MA0005 Algebra 2, 7. seminář

9. 11. 2021

Náplň cvičení

1. Determinant matice
   - Inverze v permutaci
   - Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3
   - Důležitá pravidla pro výpočet determinantu
   - Laplaceův rozvoj determinantu
   - Příklady na výpočet determinantu
2. Cramerovo pravidlo

Literatura

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.
- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Determinant

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.
Co je to determinant matice M?

Determinant

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.
Co je to determinant matice M?

Determinant

Determinant čtvercové matice M řádu $n \times n$ je číslo, které je dáno vzorcem

$$|M| = \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} (-1)^{N(j_1,j_2,\ldots,j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,j_n}$$

kde $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ je libovolná permutace sloupcových indexů z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a $N(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ je počet inverzí v dané permutaci.

Determinant

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.
Co je to determinant matice M?

Determinant

Determinant čtvercové matice M řádu $n \times n$ je číslo, které je dáno vzorcem

$$|M| = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (-1)^{N(j_1, j_2, \ldots, j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,j_n}$$

kde $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ je libovolná permutace sloupcových indexů z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a $N(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ je počet inverzí v dané permutaci.

Důležité otázky:

Co je to permutace konečné množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$?
Co je to inverze v dané permutaci?

Inverze v permutaci

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Inverze v permutaci

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Vezměme v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Sloupcové indexy prvků se prohodily dle permutace $p = (3, 4, 2, 1)$.

Inverze v permutaci

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Vezměme v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Sloupcové indexy prvků se prohodily dle permutace $p = (3, 4, 2, 1)$.

Inverze permutace

Inverze v permutaci p je dvojice prvků a, b taková, že $a < b$ a zároveň $p(a) > p(b)$.

Inverze v permutaci

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Vezměme v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Sloupcové indexy prvků se prohodily dle permutace $p = (3, 4, 2, 1)$.

Inverze permutace

Inverze v permutaci p je dvojice prvků a, b taková, že $a < b$ a zároveň $p(a) > p(b)$.

Kolik inverzí najdete v permutaci $p = (3, 4, 2, 1)$?

Inverze v permutaci

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Vezměme v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Sloupcové indexy prvků se prohodily dle permutace $p = (3, 4, 2, 1)$.

Inverze permutace

Inverze v permutaci p je dvojice prvků a, b taková, že $a < b$ a zároveň $p(a) > p(b)$.

Kolik inverzí najdete v permutaci $p = (3, 4, 2, 1)$?

Celkem 5, např. $p(1) = 3 > 2 = p(3)$.

Geometrický význam inverze

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Geometrický význam inverze

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Které prvky určují hlavní diagonálu? A které vedlejší diagonálu?

Geometrický význam inverze

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Které prvky určují hlavní diagonálu? A které vedlejší diagonálu?

Vezměme opět v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, znovu např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Propojte tyto prvky čarou, každý s každým.

Geometrický význam inverze

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Které prvky určují hlavní diagonálu? A které vedlejší diagonálu?

Vezměme opět v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, znovu např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Propojte tyto prvky čarou, každý s každým.

Otázka: Kolik hran má sklon “příbuzný” s vedlejší diagonálou?

Příklad 4.2.B5

Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B5

Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) $-a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41}$,

Příklad 4.2.B5

Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) $-a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41}$, (b) 0.

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$=$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} +$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

1. $|M| = |M^T|$, kde M^T je transponovaná matice M.
2. Jestliže matice M' vznikne z matice M výměnou dvou řádků, pak $|M| = -|M'|$.
3. Jestliže matice M' vznikne z matice M vynásobením některého řádku nenulovým číslem $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, pak $|M| = \frac{1}{k} \cdot |M'|$.
4. Determinant matice M se nezmění, přičteme-li k některému řádku nenulový k-násobek jiného řádku ($k \in \mathbb{R} - \{0\}$).

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

1. $|M| = |M^T|$, kde M^T je transponovaná matice M.
2. Jestliže matice M' vznikne z matice M výměnou dvou řádků, pak $|M| = -|M'|$.
3. Jestliže matice M' vznikne z matice M vynásobením některého řádku nenulovým číslem $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, pak $|M| = \frac{1}{k} \cdot |M'|$.
4. Determinant matice M se nezmění, přičteme-li k některému řádku nenulový k-násobek jiného řádku ($k \in \mathbb{R} - \{0\}$).

Důležité důsledky:

- Determinant matice M se dvěma stejnými řádky je roven 0.
- Determinant matice M obsahující nulový řádek je roven 0.
- Je-li některý řádek matice M lineární kombinací ostatních, pak $|M| = 0$.

Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Rozvoj podle k-tého řádku:

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |M_{kj}|,$$

kde M_{kj} jsou matice vzniklé z M vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Rozvoj podle k-tého řádku:

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |M_{kj}|,$$

kde M_{kj} jsou matice vzniklé z M vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Rozvoj podle l-tého sloupce:

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot |M_{il}|,$$

kde M_{il} jsou matice vzniklé z M vypuštěním i-tého řádku a l-tého sloupce.

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -195,

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -195, (b) 18.

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -28,

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -28, (b) 30.

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -105,

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -105, (b) -18.

Cramerovo pravidlo pro soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

Mějme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

Řešení této soustavy lze vypočítat takto:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},$$

kde následující determinanty spočítáme křížovým pravidlem:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad |A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Mějme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Řešení této soustavy lze vypočítat takto:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

kde následující determinanty spočítáme Sarusovým pravidlem:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.30]:

(a) $7x - 3y = 15$
$5x + 6y = 27$

(b) $3x + 2y = 20$
$2x + 3y = 20$

(c) $3(x-2) + 2y = x + y$
$4x + 5(y + x) = 3x - 6$

(e) $x - 5y = 7$
$x - 5y = 6$

(f) $2x - 3y = 5$
$4x - 6y = 10$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.30]:

(a) $7x - 3y = 15$
$5x + 6y = 27$

(b) $3x + 2y = 20$
$2x + 3y = 20$

(c) $3(x - 2) + 2y = x + y$
$4x + 5(y + x) = 3x - 6$

(e) $x - 5y = 7$
$x - 5y = 6$

(f) $2x - 3y = 5$
$4x - 6y = 10$

Výsledky: (a) $[3; 2]$, (b) $[4; 4]$, (c) $[9; -12]$, (e) nelze spočítat Cramerovým pravidlem, (f) nelze spočítat Cramerovým pravidlem.

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.31]:

(a) $$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 15 \\ 7x - y + z &= 9 \\ x + 2y + z &= 9 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.31]:

(a) $$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 15 \\ 7x - y + z &= 9 \\ x + 2y + z &= 9 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Výsledky: (a) $[1; 2; -2]$, (b) $[2; 4; -1]$, (c) $[0; 0; 0]$.

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.31]:

(d) $$\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ y + 4z &= 8 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x + y + 2z &= 4 \\ 4x + 3y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \\ 4x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.31]:

(d) $2x - y = 6$
$y + 4z = 8$
$x - z = 1$

(e) $2x + y - z = 0$
$x + y + 2z = 4$
$4x + 3y + 3z = 5$

(f) $3x + 2y + z = 3$
$x + y + z = 2$
$4x + 3y + 2z = 5$

Výsledky: (a) $[3; 0; 2]$, (b) nelze spočítat Cramerovým pravidlem, (c) nelze spočítat Cramerovým pravidlem.