



Číselné soustavy

převody mezi zápisy čísel v různých pozičních soustavách (zejména ze soustavy poziční desítkové do poziční nedesítkové a naopak), operace v pozičních soustavách s nedesítkovým základem (zejména se základy 2 až 8, 12 a 16), slovní úlohy a algebrogramy.

Petra Bušková
Helena Durnová
Brno 2020

Jednoznačnost vyjádření čísla v číselné soustavě

- budeme pracovat s číselnými soustavami, ve kterých jsou využívány číslice 0, 1, 2, ... 9,
- v případně potřeby více symbolů využijeme písmena v abecedním pořádku
- následující věta říká, že v každé z těchto číselných soustav lze jakékoli přirozené číslo vyjádřit jednoznačně (to mj. znamená, že příklady řešené zde i v písemkách mají jediný správný výsledek).

Věta 1: Každé přirozené číslo a lze vyjádřit právě jedním zápisem ve tvaru

$$a = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \dots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z^1 + a_0 \cdot z^0, \quad (1)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_i < z$ pro $i = 0, 1, \dots, n-1$; $a_n \neq 0, a_n < z$; $z > 1, z \in \mathbb{N}$.

z - základ číselné soustavy

a_i - číslice i -tého řádu

z^i - jednotka i -tého řádu

Zápis (1) se nazývá **rozvinutý zápis čísla a v číselné soustavě o základu z** .

Zkráceně zapisujeme $a = (a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_z$.

V příkladech budeme využívat zkráceného zápisu bez závorek.



Příklad 1

Zapište čísla rozvinutým zápisem v dané soustavě.

a) $a = 3765_{10}$

b) $b = 201_6$

Řešení:

a) $a = 3765_{10} = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

b) $b = 201_6 = 2 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0$

Jednoznačnost zápisu čísla

Jedním z důsledků věty 1 je ten, že pro zapsání jakéhokoli přirozeného čísla v číselné soustavě o základu z potřebujeme právě z symbolů. Těmito symboly jsou pro $z \leq 10$ jednotlivé číslice, například pro $z = 3$ využíváme číslice 0, 1, 2.

Problém nastává pro soustavy o základu vyšším než 10. Pak volíme za další symboly postupně písmena A, B, C, D, E, F , případně i další. Tedy pro $z = 16$ využíváme k zapsání čísla symboly 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F , kde například $C = 12$.

Stojí za povšimnutí, v číselné soustavě o základu z má nejvyšší použitelná číslice (symbol) hodnotu $z - 1$, například v čísle vyjádřeném v číselné soustavě o základu $z = 8$ se nikdy neobjeví číslice 8.

Příklad 2

Zapište čísla rozvinutým zápisem v dané soustavě.

a) $a = 5D7_{16}$

b) $b = BA5_{12}$

Řešení:

a) $a = 5D7_{16} = 5 \cdot 16^2 + D \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0$

b) $b = BA5_{12} = B \cdot 12^2 + A \cdot 12^1 + 5 \cdot 12^0$



Příklad 3

Trojčiferné číslo zapsané v desítkové soustavě je zakončeno číslicí 4. Přesuneme-li ji na první místo a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny, dostaneme číslo, které je o 81 menší než původní číslo. Určete původní číslo.

Řešení:

Původní číslo: $xy4 = x \cdot 10^2 + y \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

Nové číslo: $4xy = 4 \cdot 10^2 + x \cdot 10^1 + y \cdot 10^0$

Platí:

$$xy4 - 81 = 4xy$$
$$x \cdot 10^2 + y \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 - 81 = 4 \cdot 10^2 + x \cdot 10^1 + y \cdot 10^0$$
$$100x + 10y - 77 = 400 + 10x + y$$
$$10x + y = 53$$

Víme, že x, y jsou jednociferná přirozená čísla, zkusíme tedy možnosti:

je-li $x = 1 \rightarrow y = 43$, $x = 2 \rightarrow y = 33$, $x = 3 \rightarrow y = 23$, $x = 4 \rightarrow y = 13$, $x = 5 \rightarrow y = 3$.

