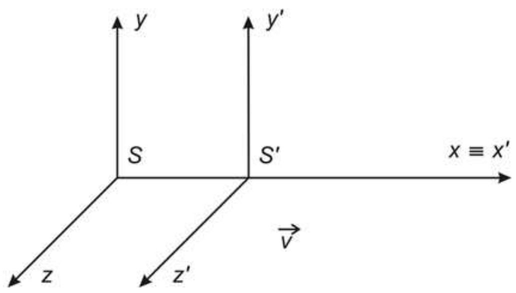
Důsledky Lorentzovy transformace

Dilatace času

https://youtu.be/Md28i1mqRUQ?list=PLLOs9FbkODkI8T_5sFJ6-uqU61EHJErci



Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



Důsledky Lorentzovy transformace

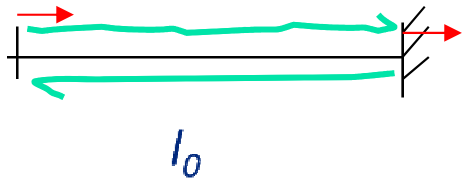
Kontrakce délek

Měření délky pohybující se tyče závisí na změření vzdálenosti koncových bodů x_1, x_2 současně. Změříme-li délku tyče v soustavě S současně, pak v S´ vůbec nemusí být současně změřeny $x_1{}'$ a $x_2{}'$.

Jak změříme?

Změříme délku tyče vyslaným paprskem, který se na druhé straně odrazí od zrcadla a doletí zpět. Známe rychlost světla ve vakuu c , změříme-li čas, dopočítáme délku.

Nechť v S´ je tyč délky ℓ_0 v klidu.



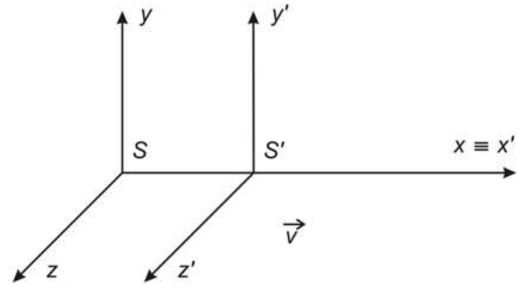
Doba tam i zpět stejná $\tau' = \tau_0 = 2\frac{l_0}{c}$ $\qquad \ell' = \ell_0 = x_2{}' - x_1{}'$

Pozorovatel v soustavě S:

Doba tam t_1 $\quad ct_1 = vt_1 + \ell$ (konec x_2 se vzdaluje)

Doba zpět t_2 $\quad ct_2 = vt_2 - \ell$ (začátek x_1 se přibližuje)

Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



Důsledky Lorentzovy transformace

Kontrakce délek

Platí (dilatace času)

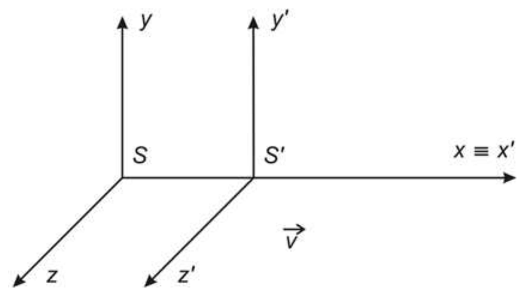
$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\tau' = \tau_0 = 2\frac{l_0}{c} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{2lc}{c^2-v^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Odtud pro kontrakci délek

