Základy elementární matematiky s didaktikou pro učitelství 1. stupně ZŠ

Jitka Panáčová
Jaroslav Beránek

Email: panacova@ped.muni.cz, beranek@ped.muni.cz
Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity, Brno 2020

Obsah

Úvod

Tato publikace je určena pro studentky a studenty prezenčního i kombinovaného studia učitelství prvního stupně základní školy. Pokrývá značnou část obsahu výuky matematiky prvního a částečně druhého semestru na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity v Brně.

Jednou ze základních úloh vyučování matematiky na prvním stupni základní školy je budování pojmu přirozeného čísla. Učitel, který vyučuje matematiku na prvním stupni základní školy, musí znát způsob budování pojmu přirozeného čísla v matematice jako vědě, ale hlavně ve školské matematice. K tomu je pro učitele prvního stupně ZŠ nezbytné, aby ovládal základní pojmy logiky, intuitivní teorie množin a binárních relací, které jsou prostředkem pro budování poznatků o přirozených číslech. Ukazuje se totiž, že ty nejelementárnější pojmy z aritmetiky, s nimiž budete jednou seznamovat své žáky, patří k nejobtížnějším matematickým pojmům a jejich zavedení vyžaduje u učitele důkladnou znalost výrokové logiky, teorie množin a binárních relací.

Z popsaných důvodů je celá první kapitola této publikace věnována výrokové logice, základním poznatkům o množinách a stavbě matematických vět. Druhá kapitola shrnuje učivo z oblasti binárních relací, jejich vlastností a zobrazení mezi množinami. Obě kapitoly jsou koncipovány tak, že průběžně čtenáře seznamují se základními pojmy uvedených oblastí, na které navazují řešené úlohy. Závěr obou kapitol shrnuje využití výrokové logiky, základních poznatků o množinách a binárních relacích v učivu matematiky prvního stupně ZŠ. Každá podkapitola je na konci doplněna úlohami k procvičení s výsledky, případně návody k jejich řešení.

Při zpracování této publikace autoři vycházeli z obsahu výuky matematiky na prvním stupni základní školy.

Poznamenejme, že v celé publikaci budeme používat následující označení pro číselné množiny:

- $\mathbb{N}$ - množina všech přirozených čísel,
- $\mathbb{N}_0$ - množina všech přirozených čísel (včetně nuly),
- $\mathbb{Z}$ - množina všech celých čísel,
- $\mathbb{Q}$ - množina všech racionálních čísel,
- $\mathbb{R}$ - množina všech reálných čísel.

Při studiu elementární matematiky vám, milí studenti, přejeme mnoho úspěchů.

V Brně v červenci 2020

Autoři

1 Úvod do výrokové logiky a základní poznatky o množinách

1.1 Výroková logika

Při dorozumívání mezi lidmi v běžném životě, v různých oblastech lidské činnosti a v matematice vyslovujeme mnoho výroků. Pojem výrok je základním pojmem výrokové logiky, která se zabývá studiem různých forem myšlení a vyjadřování a studiem pravidel správného usuzování. Poznatky z výrokové logiky nám pak umožní přesně a logicky formulovat myšlenky.

1.1.1 Výroky

Výrokem rozumíme každé srozumitelné sdělení, které je pravdivé nebo nepravdivé, přičemž z obou těchto možností nastane právě jedna.

V případě, že dané sdělení je výrokem a je

- pravdivé, hovoříme o **pravdivém výroku** nebo říkáme, že **výrok platí**.
- nepravdivé, hovoříme o **nepravdivém výroku** nebo říkáme, že **výrok neplatí**.

Někdy nejsme schopni rozpoznat hned, zda dané sdělení je či není výrok. Zde si pak můžeme pomoci otázkou "Je pravda, že…?" týkající se daného sdělení - pokud tato otázka má smysl, pak je dané sdělení výrokem.

Ve výrokové logice nás nezajímá konkrétní obsah jednotlivých výroků, ale pouze jejich pravdivost. Je-li výrok pravdivý, říkáme, že **má pravdivostní hodnotu 1**, je-li výrok nepravdivý, říkáme, že **má pravdivostní hodnotu 0**. Je zřejmé, že rozhodnout o pravdivosti některých výroků je velmi obtížné ba dokonce nemožné, zcela jistě však právě jedna z těchto dvou možností nastane.

Příklady výroků:

- Praha je hlavní město České republiky. (pravdivý výrok)
- Moskva je hlavní město Ukrajiny. (nepravdivý výrok)
- $8 - 3 > 7$ (nepravdivý výrok)
- $12 + 7 = 19$ (pravdivý výrok)
- $2H_2 + O_2 = 2H_2O$. (pravdivý výrok)
- Král Karel IV. dostal v říjnu roku 1347 rýmu. (výrok, o jehož pravdivosti nejsme schopni rozhodnout)

Příklady sdělení, která nejsou výroky:

- Utíkej!
- 3 + 6 - 1
- Přijdeš?
- $x > 7$

Speciálními případy pravdivých výroků jsou matematické věty, o kterých bude pojednáno podrobněji v kapitole 1.5.2. Mezi výroky řadíme rovněž tzv. hypotézy.

Hypotéza (domněnka) je výrok, u kterého nejsme v daném okamžiku schopni rozhodnout, zda je pravdivý, či nepravdivý. Vyslovení hypotézy bývá spojeno s vědeckým bádáním, kdy formulujeme hypotézu, jejíž pravdivost zatím pouze předpokládáme. Tento předpoklad je však třeba ověřit například zkoumáním nebo experimentem, na jejichž základě dospějeme k výsledku, který pravdivost vyslovené hypotézy buď potvrdí, nebo vyvrátí. S hypotézami se rovněž setkáváme v běžném životě, kde jsou obvykle spjaty s budoucností.

Příklady hypotéz:

- Na planetě Mars existuje život.
- Příští týden budeme psát písemku z matematiky.
- V jezeře Loch Ness žije lochnesská příšera.

Příklad 1.1 Určete, která z následujících tvrzení jsou výroky, případně hypotézy. V případě výroků rozhodněte o jejich pravdivosti.

a) Řešte nerovnici $2x - 5 \leq 7$.
b) Pro každé přirozené číslo x platí, že $2x - 5 \leq 7$.
c) Existuje přirozené číslo x, pro které platí $2x - 5 \leq 7$.
d) Dvě strany trojúhelníka jsou shodné.
e) Brno má více než milion obyvatel.
f) V Brně sídlí univerzita.
g) Pro každá dvě celá čísla a, b platí, že $3 + a - b = 1$.
h) $2x - 5 \leq 7$,
i) Číslo 2 je dělitelem čísla 10.
j) Číslo 3 není dělitelem čísla 10.
k) $3 + a - b$,
l) Sněží?

Řešení:
Tvrzení a), d), h), k), l) nejsou výroky.
Tvrzení c), f), i), j) jsou pravdivé výroky.
Tvrzení b), e), g) jsou nepravdivé výroky.

Poznámka 1.1 a) Pravdivý výrok "Číslo 2 je dělitelem čísla 10." z příkladu 1.1 i) můžeme také formulovat: "Číslo 10 je dělitelné číslem 2." nebo "Číslo 10 je násobkem čísla 2." Tyto tři výroky můžeme zapsat symbolicky $2 \mid 10$.

b) Pravdivý výrok "Číslo 3 není dělitelem čísla 10." z příkladu 1.1 j) můžeme také formulovat: "Číslo 10 není dělitelné číslem 3." nebo "Číslo 10 není násobkem čísla 3." Tyto tři výroky můžeme zapsat symbolicky $3 \nmid 10$.

1.1.2 Logické spojky, složené výroky a výrokové formule

V odstavci 1.1.1 jsme se seznámili s jednoduchými výroky, které byly po stránce jazykové jednoduchými větami. Tak jako v běžném životě nemluvíme pouze v jednoduchých větách, ale pomocí různých spojek z nich vytváříme souvětí, v logice postupujeme obdobným způsobem - pomocí tzv. **logických spojek** vytváříme z jednoduchých výroků **výroky složené**.

Pro snazší práci s jednoduchými i složenými výroky používáme ve výrokové logice malá tiskací písmena, např. p, q, r,..., která zastupují konkrétní výrok s pravdivostní hodnotou buď 0, nebo 1. Tomuto označení výroku říkáme **výroková proměnná**.

Základními složenými výroky jsou následující výroky:

Negací výroku p rozumíme výrok $\neg p$, který je nepravdivý, je-li výrok p pravdivý a je pravdivý, je-li výrok p nepravdivý.

Konjunkcí výroků p**,** q rozumíme výrok $p \wedge q$, který je pravdivý, jsou-li oba výroky p, q pravdivé.

Disjunkcí výroků p**,** q rozumíme výrok $p \vee q$, který je pravdivý, je-li alespoň jeden z výroků p, q pravdivý.

Ostrou disjunkcí výroků p**,** q rozumíme výrok $p \veebar q$, který je pravdivý, je-li právě jeden z výroků p, q pravdivý.

Implikací výroků p**,** q rozumíme výrok $p \Rightarrow q$, který je nepravdivý, je-li výrok p pravdivý a výrok q nepravdivý.

Ekvivalencí výroků p**,** q rozumíme výrok $p \Leftrightarrow q$, který je pravdivý, mají-li oba výroky p, q stejnou pravdivostní hodnotu.

V tabulce 1.1 jsou pro přehlednost uvedeny základní složené výroky s jejich zápisy a příslušné logické spojky.