Vyšší hodnoty x nepřicházejí v úvahu, pak by muselo být y záporné. Hledané číslo je tedy 534.

Příklad 4 (k samostatnému řešení)

Které dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě se po vzájemné záměně cifer zmenší o 36?

Jiný způsob: zápis zadání pomocí algebrogramu a řešení úvahou:

$$\begin{array}{r} AB \\ - BA \\ \hline 36 \end{array}$$



Převody zápisů přirozených čísel z jedné číselné soustavy do druhé: typy příkladů

1. Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do desítkové soustavy
2. Převod z desítkové soustavy do soustavy o základu $z \neq 10$
3. Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do soustavy o základu $z' \neq 10$



Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do desítkové soustavy

Převod budeme provádět s využitím věty 1, číslo v původní číselné soustavě zapíšeme pomocí rozvinutého zápisu a následně spočítáme hodnotu v desítkové soustavě.

Příklad 5: Převeďte do zápisu v desítkové soustavě.

a) 10201_3

b) 175_8

c) $A5C_{16}$

Řešení:

a) $10201_3 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 81 + 0 + 18 + 0 + 1 = 100_{10}$

b) $175_8 = 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 64 + 56 + 5 = 125_{10}$

c) $A5C_{16} = A \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 = 10 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 2560 + 80 + 12 = 2652_{10}$



Příklad 6 (k samostatnému řešení)

Převeďte do zápisu v desítkové soustavě.

a) 3012_4

b) 4001_5

c) 11001_2

d) $AB0_{12}$

e) $70D_{15}$

Výsledky: a) 198, b) 501, c) 25, d) 1572, e) 1588



Převod z desítkové soustavy do soustavy o základu $z \neq 10$

U těchto převodů používáme tři metody:

- I. Dělení mocninami základu
- II. Postupné dělení základem
- III. Graficky (seskupování)

I. Metoda dělení mocninami základu

Příklad 7: Zapište číslo $a = 17_{10}$ v soustavě o základu $z = 3$.

Řešení:

Dělíme postupně mocninami nového základu (snižujeme exponent), až dostaneme zbytek 0.

Mocniny základu: $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27 \dots$

Nejvyšší vhodná mocnina základu je druhá (hodnota 27 se do čísla 17 nevejde)

$$17:3^2 = 1 \text{ (zb. 8)}$$

$$8:3^1 = 2 \text{ (zb. 2)}$$

$$2:3^0 = 2 \text{ (zb. 0)}$$

Z výpočtu je vidět, že můžeme zapsat $17 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 122_3$.



Příklad 8 (k samostatnému řešení)

Zapište číslo a v soustavě o základu z , využijte metodu dělení mocninami základu.

a) $a = 9_{10}$ $z = 2$

b) $a = 561_{10}$ $z = 4$

c) $a = 280_{10}$ $z = 12$

Výsledky: *a)* 1001_2 , *b)* 20301_4 , *c)* $1B4_{12}$

II. Metoda postupného dělení základem

Příklad 9: Zapište číslo $a = 19_{10}$ v soustavě o základu $z = 3$.

Řešení:

Dělíme zadané číslo základem a zapíšeme zbytek. Následně dělíme výsledky předchozího dělení základem a zapisujeme zbytky tak dlouho, až dostaneme podíl 0.

$$19:3 = 6 \text{ (zb. 1)}$$

$$6:3 = 2 \text{ (zb. 0)}$$

$$2:3 = 0 \text{ (zb. 2)}$$

Výsledek získáme jako zápis zbytků od konce, tedy $a = 19_{10} = 201_3$



Příklad 10 (k samostatnému řešení)