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

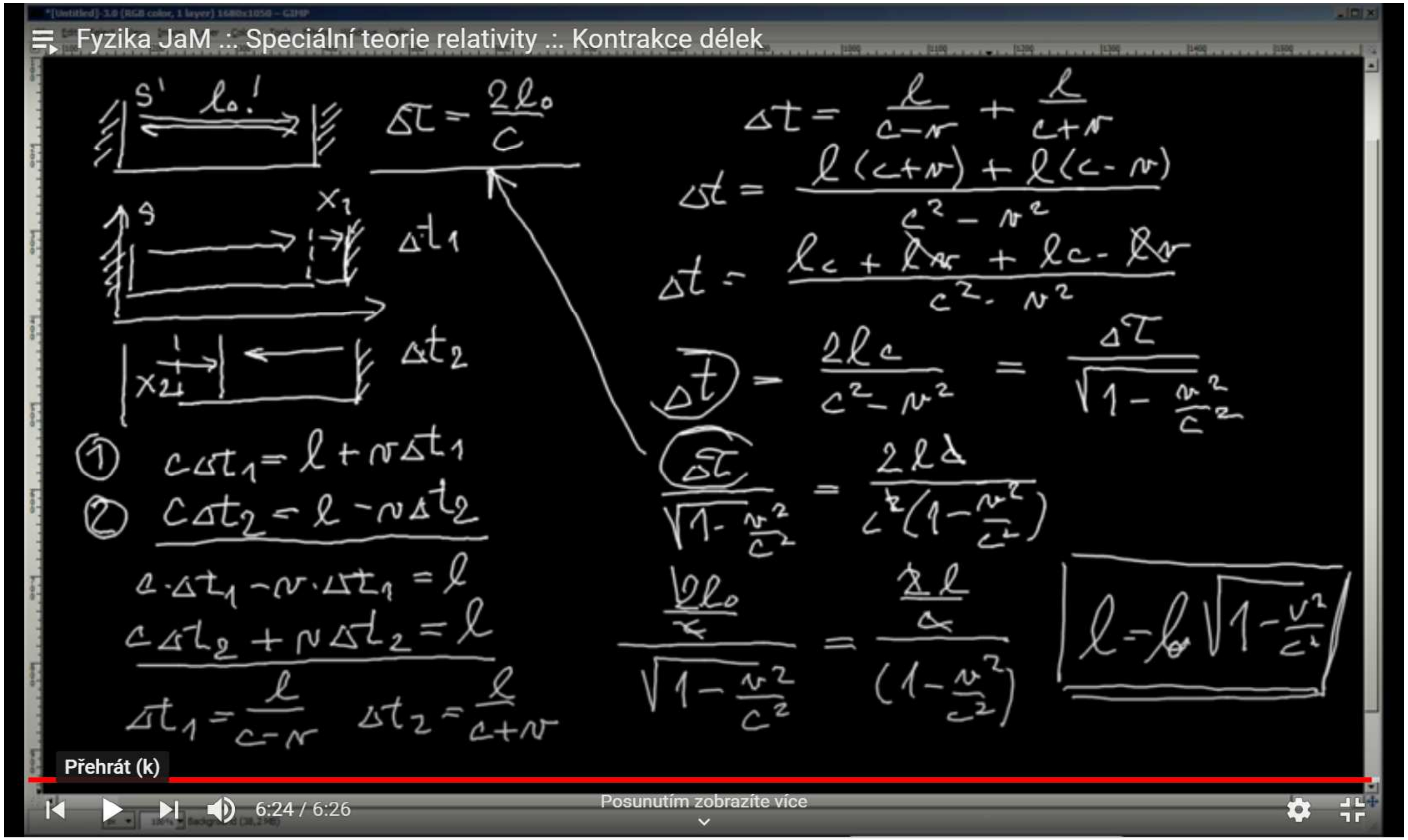
Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



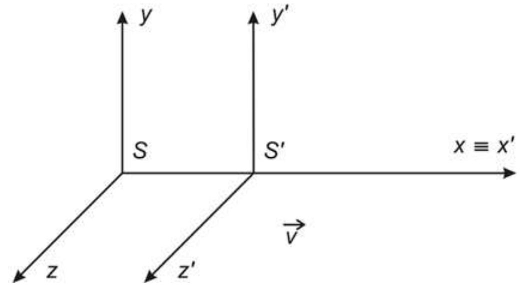
Důsledky Lorentzovy transformace

Kontrakce délek

https://youtu.be/ZCGR8oibgNI?list=PLLOs9FbkODkI8T_5sFJ6-uqU61EHJErci



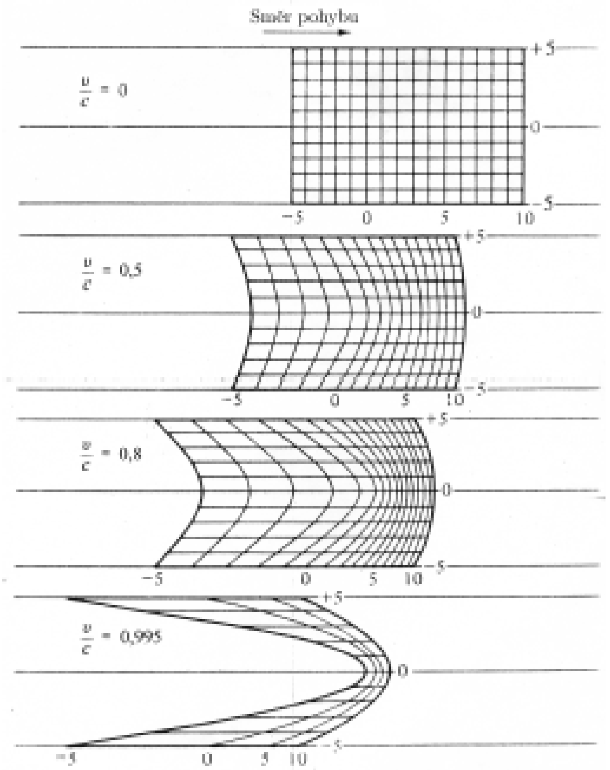
Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



