MASARYKOVA UNIVERZITA
PEDAGOGICKÁ FAKULTA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA BRNO

ÚK PdF MU Brno
3201081233

Sbírka příkladů z integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné

Irena Budínová

Brno 2014

Obsah

Předmluva

Učební text je určen pro cvičení z matematické analýzy v 3. semestru studia matematiky na PdF MU v Brně. Navazuje na skriptum prof. V. Nováka Integrální počet funkcí jedné reálné proměnné, které je určeno pro přednášku z téhož předmětu. Sbírka proto neobsahuje žádnou teorii, kterou najde čtenář ve výše zmiňovaném skriptu, jsou uvedeny nanejvýš drobné metodické poznámky.

Sbírka obsahuje jednak řešené, jednak neřešené příklady s uvedením výsledku, na kterých si čtenář může ověřit, jak dalece si problematiku osvojil. Učivo navazuje svým obsahem na znalosti z diferenciálního počtu funkcí jedné reálné proměnné, které byly probírány v 2. semestru. Jsou využívány i poznatky z algebry, se kterými se student během studia seznámil.

Ve sbírce se čtenář setká nejen s příklady učiva matematické analýzy ve vysokoškolském smyslu, ale protože je text určen budoucím učitelům matematiky, jsou zde zařazeny také příklady využitelné na základní či střední škole. Je zmíněn přístup k výuce obsahů a objemů geometrických útvarů na základní škole.

Symbolika i řazení kapitol jsou ve shodě se zmíněným skriptem, ačkoli některé kapitoly jsou z praktických důvodů sloučeny.

Ve sbírce jsou uvedeny rozmanitější příklady, než se objevují na cvičení. Je tomu tak proto, aby byla problematika ukázána v komplexnějších souvislostech, na což ve cvičení není čas. Množství, spektrum a složitost příkladů jsou však i tak ze zřejmých důvodů omezeny. Existuje však celá řada sbírek, které lze ke studiu doporučit, neboť jsou svým rozsahem obsáhlejší a jejichž seznam je uveden na konci této publikace.

Na závěr bych ráda poděkovala panu doc. Pavlu Řehákovi, Ph.D., který mi poskytnul spoustu cenných rad v oblasti matematické analýzy, a RNDr. Růženě Blažkové, CSc., která mě obohacovala po stránce didaktické problematiky.

Brno, září 2014 Irena Budínová

1. Primitivní funkce

1.1. Přímá metoda

Nejjednodušší způsob, jak můžeme integrovat funkci, je využít vzorec. Pokud takový vzorec existuje, využíváme znalostí z diferenciálního počtu, kde jsme se seznámili s derivacemi elementárních funkcí. Uvádíme zde základní vzorce pro integrování. Písmenem C označujeme integrační konstantu.

$$\int dx = x + C, \tag{1}$$

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ pokud } n \neq -1, \tag{4}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \tag{5}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \tag{6}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \tag{7}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \tag{8}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{pokud } a > 0, a \neq 1, \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. \tag{11}$$

Integrál ve vzorci (1) je možno zapisovat také způsobem $\int 1\, dx$ Ve vzorcích (2) a (3) jsme využili linearity derivace.

Modifikací uvedených vzorců obdržíme další velmi užitečné vzorce:

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \text{jestliže } F' = f, \tag{12}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + C. \tag{13}$$

V následujících příkladech budeme integrovat pomocí vzorců. Většinou je potřeba zadanou funkci upravit tak, aby bylo možno vzorec aplikovat.

Příklad 1.1. Nalezněte primitivní funkce k daným funkcím:

a) $f(x) = x^7 - \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = \left(\frac{x+2}{x}\right)^2$, $x \neq 0$,

c) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{3x\sqrt{x}}$, $x > 0$,

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}+1}}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Řešení. a) Funkci přepíšeme jako $f(x) = x^7 - x^{\frac{1}{3}}$ a dále postupujeme podle vzorců (3) a (4):

$$\int (x^7 - x^{\frac{1}{3}})\, dx = \int x^7\, dx - \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^8}{8} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C =$$
$$= \frac{x^8}{8} - \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C.$$

b) Zadanou funkci můžeme algebraickými úpravami upravit tak, abychom mohli využít vzorců.

$$\int \left(\frac{x+2}{x}\right)^2 dx = \int \frac{x^2+4x+4}{x^2}\, dx = \int \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx =$$
$$= \int 1 dx + 4\int \frac{1}{x}\, dx + 4\int \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Při poslední úpravě jsme použili vrozce (2) a (3). Integrováním dostáváme

$$\int \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 dx = x + 4\ln|x| - \frac{4}{x} + C.$$

c)

$$\int \left(\frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{3x\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{3}{2}}\right) dx =$$

$$= 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + C.$$

d)

$$\int \frac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}+1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx =$$

$$= \int (x^{\frac{3}{8}} + x^{-\frac{1}{2}})\, dx = \frac{8}{11}x^{\frac{11}{8}} + 2\sqrt{x} + C.$$

Goniometrické identity

V mnoha příkladech obsahujících goneometrické funkce musíme před integrací funkci upravit pomocí jedné z goniometrických identit. Připomeneme nejčastěji používané goniometrické identity:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \tag{14}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x, \tag{15}$$

$$2\sin x\ \cos x = \sin 2x, \tag{16}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \tag{17}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \tag{18}$$

Příklad 1.2. Nalezněte primitivní funkce k daným funkcím:

a) $f(x) = \cos 3x - \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

c) $f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$,

d) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

e) $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. a) Platí

$$\int \cos ax = \frac{\sin ax}{a} + C,$$

$$\int \sin bx = -\frac{\cos bx}{b} + C,$$

a, b jsou konstanty (ověřte zpětným derivováním). Tedy

$$\int (\cos 3x - \sin 2x) dx = \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\cos 2x}{2} + C.$$

b) Platí $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Nyní využijeme vzorce (13). Protože derivací funkce $\cos x$ je $-\sin x$, můžeme psát:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Později uvidíme, že příklad je možno řešit také substituční metodou.

c) Příklad řešíme užitím goniometrických identit (14) a (16):

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin 2x}\, dx &= \int \frac{1}{2\sin x \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln|\sin x| + C.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x\, dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int 1\, dx = \operatorname{tg} x - x + C,\end{aligned}$$

neboť

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C. \tag{19}$$

e) K integraci této funkce využijeme vztah $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$. Potom:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C =$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Příklad 1.3. Nalezněte primitivní funkce k daným funkcím:

a) $f(x) = \sin 3x \cos 3x$, $x \in \mathbb{R}$
b) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \cos^2 x}}$, $x \in \mathbb{R}$
d) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \sqrt{1 - \operatorname{cotg} x}}$, $x \neq k\pi$, $x \notin \langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$

Řešení. Všechny tyto integrály je možné počítat substituční metodou, kterou budeme uvádět později. Je však také možné použít vzorec

$$\int f^n(x) f'(x)\, dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C, \tag{20}$$

který vychází ze substituční metody.

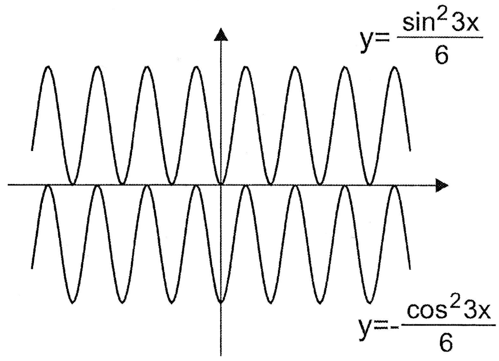
a) Protože platí $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$, můžeme psát

$$\int \sin 3x\ \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x (3\cos 3x)\, dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x (\sin 3x)'\, dx =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2 3x}{2} + C = \frac{\sin^2 3x}{6} + C.$$

Mohli jsme postupovat i jinak: $(\cos 3x)' = -3\sin 3x$ a

$$\int \sin 3x\ \cos 3x\, dx = -\frac{1}{3}\int \cos 3x(-3\sin 3x)\, dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{2} + C = -\frac{\cos^2 3x}{6} + C.$$

Na první pohled by se mohlo zdát, že tyto dvě výsledné funkce jsou zcela různé. Všechny primitivní funkce k jakékoli funkci jsou ale totožné až na aditivní konstantu. To platí i v našem případě, o čemž se můžeme přesvědčit např. nakreslením grafu (obr. 1).



Obr. 1

b)

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \int \operatorname{cotg} x \frac{1}{\sin^2 x}\, dx.$$

Protože je $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, máme

$$-\int \operatorname{cotg} x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = -\int \operatorname{cotg} x \cdot (\operatorname{cotg} x)'\, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} + C.$$

c) Platí $(3 - \cos^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ a tedy

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \cos^2 x}}\, dx = \int \frac{(3 - \cos^2 x)'}{\sqrt{3 - \cos^2 x}}\, dx = \frac{\sqrt{3 - \cos^2 x}}{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= 2\sqrt{3 - \cos^2 x} + C.$$

d) Poněvadž je $(1-\operatorname{cotg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$, máme

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\sqrt{1-\operatorname{cotg} x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{cotg} x}} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\,dx =$$
$$= \int (1-\operatorname{cotg} x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-\operatorname{cotg} x)'\,dx = \frac{\sqrt{1-\operatorname{cotg} x}}{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= 2\sqrt{1-\operatorname{cotg} x} + C.$$

Příklad 1.4. Následující funkce integrujte využitím jednoho ze vzorců

$$\int f^n(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$$

nebo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

a) $f(x) = \frac{1}{(2x-3)^3}, x \neq \frac{3}{2}$,
b) $f(x) = \frac{3x^2-2}{x^3-2x}, x \neq 0; \sqrt{2}$,
c) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x + x^2 \operatorname{arctg} x}$, $x \neq 0$,
d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1)$,
e) $f(x) = \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$, $x \neq \pm\frac{1}{2}$.

Řešení. a) Funkci si nejdříve přepíšeme jako $f(x) = (2x-3)^{-3}$. Derivací funkce $(2x+3)$ je 2, proto po menší úpravě můžeme použít první z uvedených vzorců:

$$\int \frac{1}{(2x-3)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x-3)^{-3}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^{-2}}{-2} + C =$$
$$= \frac{-1}{4(2x-3)^2} + C.$$

b)

$$\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x}\,dx = \int \frac{(x^3-2x)'}{x^3-2x}\,dx = \ln|x^3-2x| + C.$$

c)
$$\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} x + x^2 \operatorname{arctg} x} = \int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} =$$
$$= \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x}\, dx = \int \frac{(\operatorname{arctg} x)'}{\operatorname{arctg} x}\, dx = \ln|\operatorname{arctg} x| + C.$$

d)
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int -\frac{1}{2}\int -2x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

e) Platí $(\arcsin 2x)' = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}$ a tedy
$$\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \arcsin 2x \cdot \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \arcsin 2x \cdot (\arcsin 2x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\arcsin^2 2x}{2} + C =$$
$$= \frac{\arcsin 2x}{4} + C.$$

Příklad 1.5. Najděte primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$ tak, aby platilo $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

Řešení.
$$F(x) = \int \frac{3}{1+x^2}dx = 3\operatorname{arctg} x + C,$$
$F(1) = 3\operatorname{arctg} 1 + C = 3 \cdot \frac{\pi}{4} + C$ a má-li platit $F(1) = \frac{\pi}{4}$, pak budeme řešit rovnici $\frac{3}{4}\pi + C = \frac{\pi}{4}$, jejímž řešením je $C = -\frac{\pi}{2}$. Hledaná primitivní funkce tedy je
$$F(x) = 3\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 1.6. Nalezněte primitivní funkce k daným funkcím:

a) $f(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{e^{3x}-1}{e^x - 1}$, $x \neq 0$

c) $f(x) = \frac{9^{x+1} - 6^{x-2}}{3^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. a)

$$\begin{aligned}\int \frac{(e^x - e^{-x})^2}{e^x}\,dx &= \int \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{e^x}\,dx = \\ &= \int \left(\frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{2}{e^x} + \frac{e^{-2x}}{e^x}\right) dx = \\ &= \int \left(e^x - 2e^{-x} + e^{-3x}\right) dx = \\ &= e^x + 2e^{-x} - \frac{e^{-3x}}{3} + C,\end{aligned}$$

neboť

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

kde a je konstanta.