Poznámka 1.2 a) Negování výroku p znamená vytvoření jeho negace $\neg p$ a je založeno na skutečnosti, že pravdivost výroku p a jeho negace $\neg p$ se navzájem vylučují. Negovat jednoduchý výrok lze předřazením slova "ne" před sloveso, eventuelně pomocí slovního spojení "není pravda, že...", případně záměnou slovesa "je" za "není". Postup při negování jednoduchých výroků bude vysvětlen níže na konkrétních příkladech.

b) Pro implikaci výroků $p \Rightarrow q$ můžeme použít také formulace: "p implikuje q", "je-li p, pak q", "q, jestliže p", "p implikuje q.

c) Pro ekvivalenci výroků $p \Leftrightarrow q$ můžeme použít také formulaci: "výrok p je ekvivaletní s výrokem q".

Tabulka 1.1: Logické spojky a základní složené výroky

výroky	název výroku	zápis výroku	čtení logické spojky	logická spojka
p	**Negace výroku** p	$\neg p$	*není pravda, že platí...*	$\neg$
p, q	**Konjunkce výroků** p, q	$p \wedge q$	*a, a současně, a zároveň*	$\wedge$
p, q	**Disjunkce výroků** p, q	$p \vee q$	*nebo*	$\vee$
p, q	**Ostrá disjunkce výroků** p, q	$p \veebar q$	*buď ..., anebo*	$\veebar$
p, q	**Implikace výroků** p, q	$p \Rightarrow q$	*jestliže ..., pak*	$\Rightarrow$
p, q	**Ekvivalence výroků** p, q	$p \Leftrightarrow q$	*právě tehdy, když*	$\Leftrightarrow$

Tabulka 1.2: Tabulka pravdivostních hodnot základních složených výroků

výrok	výrok	negace	konjunkce	disjunkce	ostrá disjunkce	implikace	ekvivalence
p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Příklad 1.2 Je dána dvojice výroků p, q:
p: Prší. q: Jedu k babičce.
Z výroků p, q utvořte složené výroky $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$.

Řešení:
$\neg p$: Neprší.
$\neg q$: Nejedu k babičce.
$p \wedge q$: Prší a jedu k babičce.
$p \vee q$: Prší nebo jedu k babičce.
$p \veebar q$: Buď prší, nebo jedu k babičce.
$p \Rightarrow q$: Jestliže prší, pak jedu k babičce.
$p \Leftrightarrow q$: Prší právě tehdy, když jedu k babičce.

Stejně jako u jednoduchých výroků se ani u složených výroků nezabýváme jejich obsahem, ale jejich pravdivostní hodnotou. Pravdivostní hodnotu složeného výroku určíme z pravdivostních hodnot jednoduchých výroků, z nichž je složený výrok vytvořen. Pravdivostní hodnoty základních složených výroků uvádí tabulka 1.2.

Příklad 1.3 Je dána dvojice výroků p, q, z nichž p je pravdivý a q nepravdivý:

p: Číslo 6 je dělitelné třemi. q: Číslo 12 je násobkem čísla 5.

Z výroků p, q utvořte složené výroky $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ a s využitím tabulky 1.2 rozhodněte, které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé.

Řešení:

$\neg p$: Číslo 6 není dělitelné třemi. (nepravdivý výrok)

$\neg q$: Číslo 12 není násobkem čísla 5. (pravdivý výrok)

$p \wedge q$: Číslo 6 je dělitelné třemi a zároveň číslo 12 je násobkem čísla 5. (nepravdivý výrok)

$p \vee q$: Číslo 6 je dělitelné třemi nebo číslo 12 je násobkem čísla 5. (pravdivý výrok)

$p \veebar q$: Buď je číslo 6 dělitelné třemi, nebo číslo 12 je násobkem čísla 5. (pravdivý výrok)

$p \Rightarrow q$: Jestliže číslo 6 je dělitelné třemi, pak číslo 12 je násobkem čísla 5. (nepravdivý výrok)

$p \Leftrightarrow q$: Číslo 6 je dělitelné třemi právě tehdy, když číslo 12 je násobkem čísla 5. (nepravdivý výrok)

Poznámka 1.3 Jednoduché výroky p, q a složené výroky z nich vytvořené vz příkladu 1.3 lze zapsat pomocí matematické symboliky takto:

$$\begin{array}{rlrlrl}
p: & 3 \mid 6, & q: & 5 \mid 12, & \neg p: & 3 \nmid 6, \\
\neg q: & 5 \nmid 12, & p \wedge q: & 3 \mid 6 \ \wedge \ 5 \mid 12, & p \vee q: & 3 \mid 6 \ \vee \ 5 \mid 12, \\
p \veebar q: & 3 \mid 6 \ \veebar \ 5 \mid 12, & p \Rightarrow q: & 3 \mid 6 \Rightarrow 5 \mid 12, & p \Leftrightarrow q: & 3 \mid 6 \Leftrightarrow 5 \mid 12
\end{array}$$

Příklad 1.4 Zformulujte negace jednoduchých výroků a určete jejich pravdivostní hodnoty:

p_1: $3 + 5 < 8$,

p_2: Číslo 6 je prvočíslo.

p_3: $\sqrt{32} = 2\sqrt{8}$,

p_4: Číslo 5 není dělitelem čísla 100.

p_5: $5 + 6 > 2$.

Řešení:

$\neg p_1$: $3 + 5 \geq 8$, (pravdivý výrok)

$\neg p_2$: Číslo 6 není prvočíslo. (pravdivý výrok)

$\neg p_3$: $\sqrt{32} \neq 2\sqrt{8}$, (nepravdivý výrok)

$\neg p_4$: Číslo 5 je dělitelem čísla 100. (pravdivý výrok)

$\neg p_5$: $5 + 6 \leq 2$. (nepravdivý výrok)

V následujícím textu vymezíme soubor znaků, s nímž operujeme ve výrokové logice. Tento soubor nazýváme **abecedou výrokové logiky** a tvoří jej

- znaky pro výrokové proměnné: p, q, r, s,...
- znaky pro konstanty P a N, kde P, resp. N značí pravdivý, resp. nepravdivý výrok,
- znaky pro logické spojky: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,
- pomocné znaky: (), [], { }.

Pomocí výše uvedených znaků abecedy výrokové logiky můžeme vytvářet tzv. **výrokové formule**. Tvoříme je podle následujících pravidel:

1. Každá výroková proměnná p, q, r, s,... je výrokovou formulí.
2. Konstanty P a N jsou výrokové formule.
3. Jestliže výrazy p, q jsou výrokové formule, potom i $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ jsou výrokové formule.
4. Žádné jiné výrazy nejsou výrokové formule.

Výroková formule je tedy takový zápis, který obsahuje výrokové proměnné, logické spojky a závorky, ze kterého po dosazení konkrétních výroků za výrokové proměnné dostaneme výrok. Výrokovými formulemi vyjadřujeme sled logických operací, při jejichž tvorbě budeme vycházet z následujících zásad:[1]

- logické operace v závorkách mají přednost před logickými operacemi vně závorek,
- znak $\neg$ má přednost před ostatními logickými spojkami,
- logické spojky $\wedge$, $\vee$, $\veebar$ mají přednost před logickými spojkami $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Příklady výrokových formulí:

- $p \wedge \neg q$,
- $\neg p \vee r$,
- $(r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,
- $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

Poznámka 1.4 Vymezením pojmu pro výrokovou formuli výše je zřejmé, že libovolná posloupnost vytvořená ze znaků abecedy výrokové logiky nemusí být výrokovou formulí. Například posloupnosti znaků $(p \Rightarrow q)\wedge$ nebo $(p \Rightarrow) \vee q$ nejsou výrokové formule.

Příklad 1.5 Zapište prostřednictvím výrokových formulí následující složené výroky:

a) Přijde Adam, ale Filip ne.
b) Ze sourozenců Adam, Filip přijde nejvýše jeden.
c) Ze sourozenců Adam, Filip přijde alespoň jeden.
d) Přijde Adam a Filip.
e) Buď přijde Adam nebo Filip.
f) Když přijde Adam, tak nepřijde Filip.
g) Přijde právě jeden ze dvojice Adam, Filip.
h) Z trojice Adam, Filip, Katka přijdou všichni.
i) Z trojice Adam, Filip, Katka nepřijde nikdo.
j) Jestliže přijde Adam, pak nepřijde ani Filip ani Katka.
k) Jestliže přijde Adam a Filip nepřijde, pak přijde Katka.
l) Katka s Filipem přijdou právě tehdy, když nepřijde Adam.

Řešení:

[1] Řada publikací, které se zabývají výrokovou logikou, vychází při tvorbě výrokových formulí z odlišných zásad. My jsme pravidla pro tvorbu výrokových formulí převzali z publikace (Bartsch, 1987).

Označme výroky:

a: Přijde Adam. f: Přijde Filip. k: Přijde Katka.

Symbolické zápisy složených výroků prostřednictvím výrokových formulí jsou

a) $a \wedge \neg f$, b) $\neg a \vee \neg f$, c) $a \vee f$, d) $a \wedge f$,
e) $a \veebar f$, f) $a \Rightarrow \neg f$, g) $a \veebar f$, h) $a \wedge f \wedge k$,
i) $\neg a \wedge \neg f \wedge \neg k$, j) $a \Rightarrow (\neg f \wedge \neg k)$, k) $(a \wedge \neg f) \Rightarrow k$, l) $(k \wedge f) \Leftrightarrow \neg a$.