Zapište číslo a v soustavě o základu z , využijte metodu postupného dělení základem

a) $a = 102_{10}$ $z = 8$

b) $a = 12477_{10}$ $z = 16$

c) $a = 197_{10}$ $z = 12$

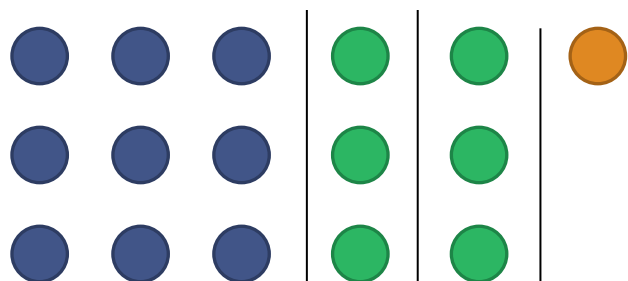
Výsledky: a) 146_8 , b) $30BD_{16}$, c) 145_{12}

III. Metoda grafická

Příklad 11: Zapište číslo $a = 16_{10}$ v soustavě o základu $z = 3$.

Řešení:

Zakreslíme 16 obrazců (bodů) do sloupečků o $z = 3$ řádcích.



$$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 121_3$$



Příklad 12 (k samostatnému řešení)

Zapište číslo a v soustavě o základu z , využijte grafickou metodu.

a) $a = 14_{10}$ $z = 2$

b) $a = 31_{10}$ $z = 4$

c) $a = 17_{10}$ $z = 12$

Výsledky: a) 1110_2 , b) 133_4 , c) 15_{12}

Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do soustavy o základu $z' \neq 10$

- Můžeme využít nepřímý převod, to je převod ze soustavy $z \neq 10$ do desítkové soustavy a následný převod z desítkové soustavy do soustavy $z' \neq 10$.
- Jestliže platí $z' = z^n$, nebo $z = (z')^n$, tedy základ jedné soustavy je mocninou základu druhé soustavy, provádíme přímý převod mezi soustavami.



Příklad 13

Převeďte číslo a zapsané v soustavě o základu z do soustavy o základu z' .

a) $a = 11000110_2, z' = 4$

Platí $z = 2, z' = 4 = 2^2$. Protože nový základ je druhá mocnina původního základu, rozdělíme původní zápis čísla od konce na skupiny po dvou cifrách. Počet skupin určuje počet cifer v zápisu čísla ve čtyřkové soustavě.

$$a = 11000110_2$$

$$10_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$$

$$01_2 = 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1$$

$$00_2 = 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0$$

$$11_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$$

Dohromady vypadá zápis takto: $11000110_2 = 3012_4$.

Provedeme zkoušku:

$$\begin{aligned} 11000110_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = \\ &= 2^6 \cdot (1 \cdot 2 + 1) + 2^4 \cdot (0 \cdot 2 + 0) + 2^2(0 \cdot 2 + 1) + 2^0(1 \cdot 2 + 0) = \\ &= 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 3012_4 \end{aligned}$$



Příklad 13

b) $a = 1635_8$, $z' = 2$

Postupujeme opačným postupem: každá z cifer v osmičkové soustavě odpovídá třem (osmička je třetí mocnina dvojky) cifrám ve dvojkové soustavě.

$$5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$3 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$$1 = 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Nuly na začátku čísla nemá smysl psát, získáváme výsledek:

$$1635_8 = 1110011101_2$$




Další příklady k samostatnému řešení

Příklad 14: Převedte číslo a zapsané v soustavě o základu z do soustavy o základu z' .

a) $a = 11010110_2, z' = 8$

b) $a = 2311_4, z' = 2$

Příklad 15: Vytvořte si tabulku prvních dvaceti čísel v číselných soustavách o základech 2, 3, 4 a 12.




Příklad 16 (k samostatnému řešení)

Dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě má ciferný součet rovný číslu 9. Jestliže spolu číslice zaměníme, dostaneme nové číslo, které je o 45 větší než původní. Určete původní číslo.

Zapsáno jako algebrogram:

$$\begin{array}{r} AB \\ + 45 \\ \hline BA \end{array} \quad \text{a platí: } A+B=9$$



Příklad 17 (k samostatnému řešení)

Které dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě se po vzájemné výměně cifer zvětší o 37?