b) Připomeňme nejdříve dva algebraické vzorce, z nichž jeden budeme k výpočtu potřebovat.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \tag{21}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2). \tag{22}$$

První z uvedených vzorců využijeme k úpravě zadaného zlomku:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1}\,dx &= \int \frac{(e^x - 1)(e^{2x} + e^x + 1)}{e^x - 1}\,dx = \\ &= \int (e^{2x} + e^x + 1)\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + e^x + x + C.\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{9^{x+1} - 6^{x-2}}{3^{x+1}}\,dx &= \int \frac{9 \cdot 3^{2x} - 3^{x-2}2^{x-2}}{3 \cdot 3^{x}}\,dx = \\
&= 3 \int \frac{3^{2x}}{3^{x}} dx - \frac{1}{3 \cdot 9 \cdot 4} \int \frac{3^{x}2^{x}}{3^{x}}\,dx = \\
&= 3 \int 3^{x}\,dx - \frac{1}{108} \int 2^{x}\,dx = \\
&= 3\frac{3^{x}}{\ln 3} - \frac{1}{108} \cdot \frac{2^{x}}{\ln 2} + C.
\end{aligned}
$$

Integrace racionální lomené funkce

Při integraci racionální lomené funkce rozlišujeme mezi ryzí a neryzí racionální funkcí. V případě, že je funkce neryzí, upravíme ji na součet polynomu a ryzí racionální funkce. To lze provést buď dělením čitatele jmenovatelem (univerzální, avšak někdy zbytečně zdlouhavá metoda), nebo algebraickými úpravami, pokud to tvar racionální funkce umožní.

Příklad 1.7. Upravte ryzí racionální funkci na součet polynomu a ryzí racionální funkce a integrujte.

a) $f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1}{x^2+1}$,

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$,

c) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+1}$.

Řešení. a) Tuto funkci upravíme dělením. Připomeňme z algebry algoritmus dělení dvou polynomů:

$$
\begin{array}{llllll l}
(x^5 & -2x^4 & +2x^3 & +x^2 & +x & +1) & :(x^2+1) = x^3 - 2x^2 + x + 3 - \frac{2}{x^2+1} \\
x^5 & & +x^3 & & & & \\
 & -2x^4 & +x^3 & & & & \\
 & -2x^4 & & -2x^2 & & & \\
 & & x^3 & +3x^2 & & & \\
 & & x^3 & & +x & & \\
 & & & 3x^2 & & & \\
 & & & 3x^2 & & +3 & \\
 & & & & & -2 &
\end{array}
$$

Máme tedy

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\, dx =$$

$$= \int \left(x^3 - 2x^2 + x + 3 - \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \operatorname{arctg} x + C.$$

b) V případě zejména racionálních funkcí často využijeme úpravu, která se někdy nazývá jako „přičtení nuly“. Jedná se o úpravu čitatele, kdy k čitateli přičteme a hned zase odečteme výraz, který nám umožní racionální funkci snadno upravovat. Např. v našem příkladě by se hodilo, kdyby v čitateli nebylo x^2, ale $x^2 + 1$. Za tím účelem v čitateli přičteme a odečteme jedna a zlomek potom rozdělíme na dva:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Funkci v nově vzniklém tvaru můžeme již snadno integrovat:

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

c) Budeme postupovat obdobně jako v předchozí části:

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{x^2 + 1 - 3}{x^2 + 1}\, dx = \int \left(1 - \frac{3}{x^2 + 1} \right) dx =$$

$$= x - 3 \operatorname{arctg} x + C.$$

V případě, že zadaná racionální funkce je ryzí, je vhodné se přesvědčit o tom, zda je možné provést algebraickou úpravu, která zlomek rychle a efektivně převede na součet integrovatelných funkcí. Takovou úpravou může být jednoduché rozdělení zlomku, nebo „přeskládání“ čitatele a následné rozdělení zlomku, jak uvidíme v následujícím příkladě.

PEDAGOGICKÁ FAKULTA ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA BRNO

Příklad 1.8. Upravte zadanou racionální funkci a poté integrujte.
a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$,
b) $f(x) = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+2x)(x-1)}$, $x \neq 0, \pm 1$.

Řešení. a) Zadaný zlomek je možné jednoduše rozdělit na dva a integrovat. Musíme si jen uvědomit, že derivací jmenovatele (x^2+1) je $2x$, což je jeden ze sčítanců čitatele.

$$\int \frac{2x-1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C.$$

b) „Přeskládáme" vhodně čitatel tak, abychom zlomek mohli rozdělit na dva:

$$\frac{2x^2+2x-1}{(x^2+2x)(x-1)} = \frac{(x^2+2x)+(x^2-1)}{(x^2+2x)(x-1)} =$$
$$= \frac{x^2+2x}{(x^2+2x)(x-1)} + \frac{x^2-1}{(x^2+2x)(x-1)} =$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2x}.$$

Tento výraz již můžeme (po malé úpravě druhého zlomku) integrovat:

$$\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2x}\right) dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x}\,dx =$$
$$= \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x| + C.$$

Je-li racionální funkce ryzí, lze ji rozložit na **součet parciálních zlomků**. V tomto rozkladu vystupují zlomky tvaru

$\frac{a}{x-x_0}$ (odpovídající reálnému kořenu x_0 jmenovatele),

$\frac{a}{(x-x_0)^n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$ (odpovídající vícenásobnému reálnému kořenu x_0 jmenovatele),

$\frac{bx+c}{(x-x_0)^2+a^2}$ (odpovídající imaginárnímu kořenu $x_0 \pm ai$ jmenovatele,

$\frac{bx+c}{((x-x_0)^2+a^2)^n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$ (odpovídající vícenásobnému imaginárnímu kořenu $x_0 \pm ai$ jmenovatele).

Budeme se setkávat pouze s prvními třemi případy. Integraci zlomků $\frac{a}{x-x_0}$ a $\frac{a}{(x-x_0)^n}$ provádíme jednoduše:

$$\int \frac{a}{x-x_0}dx = a\ln|x-x_0|,$$
$$\int \frac{a}{(x-x_0)^n}dx = \frac{a}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-x_0)^{n-1}}.$$

S třetím tvarem racionální funkce se setkáme později.

Příklad 1.9. Nalezněte primitivní funkce k daným funkcím:
a) $f(x) = \frac{1}{3x^2-x-2}$,
b) $f(x) = \frac{2x^3+x^2+2x+3}{x^4+4x^2+3}$,
c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x^2)}$.

Řešení. a) Danou racionální funkci musíme nejdříve upravit na součet parciálních zlomků. Začneme tím, že polynom ve jmenovateli rozložíme na součin kořenových činitelů, tedy

$$3x^2 - x - 2 = 3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right) = (x-1)(3x+2).$$

V poslední úpravě jsme přesunuli koeficient 3 do druhé závorky, čímž jsme se zbavili zlomku. Parciální zlomky budou mít tedy tvar

$$\frac{1}{(x-1)(3x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{3x+2}$$
$$1 = 3ax + 2a + bx - b.$$

Hledáme neznámé konstanty a, b. Můžeme je najít buď porovnáváním koeficientů u stejných mocnin x, nebo dosazováním konkrétních hodnot za x. Vybereme si druhou možnost. Do vzniklé rovnice dosadíme za x číslo 1, což je jeden z kořenů jmenovatele zadané funkce. Dostáváme

$1 = 3a + 2a$, odkud $a = \frac{1}{5}$. Nyní už zbývá určit ještě b, za x dosadíme libovolné číslo. Nejvýhodnější je číslo 0. Pak $1 = \frac{2}{5} - b$, odtud $b = -\frac{3}{5}$.

Nyní již můžeme přistoupit k integraci:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-1)(3x+2)}\,dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{x-1} - \frac{\frac{3}{5}}{3x+2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{3}{5}\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \\
&= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\ln|3x+2| + C = \\
&= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln|3x+2| + C.
\end{aligned}$$

b) Začneme opět rozkladem jmenovatele zlomku na součin kořenových činitelů. Můžeme zavést substituci $x^2 = t$, pak $t^2+4t+3 = (t+3)(t+1)$ a tedy $x^4 + 4x^2 + 3 = (x^2+3)(x^2+1)$, což je v $\mathbb{R}$ konečný rozklad daného polynomu. Zlomek upravíme na součet parciálních zlomků:

$$\begin{gathered}
\frac{2x^3 + x^2 + 2x + 3}{(x^2+3)(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+3} + \frac{cx+d}{x^2+1} \\
2x^3 + x^2 + 2x + 3 = ax^3 + ax + bx^2 + b + cx^3 + 3cx + dx^2 + 3d
\end{gathered}$$

Nyní zvolíme pro nalezení konstant porovnávací metodu (při více než dvou neznámých konstantách se většinou jedná o jednodušší metodu):
x^0: $3 = b + 3d$
x^1: $2 = a + 3c$
x^2: $1 = b + d$
x^3: $2 = a + c$
Z této soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých získáme $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$. Máme tedy

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}\,dx &= \int \left(\frac{2x}{x^2+3} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \\
&= \ln(x^2+3) + \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

Ukážeme ještě jiný způsob, jak bylo možno upravit zlomek, a to algebraickou úpravou.

$$\begin{aligned}
&\frac{2x^3+x^2+2x+3}{(x^2+3)(x^2+1)} = \frac{x^2+3+2x^3+2x}{(x^2+3)(x^2+1)} \doteq \\
&= \frac{x^2+3}{(x^2+3)(x^2+1)} + \frac{2x(x^2+1)}{(x^2+3)(x^2+1)} = \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{x^2+3}.
\end{aligned}$$

Dále bychom postupovali v integraci jako v předchozí části.

c) Opět začneme rozložením funkce na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{cx+d}{1+x^2},$$

sami si ověřte, že $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 0$. Nyní již můžeme rovnou přistoupit k integraci:

$$\frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{1+x^2}\Big)dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C.$$

Cvičení

1.1. Integrujte následující funkce:

a) $f(x) = 8x^5 + 12x^7 - 3\cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
b) $f(x) = (x^2-1)^3$ pro $x \in \mathbb{R}$,
c) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1}$ pro $x \neq -1, 0$,
d) $f(x) = 3x\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sin^2 x}$ pro $x > 0$,
e) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt[4]{x^3}}$ pro $x > 0$,
f) $f(x) = \frac{dx}{2-5x}$ pro $x \neq \frac{2}{5}$,
g) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ pro $x \neq -2$.

[a) $\frac{4}{3}x^6 + \frac{3}{2}x^8 - 3\sin x + C$, b) $\frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x + C$, c) $\ln|x+1| - \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C$, d) $\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}} - 2\sqrt{x} - 2\operatorname{cotg} x + C$, e) $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{12}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$, f) $-\frac{1}{5}\ln|2-5x| + C$, g) $x - \ln|x+2| + C$]

1.2. Nalezněte všechny primitivní funkce pro dané funkce:

a) $f(x) = \cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$,
b) $f(x) = \frac{\cos^2 x - 3}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
c) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
d) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

[a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$, použijte vzorec $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \sin 2x)$, b) $2\operatorname{cotg} x - x + C$, c) $-\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x + C$, d) $\ln|\operatorname{tg} x| + C$]

1.3. Integrujte následující funkce:

a) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x^4-2}$, $x \geq \sqrt[4]{2}$,
b) $f(x) = \cos^2 x \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$,
c) $f(x) = \cos^2 x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$,
d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $x \in (-1, 1)$.