Pravdivostním ohodnocením výrokové formule rozumíme určení její pravdivostní hodnoty v závislosti na pravdivostních hodnotách výrokových proměnných, z nichž je složena. Pravdivostní ohodnocení výrokové formule provádíme na základě tabulky pravdivostních hodnot 1.2.

Příklad 1.6 Proveďte pravdivostní ohodnocení výrokové formule

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r].$$

Řešení: Pravdivostní ohodnocení výrokové formule provedeme pomocí tabulky, do jejíhož záhlaví nejdříve zapíšeme zadanou výrokovou formuli. Do tabulky dále zapíšeme pod výrokové proměnné p, q, r (zleva) všechny variace jejich možných pravdivostních hodnot. Následně ohodnotíme výrokové formule v kulatých závorkách $q \Rightarrow r$ a $p \wedge q$ (tj. jejich pravdivostní hodnoty zapíšeme do tabulky pod jejich příslušné logické spojky) a analogicky výrokové formule v hranatých závorkách $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ a $(p \wedge q) \Rightarrow r$. Pravdivostní hodnoty těchto složených výrokových formulí určíme dle tabulky 1.2. Na závěr ohodnotíme výrokovou formuli s hlavní logickou spojkou $\Leftrightarrow$ opět dle tabulky 1.2.

$[p$	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)]$	$\Leftrightarrow$	$[(p$	$\wedge$	$q)$	$\Rightarrow$	$r]$
1	1	1	1	1	1		1		1	
1	0	1	0	0	1		1		0	
1	1	0	1	1	1		0		1	
1	1	0	1	0	1		0		1	
0	1	1	1	1	1		0		1	
0	1	1	0	0	1		0		1	
0	1	0	1	1	1		0		1	
0	1	0	1	0	1		0		1	

S ohledem na pravdivostní ohodnocení výrokových formulí rozlišujeme následující typy:

1. **Tautologie** je výroková formule, která pro libovolné pravdivostní hodnoty svých výrokových proměnných nabývá vždy pravdivostní hodnotu 1.

2. **Kontradikce** je výroková formule, která pro libovolné pravdivostní hodnoty svých výrokových proměnných nabývá vždy pravdivostní hodnotu 0.

3. **Splnitelné formule** je výroková formule, která není kontradikce ani tautologie.

Poznámka 1.5 Výroková formule $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$ z příkladu 1.6 je tautologie (vždy pravdivá), viz 6. sloupec v tabulce pravdivostních hodnot.

Příklad 1.7 Dokažte, že výroková formule $p \vee \neg p$ je tautologie a výroková formule $p \wedge \neg p$ je kontradikce.

Řešení: Důkaz podává tabulka pravdivostních hodnot:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

Příklad 1.8 Dokažte, že výroková formule $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ je tautologie.

Řešení: Důkaz podává tabulka pravdivostních hodnot:

$[(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)]$	$\Rightarrow$	$(p$	$\Rightarrow$	$r)$
1	1	1	1		1	1	1		1	
1	1	1	0		0	0	1		0	
1	0	0	0		1	1	1		1	
1	0	0	0		1	0	1		0	
0	1	1	1		1	1	1		1	
0	1	1	0		0	0	1		1	
0	1	0	1		1	1	1		1	
0	1	0	0		1	0	1		1	

Poznámka 1.6 Mají-li dvě výrokové formule v_1 a v_2 stejných výrokových proměnných stejná pravdivostní ohodnocení, pak se nazývají **logicky ekvivalentní výrokové formule**. Zapisujeme je symbolem $v_1 \sim v_2$. Je zřejmé, že výroková formule $v_1 \Leftrightarrow v_2$ je tautologií. Po dosazení jednoduchých výroků za všechny výrokové proměnné do logicky ekvivalentních výrokových formulí v_1 a v_2 získáme dvojici výroků, které nazýváme **logicky ekvivalentní výroky**.

Příklad 1.9 Dokažte, že výrokové formule $\neg(p \Leftrightarrow q)$ a $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ jsou logicky ekvivalentní.

Řešení: Provedeme pravdivostní ohodnocení výrokové formule

$$[\neg(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)].$$

Důkaz podává tabulka pravdivostních hodnot:

$[\neg$	$(p$	$\Leftrightarrow$	$q)]$	$\Leftrightarrow$	$[(p$	$\wedge$	$\neg q)$	$\vee$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)]$
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0

Z tabulky je patrné, že výroková formule $[\neg(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)]$ je tautologie. Výrokové formule $\neg(p \Leftrightarrow q)$ a $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ jsou tedy logicky ekvivalentní, neboť mají stejné pravdivostní hodnoty. Skutečnost, že se jedná o logicky ekvivalentní výrokové formule, zapíšeme

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \sim (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q).$$

Příklad 1.10 Uvažujme výroky

s: V sobotu bude pršet.
n: V neděli bude pršet.
p: Půjdeme na procházku.

Zapište symbolicky složené výroky

v_1: Jestliže bude v sobotu nebo v neděli pršet, pak nepůjdeme na procházku.
v_2: Jestliže půjdeme na procházku, pak nebude pršet ani v sobotu ani v neděli.

a rozhodněte, zda jsou výroky v_1, v_2 logicky ekvivalentní.

Řešení: Složené výroky v_1, v_2 zapíšeme symbolicky pomocí výrokových proměnných s, n, p následovně:

$$v_1: \quad (s \vee n) \Rightarrow \neg p, \qquad\qquad v_2: \quad p \Rightarrow (\neg s \wedge \neg n).$$

Provedeme pravdivostní ohodnocení výrokové formule $[(s \vee n) \Rightarrow \neg p] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\neg s \wedge \neg n)]$ pomocí tabulky pravdivostních hodnot:

$[(s$	$\vee$	$n)$	$\Rightarrow$	$\neg p]$	$\Leftrightarrow$	$[p$	$\Rightarrow$	$(\neg s$	$\wedge$	$\neg n)]$
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1

Z tabulky pravdivostních hodnot je zřejmé, že výroková formule

$$[(s \vee n) \Rightarrow \neg p] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\neg s \wedge \neg n)]$$

je tautologie a složené výroky v_1, v_2 jsou logicky ekvivalentní, tj. $v_1 \sim v_2$.

Při hlubším studiu matematiky se využívá řada ekvivalentních výrokových formulí. Základní ekvivalentní výrokové formule vyjadřující **komutativnost** konjunkce a disjunkce výroků jsou uvedeny ve vztazích 1.1 a 1.2. Mezi základní ekvivalentní výrokové formule, které vyjadřují **asociativnost** konjunkce a disjunkce výroků, řadíme vztahy 1.3 a 1.4:

$$(p \wedge q) \sim (q \wedge p), \tag{1.1}$$

$$(p \vee q) \sim (q \vee p), \tag{1.2}$$

$$(p \wedge q) \wedge r \sim p \wedge (q \wedge r), \tag{1.3}$$

$$(p \vee q) \vee r \sim p \vee (q \vee r), \tag{1.4}$$

Ekvivalentní výrokové formule vyjadřující vzájemnou **distributivnost** konjunkce a disjunkce výroků zaznamenávají vztahy 1.5 a 1.6.

$$p \wedge (q \vee r) \sim (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \tag{1.5}$$

$$p \vee (q \wedge r) \sim (p \vee q) \wedge (p \vee r), \tag{1.6}$$

Ekvivalentní výrokové formule 1.7 a 1.8 nazýváme **de Morganovými zákony** a používáme je společně se vztahy 1.9, 1.10, 1.11 při negování složených výroků.

$$\neg(p \vee q) \sim \neg p \wedge \neg q, \tag{1.7}$$

$$\neg(p \wedge q) \sim \neg p \vee \neg q, \tag{1.8}$$

$$\neg(p \veebar q) \sim p \Leftrightarrow q, \tag{1.9}$$

$$\neg(p \Rightarrow q) \sim p \wedge \neg q, \tag{1.10}$$

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \sim p \veebar q, \tag{1.11}$$

Ekvivalentní výrokové formule 1.12, resp. 1.13, resp. 1.14 nazýváme **zákon dvojité negace**, resp. **zákon o vyloučení třetí možnosti**, resp. **zákon sporu**.

$$\neg(\neg p) \sim p, \tag{1.12}$$

$$(p \vee \neg p) \sim P, \tag{1.13}$$

$$(p \wedge \neg p) \sim N. \tag{1.14}$$

Běžně používané ekvivalentní výrokové formule uvádí vztahy 1.15 a 1.16.

$$p \Leftrightarrow q \sim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), \tag{1.15}$$

$$p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q. \tag{1.16}$$

Ponecháváme na samotném čtenáři, aby si výše uvedené tautologie 1.1 - 1.16 ověřil pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

Příklad 1.11 Zapište symbolicky složené výroky a zformulujte jejich negace dle pravidel 1.7 - 1.11:

a) Dám si zmrzlinu nebo čokoládu.
b) Nedám si zmrzlinu ani čokoládu.
c) Jestli si dám zmrzlinu, nedám si čokoládu.
d) Zmrzlinu si dám, když si nedám čokoládu.

Řešení: Označme výroky:
p: Dám si zmrzlinu. q: Dám si čokoládu.

Složené výroky a jejich negace určené pomocí pravidel 1.7 - 1.11 zapíšeme symbolicky prostřednictvím výrokových formulí takto:

	složený výrok	negace složeného výroku
a)	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$
b)	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$
c)	$p \Rightarrow \neg q$	$p \wedge q$
d)	$p \Leftrightarrow \neg q$	$p \underline{\vee} \neg q$

Negace složených výroků z tabulky zapíšeme slovy takto:

a) Nedám si zmrzlinu ani čokoládu.
b) Dám si zmrzlinu nebo čokoládu.
c) Dám si zmrzlinu i čokoládu.
d) Buď si dám zmrzlinu, nebo si nedám čokoládu.

