Možnosti distanční výuky

Aritmetika 2

IMAp04 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Helena Durnová, Ph.D.

Neurčité rovnice

Aritmetika 2

IMAp04 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Helena Durnová, Ph.D.

Prezentace č. 5

NEURČITÉ ROVNICE

Neurčité rovnice jsou rovnice se dvěma nebo více neznámými, které řešíme v oboru celých čísel

---

Definice:

Lineární neurčitá rovnice o dvou neznámých *x, y* je rovnice

$$\boxed{a \cdot x + b \cdot y = c} \qquad a \neq 0,\ b \neq 0,$$

kde koeficienty *a, b, c* jsou celá čísla a neznámé *x, y* hledáme v množině celých čísel.

- Jsou-li koeficienty *a, b, c* v neurčité rovnici racionální necelá čísla, vynásobíme rovnici vhodným číslem tak, aby nabyly celočíselných hodnot.
- Neurčité rovnice se nazývají též *diofantické* , podle řeckého matematika Diofanta z Alexandrie, 3. století př.n.l., který se zabýval řešením těchto rovnic.

NEURČITÉ ROVNICE

Řešitelnost lineární neurčité rovnice

Neurčitá rovnice $a \cdot x + b \cdot y = c$ má řešení v případě, že největší společný dělitel koeficientů *a, b* je také dělitelem čísla *c.*

Pak řešením je nekonečně mnoho dvojic celých čísel *x, y*

$D(a,b) = d \;\wedge\; d \mid c$ ..... rovnice má nekonečně mnoho řešení,

Jestliže čísla x_0, y_0 jsou řešením rovnice $a \cdot x + b \cdot y = c$, pak všechna řešení této rovnice jsou dána parametrickými rovnicemi:

$$x = x_0 + \frac{b}{D(a,b)} \cdot t,\qquad y = y_0 + \frac{a}{D(a,b)} \cdot t,$$

kde *t* je celé číslo.

- V případě, že největší společný dělitel čísel *a, b* není dělitelem koeficientu *c*, pak rovnice nemá řešení

$D(a,b) = d \;\wedge\; d \nmid c$ ..... 0 řešení

NEURČITÉ ROVNICE

Příklad 1:

Rozhodněte o řešitelnosti následujících rovnic a uveďte alespoň dvě různá řešení (pokud existují):

a) 4x – 3y = 7

b) 6x + 8y = 3

c) 6x + 15y = 9

Řešení:

a) D(4,-3) = 1 $\wedge$ 1|7, rovnice má nekonečně mnoho řešení, např. x_1 = 1, y_1 = -1 nebo x_2 = 4, y_2 = 3

NEURČITÉ ROVNICE

b) $6x + 8y = 3$

c) $6x + 15y = 9$

Řešení:

b) $D(6,8) = 2 \quad \wedge \quad 2 \nmid 3$, rovnice nemá řešení,

c) $D(6,15) = 3 \quad \wedge \quad 3 \mid 9$, rovnice má nekonečně mnoho řešení, např. $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ nebo $x_2 = -1$, $y_2 = 1$

NEURČITÉ ROVNICE

Metody řešení neurčitých rovnic:

1) Experimentální metoda

2) Ze vztahu $x = x_1 + \frac{b}{D(a,b)} \cdot t,$

$$y = y_1 + \frac{a}{D(a,b)} \cdot t,$$ kde t je celé číslo.

3) Redukční metoda

4) Pomocí kongruencí

NEURČITÉ ROVNICE

Příklad 2:

Řešte neurčitou rovnici 4x – 3y = 7.

Řešení:

D(4,-3) = 1 $\wedge$ 1|7, rovnice má nekonečně mnoho řešení, která určíme tzv. redukční metodou:

Vyjádříme si tu neznámou, u které je koeficient s menší absolutní hodnotou.