[a) $\frac{1}{5}(x^4-2)^{\frac{5}{4}} + C$, b) $-\frac{\cos^4 x}{2} + C$, c) $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$, d) $-\sqrt{1-x^2}$+C, ve všech čtyřech případech použijte vzorec $\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$]

1.4. Integrujte následující funkce:

a) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^3}$, $x < 1$,
b) $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$, $|x| < 1$,
c) $f(x) = \frac{e^x}{e^x-3}$, $x \neq \ln 3$.

[a) $-\frac{1}{3}\ln|1-x^3| + C$, b) $\ln|\arcsin x| + C$, c) $\ln|e^x - 3| + C$]

1.5. Integrujte následující funkce:

a) $f(x) = \frac{dx}{3x^2-x-2}$,

b) $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{2x^3-x^2+2x-1}$,

c) $f(x) = \frac{x^6+2x^5+2x^2-2x-1}{x^2+1}$.

[a) $\frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln|3x+2| + C$, b) $\frac{1}{2}\ln|2x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 3\operatorname{arctg} x + C$, c) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4\operatorname{arctg} x + C$]

1.6. Integrujte následující funkce:

a) $f(x) = \frac{(5^x-2^x)^2}{10^x}$, $x \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = \frac{3^{x+1}-2^{2x}}{12^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

[a) $\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^x}{\ln\frac{5}{2}} + \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{2}{5}} - 2x + C$, b) $-3\frac{4^{-x}}{\ln 4} + \frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$]

1.7. Algebraicky upravte a pak integrujte následující funkce:

a) $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$, $x \neq 0$,

b) $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)}$,

c) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

[a) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$, b) $-\frac{1}{x} - 2\operatorname{arctg} x + C$, c) $-2\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$]

1.2. Metoda per partes

Metoda integrace per partes neboli integrace po částech vychází z derivace součinu dvou funkcí. Připomeňme, že platí

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Pokud na tuto rovnost aplikujeme integrál, obdržíme

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x)\, dx + \int u(x) \cdot v'(x)\, dx.$$

Úpravou dostaneme vzorec

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx. \tag{23}$$

Neexistuje jednoduchý návod, jak vybírat funkce u a v. Avšak naším cílem je najít nový integrál, který je jednodušší než původní integrál. Obvykle volíme za u tu funkci, která se derivací zjednoduší. Za v' musíme zvolit takový výraz, který dokážeme integrovat. Následující příklady budou dostatečně ilustrovat strategii metody per partes.

Příklad 1.10. Vypočtěte neurčité integrály:

a) $\int \ln x\, dx$ pro $x > 0$,
b) $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ pro $x > 0$,
c) $\int xe^{-2x}\, dx$ pro $x \in \mathbb{R}$,
d) $\int x^2 \cos 3x\, dx$ pro $x \in \mathbb{R}$,
e) $\int \arcsin x\, dx$ pro $x \in \langle -1; 1\rangle$,
f) $\int \arcsin^2 x\, dx$ pro $x \in \langle -1; 1\rangle$;
g) $\int x^2 \ln(1 + x)\, dx$ pro $x > -1$.

Řešení. a) Volíme $u = \ln x$, $v' = 1$, potom

$$\int \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{vmatrix} = x \ln x - \int \frac{x}{x}\, dx = x \ln x - x + C.$$

b) Zde volíme $u = \ln x$, $v' = \frac{1}{x^2}$, tedy

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = \frac{1}{x^2} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{-1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

c) V tomto případě klademe $u = x$, $v' = e^{-2x}$, potom

$$\int xe^{-2x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-2x} \\ u' = 1 & v = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{array} \right| = -\frac{xe^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2}\,dx =$$
$$= -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

d) Jedná se o příklad, kdy je potřeba metodu per partes použít opakovaně. Nejdříve volíme $u = x^2$ (derivací budeme snižovat stupeň polynomu), $v' = \cos 3x$ a

$$\int x^2 \cos 3x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \cos 3x \\ u' = 2x & v = \frac{\sin 3x}{3} \end{array} \right| =$$
$$= x^2\frac{\sin 3x}{3} - \frac{2}{3}\int x \sin 3x\,dx =$$
$$= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin 3x \\ u' = 1 & v = -\frac{\cos 3x}{3} \end{array} \right| =$$
$$= x^2\frac{\sin 3x}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{-x\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx\right) =$$
$$= x^2\frac{\sin 3x}{3} + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C.$$

e) Volíme $u = \arcsin x$, $v' = 1$ a potom

$$\int \arcsin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right| =$$
$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x +$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

f) Dvakrát použijeme metodu per partes:

$$\int \arcsin^2 x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin^2 x & v' = 1 \\ u' = 2 \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \arcsin^2 x + \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & v' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = 2\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= x \arcsin^2 x + \left(2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int 2dx \right) =$$

$$= x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.$$

g) Po použití metody per partes upravíme dělením racionální funkci na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce:

$$\int x^2 \ln(1+x) \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(1+x) & v' = x^2 \\ u' = \frac{1}{1+x} & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x+1} \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{3} \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x) \right) + C =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln(1+x) + \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{3} x + C.$$

Příklad 1.11. Vypočtěte následující integrály pro $x \in \mathbb{R}$:

a) $\int e^x \sin x \, dx$,

b) $\int \sin x \cos^4 x \, dx$.

Řešení. a) V tomto případě není důležité, kterou funkci zvolíme jako u a kterou jako v, takže např. volíme $u = \sin x$, $v' = e^x$, $u' = \cos x$,

$v = e^x$ a

$$I = \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx =$$
$$= e^x \sin x - I_1$$

(hledaný integrál jsme si označili písmenem I). Nyní musíme znovu použít metodu per partes, ale tentokráte už nemáme na výběr, jak zvolíme funkce (neboť jedna možnost by vedla k předchozímu kroku), takže $u = \cos x$, $v' = e^x$, $u' = -\sin x$, $v = e^x$ a dostáváme

$$I_1 = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + I.$$

Nyní se zdá, že se pohybujeme v kruhu, neboť jsme opět obdrželi zadaný integrál a dalším opakováním metody per partes budeme získávat pořád stejné integrály. Všimněme si ale, že jsme obdrželi lineární rovnici o jedné neznámé (neznámou je právě zadaný integrál):

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

a algebraickou úpravou dostáváme

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Nyní se sami výpočtem přesvědčte o tom, že když na začátku budeme volit $u = e^x$ a $v' = \sin x$, dojdeme ke stejnému výsledku.

b) Volíme např. $u = \cos^4 x$, $v' = \sin x$, $u' = -4\cos^3 x \cdot \sin x$, $v = -\cos x$. Dostáváme

$$I = \int \sin x \cos^4 x \, dx = -\cos^5 x - 4 \int \sin x \cos^4 x \, dx =$$
$$= -\cos^5 x - 4I.$$

Získali jsme rovnici s neznámou I ve tvaru

$$I = -\cos^5 x - 4I$$

a hledaný integrál má tvar $I = -\frac{1}{5} \cos^5 x + C$.

Cvičení

1.8. Pomocí metody per partes vypočtěte následující integrály:

a) $\int x^2 \sin x dx,\ x \in \mathbb{R}$

b) $\int x \operatorname{arccotg} x dx,\ x \in \mathbb{R}$

c) $\int x^2 \ln x dx,\ x > 0$

d) $\int x^3 \ln^2 x dx,\ x > 0$

e) $\int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} dx,\ x \in (2k\pi, 2(k+1)\pi)$

f) $\int x^2 3^x dx,\ x \in \mathbb{R}$

g) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx,\ x \in (-1, 1\rangle$

[a) $2\cos x - x^2 \cos x + 2x \sin x + C$, b) $\frac{1}{2}(x^2 \operatorname{arccotg} x + x - \operatorname{arctg} x + C)$, c) $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$, d) $\frac{1}{4}x^4 \ln^2 x - \frac{1}{8}x^4 \ln x + \frac{1}{32}x^4 + C$, e) $-\operatorname{cotg} x \ln \cos x - x + C$, f) $\frac{x^2 3^x}{\ln 3} - 2\frac{x3^x}{\ln^2 3} + 2\frac{3^x}{\ln^2 3} + C$, g) $2\sqrt{x+1} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$]

1.9. Pomocí metody per partes vypočtěte:

a) $\int e^x \cos x dx,\ x \in \mathbb{R}$

b) $\int x e^x \sin x dx,\ x \in \mathbb{R}$

c) $\int \sin(\ln x) dx,\ x > 0$

[a) $\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$, b) $\frac{1}{2}e^x(\cos x - x\cos x + x \sin x) + C$, c) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$]

1.3. Substituční metoda

Substituční metoda vychází z derivace složené funkce. Připomeňme, že pro derivaci funkce $f(g(x))$ platí

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Při substituci nahrazujeme funkci $g(x)$ funkcí t (u, z apod.), a dále platí $dt = g'(x)dx$. Tím docílíme zjednodušení integrované funkce:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt. \tag{24}$$

Příklad 1.12. Pomocí substituční metody řešte následující příklady:
a) $\int 8x(x^2-3)^5\, dx$,
b) $\int \frac{1}{(2x+3)^4}\, dx$, $x \neq -\frac{3}{2}$,
c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, $x \in (-1; 1)$.

Řešení. a) Integrovanou funkci před volbou substituce vhodně upravíme:

$$\begin{aligned}
\int 8x(x^2-3)^5\, dx &= 4\int (x^2-3)^5 2x\, dx = \\
&= \left| \begin{array}{c} x^2-3=t \\ 2x\, dx = dt \end{array} \right| = 4\int t^5\, dt \\
&= 4 \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{2}{3}(x^2-3)^6 + C.
\end{aligned}$$

Všimněme si, že jsme v tomto příkladě mohli také postupovat podle již uvedeného vzorce

$$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C.$$

Jak je nyní zřejmé, vzorec lze snadno odvodit právě ze substituce.

b) Zlomek nejdříve rozšíříme výrazem $\frac{2}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(2x+3)^4}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x+3)^4} = \left| \begin{array}{c} 2x+3=t \\ 2\, dx = dt \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^4}\, dt = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{t^3} + C = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(2x+3)^3} + C.
\end{aligned}$$

c) Platí

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left|\begin{array}{c} 1-x^2 = t \\ -2x\,dx = dt \end{array}\right| =$$
$$= -\frac{1}{2} \in t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Příklad 1.13. Pomocí substituční metody vypočtěte následující integrály:

a) $\int x^2 e^{-x^3}\,dx$,
b) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$,
c) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$, $x \geq \frac{1}{e}$
d) $\int \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$, $x > 0, x \neq 1$,
e) $\int \frac{1}{x\ln x^3}\,dx$, $x > 0, x \neq 1$.

Řešení. a)

$$\int x^2 e^{-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\int e^{-x^3}(-3x^2)\,dx = \left|\begin{array}{c} -x^3 = t \\ -3x^2\,dx = dt \end{array}\right| =$$
$$= -\frac{1}{3}\int e^t\,dt = -\frac{1}{3}e^t + C = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C.$$

b)

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \left|\begin{array}{c} e^x = t \\ e^x\,dx = dt \end{array}\right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

c)

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \left|\begin{array}{c} 1+\ln x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{array}\right| = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C.$$

d)

$$\int \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx = \left|\begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{array}\right| = \int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2\ln^2 x} + C.$$

Všimněme si, že jsme opět mohli postupovat i podle vzorce

$$\int f^n(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C.$$

e)

$$\int \frac{1}{x\ln x^3}\,dx = \left|\begin{array}{c} \ln x^3 = t \\ \frac{3}{x}\,dx = dt \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|\ln(x^3)| + C.$$

Příklad 1.14. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{x}{(2-4x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$, $x \neq \frac{1}{2}$,

b) $\int \frac{x^3}{(1-x)^{12}}\,dx$, $x \neq 1$,

c) $\int \frac{x^3}{(5+x^2)^3}\,dx$.