Výsledek: Takové číslo neexistuje.

Příklad 18

Vypočítejte základ z číselné soustavy, platí-li $243_z = 99_{10}$.

Řešení:

Nejprve si rozepíšeme číslo 243_z , následně vyřešíme vzniklou kvadratickou rovnicí v desítkové soustavě:

$$243_z = 2 \cdot z^2 + 4 \cdot z^1 + 3 \cdot z^0$$

$$2 \cdot z^2 + 4 \cdot z^1 + 3 \cdot z^0 = 99$$

$$2 \cdot z^2 + 4 \cdot z - 96 = 0$$

$$z^2 + 2 \cdot z - 48 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-48)}}{2} = \frac{-2 \pm 14}{2} = -1 \pm 7$$

Jak je vidět, kořeny vychází $z_1 = 6, z_2 = -8$. Protože základ číselné soustavy musí být kladný, existuje jediné řešení, a to $z = 6$.

Zkusme ověřit: $243_6 = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 99$.

Příklad 19 (k samostatnému řešení)

Vypočítejte základ z číselné soustavy.

a) $21_z = 9_{10}$

b) $120_z = 35_{10}$

c) $222_z = 42_{10}$

Výsledky: a) 4, b) 5, c) 4.



Počítání po jedné v pozičních soustavách s různými základy

Než začneme s početními výkony, podívejme se, jak jdou za sebou čísla v různých číselných soustavách:


$z=2$: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ...

$z=3$: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, ...

...

$z=8$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, ...

(zápis 20 v osmičkové soustavě odpovídá zápisu 16 v desítkové soustavě)



Čísla ve dvanáctkové a šestnáctkové soustavě

- Ze soustav se základem větším než 10 si pro naše počítání vybereme jen soustavy se základem 12 a 16.
- počítání po jedné v těchto soustavách:

$z=12$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 20,

(zápis 20 ve dvanáctkové soustavě odpovídá zápisu 24 v desítkové)

$z=16$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, ...

(zápis 10 ve dvanáctkové soustavě odpovídá zápisu 16 v desítkové)

Příklad 20

Určete předchůdce a následovníka čísla v dané číselné soustavě.

a) 99_{10} předchůdce: 98_{10} následovník: 100_{10}

b) $166_7 = 1 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0$
předchůdce: 165_7 následovník: 200_7