$y = \frac{4x-7}{3}$ $\quad$ y ∈ ℂ, tedy i zlomek na pravé straně této rovnosti je celé číslo

t ∈ ℂ

$$y = \frac{3x+x-6-1}{3} = \frac{3x}{3} + \frac{x}{3} - \frac{6}{3} - \frac{1}{3}$$

$$y = x + \frac{x}{3} - 2 - \frac{1}{3} \qquad y = x - 2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$$

substituce: $\quad t = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$

NEURČITÉ ROVNICE

Řešení:

$$y = x - 2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \longrightarrow t \in \mathbb{C}$$

substituce: $t = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$ z této rovnosti vyjádříme x: $x = 3t + 1$ kde $t \in \mathbb{C}$

$$y = x - 2 + t = 3t + 1 - 2 + t = 4t - 1$$

$y = 4t - 1$

Řešením rovnice je nekonečně mnoho dvojic celých čísel *x, y*, kde $x = 3t + 1$, $y = 4t - 1$, přičemž *t* je libovolné celé číslo.

t	0	1	2	3	-2
$x = 3t + 1$	1	4	7	10	-5
$y = 4t - 1$	-1	3	7	11	-9

Zkouška: $4x - 3y = 7$

$L = 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 7 = P$

MUNI

NEURČITÉ ROVNICE

Příklad 3:

Řešte neurčitou rovnici 4x + 5y = 1.

Řešení:

D(4,5) = 1 $\wedge$ 1|1, rovnice má nekonečně mnoho řešení, která určíme tzv. redukční metodou:

Vyjádříme si tu neznámou, u které je koeficient s menší absolutní hodnotou.

$x = \frac{-5y+1}{4}$ $\quad x \in \mathbb{C}$, tedy i zlomek na pravé straně této rovnosti je celé číslo

$t \in \mathbb{C}$

$x = \frac{-4y-y+1}{4} = \frac{-4y}{4} - \frac{y}{4} + \frac{1}{4}$

$x = -y - \frac{y}{4} + \frac{1}{4}$ $\qquad$ $x = -y - \frac{y}{4} + \frac{1}{4}$ $\qquad$ substituce: $\quad t = -\frac{y}{4} + \frac{1}{4}$

NEURČITÉ ROVNICE

Řešení:

$x = -y - \frac{y}{4} + \frac{1}{4}$ $\rightarrow$ $t \in \mathbb{C}$

substituce : $t = -\frac{y}{4} + \frac{1}{4}$ z této rovnosti vyjádříme y: $y = -4t + 1$ kde $t \in \mathbb{C}$

$x = -y + t = -(-4t + 1) + t = 4t - 1 + t = 5t - 1$ $x = 5t - 1$

Řešením rovnice je nekonečně mnoho dvojic celých čísel *x, y*, kde $x = 5t - 1$, $y = -4t + 1$ přičemž *t* je libovolné celé číslo.

t	0	1	2	-1	-2
$x = 5t - 1$	-1	4	9	- 6	- 11
$y = -4t + 1$	1	- 3	-7	5	9

Zkouška: $4x + 5y = 1$

$L = 4 \cdot (-1) + 5 \cdot (1) = 1 = P$

MUNI

Příklad 4:

Kolika způsoby můžeme vyplatit 69 Kč pouze dvoukorunovými a pětikorunovými mincemi?

Řešení:

Počet dvoukorunových mincí … *x*

Počet pětikorunových mincí … *y*

$2x + 5y = 69$ D(2,5)=1 ∧ 1|69

rovnice má nekonečně mnoho řešení, která určíme tzv. redukční metodou

$2x + 5y = 69$

$$x = \frac{-5y+69}{2} = \frac{-4y-y+68+1}{2} = -2y - \frac{y}{2} + 34 + \frac{1}{2} = -2y + 34 - \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \longrightarrow t \in \mathbb{C}$$

$x = -2y + 34 + t$ substituce: $t = -\frac{y}{2} + \frac{1}{2}$ z této rovnosti vyjádříme y: $y = 1 - 2t$

$x = -2y + 34 + t = -2(1 - 2t) + 34 + t = -2 + 4t + 34 + t = 32 + 5t$ $x = 32 + 5t$

M U N I

Řešení:

Neurčitá rovnice $2x + 5y = 69$ má řešení: $x = 32 + 5t,\ y = 1 - 2t$ (pro t = 1: x = 37, y = -1)