Řešení. a)

$$\int \frac{x}{(2-4x)^{\frac{2}{3}}}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{x}{(2-4x)^{\frac{2}{3}}}(-4)dx =$$

$$= \left|\begin{array}{c} 2-4x = t \\ -4\,dx = dt \\ x = \frac{2-t}{4} \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\frac{2-t}{4}}{t^{\frac{2}{3}}}\,dt = -\frac{1}{16}\int \frac{2-t}{t^{\frac{2}{3}}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{t-2}{t^{\frac{2}{3}}}\,dt = \frac{1}{16}\int \left(t^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{t^{\frac{2}{3}}}\right)\,dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} - 6t^{\frac{1}{3}}\right) + C =$$

$$= \frac{3}{64}(2-4x)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{8}(2-4x)^{\frac{1}{3}} + C.$$

b) Zde je na překážku, že ve jmenovateli zlomku máme dvojčlen umocněný na 12. Substitucí $1-x=t$ docílíme toho, že dvojčlen přesuneme do čitatele a budeme moci zlomek rozdělit na součet několika zlomků:

$$\int \frac{x^3}{(1-x)^{12}}\,dx = \left|\begin{array}{c} 1-x=t \\ -\,dx=dt \\ x=1-t \end{array}\right| = -\int \frac{(1-t)^3}{t^{12}}\,dt =$$
$$= \int \frac{1-3t+3t^2-t^3}{t^{12}}\,dt =$$
$$= \int \left(t^{-12}-3t^{-11}+3t^{-10}-t^{-9}\right)\,dt =$$
$$= -\frac{1}{11t^{11}} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{t^{10}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^9} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t^8} + C =$$
$$= -\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{(1-x)^{11}} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{(1-x)^{10}} -$$
$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)^9} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(1-x)^8} + C.$$

c)

$$\int \frac{x^3}{(5+x^2)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(5+x^2)^3}2x\,dx = \left|\begin{array}{c} 5+x^2=t \\ 2x\,dx=dt \\ x^2=t-5 \end{array}\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{t-5}{t^3}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(t^{-2}-5t^{-3}\right)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{t^2}+C\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5+x^2} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(5+x^2)^2} + C =$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{5+2x^2}{(5+x^2)^2} + C.$$

Příklad 1.15. Pomocí substituce řešte:

a) $\int \frac{x}{16+x^4}\,dx,\ x\in\mathbb{R}$,

b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx,\ x\in(-1;1)$

c) $\int \frac{3^x}{1-9^x}\,dx,\ x\neq 0$.

Řešení. a) Substituci budeme volit tak, aby integrál vedl na funkci arctg:

$$\int \frac{x}{16+x^4}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = 4t \\ x\,dx = 2dt \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{16+16t^2} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= \frac{1}{8}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4} + C.$$

b)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C.$$

c) Po zavedení substituce budeme postupovat rozložením racionální funkce na součet parciálních zlomků pomocí algebraické úpravy „přičtení nuly“:

$$\int \frac{3^x}{1-9^x}\,dx = \left| \begin{array}{l} 3^x = t \\ 3^x \ln 3\,dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{1-t^2} =$$
$$= \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{1-t+t}{1-t^2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\ln 3}\left(\int \frac{1-t}{1-t^2}\,dt + \int \frac{t}{1-t^2}\,dt\right) =$$
$$= \frac{1}{\ln 3}\left(\int \frac{1}{1+t}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{-2t}{1-t^2}\,dt\right) =$$
$$= \frac{1}{\ln 3}\left(\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1-t^2|\right) + C =$$
$$= \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{2}\ln(1+t)^2 - \frac{1}{2}\ln|1-t^2|\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{(1+t)^2}{1-t^2}\right| + C = \frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{1+3^x}{1-3^x}\right| + C.$$

Nyní se vrátíme k integraci racionální funkce. Dosavadní znalosti doplníme o další typ racionální funkce. V případě racionální funkce tvaru $\frac{1}{kx^2+lx+m}$ (k, l, m jsou reálné konstanty), kde polynom $kx^2 + lx + m$ nemá reálné kořeny, postupujeme pomocí úpravy známé jako „**doplnění na čtverec**“.

Příklad 1.16. Vypočtěte:
a) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$,
b) $\int \frac{x}{x^2+2x+5}\, dx$, $x \in \mathbb{R}$,
c) $\int \frac{1}{1+x^3}\, dx$, $x \neq -1$.

Řešení. a) Polynom $x^2 + x + 1$ nemá reálné kořeny, doplníme jej na čtverec:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Tento výraz doplníme do integrálu a dále zavedeme substituci tak, aby integrál vedl na funkci arctg (podobně jako v příkladě 1.15 a):

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{l} x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dt}{\frac{3}{4} t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

b) Jmenovatel daného zlomku opět nemá reálné kořeny. Zlomek budeme upravovat v následujících krocích:

(1) Čitatel upravíme tak, aby byl derivací jmenovatele (v našem případě $2x + 2$);

(2) po této úpravě „zbude“ racionální funkce, jejíž jmenovatel upravíme doplněním na čtverec.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+5}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5}\right) dx = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} x+1 = 2t \\ dx = 2dt \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \int \frac{dt}{2t^2+2} = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.
\end{aligned}
$$

c) Rozkladem na součet parciálních zlomků dostaneme

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1},$$

(polynom x^2-x+1 není již v $\mathbb{R}$ dále rozložitelný), kde $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=\frac{2}{3}$ (sami si ověřte výpočtem), tedy

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Funkci $\frac{x-2}{x^2-x+1}$ budeme postupně upravovat jako v předcházejícím příkladě:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx =& \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx = \\
=& \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \\
=& \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx =
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c} x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}\,dt=\sqrt{3}\operatorname{arctg}t+C=\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Celkem tedy

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Substituci můžeme použít i v „obráceném směru", tj. (je-li f spojitá funkce na intervalu I, φ je funkce se spojitou derivací na intervalu I_1 taková, že $\varphi_1(t)\neq 0$ pro $t\in I_1$) v integrálu $\int f(x)\,dx$ položíme $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$. Využíváme pak vzorce

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{25}$$

Ve výsledku je pak třeba vrátit se k původní proměnné x.

Příklad 1.17. Pomocí substituce řešte:

a) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$, $x\in\langle -1;1\rangle$,
b) $\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$, $x>0$,
c) $\int\frac{\sqrt{\ln x-1}}{x\ln x}\,dx$, $x\geq e$.

Řešení. a)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C =$$

$$= \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) + C = \frac{1}{2}(t + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}) + C =$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

Na závěr jsme se vrátili k původní proměnné dosazením $t = \varphi^{-1}(x)$.

b)

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = t^2, t \in \langle 0; \infty) \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int 2t \operatorname{arctg} t\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = 2t & v = \operatorname{arctg} t \\ u = t^2 & v' = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = t^2 \operatorname{arctg} t - t + \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

c) V tomto příkladě využijeme obou druhů substituce. Nejdříve funkci převedeme substitucí na iracionální funkcí a tu druhou substitucí upravíme na racionální funkci:

$$\int \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{x \ln x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \ln x - 1 = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = z^2 \\ dt = 2z\,dz \end{array} \right| = \int \frac{z}{z^2+1} 2z\,dz =$$

$$= 2\int \frac{z^2}{z^2+1}\,dz = 2\int \frac{z^2+1-1}{z^2+1}\,dz =$$

$$= 2\int \left(\frac{z^2+1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+1} \right) dz =$$

$$= 2(z - \operatorname{arctg} z) + C =$$

$$= 2(\sqrt{t} - \operatorname{arctg}\sqrt{t}) + C =$$

$$= 2(\sqrt{\ln x - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\ln x - 1}) + C.$$

Některé iracionální funkce

Symbolem r budeme značit racionální funkci jedné proměnné, symbolem R racionální funkci ve dvou proměnných.

Funkce typu $\mathbf{r}(\sqrt[n]{x})$: Funkci tohoto typu jednoduše převedeme na racionální funkci zavedením substituce $x = t^n$. Tím se zbavíme n-té odmocniny.

Příklad 1.18. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x+1}\,dx$, $x \geq 0$,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Řešení. a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}-1}{x+1}\,dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{t-1}{t^2+1} 2t\,dt = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,dt = \\
&= 2\int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt - \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \\
&= 2\int \left(\frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt - \ln(t^2+1) = \\
&= 2t - 2\operatorname{arctg} t - \ln(t^2+1) + C = \\
&= 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \ln(x+1) + C.
\end{aligned}$$

b) Ve zlomku se vyskytuje druhá, třetí a čtvrtá odmocnina x. Nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 4 je 12. Integrovanou funkci proto můžeme přepsat jako $\frac{\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^8}-\sqrt[12]{x^3}}$. Proto volíme substituci $x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}\,dt$ a dostáváme

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \frac{t^6}{t^8-t^3} 12t^{11}\,dt = 12\int \frac{t^{14}}{t^5-1}\,dt$$

a podělením dostáváme

$$12\int\left(t^9+t^4+\frac{t^4}{t^5-1}\right)\,dt = 12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln|t^5-1|\right)+C$$
$$=\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|\right)+C.$$

Funkce typu R $\left(\mathbf{x},\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, kde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$: Zavedeme substituci $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$. Z této rovnice vyjádříme postupně x a dx a po dosazení obdržíme racionální funkci.

Příklad 1.19. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int\frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}+1}\,dx,\ x\geq-\frac{2}{3}$,

b) $\int\frac{\sqrt{x-1}}{x-2\sqrt{x-1}}\,dx,\ x\in\langle 1;2)\cup(2;\infty)$,

c) $\int\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\,dx,\ x\in(-1;0)\cup(0;1\rangle$,

d) $\int\frac{2}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}\,dx,\ x\neq\{0,1\}$.

Řešení. a) Jedná se o iracionální funkci typu $R\left(x,\ \sqrt[2]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, kde $a=3,b=2,c=0,d=1$ a volíme proto substituci $3x+2=t^2$:

$$\int\frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}+1}\,dx=\left|\begin{array}{c}3x+2=t^2\\ dx=\frac{2}{3}t\,dt\end{array}\right|=$$
$$=\int\frac{t}{t+1}\cdot\frac{2}{3}t\,dt=\frac{2}{3}\int\frac{t^2}{t+1}\,dt=$$
$$=\frac{2}{3}\int\left(\frac{t^2-1}{t+1}+\frac{1}{t+1}\right)\,dt=$$
$$=\frac{2}{3}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\,dt=$$
$$=\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}\ln|t+1|+C=$$
$$=\frac{1}{3}\left(3x+2-2\sqrt{3x+2}+2\ln\left|\sqrt{3x+2}+1\right|\right)+C.$$

b)

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x-2\sqrt{x-1}}\, dx = \left| \begin{array}{c} x-1=t^2 \\ dx = 2t\, dt \\ x = t^2+1 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t}{t^2+1-2t} 2t\, dt = 2\int \frac{t^2}{(t-1)^2}\, dt =$$

$$=2\int \left(\frac{t^2-1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} \right)\, dt =$$

$$=2\int \frac{t+1}{t-1}\, dt - \frac{2}{t-1} =$$

$$=2\int \left(\frac{t-1}{t-1} + \frac{2}{t-1} \right)\, dt - \frac{2}{t-1} =$$

$$=2t + 4\ln|t-1| - \frac{2}{t-1} + C = 2\sqrt{x-1}+$$

$$+ 4\ln\left|\sqrt{x-1}-1\right| - \frac{2}{\sqrt{x-1}-1} + C.$$

c) Zde položíme $\frac{1-x}{x+1} = t^2$, odtud vyjádříme $x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$ a $dx = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}\, dt$. Potom

$$\int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\, dx = \int \frac{t^2+1}{1-t^2}\cdot t\cdot \frac{-4t}{(t^2+1)^2}\, dt = 4\int \frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}\, dt$$

a po rozložení na parciální zlomky dostáváme

$$\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t^2+1} \right)\, dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| + 2\,\mathrm{arctg}\, t =$$

$$= \ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} - 1\right| - \ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} + 1\right| - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} + C.$$

d)

$$\int \frac{2}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{1-x} = t^3 \\ x = \frac{t^3}{1+t^3} \\ dx = \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{(1+t^3)^2}{t^6}\cdot t \cdot \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = 6\int \frac{dt}{t^3} =$$

$$= -3\frac{1}{t^2} + C = -3\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^2} + C.$$

Funkce typu $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}})$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$: U funkcí tohoto typu budeme rozlišovat tři případy:

(1) Polynom $p = ax^2 + bx + c$ nemá reálné kořeny, tj. $a > 0$ (jinak by odmocnina nebyla definována pro žádné x). Integraci dané funkce pak můžeme provést tzv. Eulerovou substitucí

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t, \tag{26}$$

kde na pravé straně můžeme volit kteroukoli kombinaci znamének.