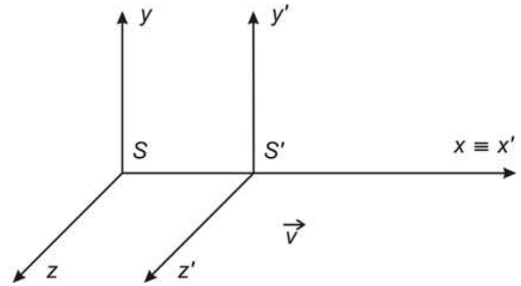
Důsledky Lorentzovy transformace

Objem

$$V = a.b.c = a_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.\,b.c = V_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$



Vztažná soustava *S'* se pohybuje ve směru +*x* rychlostí *v* vůči soustavě *S*.



Důsledky Lorentzovy transformace

Skládání rychlostí

Rychlost je definována:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \qquad u'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} \qquad u'_y = \frac{dy'}{dt'} + LT$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} \qquad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

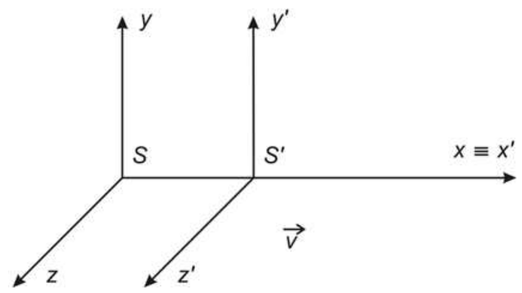
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}.u_x} \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}.u'_x}$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}.u_x} \qquad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}.u_x}$$

$$u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}.u_x} \qquad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}.u_x}$$

I když je *dy= dy´* a *dz= dz´*, díky LT pro čas *dt* ≠ *dt´* se změny projeví i pro *y*-ové a *z*-ové složky rychlosti.

Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



Důsledky Lorentzovy transformace

- **Skládání rychlostí -**

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}.u_x} \quad \Longrightarrow$$ Bude-li $u_x = c$ pak $u'_x = c$,tj. bude-li se bod pohybovat vzhledem k S' rychlostí světla c, bude se i vzhledem k soustavě S pohybovat rychlostí c, zcela nezávisle na rychlosti v.

přechod LT ➡ GT

Pro $v \ll c$ nám pro vychází $u_x = u'_x + v$ x. Nicméně pro velké hodnoty u_x' budeme mít odchylky pro u_x i pro u_y a u_z.

- $$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}.u'_x}$$
- $$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}.u_x}$$
- $$u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}.u_x}$$

Přechod k GT se děje pomocí limitního přechodu pro $\boxed{c \to \infty}$ pak

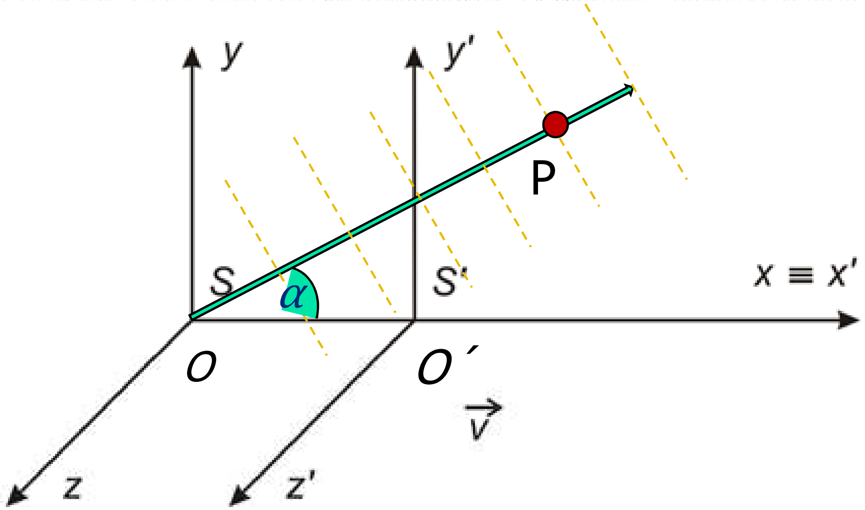
$$u_x = u'_x + v \qquad u_y = u_y' \qquad u_z = u_z'$$

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Důsledky Lorentzovy transformace