Příklad 1.12 Zapište symbolicky složené výroky a zformulujte jejich negace dle pravidel 1.7 - 1.11:

a) $3 > -5 \ \wedge \ 3 \mid 15.$
b) $2 \mid 6 \ \Rightarrow \ 2 \mid 12.$
c) $1 + 1 = 3 \ \vee \ 2 \cdot 5 = 10.$

Řešení: Označme výroky:
a) r: $3 > -5$ s: $3 \mid 15$
b) t: $2 \mid 6$ u: $2 \mid 12$
c) v: $1 + 1 = 3$ w: $2 \cdot 5 = 10$

Složené výroky a jejich negace určené pomocí pravidel 1.7 - 1.11 zapíšeme symbolicky prostřednictvím výrokových formulí takto:

	složený výrok	negace složeného výroku
a)	$r \wedge s$	$\neg r \vee \neg s$
b)	$t \Rightarrow u$	$t \wedge \neg u$
c)	$v \vee w$	$\neg v \wedge \neg w$

Negace složených výroků z tabulky zapíšeme matematicky takto:

a) $3 \leq -5 \ \vee \ 3 \ \nmid 15$.
b) $2 \mid 6 \ \wedge \ 2 \ \nmid 12$.
c) $1 + 1 \neq 3 \ \wedge \ 2 \cdot 5 \neq 10$.

V závěru tohoto odstavce uvedeme slovní úlohu, při jejímž řešení využijeme znalostí z výrokové logiky.

Příklad 1.13 Tři stroje v dílně jsou v provozu podle následujících podmínek: Pracuje-li první stroj, pracuje i druhý. Pracuje druhý nebo třetí stroj. Nepracuje-li první stroj, nepracuje ani třetí. Kolik existuje různých situací, při nichž jsou splněny všechny podmínky?

Řešení:
Označme výroky:

p: Pracuje první stroj. d: Pracuje druhý stroj. t: Pracuje třetí stroj.

Zadané podmínky pro výroky p, d, t vyjádříme prostřednictvím složených výroků takto: $p \Rightarrow d$, $d \vee t$, $\neg p \Rightarrow \neg t$. Situaci, kdy uvedené složené výroky jsou současně pravdivé, zapíšeme výrokovou formulí $(p \Rightarrow d) \wedge (d \vee t) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg t)$, jejíž pravdivostní ohodnocení je určeno v tabulce:

p	d	t	$\neg p$	$\neg t$	$p \Rightarrow d$	$d \vee t$	$\neg p \Rightarrow \neg t$	$(p \Rightarrow d) \wedge (d \vee t) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg t)$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0

Z posledního sloupce tabulky je zřejmé, že výroková formule

$$(p \Rightarrow d) \wedge (d \vee t) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg t)$$

je pravdivá ve třech případech. Úloha má tedy tři řešení:

1. všechny tři stroje pracují současně,
2. pracuje první a druhý stroj, třetí stroj nepracuje,
3. pracuje jen druhý stroj.

1.2 Úvod do teorie množin

V matematice se při hlubším zkoumání výroků neobejdeme bez pojmu množina, který je jedním ze základních pojmů matematiky, jehož intuitivní pojetí je založené na představě souboru. V běžném jazyce používáme v konkrétních situacích místo pojmu množina jiných názvů, jako například hromada (brambor), skupina (lidí), stádo (ovcí), sbírka (známek) apod. **Množinu** charakterizujeme jako soubor (souhrn, skupinu) navzájem různých objektů, kdy u každého objektu nastane právě jedna ze dvou možností - buď do uvažovaného souboru patří, nebo nepatří. Poznamenejme, že uvedená formulace množiny není její definicí, je to pouze intuitivní popis pojmu množiny, který je pro účely školské matematiky dostačující.

Příklady množin:

- množina obyvatel České republiky,
- množina studentů 1. ročníku na Masarykově univerzitě v Brně v roce 2019,
- množina zvířat žijících na Měsíci,
- množina bodů na přímce,
- množina všech přirozených čísel.

Množiny budeme označovat velkými tiskacími písmeny, např. A, B, M, případně velkými psacími písmeny, např. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}\ldots$ Jednotlivé objekty, které do dané množiny patří, nazýváme **prvky množiny**. Značíme je zpravidla malými tiskacími písmeny, např. a, b, x, y.

Skutečnost, že objekt a patří do množiny A, zapisujeme $a \in A$.

Zápis $a \in A$ čteme: "prvek a je prvkem množiny A",
"prvek a náleží množině A",
"prvek a patří do množiny A,
"prvek a náleží do množiny A".

Skutečnost, že objekt b není prvkem množiny A, zapisujeme $b \notin A$.

Zápis $b \notin A$ čteme: "prvek b není prvkem množiny A",
"prvek b nenáleží množině A",
"prvek b nepatří do množiny A",
"prvek b nenáleží do množiny A".

Je patrné, že pro každou množinu A a pro každý objekt a nastane právě jedna z těchto dvou možností: buď $a \in A$, nebo $a \notin A$.

Množinu, která neobsahuje žádný prvek, nazýváme **prázdnou množinou** a značíme ji symbolem $\emptyset$ nebo $\{\}$. Množiny, které obsahují alespoň jeden prvek, nazýváme **neprázdné**.

Množina může být určena **výčtem prvků**, jestliže vyjmenujeme všechny její prvky. Pokud například množina A obsahuje prvky 1, 2, 3, 4, potom množinu A zapíšeme výčtem prvků $A = \{1, 2, 3, 4\}$, tj. do složených závorek vypíšeme všechny prvky, které množině A náleží. V tomto případě pak výrazy $1 \in A$, $3 \in A$ jsou pravdivé výroky, výraz $5 \notin A$

je výrok nepravdivý. Na tomto místě je užitečné přijmout dohodu, že každý prvek, který do množiny patří, budeme zapisovat do složených závorek právě jednou. Je zřejmé, že výčtem prvků můžeme určit jen konečné množiny.

Množina může být dále určena **charakteristickou vlastností**. Pro vymezení množiny pomocí charakteristické vlastnosti je třeba zavést pojem výrokové formy, se kterým budeme pracovat v následujícím odstavci 1.3. Poznamenejme, že problematikou množin se budeme podrobně zabývat v kapitole 1.4 a ke způsobu určení množiny charakteristickou vlastností se vrátíme v odstavci 1.4.1, kde si ho všimneme významněji.

1.3 Výrokové formy

Výroková forma $v(x)$ **jedné proměnné** x je výraz obsahující proměnnou x, ze kterého získáme po dosazení objektu za proměnnou x výrok.

Každé výrokové formě jedné proměnné x přiřazujeme dvě množiny, tzv. definiční obor výrokové formy a tzv. obor pravdivosti výrokové formy, které zavedeme v následujícím textu.

Definičním oborem výrokové formy $v(x)$ jedné proměnné x rozumíme množinu D, pro jejíž libovolný prvek po dosazení za proměnnou x dostaneme výrok.

Obor pravdivosti výrokové formy $v(x)$ jedné proměnné x rozumíme množinu P, pro jejíž libovolný prvek po dosazení za proměnnou x dostaneme pravdivý výrok.

Příklady výrokových forem jedné proměnné (v závorce je uveden jejich definiční obor):

- $v_1(x) : 2x - 7 < 5$ $(x \in \mathbb{Z})$,
- $v_2(x) : x^2 - 6x + 4 = 0$ $(x \in \mathbb{R})$,
- $v_3(y) : |y - 3| < 2$ $(y \in \mathbb{R})$,
- $v_4(x)$: Číslo x je dělitelné sedmi. $(x \in \mathbb{N})$,
- $v_5(z) : z \mid 18$ $(z \in \mathbb{N})$.

Výroková forma $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ **více proměnných** $x_1, x_2, ..., x_n$ je výraz obsahující proměnné $x_1, x_2, ..., x_n$, ze kterého získáme po dosazení objektů za proměnné $x_1, x_2, ..., x_n$ výrok ($n \in \mathbb{N}$).

Příklady výrokových forem více proměnných (v závorce je uveden jejich definiční obor):

- $v_1(x, y) : 2x + 3y < 5$ $(x, y \in \mathbb{Z})$,
- $v_2(x, y) : x^2 + y^2 = 4$ $(x, y \in \mathbb{R})$,
- $v_3(x, y, z) : 4x + y - 3z = 4$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$,
- $v_4(x, y)$: Číslo x je dělitelné číslem y. $(x, y \in \mathbb{N})$.