c) 33203_4

d) 1100101_2

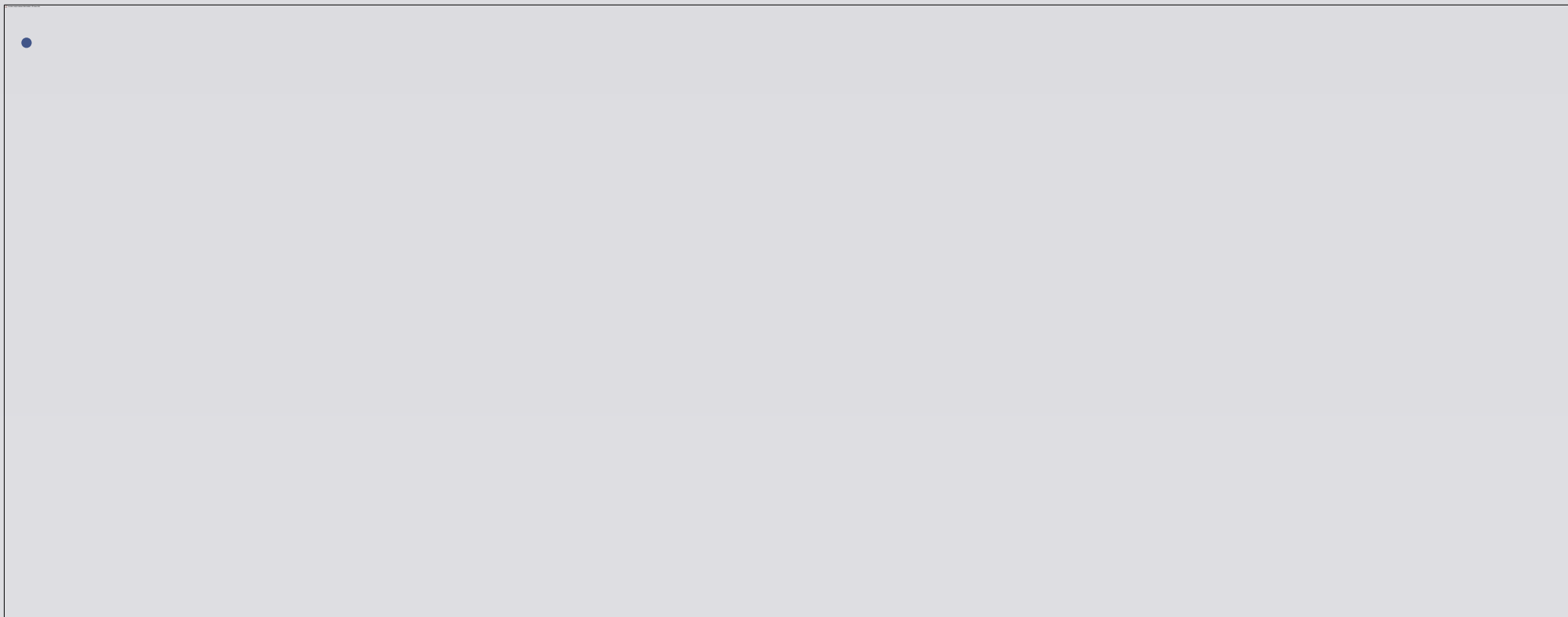
e) 777_8

f) $AB00_{16}$



Výsledky: c) p: 33202_4 , n: 33210_4 d) p: 1100100_2 , n: 1100110_2 e) p: 776_8 , n: 1000_8 f) p: $AAFF_{16}$, n: $AB01_{16}$

Sčítání



Příklad 21

Stejným způsobem sčítáme i v číselných soustavách s jiným základem.

Sečtěte:

$$\begin{array}{r} a) \quad 336_7 \\ + 355_7 \\ \hline 1024_7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 5 + 6 &= 11_{10} = 1 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 14_7 \\ 1 + 5 + 3 &= 9_{10} = 1 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 12_7 \\ 1 + 3 + 3 &= 7_{10} = 1 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0 = 10_7 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad AC2_{16} \\ + 2BA_{16} \\ \hline D7C_{16} \end{array}$$

$$\begin{aligned} A + 2 &= 10 + 2 = 12_{10} = 12 \cdot 16^0 = C \cdot 16^0 = C_{16} \\ B + C &= 11 + 12 = 23_{10} = 1 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = 17_{16} \\ 1 + 2 + A &= 1 + 2 + 10 = 13_{10} = 13 \cdot 16^0 = D \cdot 16^0 = D_{16} \end{aligned}$$



Příklad 22 (k samostatnému řešení)

Sečtěte pod sebou.