(2) Polynom p má dva různé reálné kořeny x_1, x_2, kde $x_1 < x_2$. Potom výraz $\sqrt{ax^2+bx+c}$ upravíme na $\sqrt{a}|x-x_1|\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}$ pro $a > 0$ a $\sqrt{-a}(x-x_1)\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}$ pro $a < 0$. V prvním případě volíme substituci $\frac{x-x_2}{x-x_1} = t^2$, ve druhém případě $\frac{x_2-x}{x-x_1} = t^2$.

(3) Polynom p má reálné kořeny, ale vzhledem k jejich složitosti by byla předchozí substituce náročná. Pak $c > 0$ a můžeme využít Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{t}. \tag{27}$$

Příklad 1.20. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$,
b) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, $x \neq -1$,
c) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$, $x \in (1,3)$,
d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$, $x \in (-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5},0) \cup (0,-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})$,
e) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$, $x \in (-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$.

Řešení. a) Jedná se o iracionální funkci typu $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, kde polynom ax^2+bx+c nemá reálné kořeny a volíme proto Eulerovu substituci $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$. V našem případě může mít tato substituce např. tvar $\sqrt{9x^2-6x+2} = 3x+t$ a z této rovnice vyjádříme $x = \frac{2-t^2}{6(t+1)}$ a odtud $dx = -\frac{t^2+2t+2}{6(t+1)^2}\,dt$. Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} &= \int \frac{-\frac{t^2+2t+2}{6(t+1)^2}}{3\frac{2-t^2}{6(t+1)}+t}\,dt = \\
&= \int \frac{-(t^2+2t+2)}{3(t+1)(t^2+2t+2)}\,dt = \\
&= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{3}\ln|t+1| + C = \\
&= -\frac{1}{3}\ln|\sqrt{9x^2-6x+2}-3x+1| + C,
\end{aligned}$$

neboť ze substituce vyplývá, že $t = \sqrt{9x^2-6x+2} - 3x$.

b) Zde můžeme volit substituci $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$, neboť pak je $x + \sqrt{x^2+x+1} = t$. Úpravami vypočítáme $x = \frac{t^2-1}{1+2t}$ a $dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}\,dt$. Dosazením dostáváme

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}}{t}\,dt = 2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}\,dt$$

a odtud po úpravě na parciální zlomky

$$\begin{aligned}
&\int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2}\right) dt = \\
=&2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C \\
=&2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1} - x\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1 + 2\sqrt{x^2+x+1} - 2x\right| + \\
&+ \frac{3}{2(1+2\sqrt{x^2+x+1} - 2x)} + C.
\end{aligned}$$

c) Polynom $-x^2+4x-3$ má reálné kořeny 1 a 3 a proto můžeme psát

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}} = \int \frac{1}{3-x} \cdot \sqrt{\frac{3-x}{x-1}}\, dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} t^2 = \frac{3-x}{x-1} \\ x = \frac{3+t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\, dt \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{1}{3 - \frac{3+t^2}{1+t^2}} \cdot t \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\, dt = \\
&= -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2 \operatorname{arctg} t + C = \\
&= -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} + C.
\end{aligned}$$

d) Polynom $-x^2-x+1$ má sice reálné kořeny $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, ale vzhledem k jejich složitosti by bylo převádění integrálu na typ $R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ nepohodlné. Využijeme proto druhou Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{t}.$$

Můžeme tedy zvolit např. $\sqrt{1-x-x^2} = xt+1$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1-x-x^2} = xt+1 \\ x = -\frac{2t+1}{1+t^2} \\ dx = 2\frac{t^2+t-1}{(1+t^2)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2\frac{t^2+t-1}{(1+t^2)^2}\,dt}{-\frac{2t+1}{1+t^2}\left(-\frac{2t^2+t}{1+t^2}+1\right)} =$$

$$= \int \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)(t^2+t+1)}\,dt =$$

$$= \int \frac{2}{2t+1}\,dt = \ln|2t+1| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{2\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}+1\right| + C.$$

e) Zde obdobně jako v předchozím příkladě jsou kořeny kvadratického polynomu $-x^2-2x+1$ složité: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Proto raději volíme Eulerovu substituci $\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1$:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1-2x-x^2} = xt-1 \\ x = \frac{2(t-1)}{1+t^2} \\ dx = -\frac{2(t^2-2t-1)}{(1+t^2)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{-\frac{2(t^2-2t-1)}{(1+t^2)^2}\,dt}{\frac{2(t-1)t}{1+t^2}} =$$

$$= -\int \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)(t-1)t}\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{-2}{1+t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right)\,dt =$$

$$= -2\operatorname{arctg} t - \ln|t| + \ln|t-1| + C =$$

$$= -2\operatorname{arctg} t + \ln\left|1-\frac{1}{t}\right| + C =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} +$$

$$+ \ln\left|1-\frac{x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1}\right| + C.$$

Goniometrické funkce

Funkce typu $\mathbf{R}(\sin \mathbf{x}, \cos \mathbf{x})$: V některých případech lze funkci $R(\sin x, \cos x)$ převést do jednoho z násleujících tvarů a použít příslušnou substituci:

(1) $R(\sin x, \cos x) = r(\sin x) \cdot \cos x$, klademe $\sin x = t$,

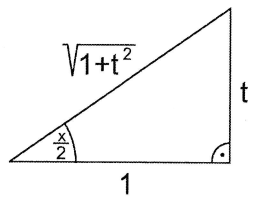
(2) $R(\sin x, \cos x) = r(\cos x) \cdot \sin x$, klademe $\cos x = t$,

(3) $R(\sin x, \cos x) = r(\operatorname{tg} x)$, klademe $\operatorname{tg} x = t$.

Pokud není možné danou funkci převést na jeden z předchozích tvarů, je třeba zvolit následující substituci[1]:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \; dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt. \tag{28}$$

Vztahy pro funkce sin a cos můžeme určit z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku 2:



Obr. 2

Z obrázku 2 je vidět, že $\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ a pomocí vztahů pro goniometrické funkce dostáváme

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}, \; \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

[1]Tato substituce je použitelná ve všech předchozích případech, proto někdy bývá označována jako „univerzální“.

Příklad 1.21. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$,
b) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\sin^2 x}\, dx$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
c) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\, dx$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Řešení. a) Jedná se o funkci ve tvaru $r(\sin x) \cdot \cos x$:

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} dt =$$
$$= \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \frac{1}{2} \ln(1+\sin^2 x) + C.$$

b) Integrovanou funkci upravíme do tvaru $r(\cos x) \cdot \sin x$, využijeme přitom goniometrické identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \sin x \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x \, dx =$$
$$= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{t^2-1}{t^2}\, dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = t + \frac{1}{t} + C =$$
$$= \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

c) Abychom v tomto případě mohli použít jednu z výše uvedených substitucí, musíme nejdříve funkci rozšířit výrazem $\frac{\cos x}{\cos x}$:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \cos x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{(1-\sin^2 x)^2} \cos x \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} - \ln|1+t| + \ln|1-t| \right) + C =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} - \ln|1+\sin x| + \ln|1-\sin x| \right)$$

$$+ C = \frac{1}{4} \left(\frac{2\sin x}{1-\sin^2 x} + \ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| \right) + C =$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \right| + C.$$

Příklad 1.22. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}\, dx$, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, dx$,
c) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx$, $x \neq \frac{\pi}{2}$,
d) $\int \frac{1}{\sin^2 x + 2}\, dx$.

Řešení. a) Integrovanou funkci lze upravit na funkci v proměnné $\operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}\, dx = \int \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x}\, dx.$$

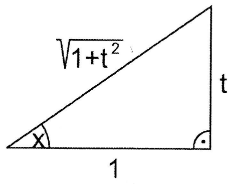
Tento integrál můžeme převést na integrování racionální funkce substitucí $t = \operatorname{tg} x$. Odtud vyjádříme $\operatorname{arctg} t = x$ a $dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt$. Dosadíme a po rozkladu na parciální zlomky můžeme přistoupit k integraci:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1}{(1-t)(1+t^2)}\, dt = \\
&= \frac{1}{2} \int \left(\frac{t+1}{1+t^2} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \\
&= \frac{1}{4} \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t}\, dt \\
&= \frac{1}{4} \ln(1+t^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln|1-t| + C = \\
&= \frac{1}{4} \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln|1-\operatorname{tg} x| + C.
\end{aligned}
$$

b) Úpravami můžeme integrovanou funkci převést na tvar $f(\operatorname{tg} x) \cdot (\operatorname{tg} x)'$ a můžeme tedy opět užít substituci $t = \operatorname{tg} x$:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, dx &= \int \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \\
&= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 2} (\operatorname{tg} x)'\, dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ (\operatorname{tg} x)'\, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2+2}\, dt = \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\, dt = \left| \begin{array}{l} \frac{t}{\sqrt{2}} = u \\ dt = \sqrt{2}\, du \end{array} \right| = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{u^2+1}\, du = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} u + C = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}
$$

c) Také v případě, že obě funkce sin i cos vystupují v lomené funkci v sudé mocnině, je možné použít výše uvedenou substituci. Potom je ale nutné ještě vyjádřit ze substituce $\operatorname{tg} x = t$ funkce $\sin x$ a $\cos x$. Pro lepší zapamatování může sloužit následující pravoúhlý trojúhelník, z něhož



Obr. 3

lze snadno vyjádřit všechny goniometrické funkce a který zároveň odpovídá naší substituci (obr. 3):

Z obrázku je patrné, že $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ a $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Nyní tedy

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{t^4}\,dt = -\frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + C.$$

d) Tento příklad se řeší obdobně jako předchozí, tj. s využitím substituce $\operatorname{tg} x = t$:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{3t^2+2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)^2 + 1}\,dt = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{3}{2}}t = u \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,dt = du \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{\sqrt{6}}{6} \operatorname{arctg} u + C =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right) + C = \frac{\sqrt{6}}{6} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

Příklad 1.23. Řešte následující příklady:
a) $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$, $x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
b) $\int \frac{\sin x+1}{\cos x-1}\,dx$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Řešení. a) Pro tento případ není vhodná ani jedna z výše uvedených substitucí pro goniometrické funkce (sami si promyslete, proč tomu tak je). Proto musíme zvolit univerzální substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Dopočítáme $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$ a

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Po dosazení do integrálu dostáváme

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{1+2t+t^2}\,dt$$
$$= 2\int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

b) V tomto případě je rovněž vhodné volit univerzální substituci:

$$\int \frac{\sin x+1}{\cos x-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \sin x = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}+1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}-1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = -\int \frac{(1+t)^2}{t^2(1+t^2)}\,dt =$$
$$= -\int \left(\frac{-2t}{1+t^2} + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt =$$
$$= \ln(1+t^2) - 2\ln|t| + \frac{1}{t} + C =$$
$$= \ln\left(1 + \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2\right) - 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