Dopplerův jev -

Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



V soustavě S z bodu O vyšleme vlnu o rychlosti w a frekvenci ν pod úhlem α

Z bodu O dorazí do bodu P za čas šleme vlnu o rychlosti

$$t_0 = \frac{\overline{OP}}{w} = \frac{x.cos\alpha + ysin\alpha}{w}$$

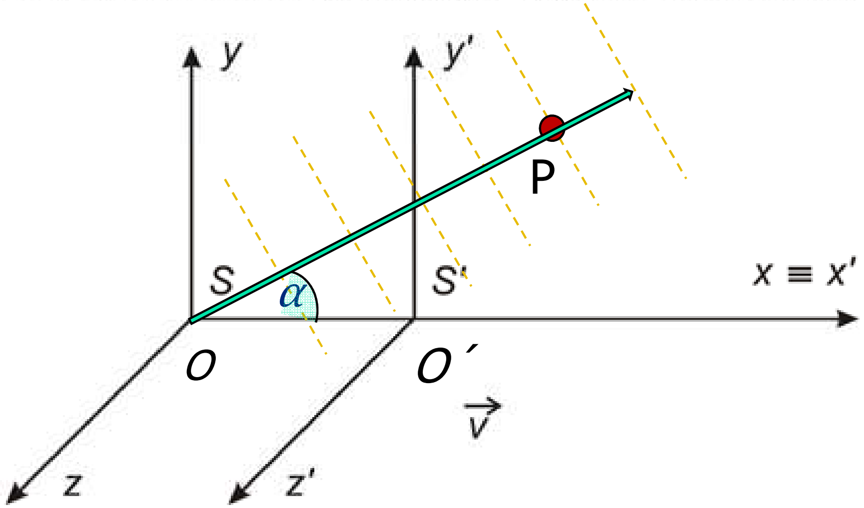
Důsledky Lorentzovy transformace

Dopplerův jev -

Počet vln bodem P za čas t

$$\nu(t-t_0)=\nu\left(t-\frac{x.\cos\alpha+y\sin\alpha}{w}\right)$$

Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



Počet prošlých vln je invariantní, tj.

$$\nu(t-t_0)=\nu'(t'-t_0')$$

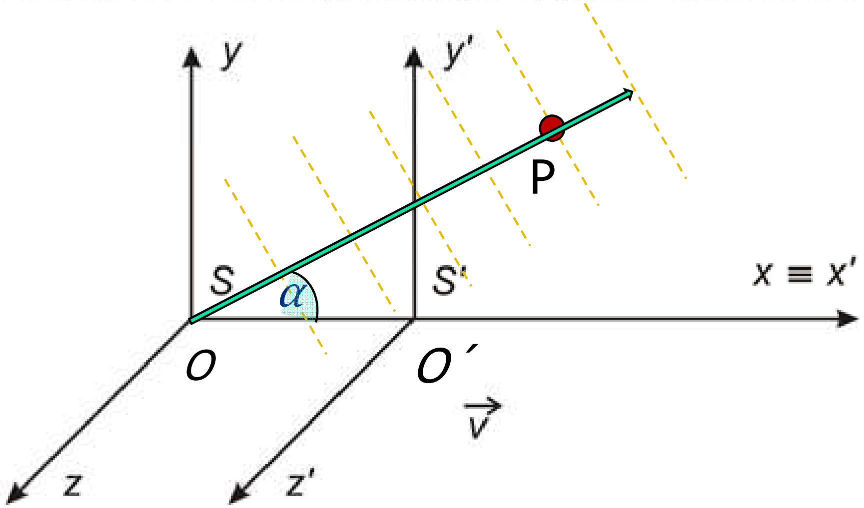
Tedy $$\nu\left(t-\frac{x.\cos\alpha+y\sin\alpha}{w}\right)=\nu'\left(t'-\frac{x'.\cos\alpha'+y'\sin\alpha'}{w}\right)$$

+LT ➡ $$\boxed{\nu'=\nu\frac{1-\frac{v\cos\alpha}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Pro elmag. vlny ve vakuu je $w=c$.

Důsledky Lorentzovy transformace

Vztažná soustava S' se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí v vůči soustavě S.



Dopplerův jev -

Pozorovatel je v klidu vůči soustavě S,

měří ν .

Zdroj je v klidu vůči soustavě S',

vysílá $\nu' = \nu_0$.

$$Pak \;\; \nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v\cos\alpha}{c}}$$

Podélný Dopplerův je $\alpha = 0$

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}} \qquad \lambda = \lambda_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}$$

Příčný Dopplerův je $\alpha = 90°$

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

➡ v Newtonovské fyzice neexistuje