a) $5274_8 + 756_8$

b) $425_7 + 562_7$

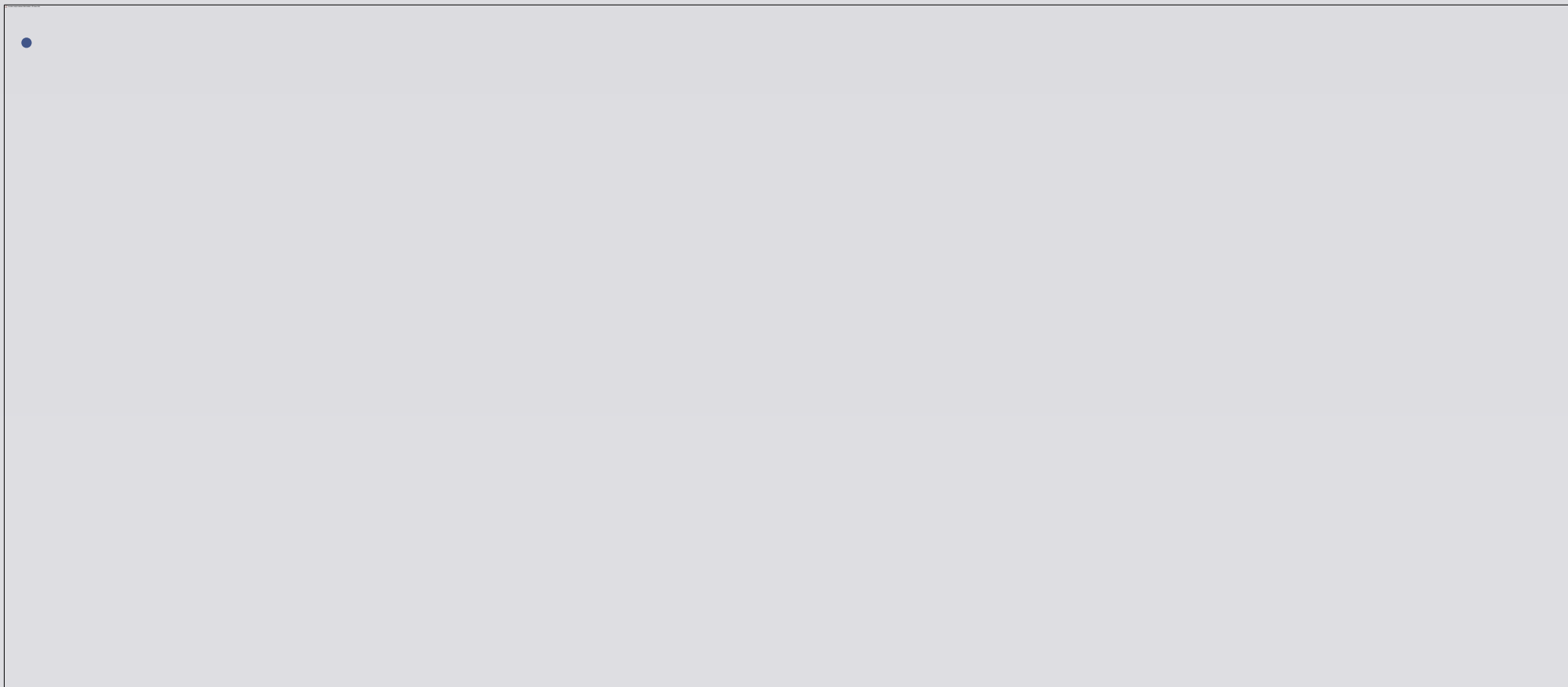
c) $BDF_{16} + BCA_{16}$

d) $A1B2_{16} + F3E4_{16}$

Výsledky: a) 6252_8 , b) 1320_7 , c) $17A9_{16}$, d) 19596_{16}



Odčítání



Příklad 23

Stejným způsobem počítáme i v číselných soustavách s jiným základem.

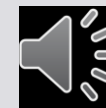
Odečtěte:

$$\begin{array}{r} a) \quad 614_7 \\ - 325_7 \\ \hline 256_7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad AE3_{16} \\ - 1A4_{16} \\ \hline 93F_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5+? = 14_7 = 11_{10} = 5 + 6_{10} = 5 + 6_7 \rightarrow 6_7 \\ 2 + 1 = 3 \quad 3+? = 11_7 = 8_{10} = 3 + 5_{10} = 3 + 5_7 \rightarrow 5_7 \\ 1 + 3 = 4 \quad 4+? = 6_7 = 6_{10} = 4 + 2_{10} = 4 + 2_7 \rightarrow 2_7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4+? = 13_{16} = 19_{10} = 4 + 15_{10} = 4 + F_{16} \rightarrow F_{16} \\ A + 1 = B \quad B+? = E_{16} = 14_{10} = 11 + 3_{10} = B + 3_{16} \rightarrow 3_{16} \\ 1+? = A_{16} = 10_{10} = 1 + 9_{10} = 1 + 9_{16} \rightarrow 9_{16} \end{array}$$