Tabulka 1.3: Tabulka základních složených výrokových forem

Složená výroková forma	Název složené výrokové formy
$\neg p(x)$	negace výrokové formy
$p(x) \wedge q(x)$	konjunkce výrokových forem $p(x)$, $q(x)$
$p(x) \vee q(x)$	disjunkce výrokových forem $p(x)$, $q(x)$
$p(x) \veebar q(x)$	ostrá disjunkce výrokových forem $p(x)$, $q(x)$
$p(x) \Rightarrow q(x)$	implikace výrokových forem $p(x)$, $q(x)$
$p(x) \Leftrightarrow q(x)$	ekvivalence výrokových forem $p(x)$, $q(x)$

Příklad 1.14 Zapište všechny výroky, které získáte dosazením do výrokové formy za proměnnou x a rozhodněte o jejich pravdivosti:

a) $x + 7 < 10$, kde množina $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je definiční obor proměnné x,
b) $2x + 4 = 0$, kde množina $D = \{0, -1, -2\}$ je definiční obor proměnné x,
c) $3 \mid x$, kde množina $D = \{0, 1\}$ je definiční obor proměnné x,

Řešení: Dosazením prvků z definičního oboru za proměnnou x získáme výroky:
a) $1 + 7 < 10$; $2 + 7 < 10$. (pravdivé výroky)
$3 + 7 < 10$; $4 + 7 < 10$; $5 + 7 < 10$. (nepravdivé výroky)
b) $2 \cdot 0 + 4 = 0$; $2 \cdot (-1) + 4 = 0$. (nepravdivé výroky)
$2 \cdot (-2) + 4 = 0$. (pravdivý výrok)
c) $3 \mid 0$ (pravdivý výrok)
$3 \mid 1$ (nepravdivý výrok)

1.3.1 Složené výrokové formy

Z výrokových forem $p(x)$, $q(x)$, které mají stejný definiční obor D, je možno prostřednictvím logických spojek (obdobně jako u výroků) vytvářet **složené výrokové formy**. Základní složené výrokové formy jsou uvedeny v tabulce 1.3.

Příklad 1.15 Zapište

a) konjunkci výrokových forem $x \leq 5$, $x > 2$ s definičním oborem $\mathbb{R}$,
b) disjunkci výrokových forem $x \leq 1$, $x > 2$ s definičním oborem $\mathbb{R}$,
c) implikaci výrokových forem $6 \mid x$, $2 \mid x$ s definičním oborem $\mathbb{N}$.

Řešení:
a) $x \leq 5 \wedge x > 2$, kde $x \in \mathbb{R}$,
b) $x \leq 1 \vee x > 2$, kde $x \in \mathbb{R}$,
c) $6 \mid x \Rightarrow 2 \mid x$, kde $x \in \mathbb{N}$.

Příklad 1.16 Pokud to lze, utvořte tři pravdivé a tři nepravdivé výroky dosazením za proměnné x, y, z do zadané výrokové formy:

a) $3 - x = 10$, kde $x \in \mathbb{Z}$,
b) $2x + 3 < 7$, kde $x \in \mathbb{N}$,
c) $y = x - 5 \vee y = x + 5$, kde $x, y \in \mathbb{Z}$,
d) $x \mid y \Rightarrow y \mid z$, kde $x, y, z \in \mathbb{Z}$,
e) $(x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$, kde $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Poznámka 1.7 Negováním výrokové formy $v(x)$ rozumíme vytvoření její negace $\neg v(x)$. Pravidla pro negace složených výrokových forem jsou uvedena v tabulce 1.4. Porovnejte tato pravidla s pravidly pro negování složených výroků, viz vztahy 1.7 - 1.11 z odstavce 1.1.2.

Příklad 1.17 Jsou dány výrokové formy

$v_1(x)$: $x > 5$, kde $x \in \mathbb{N}$,
$v_2(x)$: $7 \mid x$, kde $x \in \mathbb{N}$.

Zformulujte složené výrokové formy dle zadání a vyslovte jejich negace.

a) $v_1(x) \wedge v_2(x)$, b) $v_1(x) \vee v_2(x)$,
c) $v_1(x) \Rightarrow v_2(x)$, d) $v_1(x) \Leftrightarrow v_2(x)$.

Řešení:
a) $v_1(x) \wedge v_2(x)$: $x > 5 \wedge 7 \mid x$, b) $v_1(x) \vee v_2(x)$: $x > 5 \vee 7 \mid x$,
c) $v_1(x) \Rightarrow v_2(x)$: $x > 5 \Rightarrow 7 \mid x$, d) $v_1(x) \Leftrightarrow v_2(x)$: $x > 5 \Leftrightarrow 7 \mid x$.

V dalším kroku určíme negace výrokových forem $v_1(x)$, $v_2(x)$:

$\neg v_1(x)$: $x \leq 5$, kde $x \in \mathbb{N}$,
$\neg v_2(x)$: $7 \nmid x$, kde $x \in \mathbb{N}$.

Negace složených výrokových forem určíme dle tabulky 1.4, přičemž

a) $\neg v_1(x) \vee \neg v_2(x)$: $x \leq 5 \vee 7 \nmid x$, b) $\neg v_1(x) \wedge \neg v_2(x)$: $x \leq 5 \wedge 7 \nmid x$,
c) $v_1(x) \wedge \neg v_2(x)$: $x > 5 \wedge 7 \nmid x$, d) $v_1(x) \veebar v_2(x)$: $x > 5 \veebar 7 \mid x$.

1.3.2 Kvantifikátory, kvantifikované výroky

V předchozím textu jsme se zabývali výrokovými formami. Víme, že samotná výroková forma nemá pravdivostní hodnotu. Pokud však dosazujeme do výrokové formy za proměnnou x (případně za proměnné $x_1, x_2, , ..., x_n$) prvky z jejího definičního oboru, dostáváme výrok.
Výroky lze však získat z výrokové formy i jiným způsobem, který si vysvětlíme na příkladu 1.18.

Tabulka 1.4: Negace složených výrokových forem

Negace složené výrokové formy	Logicky ekvivalentní výroková forma
$\neg(p(x) \wedge q(x))$	$\neg p(x) \vee \neg q(x)$
$\neg(p(x) \vee q(x))$	$\neg p(x) \wedge \neg q(x)$
$\neg(p(x) \veebar q(x))$	$p(x) \Leftrightarrow q(x)$
$\neg(p(x) \Rightarrow q(x))$	$p(x) \wedge \neg q(x)$
$\neg(p(x) \Leftrightarrow q(x))$	$p(x) \veebar q(x)$

Příklad 1.18 *a*) Uvažujme výrokovou formu

$$v_1(x) : x^2 \geq 0, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}.$$

Definičním oborem výrokové formy $v_1(x)$ je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Pokud ve výrokové formě $v_1(x)$ dosadíme za x libovolné reálné číslo, dostaneme vždy pravdivý výrok, který můžeme zformulovat několika způsoby:

- Pro každé reálné číslo x platí $v_1(x)$.
- Pro všechna reálná čísla x platí $v_1(x)$.
- Pro libovolné reálné číslo x platí $v_1(x)$.

Symbolický zápis všech těchto výroků je:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0. \tag{1.17}$$

Symbol $\forall$ v zápise 1.17 nazýváme **obecný kvantifikátor**.
Uvažujeme-li výrokovou formu $v_1(x)$ a množinu D její definiční obor, pak výrok

$$\forall x \in D : v_1(x)$$

nazýváme **obecný výrok**. Výrok 1.17 je příkladem obecného výroku.

b) Uvažujme výrokovou formu

$$v_2(x) : x^2 + 1 = (x+1)^2, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}.$$

Definičním oborem výrokové formy $v_2(x)$ je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Rovnost $x^2 + 1 = (x+1)^2$ zřejmě neplatí pro všechna reálná čísla x. Jestliže do výrokové formy $v_2(x)$ dosadíme za proměnnou x například číslo 1, dostaneme nepravdivý výrok. Ale zřejmě existuje reálné číslo, které po dosazení za x vytvoří z výrokové formy $v_2(x)$ výrok pravdivý. Stačí položit $x = 0$. Tuto skutečnost můžeme opět zformulovat několika způsoby:

Tabulka 1.5: Základní kvantifikátory

Základní kvantifikátor	Označení	Jazykový význam
Obecný kvantifikátor	$\forall$	pro každé, pro všechny
Existenční kvantifikátor	$\exists$	existuje (alespoň jeden)
Kvantifikátor jednoznačné existence	$\exists!$	existuje právě jeden, pro právě jedno

- Existuje reálné číslo x, pro které platí $v_2(x)$.
- Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro které platí $v_2(x)$.
- Alespoň pro jedno reálné číslo x platí $v_2(x)$.

Symbolický zápis všech těchto výroků je:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = (x + 1)^2. \tag{1.18}$$

Symbol $\exists$ v zápise 1.18 nazýváme **existenční kvantifikátor**.
Uvažujeme-li výrokovou formu $v_2(x)$ a množinu D její definiční obor, pak výrok

$$\exists x \in D : v_2(x)$$

nazýváme **existenční výrok**. Výrok 1.18 je příkladem existenčního výroku.

Obecný a existenční výrok, který jsme získali v příkladu 1.18, jsou tzv. **kvantifikované výroky** (obsahují ve své formulaci kvantifikátory). Každý kvantifikovaný výrok získáme tzv. **kvantifikací** nějaké výrokové formy tak, že předřadíme kvantifikátor její proměnné x (případně kvantifikátory všem jejím proměnným $x_1, x_2, , ..., x_n$). Jednoduché kvantifikované výroky, s nimiž budeme v dalším textu pracovat, získáme kvantifikací jednoduché výrokové formy jedné proměnné jedním kvantifikátorem.

Nejčastěji užívané kvantifikátory čteme prostřednictvím těchto jazykových výrazů: *každý*, *alespoň jeden*, *žádný*, *právě jeden*, *nejvýše jeden*, *všichni*, apod. Základní kvantifikátory jsou uvedeny v tabulce 1.5.

Základní kvantifikované výroky, které vzniknou kvantifikací jednoduché výrokové formy $v(x)$ proměnné $x \in D$ právě jedním ze základních kvantifikátorů, uvádí tabulka 1.6.