Příklad 1.24. Pomocí vhodné substituce vypočtěte:

a) $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx$,

b) $\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx$,

c) $\int \sin^3 x \, dx$,

d) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

Řešení. a) Jedná se o případ, kdy funkce sin je v liché mocnině a cos v sudé mocnině. Funkci $\sin^3 x$ upravíme na $\sin^2 x \cdot \sin x$ a dále volíme substituci $t = \cos x$:

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \sin^2 x \sin x \, dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{array} \right| = -\int t^2(1-t^2) \, dt = \\
&= \int (t^4 - t^2) \, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \\
&= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.
\end{aligned}$$

b) Obě funkce sin i cos jsou v liché mocnině. Proto můžeme volit libovolnou ze substitucí $t = \sin x$, $t = \cos x$. Využijeme ale také toho, že funkce cos je v nižší mocnině. Proto volíme substituci $t = \sin x$:

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx &= \int \cos^2 x \sin^5 x \cos x \, dx = \\
&= \int (1 - \sin^2 x) \sin^5 x \cos x \, dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \\
&= \int (1-t^2) t^5 \, dt = \int (t^5 - t^7) \, dt = \\
&= \frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{8} + C = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C.
\end{aligned}$$

Při volbě substituce $t = \cos x$ by integrovaná funkce byla ve složitějším tvaru

$$-\int \cos^3 x (1 - \cos^2 x)^2 (-\sin x) \, dx = -\int t^3 (1-t^2)^2 \, dt.$$

c)

$$
\begin{aligned}
\int \sin^3 x\, dx &= \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{array} \right| = \\
&= -\int (1-t^2)\, dt = \int (t^2-1)\, dt = \\
&= \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.
\end{aligned}
$$

d) V případě, kdy jsou v součinu $\sin^m x \cos^n x$ obě mocniny m i n sudé, nelze přímo použít žádnou substituci a musí se nejprve snižovat mocnina pomocí vztahů

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}, \\
\cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \\
&= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\, dx = \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C.
\end{aligned}
$$

Příklad 1.25. Volbou vhodné metody vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\, dx$, $x \neq 0$,
b) $\int \ln \sqrt{x}\, dx$, $x \geq 0$,
c) $\int \frac{\arccos x}{x^2}\, dx$, $x \neq 0$.

Řešení. a) Můžeme začít začít substitucí a v dalším kroku pokračovat metodou per partes:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\, dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2}\, dx = dt \end{array} \right| = -\int \operatorname{arctg} t\, dt = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} t & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+t^2} & v = t \end{array} \right| = \\
&= -t \operatorname{arctg} t + \int \frac{t}{1+t^2}\, dt = \\
&= -t \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \\
&= -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2} + C.
\end{aligned}$$

b) Začneme substitucí a budeme pokračovat metodou per partes:

$$\begin{aligned}
\int \ln \sqrt{x}\, dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{array} \right| = 2 \int t \ln t\, dt = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = \ln t & v' = t \\ u' = \frac{1}{t} & v = \frac{t^2}{2} \end{array} \right| = 2 \left(\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{2} \int t\, dt \right) = \\
&= t^2 \ln t - \frac{t^2}{2} + C = x \ln \sqrt{x} - \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

c) Zde začneme metodou per partes a budeme pokračovat substitucí:

$$\int \frac{\arccos x}{x^2}\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arccos x & v' = \frac{1}{x^2} \\ u' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\arccos x}{x} - \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= -\frac{\arccos x}{x} - \int \frac{x\, dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1 - x^2 = t^2 \\ -2x\, dx = 2t\, dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\arccos x}{x} + \int \frac{t\, dt}{(1-t^2)t} =$$

$$= -\frac{\arccos x}{x} + \int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{t+1}\, dt - \int \frac{1}{t-1}\, dt\right) =$$

$$= -\frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + C =$$

$$= -\frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1-x^2}+1\right| -$$

$$- \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1-x^2}-1\right| + C =$$

$$= -\frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}\right| + C.$$

Cvičení

1.10. Pomocí substituční metody vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{x^2}{(1+2x)^3}\,dx,\ x \neq -\frac{1}{2}$,

b) $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx,\ x \in (-3,3)$,

c) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx,\ x \in \mathbb{R}$,

d) $\int \frac{\ln^4 x}{x}\,dx,\ x > 0$,

e) $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx,\ x > 1$,

f) $\int \frac{x}{16-x^4}\,dx,\ x \neq \pm 4$,

g) $\int \frac{dx}{x^2+4},\ x \in \mathbb{R}$,

h) $\int e^{\cos 2x} \sin x \cos x\,dx$.

[a) $\frac{1}{8}\ln|1+2x| + \frac{1}{4(1+2x)} - \frac{1}{16(1+2x)^2} + C$, b) $-\frac{1}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2}+C$, c) $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$, d) $\frac{1}{5}\ln^5 x + C$, e) $\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}} x - 6\sqrt{\ln x} + C$, f) $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+4}{x^2-4}\right| + C$, g) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$, h) $-\frac{1}{4}e^{\cos 2x}+C$]

1.11. Pomocí vhodné substituce řešte:

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx,\ x \geq 0$,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx,\ x \in (0,1) \cup (1,\infty)$,

c) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}\,dx,\ x \geq 2$,

d) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\,dx,\ x \in \langle 1,2)$,

e) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-x+3}}\,dx,\ x \in \mathbb{R}$.

[a) $2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$, b) $x + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{x} + 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 6\ln(x^{\frac{1}{6}}-1)+C$, c) $x-2-2\sqrt{x-2}+2\ln(\sqrt{x-2}+1)+C$, d) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2\frac{x-1}{2-x}}+C$, e) $-\frac{1}{2}\ln|4\sqrt{4x^2-x+3}-8x|+1+C$]

1.12. Pomocí vhodné substituce řešte:

a) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx,\ x \neq (2k-1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

b) $\int \frac{\sin 2x}{(1+\sin x)^2}\,dx,\ x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

c) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x - 1}\,dx,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

d) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 1}\,dx,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

e) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx,\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

f) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx,\ x \neq (2k-1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

[a) $-\ln|1+\cos x|+C$, b) $2\ln|1+\sin x| + \frac{2}{1+\sin x}+C$, c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)+C$, d) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) - x + C$, e) $-x - \frac{4}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}+C$, f) $x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}+c$]

1.13. Pomocí substituční metody vypočtěte:

a) $\int \sin^5 x \cos^7 x \, dx$,

b) $\int \cos^4 x \sin x \, dx$,

c) $\int \cos^5 x \, dx$,

d) $\int \sin^4 x \, dx$.

[a) $\frac{\cos^{12} x}{12} - \frac{\cos^{10} x}{5} + \frac{\cos^8 x}{8} + C$, b) $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$, c) $\sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$, d) $\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} + C$]

Cvičení

V následujícím cvičení si máte možnost ověřit, nakolik jste si integrování osvojili a do jaké míry dokážete samostatně určit vhodnou integrační metodu.

1.14. Pomocí vhodné integrační metody řešte následující příklady:

a) $\int \frac{8-\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

b) $\int \frac{x}{1-x^2}\,dx,\ x \neq \pm 1,$

c) $\int \frac{4(1+x-x^2)}{3x^3+x^2+3x+1}\,dx,\ x \neq -\frac{1}{3},$

d) $\int \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}\,dx,\ x \neq 0; 1,$

e) $\int \frac{dx}{x^3-1},\ x \neq 1,$

f) $\int \frac{1}{\sin x}\,dx,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

g) $\int (x^3 - x)e^{3x}\,dx,$

h) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)},\ x > 0,$

i) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx,\ x \in (0, \infty),$

j) $\int \sqrt{x} \ln x\,dx,\ x > 0,$

k) $\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx,$

l) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\,dx,$

m) $\int x^3 \sin x\,dx,$

n) $\int \operatorname{arctg} x\,dx,$

o) $\int \frac{dx}{(2x+5)^5},\ x \neq -\frac{5}{2},$

p) $\int \frac{dx}{2x^3-3x^2+x},\ x \neq 0, 1, \frac{1}{2},$

q) $\int \frac{1}{x-1}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\,dx,\ x \in \mathbb{R} - (1, 2),$

r) $\int \cos^5 2x\,dx,$

s) $\int \frac{2}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx,\ x \in (\frac{1}{e}, e),$

t) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx,\ x \in (-\infty, 0),$

u) $\int x^3 e^x\,dx,$

v) $\int \frac{(\ln x+1)^3}{x}\,dx,\ x > 0,$

w) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\,dx,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

x) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}},\ x > 0,$

y) $\int x5^x\,dx,\ x > 0, x \neq 1,$

z) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

[a) $7\operatorname{tg} x + x + C$, b) $-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C$, c) $\frac{2}{3}\ln|3x+1| - \ln(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x + C$, d) $-x - 4\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}-1| + C$, e) $-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + \frac{1}{3}\ln|x-$

$1|+C$, f) $\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C$, g) $\frac{1}{27}e^{3x}(9x^3-9x^2-3x+1)+C$, h) $\operatorname{arctg}(\ln x)+C$, i) $\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}+C$, j) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C$, k) $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}x\right)+C$, l) $-\sqrt{2}\cos x+C$, m) $-x^3\cos x+3x^2\sin x-6\sin x+6x\cos x+C$, n) $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$, o) $-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(2x+5)^4}+C$, p) $\ln|x|+\ln|x-1|-2\ln|2x-1|+C$, q) $2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2-x}+C$, r) $\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin^3 2x}{3}+\frac{1}{10}\sin^5 2x+C$, s) $2\arcsin(\ln x)+C$, t) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x+C$, u) $x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+C$, v) $\frac{(\ln x+1)^4}{4}+C$, w) $\frac{\cos^3 x}{3}+\cos x+\frac{1}{2}\ln(\cos x-1)-\frac{1}{2}\ln(\cos x+1)+C$, x) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln|1+\sqrt[4]{x}|+C$, y) $\frac{x5^x}{\ln 5}-\frac{5^x}{\ln^2 5}+C$, z) $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C$]

2. Určitý integrál

Příklad 2.1. Vypočtěte z definice určitého integrálu $\int_0^1 2x\,dx$.

Řešení. Jestliže je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ je limita Riemannova součtu. Pokud interval rozdělíme na pravidelné podintervaly, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}. \tag{29}$$

Rozdělíme interval $\langle 0, 1\rangle$ na n podintervalů, každý o délce $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$. Můžeme označit $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, ...x_i = \frac{i}{n}, ..., x_n = 1$.

Funkční hodnota v bodě x_i je $f(x_i) = 2x_i = 2\frac{i}{n}$ a platí

$$\int_0^1 2x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^2}\right) \sum_{i=1}^{n} i.$$

Protože platí

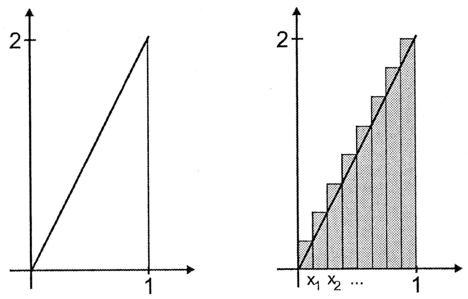
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{30}$$

dostáváme po dosazení

$$\int_0^1 2x\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Z geometrického hlediska je tento výsledek roven obsahu plochy pod grafem funkce $f(x) = 2x$, viz obrázek 4. Jedná se o trojúhelník o základně 1 délková jednotka a výšce 2 délkové jednotky, jehož obsah je skutečně 1 čtvereční jednotka.

Při určování obsahu nahradíme trojúhelník n obdélníky o základnách $\Delta x = \frac{1}{n}$ a výškách $f(x_i) = \frac{2i}{n}$. Obsahy těchto obdélníků sečteme. Čím větší je číslo n, tím více se součet obsahů obdélníků blíží obsahu trojúhelníku.



Obr. 4 Výpočet obsahu plochy pod grafem funkce $f(x) = 2x$.