Příklad 24 (k samostatnému řešení)

Odečtěte pod sebou.

a) $354_7 - 135_7$

b) $3412_6 - 543_6$

c) $3412_{16} - 543_{16}$

d) $A1B2_{12} - 3AA_{12}$

Výsledky: a) 216_7 , b) 2425_6 , c) $2ECF_{16}$, d) $9A04_{12}$.



Násobení

-



Příklad 25

Stejným způsobem počítáme i v číselných soustavách s jiným základem.

Vynásobte:

$$\begin{array}{r} 325_7 \\ \cdot 124_7 \\ \hline 1636 \\ 653 \\ \underline{325} \\ 44266_7 \end{array}$$

$$4 \cdot 5 = 20_{10} = 26_7$$

$$2 \cdot 5 = 10_{10} = 13_7$$

$$1 \cdot 5 = 5_{10} = 5_7$$

$$2 + 4 \cdot 2 = 10_{10} = 13_7$$

$$1 + 2 \cdot 2 = 5_{10} = 5_7$$

$$1 \cdot 2 = 2_{10} = 2_7$$

$$1 + 4 \cdot 3 = 13_{10} = 16_7$$

$$2 \cdot 3 = 6_{10} = 6_7$$

$$1 \cdot 3 = 3_{10} = 3_7$$



Příklad 26 (k samostatnému řešení)

Vynásobte:

a) $100101_2 \cdot 1011_2$

b) $3204_6 \cdot 513_6$

c) $92_{12} \cdot 35_{12}$

d) $106_{12} \cdot 48_{12}$

Výsledky: a) 110010111_2 , b) 2533300_6 , c) $273A_{12}$, d) $4A88_{12}$.



Dělení

-



Příklad 27

Stejným způsobem počítáme i v číselných soustavách s jiným základem.

Vydělte:

$$30632_7 : 5 = 4246_7 \text{ (zb. 0)}$$

16

33

42

$$30_7 = 21_{10}$$

$$16_7 = 13_{10}$$

$$33_7 = 24_{10}$$

$$42_7 = 30_{10}$$

$$21_{10} : 5 = 4_{10} = 4_7 \text{ (zb. 1)}$$

$$13_{10} : 5 = 2_{10} = 2_7 \text{ (zb. 3)}$$

$$24_{10} : 5 = 4_{10} = 4_7 \text{ (zb. 4)}$$

$$30_{10} : 5 = 6_{10} = 6_7 \text{ (zb. 0)}$$

Zkouška:

4246₇

• 5

30632₇



Příklad 28

Vydělte:

a) $1002_3 : 2$

b) $3204_6 : 4$

c) $4B06_{12} : 7$

d) $10A_{12} : 9$

Výsledky: a) 112_3 (zh.1), b) 501_6 , c) 852_{12} (zh.4), d) 15_{12} (zh.1).

Příklad 29 (k samostatnému řešení)

Vypočítejte:

a) $534042_6 + 343445_6$

b) $1011011_2 - 11001_2$

c) $42110_5 - 2103_5$

d) $2330_4 - 103_4$

e) $534042_6 - 343445_6$

f) $1011011_2 \cdot 11001_2$

g) $2330_4 \cdot 103_4$

h) $42110_5 \cdot 2103_5$

i) $4504_6 \cdot 121_6$

j) $212011_3 : 2_3$

k) $2330_4 : 3_4$

l) $40432_5 : 3_5$

m) $12345013_6 : 5_6$



Na závěr:

Pokud jste vše spočítali, můžete si znovu přehrát písničku

<https://www.youtube.com/watch?v=UIKGV2cTgqA>

(Tom Lehrer, „New Math“)