Příklad 1.19 Zapište symbolicky (užitím kvantifikátorů) následující obecné, resp. existenční výroky a rozhodněte, zda jsou pravdivé, či nepravdivé:

a) Pro každé reálné číslo x platí $x^2 - 4x + 7 > 0$.
b) Existuje reálné číslo x, pro které platí $|x| = 0$.
c) Existuje reálné číslo x, pro které platí $x^2 = -2$.

Tabulka 1.6: Základní kvantifikované výroky

Název kvantifikovaného výroku	Symbolický zápis	Slovní vyjádření
Obecný výrok	$\forall x \in D : v(x)$	Pro každé $x \in D$ platí $v(x)$.
Existenční výrok	$\exists x \in D : v(x)$	Existuje alespoň jedno $x \in D$, pro které platí $v(x)$.
Výrok o jednoznačné existenci	$\exists! x \in D : v(x)$	Existuje právě jedno $x \in D$, pro které platí $v(x)$.

Řešení:
a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 7 > 0.$ (pravdivý výrok)
b) $\exists x \in \mathbb{R} : |x| = 0.$ (pravdivý výrok)
c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -2.$ (nepravdivý výrok)

Příklad 1.20 Přečtěte a zapište slovy symbolický zápis obecných a existenčních výroků a rozhodněte o jejich pravdivosti:

a) $\forall x \in \mathbb{N} : x > 7.$
b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| > 0.$
c) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 < 1.$
d) $\exists x \in A : x < -1$, kde $A = \{7, 8, -3\}$.

Řešení:
a) Pro každé přirozené číslo x platí, že x je větší než 7. (nepravdivý výrok)
b) Pro každé reálné číslo x platí, že absolutní hodnota z x je větší než 0. (nepravdivý výrok)
c) Existuje celé číslo x, jehož druhá mocnina je menší než 1. (pravdivý výrok)
d) Existuje číslo x z množiny A takové, že x je menší než -1. (pravdivý výrok)

Příklad 1.21 Rozhodněte o pravdivosti, resp. nepravdivosti kvantifikovaného výroku:

a) $\forall x \in \mathbb{N} : |x| = x$, b) $\exists x \in \mathbb{N} : x \notin \mathbb{R}$, c) $\exists x \in \mathbb{Q} : x \notin \mathbb{N}$,
d) $\exists y \in \mathbb{N} : y \notin \mathbb{Z}$, e) $\exists x \in \mathbb{Z} : x \leq 0$, f) $\forall y \in \mathbb{N} : 2 \nmid y$.

Řešení: Výroky a), c), e) jsou pravdivé. Výroky b), d), f) jsou nepravdivé.

V dalším textu se budeme zabývat pravidly pro negace jednoduchých kvantifikovaných výroků s jedním kvantifikátorem, která jsou shrnuta v tabulce 1.7. Tato pravidla lze slovy popsat následujícím způsobem:

1) V negovaném kvantifikovaném výroku zaměníme každý kvantifikátor $\forall$ obecného výroku existenčním kvantifikátorem $\exists$ a naopak každý kvantifikátor $\exists$ existenčního výroku obecným kvantifikátorem $\forall$.

2) Výrokovou formu v negovaném kvantifikovaném výroku nahradíme její negací.

Tabulka 1.7: Obecný a existenční kvantifikovaný výrok a jeho negace

Kvantifikovaný výrok	Jeho negace
Obecný výrok $\forall x \in D : v(x)$	Existenční výrok $\exists x \in D : \neg v(x)$
Existenční výrok $\exists x \in D : v(x)$	Obecný výrok $\forall x \in D : v(x)$

Příklad 1.22 Zformulujte negace jednoduchých kvantifikovaných výroků dle tabulky 1.7:

a) Každé přirozené číslo je sudé.
b) Přišel alespoň jeden člověk.
c) Všichni moji spolužáci odmaturovali.
d) Žádná dívka z naší třídy nezpívá.
e) Nikdo nepřijel vlakem.
f) Někdo je za dveřmi.

Řešení:
a) Alespoň jedno přirozené číslo není sudé.
b) Žádný člověk nepřišel.
c) Alespoň jeden z mých spolužáků neodmaturoval.
d) Alespoň jedna dívka z naší třídy zpívá.
e) Někdo přijel vlakem.
f) Nikdo za dveřmi není.

Příklad 1.23 Zformulujte negace jednoduchých kvantifikovaných výroků z příkladu 1.19, zapište je symbolicky a rozhodněte o jejich pravdivosti.
Řešení:
a) Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro které neplatí $x^2 - 4x + 7 > 0$.
symbolický zápis: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 7 \leq 0$ (nepravdivý výrok)
b) Pro všechna reálná čísla x neplatí $|x| = 0$.
symbolický zápis: $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0$ (nepravdivý výrok)
c) Pro všechna reálná čísla x neplatí $x^2 = -2$.
symbolický zápis: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -2$ (pravdivý výrok)

Příklad 1.24 Zformulujte negace jednoduchých kvantifikovaných výroků z příkladu 1.21. Porovnejte pravdivostní hodnoty těchto negací s pravdivostními hodnotami původních výroků.

Řešení:
a) $\exists x \in \mathbb{N} : |x| \neq x$, b) $\forall x \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{R}$, c) $\forall x \in \mathbb{Q} : x \in \mathbb{N}$,
d) $\forall y \in \mathbb{N} : y \in \mathbb{Z}$, e) $\forall x \in \mathbb{Z} : x > 0$, f) $\exists y \in \mathbb{N} : 2 \mid y$.

Výroky b), d), f) jsou pravdivé. Výroky a), c), e) jsou nepravdivé.

Tabulka 1.8: Negace složených kvantifikovaných výroků

Složený obecný výrok	Jeho negace	Složený existenční výrok	Jeho negace
$\forall x \in D : p(x) \wedge q(x)$	$\exists x \in D : \neg p(x) \vee \neg q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \wedge q(x)$	$\forall x \in D : \neg p(x) \vee \neg q(x)$
$\forall x \in D : p(x) \vee q(x)$	$\exists x \in D : \neg p(x) \wedge \neg q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \vee q(x)$	$\forall x \in D : \neg p(x) \wedge \neg q(x)$
$\forall x \in D : p(x) \veebar q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \Leftrightarrow q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \veebar q(x)$	$\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow q(x)$
$\forall x \in D : p(x) \Rightarrow q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \wedge \neg q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \Rightarrow q(x)$	$\forall x \in D : p(x) \wedge \neg q(x)$
$\forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \veebar q(x)$	$\exists x \in D : p(x) \Leftrightarrow q(x)$	$\forall x \in D : p(x) \veebar q(x)$

Kvantifikované výroky se složenou výrokovou formou se negují kombinací pravidel pro negování jednoduchých kvantifikovaných výroků s pravidly pro negování složených výrokových forem viz tabulka 1.8.

Příklad 1.25 S využitím tabulky 1.8 negujte složené kvantifikované výroky, zapište je symbolicky a zjistěte, zda jsou pravdivé či nepravdivé.

a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 9 \ \wedge \ x < -5.$
b) $\exists x \in \mathbb{N} : x \neq 4 \ \vee \ x \mid 8.$
c) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = -2 \ \vee \ |x| > 0.$
d) $\forall x \in \mathbb{N} : x \mid 2 \ \wedge \ x \mid 3.$

Řešení:
a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 9 \ \vee \ x \geq -5.$ (nepravdivý výrok)
b) $\forall x \in \mathbb{N} : x = 4 \ \wedge \ x \nmid 8.$ (nepravdivý výrok)
c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -2 \ \wedge \ |x| \leq 0.$ (pravdivý výrok)
d) $\exists x \in \mathbb{N} : x \nmid 2 \ \vee \ x \nmid 3.$ (pravdivý výrok)

1.3.3 Úlohy k procvičení

1. Určete, které ze zadaných sdělení jsou, resp. nejsou výroky případně hypotézy. V případě výroků stanovte jejich pravdivostní hodnotu.

a) Vstupte!
b) $4 + 7 < 2$
c) Číslo 7 je prvočíslo.
d) Číslo 29 není prvočíslo.
e) Dnes je 23. srpna.
f) $3 + x = 7$
g) Venku svítí sluníčko.
h) V zimě pojedeme na hory.
i) Bůh existuje.
j) Matematická olympiáda.
k) Pro každé reálné číslo x platí $x^2 > 0$.
l) Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro které neplatí $x^2 > 0$.
m) $a + b - 3$

2. Vezměte libovolný psaný text z časopisu nebo novin a vyberte z něj věty, které

a) jsou výroky, b) nejsou výroky.

3. Žáci prvního stupně základní školy pronáší při vyučování v matematice různé výroky. Nahlédněte do příslušných učebních textů a tvořte a zapište výroky, k jejichž vyslovení je žák veden. Uveďte pravdivé výroky, které žák vyslovuje, když odpovídá správně. Uveďte i nepravdivé výroky, které žák vyslovuje, když odpovídá chybně.

4. Je dána dvojice výroků p, q, z nichž jeden je pravdivý a druhý nepravdivý:

p: $2^2 \neq 4$ (nepravdivý výrok), q: $8 < 9$ (pravdivý výrok).

Utvořte složené výroky $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ a rozhodněte s využitím tabulky pravdivostních hodnot 1.2, které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé.

5. Zapište symbolicky zadané výroky. Stručně zformulujte jejich negace a zapište je symbolicky.

a) Mrzne, ale nefouká.
b) Nemrzne ani nefouká.
c) Jetliže fouká, nemrzne.
d) Nemrzne nebo fouká.
e) Fouká jen tehdy, když nemrzne.
f) Buď nefouká, nebo mrzne.