Příklad 2.2. Vypočtěte z definice určitého integrálu $\int_1^3 x^2\,dx$.

Řešení. Rozdělíme interval $\langle 1, 3\rangle$ na n podintervalů, každý má délku $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$. Proto $x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{2}{n}, x_2 = 1 + \frac{4}{n}, \ldots x_i = 1 + \frac{2i}{n}, \ldots, x_n = 3$.

Funkční hodnota v bodě x_i je $f(x_i) = x_i^2 = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 = 1 + \frac{4i}{n} + \left(\frac{2i}{n}\right)^2$. Potom

$$\int_1^3 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{4i}{n} + \left(\frac{2i}{n}\right)^2\right)\left(\frac{2}{n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right).$$

Protože platí

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n, \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{32}$$

dostáváme po dosazení

$$\int_1^3 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n} + \frac{8n(n+1)}{2n^2} + \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right) =$$
$$= 2 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}.$$

V dalších příkladech budeme postupovat pomocí **Leibniz Newtonovy formule**: Nechť f je integrovatelná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť F je funkce, která je na $\langle a, b\rangle$ spojitá a na (a, b) primitivní k funkci f. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \tag{33}$$

Po vypočítání primitivní funkce $F(x)$ dosadíme za x nejdříve hodnotu horní meze b a potom hodnotu dolní meze a. Rozdíl $F(b) - F(a)$ je konstantní číslo nezávislé na integrační konstantě.

Příklad 2.3. Vypočtěte:
a) $\int_1^3 x^2\,dx$,
b) $\int_{-2}^0 e^{-2x}\,dx$,
c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$.

Řešení. a)

$$\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}.$$

b)

$$\int_{-2}^0 e^{-2x}\,dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{-2}^0 = -\frac{1}{2}e^0 - \left(-\frac{1}{2}e^4\right) = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

c)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin\pi - \sin(-\pi) = 0.$$

Příklad 2.4. Vypočtěte určitý integrál následujících funkcí:

a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x \, dx$,
b) $\int_{-1}^{0} \frac{x^4}{x-1} \, dx$,
c) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+3x+2}$,
d) $\int_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}}$.

Řešení. a)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x \, dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\cos 2\pi}{2} + \frac{\cos \pi}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{x^4}{x-1} \, dx &= \int_{-1}^{0} \left(x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right]_{-1}^{0} = \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) = \frac{7}{12} - \ln 2.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+3x+2} &= \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \\ &= [\ln|x+1| - \ln|x+2|]_0^1 = \ln 2 - \ln 3 - (\ln 1 - \ln 2) \\ &= 2\ln 2 - \ln 3.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}} &= \int_{4}^{9} \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}} \, dx = \\ &= \int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}{x+2-(x-3)} \, dx = \\ &= \frac{1}{5} \int_{4}^{9} (\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}) \, dx =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_4^9 = \\
&= \frac{2}{15}(11\sqrt{11} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6} - 1) = \\
&= \frac{22}{15}\sqrt{11} - \frac{2}{15}.
\end{aligned}
$$

Příklad 2.5. Vypočtěte:

a) $\int_1^2 \ln^2 x \, dx$,

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$.

Řešení. a) Primitivní funkci budeme hledat pomocí metody per partes, kterou použijeme opakovaně:

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \ln^2 x \, dx = &\left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & v' = 1 \\ u' = 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = [x \ln^2 x]_1^2 - 2\int_1^2 \ln x \, dx = \\
&= 2\ln^2 2 - 2\int_1^2 \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = \\
&= 2\ln^2 2 - 2\left([x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx \right) = \\
&= 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2[x]_1^2 = 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = &\left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \\
&= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}
$$

Příklad 2.6. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-2x}}\,dx$,
b) $\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$,
c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x}$,
d) $\int_0^1 \arccos x\,dx$,
e) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Řešení. a) Při použití substituční metody nesmíme zapomenout na změnu mezí. V našem případě zavedeme substituci $1-2x=t^2$ a nové meze vypočítáme tak, že dosadíme do této substituce za x původní meze. Je-li $x=-1$, pak $t=\sqrt{1-2x}=\sqrt{3}$, je-li $x=0$, je $t=1$:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-2x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} 1-2x=t^2 \\ -2\,dx = 2t\,dt \\ -1 \to \sqrt{3} \\ 0 \to 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{1} \frac{1-t^2}{t}(-t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{1} (t^2-1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_{\sqrt{3}}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-1-\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)\right) = -\frac{1}{3}.$$

Bylo by možno příklad počítat i tak, že bychom našli primitivní funkci, tzn. z proměnné t bychom se vrátili k proměnné x, a potom bychom neměnili integrační meze. Sami se můžete výpočtem přesvědčit, že primitivní funkce k zadané funkci je

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}}\,dx = \frac{1}{6}(1-2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2x}$$

a po dosazení integračních mezí za x máme

$$\frac{1}{6}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1} - \left(\frac{1}{6}(1+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{3}.$$

b)

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \\ 1 \to 0 \\ \sqrt{e} \to \frac{1}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = [\arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

c) Po zavedení substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ dostáváme

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

a tedy

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x} = \left[-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}.$$

d)

$$\int_0^1 \arccos x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \arccos x \\ u = x & v' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| =$$

$$= [x \arccos x]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1 - x^2 = t^2 \\ x\,dx = -t\,dt \\ 0 \to 1 \\ 1 \to 0 \end{array} \right| =$$

$$= \arccos 1 + \int_1^0 \frac{-t\,dt}{t} = \arccos 1 - \int_1^0 dt =$$

$$= \arccos 1 - [t]_1^0 = \arccos 1 + 1 = 0 + 1 = 1.$$

e)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ dx = \cos t\ dt \\ 0 \to 0 \\ 1 \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\ \cos t\ dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Cvičení

2.1. Vypočtěte:

a) $\int_{-1}^{1} x^9\,dx$,

b) $\int_1^3 x^3\sqrt{x}\,dx$,

c) $\int_0^1 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx$,

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$.

[a) 0, b) $\frac{2}{9}(2^9-1)$, c) $\frac{14}{3}$, d) $\frac{1}{2}$]

2.2. Vypočtěte:

a) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$,

b) $\int_{-2}^{0} \frac{1+2x}{(x-2)(x^2+1)}\,dx$,

c) $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \operatorname{arccotg} x\,dx$,

e) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$,

f) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3 x\,dx$,

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

[a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{1}{2}\ln 5 - \ln 2$, c) $\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$, d) π, e) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$, f) $\frac{3}{2}$, g) $\frac{2}{3}$, h) $\frac{8}{5}$]

3. Nevlastní integrály

V předchozí kapitole jsme pracovali s určitým integrálem $\int_a^b f(x)\,dx$, který byl definován na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Uvažovali jsme přitom funkce, které byly na tomto intervalu omezené. Nyní budeme určovat integrály spojitých funkcí na nekonečných intervalech, nebo integrály neomezených funkcí na omezených intervalech. V obou případech nazýváme integrály **nevlastní**. Nevlastní integrál může nebo nemusí být reálné číslo. Podle toho rozlišujeme nevlastní integrály **konvergentní** a **divergentní**.

3.1. Nevlastní integrál 1. druhu

Uvažujme funkci f na intervalu $\langle a, \infty)$. Nevlastní integrál prvního druhu definujeme jako

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{34}$$

Jestliže limita na pravé straně existuje, pak říkáme, že neurčitý integrál konverguje. Jestliže limita neexistuje, říkáme, že neurčitý integrál diverguje.

Analogicky definujeme

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{35}$$

V případě, že jsou obě meze integrálu nekonečné, rozdělíme jej na součet dvou integrálů, v nichž je vždy jedna mez vlastní, tj.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx. \tag{36}$$

Příklad 3.1. Rozhodněte, zda konvergují následující nevlastní integrály:

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$,
b) $\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Řešení. a) Podle definice můžeme psát

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx =$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

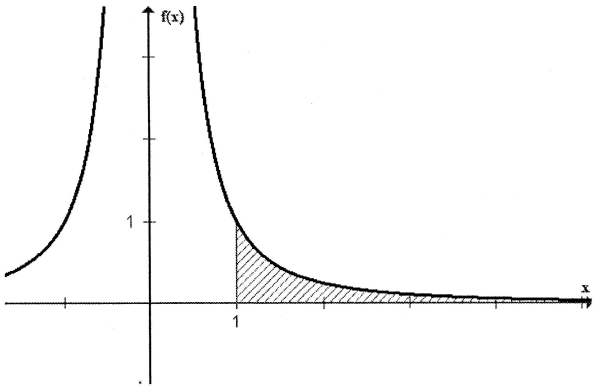
Nevlastní integrál tedy konverguje a jeho hodnota je 1.

b) Opět podle definice máme

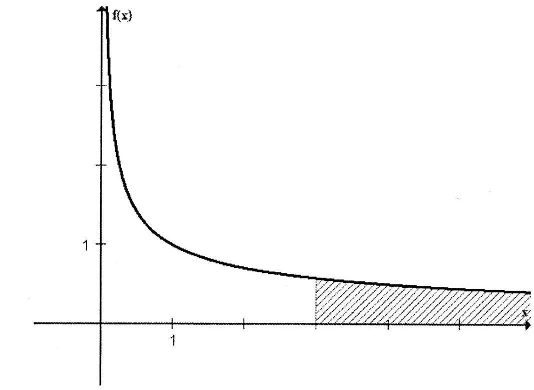
$$\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_3^b = \lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b}-4\right) = \infty.$$

Limita neexistuje, nevlastní integrál tedy diverguje.

Jestliže funkce f je spojitá a kladná na intervalu $\langle a,\infty)$ a $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje, pak hodnota nevlastního integrálu je **plocha pod f na intervalu** $\langle a,\infty)$. Můžeme tedy říct, že plocha pod $f(x)=\frac{1}{x^2}$ na intervalu $\langle 1,\infty)$ je 1. Situace je znázorněna na obrázku 5.



Obr. 5 Plocha pod $f(x)=\frac{1}{x^2}$ na intervalu $\langle 1,\infty)$ je konečná.



Obr. 6 Plocha pod $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $\langle 3, \infty)$ je nekonečná.

Ne druhou stranu, pokud integrál $\int_a^\infty f(x)\, dx$ diverguje, má nekonečnou hodnotu a také **plocha pod** f **na intervalu** $\langle a, \infty)$ **je nekonečná**. Například plocha pod $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $\langle 3, \infty)$ je nekonečná (viz obrázek 6).

Příklad 3.2. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci nevlastních integrálů:

a) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\, dx$,
b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2}$,
c) $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\, dx$,
d) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx$,
e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+16}$.

Řešení. a)

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{t \to -\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_t^{-1} =$$
$$= \lim_{t \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2} \right) = -\frac{1}{2},$$

nevlastní integrál tedy konverguje.

b)

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2+3x+2} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{(x+2)(x+1)} = \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \\
&= \lim_{t\to\infty} [\ln|x+1| - \ln|x+2|]_1^t = \\
&= \lim_{t\to\infty} (\ln|t+1| - \ln|t+2| - \ln 2 + \ln 3) = \\
&= [\infty - \infty] = \lim_{t\to\infty} \left(\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| - \ln 2 + \ln 3 \right) = \\
&= \ln\left| \lim_{t\to\infty} \frac{t+1}{t+2} \right| - \ln 2 + \ln 3 = \\
&= \ln 1 - \ln 2 + \ln 3 = \ln 3 - \ln 2.
\end{aligned}
$$

Nevlastní integrál tedy opět konverguje.

c)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2}\, dx &= \left| \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x\, dx \\ -\infty \to -\infty \\ 0 \to 0 \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^t\, dt = \\
&= -\frac{1}{2} \left(e^0 - \lim_{a\to-\infty} e^a \right) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Nevlastní integrál konverguje.

d)

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{x^2} \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x\right]_1^t + \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x\right]_1^t + \lim_{t\to\infty}\int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^t =$$

$$= 0 + \ln 1 + \operatorname{arctg} 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 - \ln\sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

e) Vzhledem k tomu, že jsou nyní obě meze integrálu nekonečné, rozdělíme jej na součet dvou integrálů. Interval $(-\infty,\infty)$ můžeme rozdělit libovolně, např. bodem 0:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+16} = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+16} + \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+16}.$$

Nyní budeme počítat tyto integrály každý zvlášť.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+16} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{dx}{x^2+16} = \frac{1}{16}\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{dx}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{x}{4} = t \\ dx = 4\,dt \\ 0 \to 0 \\ \infty \to \infty \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg} t\right]_0^b =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Nyní bychom mohli vypočítat druhý integrál, ale uvědomíme-li si, že zadaná funkce je sudá, je zřejmé, že i druhý integrál bude roven $\frac{\pi}{8}$. Celkem tedy $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+16} = \frac{\pi}{4}$ a nevlastní integrál konverguje.