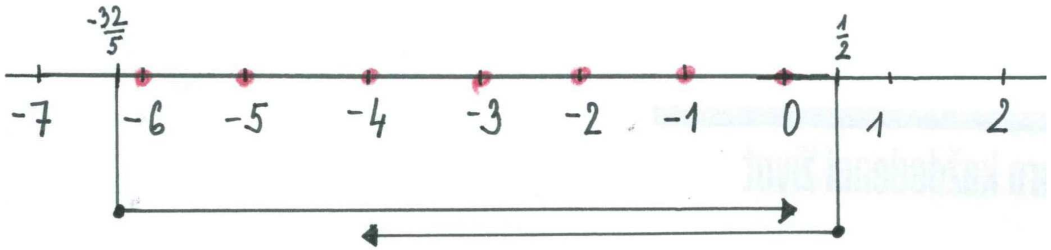
! Slovní úloha musí splňovat následující podmínky:

$\underline{x \geq 0} \quad \wedge \quad \underline{y \geq 0}$

$32 + 5t \geq 0 \quad \wedge \quad 1 - 2t \geq 0$

$5t \geq -32 \quad \wedge \quad 2t \leq 1$

$t \geq -\frac{32}{5} \quad \wedge \quad t \leq \frac{1}{2}$



$t \in \mathbb{C}$

$-\frac{32}{5} \leq t \leq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad t \in \mathbb{C}$ ..... tedy $t \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

t	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$x = 32 + 5t$	2	7	12	17	22	27	32
$y = 1 - 2t$	13	11	9	7	5	3	1

Příklad 5:

Babička měla na dvorku králíky a slepice. Dohromady bylo na dvorku 34 nohou. Kolik mohla mít babička slepic a králíků?

Řešení:

Počet slepic … *x*

Počet králíků… *y*

$2x + 4y = 34$ D(2,4)=2 ∧ 2|34

rovnice má nekonečně mnoho řešení

$2x + 4y = 34$

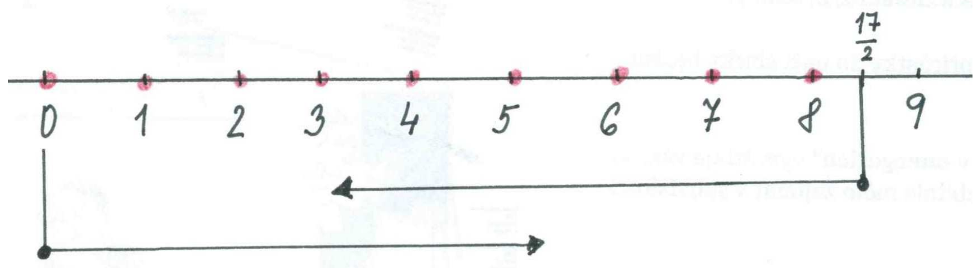
$x + 2y = 17$

$x = 17 - 2y$ $y = t,\ x = 17 - 2t$ ….. *řešení rovnice* $x + 2y = 17$

! Slovní úloha musí splňovat následující podmínky:

$\underline{x \geq 0}$	∧	$\underline{y \geq 0}$
$17 - 2t \geq 0$	∧	$t \geq 0$
$2t \leq 17$	∧	$t \geq 0$
$t \leq \frac{17}{2}$	∧	$t \geq 0$

$t \in \mathbb{C}$



$0 \leq t \leq \frac{17}{2} \wedge \ t \in \mathbb{C}$ ….. tedy $t \in \{0, 1, 2, \ldots, 7, 8\}$

M U N I

Příklad 5:

Řešení:

Počet slepic … *x*

Počet králíků… *y*

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x = 17 - 2t$	17	15	13	11	9	7	5	3	1
$y = t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Příklad 6:

Pepíček spočítal nohy všech králíků a slepic, které měla babička na dvorku. Napočítal dohromady 33 nohou. Nemohl se Pepíček při počítání splést?

Řešení:

Počet slepic … x

Počet králíků… y

$2x + 4y = 33$ D(2,4)=2 $\wedge$ $2 \nmid 33$

Neurčitá rovnice nemá řešení, Pepíček nepočítal správně.

V ISu ve studijních materiálech k předmětu IMAp04 jsou vloženy další řešené slovní úlohy k tématu neurčitých rovnic, které Vám mohou posloužit pro inspiraci a jako zdroj při přípravě na zápočtovou písemnou práci.