6. Zapište symbolicky následující výroky:

a) Koupím limonádu, zmrzlinu a jahody.
b) Když koupím limonádu, nekoupím zmrzlinu ani jahody.
c) Koupím limonádu nebo jahody jen tehdy, když nekoupím zmrzlinu.

7. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

a) Jestliže $8 - 2 = 5$, potom $8 > 10$.
b) Jestliže $8 - 2 = 5$, potom $5 + 6 = 11$.
c) Jestliže $8 - 2 = 6$, potom $5 \cdot 6 = 15$.
d) Jestliže číslo 756 je dělitelné číslem 12, pak číslo 2331 je dělitelné číslem 33.
e) Číslo 1764 je dělitelné číslem 18 právě tehdy, když číslo 105 je dělitelné číslem 7.
f) $8 > 10 \;\Leftrightarrow\; -5 < -10$
g) $8 + 5 = 13 \;\Leftrightarrow\; 5 \cdot 6 = 11$

8. Nechť p, q, r, s jsou čtyři výroky, z nichž výroky p, q jsou pravdivé a výroky r, s jsou nepravdivé. Rozhodněte o pravdivostní hodnotě následujících složených výroků:

a) $p \vee r$, b) $p \Rightarrow r$, c) $r \Rightarrow p$, d) $s \Leftrightarrow q$,
e) $s \Rightarrow q$, f) $\neg q$, g) $\neg p$, h) $(p \vee r) \Rightarrow q$,
i) $\neg p \vee \neg q$, j) $(p \vee q) \wedge r$, k) $s \Rightarrow (p \wedge q)$, l) $(r \vee s) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

9. Proveďte pravdivostní vyhodnocení následujících výrokových formulí a rozhodněte o typu výrokové formule, kde p, q, r, s, t, u jsou výrokové proměnné:

a) $\neg(p \vee \neg p)$,
b) $\neg(p \wedge \neg p)$,
c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$,
d) $[s \Rightarrow (t \wedge u)] \Leftrightarrow [(s \Rightarrow t) \wedge (s \Rightarrow u)]$,
e) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$

10. Ověřte, že jsou logicky ekvivalentní tyto dvojice výrokových formulí:

a) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ a $p \veebar q$,
b) $\neg p \vee q$ a $p \Rightarrow q$,
c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ a $p \Leftrightarrow q$.

11. Určete, kolik řádků má tabulka pravdivostních hodnot pro výrokovou formuli, v níž se vyskytuje n výrokových proměnných, kde:

a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$, d) $n = 4$.

12. Odpovědi pěti osob A, B, C, D, E pozvaných na slavnostní hostinu lze vyjádřit v jazyce logiky takto:

a) Přijde A a přijde B.
b) Přijde B nebo přijde C.
c) Jestliže přijde C, přijde D.
d) E přijde právě tehdy, když přijde C.

Rozhodněte, který z výroků je pravdivý, když se z pěti pozvaných osob žádná nedostavila na hostinu.

13. Zapište symbolicky výrok: "Pojedu do Londýna autobusem nebo letadlem a jestliže v Londýně zůstanu celý víkend, ubytuji se v hotelu."

14. V okamžiku, kdy na chodbě dohlížející učitel uslyšel řinčení skla, byli ve třídě žáci A, B, C. Při vyšetřování se zjistilo, že u okna byl nejvýše jeden z žáků A, B. Žák C byl u okna právě, když tam nebyl žák A. Když B nebyl u okna, nebyl tam ani A. Lze určit pachatele v případě, že byl jen jeden?

15. Jsou dány následující výroky:

p: Nejsem lyžař nebo nejsem triatlonista.
q: Jestliže nejsem lyžař, jsem triatlonista.

Z následujících možností vyberte výrok, který je ekvivaletní s výrokem p a výrok, který je ekvivalentní s výrokem q:

v_1: Jestliže jsem lyžař, pak nejsem triatlonista.
v_2: Jestliže nejsem triatlonista, pak nejsem lyžař.
v_3: Jsem triatlonista nebo jsem lyžař.

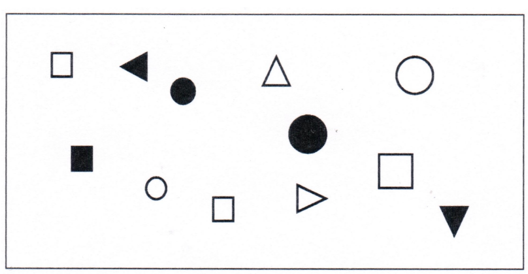
16. Je dán výrok

r: Jestliže mám auto, jedu k babičce.

Ze zadaných výroků vyberte takový, jenž má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok r:

a) Jedu k babičce nebo nemám auto.
b) Jestliže nemám auto, nejedu k babičce.
c) Jestliže jedu k babičce, pak mám auto.
d) Jestliže nejedu k babičce, pak nemám auto.
e) Nemám auto nebo jedu k babičce.

17. Vyberte každý obrazec na obrázku 1.1, který vyhovuje následujícím podmínkám:



Obr. 1.1:

a) Obrazec je kruh nebo je černý.
b) Obrazec je kruh a je černý.
c) Není pravdivé tvrzení, že obrazec je kruh a je černý.
d) Obrazec není kruh a není černý.
e) Není pravdivé tvrzení, že obrazec je kruh nebo je černý.
f) Obrazec je kruh a není černý.
g) Obrazec je kruh právě tehdy, když je černý.

18. Zapište symbolicky tyto výroky, rozhodněte o jejich pravdivosti a vytvořte jejich negace:

a) p: Pro každé reálné číslo a platí $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.
b) q: Existuje reálné číslo b takové, že platí $(b+1)^3 = b^3 + 1$.
c) r: Pro každé reálné číslo x platí $\sqrt{x^2} = |x|$.
d) s: Existuje takové reálné číslo y, pro které platí $y^2 - 6y + 15 = 0$.
e) t: Existuje takové reálné číslo z, pro které platí $z^2 + 4 = 0$.

19. Zapište symbolicky tyto výroky a rozhodněte o jejich pravdivosti:

p: Některá přirozená čísla jsou větší než 10^{30}.
q: Je možné určit racionální číslo větší než $\frac{1}{102}$ a menší než $\frac{1}{101}$.
r: Je možné určit racionální číslo větší než $\frac{1}{101}$ a menší než $\frac{1}{102}$.
s: Pro libovolné reálné číslo z je $z^2 - 10z + 100 > 0$.
t: Nerovnici $x^2 - 20x + 120 < 0$ nevyhovuje žádné reálné číslo.

20. Rozhodněte o pravdivosti obecného a existenčního výroku a utvořte jeho negaci. Potom výrok a jeho negaci zapište pomocí kvantifikátorů:

a) p: Existuje alespoň jedno reálné číslo a, pro které platí $a^2 = 3$.
b) q: Pro každé celé číslo b platí $3b + 1 > b$.
c) r: Pro každý trojúhelník ABC platí, že součet kterýchkoli dvou vnitřních úhlů je větší než úhel pravý.

21. Rozhodněte o pravdivosti, resp. nepravdivosti kvantifikovaného výroku:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$, b) $\forall z \in \mathbb{Z} : |z| = z$,
c) $\exists x \in \mathbb{Q} : x \in \mathbb{N}$, d) $\forall x \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{Z}$,
e) $\forall y \in \mathbb{Z} : y > 0$, f) $\exists x \in \mathbb{N} : 2 \mid x$.

22. Zformulujte negace jednoduchých kvantifikovaných výroků z předchozího příkladu. Porovnejte pravdivostní hodnoty těchto negací s pravdivostními hodnotami původních výroků.

a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$, b) $\exists z \in \mathbb{Z} : |z| \neq z$,
c) $\forall x \in \mathbb{Q} : x \notin \mathbb{N}$, d) $\exists x \in \mathbb{N} : x \notin \mathbb{Z}$,
e) $\exists y \in \mathbb{Z} : y \leq 0$, f) $\forall x \in \mathbb{N} : 2 \nmid x$.

23. Ve věštírně seděli tři bohové, kteří odpovídali na otázky: **Pravda** (mluví vždy pravdu), **Lež** (vždy lže) a **Moudrost** (někdy mluví pravdu a někdy lže). Do věštírny přišel filozof, aby zjistil, jak sedí bohové vedle sebe (podle vzhledu to nepoznal). Filozof se zeptal toho vlevo: "Který vedle tebe sedí?" a dostal odpověď "Pravda". Pak se zeptal toho prostředního: "Kdo jsi?" a dostal odpověď "Moudrost". Nakonec se obrátil k pravému: "Který sedí vedle tebe?" a odpověď zněla: "Lež". Jak z těchto odpovědí filozof uhodl pořadí bohů?

Výsledky:

1. pravdivé výroky: c), l),
nepravdivé výroky: b), d), k),
výroky, jejichž pravdivostní hodnota je časově nebo místně podmíněna: e), g),
hypotézy: h), i),
jazykové výrazy, které nejsou výroky: a), f) (výroková forma), j), m).

4. $\neg p$: $2^2 = 4$ (pravdivý výrok),
$\neg q$: $8 \geq 9$ (nepravdivý výrok),
$p \wedge q$: $(2^2 \neq 4) \wedge (8 < 9)$ (nepravdivý výrok),
$p \vee q$: $(2^2 \neq 4) \vee (8 < 9)$ (pravdivý výrok),
$p \veebar q$: $(2^2 \neq 4) \veebar (8 < 9)$ (pravdivý výrok),
$p \Rightarrow q$: $(2^2 \neq 4) \Rightarrow (8 < 9)$ (pravdivý výrok),
$p \Leftrightarrow q$: $(2^2 \neq 4) \Leftrightarrow (8 < 9)$ (nepravdivý výrok).

5. Označme výroky

m: Mrzne. f: Fouká.

Zadané výroky zapsané symbolicky:

a)	$m \wedge \neg f$	b)	$\neg m \wedge \neg f$	c)	$f \Rightarrow \neg m$
d)	$\neg m \vee f$	e)	$f \Leftrightarrow \neg m$	f)	$\neg f \veebar m$

Negace složených výroků zapsané symbolicky a jejich slovní formulace:

a) $\neg m \vee f$: Nemrzne nebo fouká.
b) $m \vee f$: Mrzne nebo fouká.
c) $f \wedge m$: Fouká a mrzne.
d) $m \wedge \neg f$: Mrzne a nefouká.
e) $f \veebar \neg m$: Buď fouká, nebo nemrzne.
f) $\neg f \Leftrightarrow m$: Nefouká jen tehdy, když mrzne.

6. Označme výroky:
l: Koupím limonádu. z: Koupím zmrzlinu. j: Koupím jahody.

Zadané výroky zapsané symbolicky:

a) $m \wedge z \wedge j$ b) $l \Rightarrow (\neg z \wedge \neg j)$ c) $(l \vee j) \Leftrightarrow \neg z$

7. Výroky a), b), e), f) jsou pravdivé; výroky c), d), g) jsou nepravdivé.

8. Složené výroky a), c), e), h), k), l) jsou pravdivé; složené výroky b), d), f), g), i), j) jsou nepravdivé.

9. Tautologie jsou výrokové formule b), c), d) . Kontradikce jsou výrokové formule a), e).

10. a) Z tabulky pravdivostních hodnot je patrné, že výrokové formule $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ a $p \veebar q$ jsou logicky ekvivalentní.

$(p$	$\wedge$	$\neg q)$	$\vee$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)$	p	$\veebar$	q
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0

b) Z tabulky pravdivostních hodnot je patrné, že výrokové formule $\neg p \vee q$ a $p \Rightarrow q$ jsou logicky ekvivalentní.

$\neg p$	$\vee$	q	p	$\Rightarrow$	q
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0

c) Z tabulky pravdivostních hodnot je patrné, že výrokové formule $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ a $p \Leftrightarrow q$ jsou logicky ekvivalentní.

$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$	p	$\Leftrightarrow$	q
1	1	1	1		1		1	1	1
1	0	0	0		1		1	0	0
0	1	1	0		0		0	0	1
0	1	0	1		1		1	1	0

11. a) 2 řádky, b) 4 řádky, c) 8 řádků, d) 16 řádků.

12. Pravdivé jsou výroky c), d).

13. Označme výroky:

a: Pojedu autobusem. l: Pojedu letadlem.
z: V Londýně zůstanu celý týden. h: Ubytuji se v hotelu.

Zadaný složený výrok zapíšeme symbolicky: $(a \vee l) \wedge (z \Rightarrow h)$.

14. Ověříme výrokovou formuli $D : (\neg A \vee \neg B) \wedge (C \Leftrightarrow \neg A) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$, viz tabulka:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$C \Leftrightarrow \neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	D
1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0

Z tabulky pravdivostních hodnot je zřejmé, že složený výrok D je pravdivý pouze v případě, kdy okno rozbil žák C.

15. Označme výroky:

l: Jsem lyžař. t: Jsem triatlonista.

S tímto označením pak získáváme složené výroky

p: $\neg l \vee \neg t$, q: $\neg l \Rightarrow t$,
v_1: $l \Rightarrow \neg t$, v_2: $\neg t \Rightarrow \neg l$, v_3: $t \vee l$.

jejichž pravdivostní hodnoty zapíšeme do tabulky:

l	t	$\neg l$	$\neg t$	p	q	v_1	v_2	v_3
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	0

Z tabulky pravdivostních hodnot je zřejmé, že výroky p, v_1 a q, v_3 jsou ekvivalentní.

16. Označme výroky:

p: Mám auto.
q: Jedu k babičce.
r: Jestliže mám auto, jedu k babičce.

Pro toto označení jsou zadané složené výroky zapsané symbolicky následující:

a) $q \vee \neg p$: Jedu k babičce nebo nemám auto.
b) $\neg p \Rightarrow \neg q$: Jestliže nemám auto, nejedu k babičce.
c) $q \Rightarrow p$: Jestliže jedu k babičce, pak mám auto.
d) $\neg q \Rightarrow \neg p$: Jestliže nejedu k babičce, pak nemám auto.
e) $\neg p \vee q$: Nemám auto nebo jedu k babičce.

Výrok r je zapsán symbolicky $p \Rightarrow q$. Provedeme pravdivostní ohodnocení zadaných složených výroků pomocí tabulky pravdivostních hodnot:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$q \vee \neg p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$q \Rightarrow p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Z tabulky pravdivostních hodnot je zřejmé, že výroky a), d), e) jsou logicky ekvivalentní se zadaným výrokem r.

17. a) 7 obrazců (všechny černé obrazce a dva kruhy, které nejsou černé).

b) 2 obrazce (dva černé kruhy).

c) 10 obrazců (všechny obrazce mimo dvou černých kruhů).

d) 5 obrazců.

e) 5 obrazců.

f) 2 obrazce (všechny kruhy, které nejsou černé).

g) 7 obrazců (dva černé kruhy a pět obrazců, co nejsou černé a nejsou kruhy).

18. a) p : $\forall a \in \mathbb{R} : (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$. (pravdivý výrok)

$\neg p$: $\exists a \in \mathbb{R} : (a+1)^2 \neq a^2 + 2a + 1$. (nepravdivý výrok)

$\neg p$: Existuje reálné číslo a, pro které neplatí $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.

b) q : $\exists b \in \mathbb{R} : (b+1)^3 = b^3 + 1$. (pravdivý výrok; $b = 0$)

$\neg q$: $\forall b \in \mathbb{R} : (b+1)^3 \neq b^3 + 1$. (nepravdivý výrok)

$\neg q$: Pro všechna reálná čísla b platí $(b+1)^3 \neq b^3 + 1$.

c) r : $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$. (pravdivý výrok)

$\neg r$: $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} \neq |x|$. (nepravdivý výrok)

$\neg r$: Existuje reálné číslo x, pro které neplatí $\sqrt{x^2} = |x|$.

d) s : $\exists y \in \mathbb{R} : y^2 - 6y + 15 = 0$. (pravdivý výrok: $y_1 = 5$, $y_2 = 3$)

$\neg s$: $\forall y \in \mathbb{R} : y^2 - 6y + 15 \neq 0$. (nepravdivý výrok)

$\neg s$: Pro všechna reálná čísla y platí $y^2 - 6y + 15 \neq 0$.

e) t : $\exists z \in \mathbb{R} : z^2 + 4 = 0$. (nepravdivý výrok)

$\neg t$: $\forall z \in \mathbb{R} : z^2 + 4 \neq 0$. (pravdivý výrok)

$\neg t$: Pro všechna reálná čísla z platí $z^2 - 6z + 15 \neq 0$.

19. p: $\exists n \in \mathbb{N} : n > 30$. (pravdivý výrok)

q: $\exists x \in \mathbb{Q} : x > \frac{1}{102} \wedge x < \frac{1}{101}$. (pravdivý výrok)

r: $\exists x \in \mathbb{Q} : x < \frac{1}{102} \wedge x > \frac{1}{101}$. (nepravdivý výrok)

s: $\forall z \in \mathbb{R} : z^2 - 10z + 100 > 0$. (pravdivý výrok)

t: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 20x + 120 \geq 0$. (pravdivý výrok)

20. a) p : $\exists a \in \mathbb{R} : a^2 = 3$. (pravdivý výrok)

$\neg p$: Pro všechna reálná čísla a platí, že $a^2 \neq 3$.

$\neg p$: $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \neq 3$. (nepravdivý výrok)

b) q : $\forall b \in \mathbb{Z} : 3b + 1 > b$. (nepravdivý výrok)

$\neg q$: Existuje celé číslo b, pro které platí $3b + 1 \leq b$.

$\neg q$: $\exists b \in \mathbb{Z} : 3b + 1 \leq b$. (pravdivý výrok)

c) Označme T množinu všech trojúhelníků a R pravý úhel.

r : $\forall \triangle ABC \in T : (\angle ABC + \angle BCA > R) \wedge (\angle ABC + \angle CAB > R) \wedge (\angle BCA + \angle CAB > R)$ (nepravdivý výrok)

$\neg r$: Existuje trojúhelník ABC, pro který platí, že součet některých jeho dvou vnitřích úhlů je menší nebo roven úhlu pravému.

$\neg r$: $\exists \triangle ABC \in T : (\angle ABC + \angle BCA \leq R) \vee (\angle ABC + \angle CAB \leq R) \vee (\angle BCA + \angle CAB \leq R)$. (pravdivý výrok)

21. Výroky a), c), d), f) jsou pravdivé. Výroky b), e) jsou nepravdivé.

22. Výroky b), e) jsou pravdivé. Výroky a), c), d), f) jsou nepravdivé.

23. Zleva seděli bohové v tomto pořadí: Moudrost, Lež, Pravda.