Cvičení

3.1. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci následujících integrálů:

a) $\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$,
b) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$,
c) $\int_{-\infty}^\infty \sqrt[3]{x}\,dx$,
d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+5x+6}$,
e) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x}\,dx$,
f) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$,
g) $\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$,
h) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$.

[a) $\frac{1}{2}$, b) 1 (při výpočtu limity použijte l'Hospitalova pravidla), c) diverguje, d) $2\ln 2 - \ln 3$, e) diverguje, f) $\frac{\pi}{2}$, g) $\frac{1}{2}$, h) $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$]

3.2. Nevlastní integrál 2. druhu

U druhého typu nevlastního integrálu integrujeme neomezenou funkci přes omezený interval. Určíme singulární body funkce. Pokud se singulární body nacházejí uvnitř intervalu, na němž integrujeme, rozdělíme interval tímto singulárním bodem. Pokud by např. na intervalu (a, b) byl singulární bod c, platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c_-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{u\to c_+} \int_u^b f(x)\,dx. \qquad (37)$$

Příklad 3.3. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci daných integrálů:

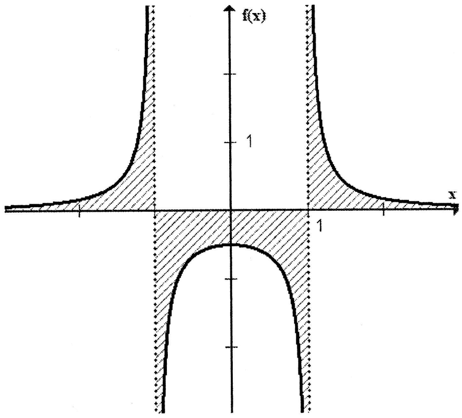
a) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$,
b) $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$,
c) $\int_0^1 x \ln x\,dx$,
d) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Řešení. a) Určíme nejdříve singulární body integrované funkce. Těmi jsou -1 a 1. To znamená, že v bodech $x = -1$ a $x = 1$ „utíká" funkce do nekonečna, resp. do mínus nekonečna. Proto integrál rozdělíme tak, aby vždy jedna mez byla konečná. Může to být např. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2-1}$, $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2-1}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}$, $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1}$. Nyní vyšetříme konvergenci každého z těchto integrálů zvlášť.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2-1} &= \lim_{t\to -1_-} \int_{-2}^{t} \frac{dx}{x^2-1} \\
&= \lim_{t\to -1_-} \left[\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_{-2}^{t} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to -1_-} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_{-2}^{t} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to -1_-} \left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\ln 3\right) \\
&= \infty - \frac{1}{2}\ln 3 = \infty.
\end{aligned}$$

První z integrálů tedy diverguje, čímž máme značně usnadněnou práci, neboť je zřejmé, že musí divergovat i celý integrál.

Graficky je daná situace znázorněna na obrázku 7. Naznačená plocha má nekonečný obsah.



Obr. 7 Plocha mezi osou x a grafem funkce $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$ je nekonečná.

b) Singulárními body jsou -1 a 1, což jsou krajní body intervalu, přes nějž integrujeme. Integrál proto rozdělíme na součet dvou integrálů. Primitivní funkci můžeme hledat např. pomocí vzorce

$$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} :$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\, dx &= -\frac{1}{4} \lim_{t \to -1_+} \int_t^0 \frac{-4x^3}{\sqrt{1-x^4}}\, dx \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{t \to -1_+} \left[2\sqrt{1-x^4} \right]_t^0 = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Obdobně

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = -\frac{1}{4} \lim_{t \to 1_-} \left[2\sqrt{1-x^4} \right]_0^t = -\frac{1}{2}.$$

Oba nevlastní integrály konvergují, a proto konveguje i zadaný integrál.

c) Singulárním bodem je 0. Pro integraci použijeme metodu per partes:

$$\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{t\to 0_+}\int_t^1 x\ln x\,dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & v'_{.}=x \\ u'=\frac{1}{x} & v=\frac{x^2}{2}\end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0_+}\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_t^1 - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0_+}\int_t^1 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0_+}\left[x^2\ln x\right]_t^1 - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0_+}\left[\frac{x^2}{2}\right]_t^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} t^2\ln t - \frac{1}{4} + 0.$$

Výraz $\lim_{t\to 0} t^2 \ln t$ je neurčitý výraz typu $0\cdot\infty$. S využitím l'Hospitalova pravidla dostáváme:

$$\lim_{t\to 0_+} t^2\ln t = \lim_{t\to 0_+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0_+}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{-2}{t^3}} = -\lim_{t\to 0_+}\frac{t^2}{2} = 0.$$

Celkově

$$\int_0^1 x\ln x\,dx = -\frac{1}{4}.$$

Nevlastní integrál tedy konverguje.

Zajímavé je, že zadaný integrál není nevlastní. Platí totiž

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln x = 0.$$

Situace je znázorněna na obrázku 8.

d) Singulárním bodem je bod 1.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{a\to 1_+}\int_a^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \begin{vmatrix} \ln x = s \\ \frac{1}{x}\,dx = ds \\ 1 \to 0 \\ e \to 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{b\to 0_+}\int_b^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \lim_{b\to 0_+}\left[2\sqrt{s}\right]_b^1 = 2-0 = 2.$$

c) Singulárním bodem je 0. Pro integraci použijeme metodu per partes:

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = \lim_{t \to 0_+} \int_t^1 x \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t \to 0_+} \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_t^1 - \frac{1}{2} \lim_{t \to 0_+} \int_t^1 x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0_+} \left[x^2 \ln x \right]_t^1 - \frac{1}{2} \lim_{t \to 0_+} \left[\frac{x^2}{2} \right]_t^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} t^2 \ln t - \frac{1}{4} + 0.$$

Výraz $\lim_{t \to 0} t^2 \ln t$ je neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$. S využitím l'Hospitalova pravidla dostáváme:

$$\lim_{t \to 0_+} t^2 \ln t = \lim_{t \to 0_+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to 0_+} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{-2}{t^3}} = - \lim_{t \to 0_+} \frac{t^2}{2} = 0.$$

Celkově

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{4}.$$

Nevlastní integrál tedy konverguje.

Zajímavé je, že zadaný integrál není nevlastní. Platí totiž

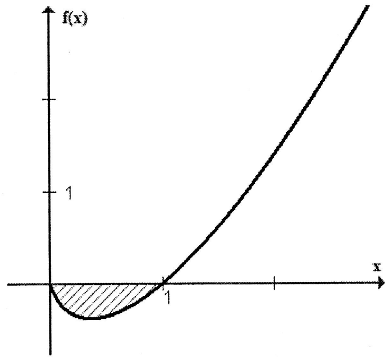
$$\lim_{x \to 0_+} x \ln x = 0.$$

Situace je znázorněna na obrázku 8.

d) Singulárním bodem je bod 1.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{a \to 1_+} \int_a^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left| \begin{array}{l} \ln x = s \\ \frac{1}{x} \, dx = ds \\ 1 \to 0 \\ e \to 1 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{b \to 0_+} \int_b^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \lim_{b \to 0_+} \left[2\sqrt{s} \right]_b^1 = 2 - 0 = 2.$$



Obr. 8

Cvičení

3.2. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci následujících integrálů:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$,

b) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$,

c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

d) $\int_0^1 \frac{dx}{x\ln x}$,

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$.

[a) diverguje, b) 2, c) π, d) diverguje, e) diverguje]

4. Geometrické aplikace určitého integrálu

Pomocí integrálního počtu lze počítat obsahy rovinných obrazců, délky křivek, povrchy a objemy těles. Je k tomu však vždy zapotřebí znát příslušnou funkci, jejíž graf ohraničuje danou plochu.

Vzledem k tomu, že délky křivek, obsahy jednoduchých rovinných obrazců i povrchy a objemy těles se počítají pomocí vzorců již na základní škole, ukážeme si nejdříve souvislosti mezi těmito zjednodušenými metodami a integrálním počtem. Později uvedeme příklady, které se elementárním způsobem vypočítat nedají, avšak integrálním počtem se vypočítají snadno.

4.1. Obsah rovinných obrazců

Obsah subgrafu nezáporné funkce $f(x)$, kde $x \in \langle a, b \rangle$, počítáme podle vztahu

$$S = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{38}$$

Subgrafem přitom myslíme plochu, která je ohraničena grafy funkcí $f(x), y = 0, x_1 = a, x_2 = b$.

Obecně počítáme plochu mezi dvěma grafy funkcí jako

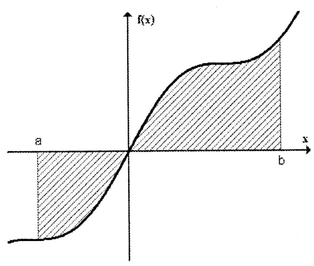
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx, \tag{39}$$

jestliže v daných mezích platí $f(x) > g(x)$. Je-li tedy $f = 0$ a g je záporná funkce na $\langle a, b \rangle$, platí

$$S = \int_a^b (0 - g(x))\, dx = \int_a^b -g(x)\, dx.$$

Příklad 4.1. Prostředky žáka základní školy vypočtěte obsah obdélníka o stranách a a b.

Řešení. Žáci základní školy intuitivně chápou obsah obdélníku jako počet jednotkových čtverečních jednotek, kterými lze obdélník pokrýt



Obr. 9 Ukázka plochy mezi osou x a grafem funkce.

(aniž by se jednotkové čtverce překrývaly). V případě, že obdélník nemá celočíselné délky stran, je obsah obdélníku chápán jako k-násobek čtvereční jednotky.

Již na prvním stupni ZŠ se pomocí jednotkových čtverců odvodí vztah pro obsah obdélníku, jehož strany jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Děti si vystřihnou čtverečky o straně 1 cm a ty pak pokládají do předem daných obdélníků. Ukazuje se jim, že celkový počet čtverců v obdélníku je roven součinu počtu čtverců v řádku a ve sloupci. Tato činnost umožňuje žákům ověřit vědomost, že obsah obdélníku (v případě obdélníku s přirozenými délkami stran) je $S = ab$, kde a, b jsou délky stran obdélníku.

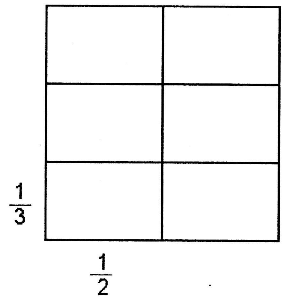
K práci s obdélníky, jejichž strany mají racionální délky, se přistupuje až po probrání zlomků, tedy na druhém stupni. Opět budeme pracovat s jednotkovými čtverci, do nichž se tentokrát vejde $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ obdélníků, kde a, b jsou délky stran těchto obdélníků (viz obr. 10). Z této činnosti opět vyplyne platnost vztahu $S = ab$.

Příklad 4.2. Vypočtěte obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna má délku a a výška na stranu a délku v.

Řešení.

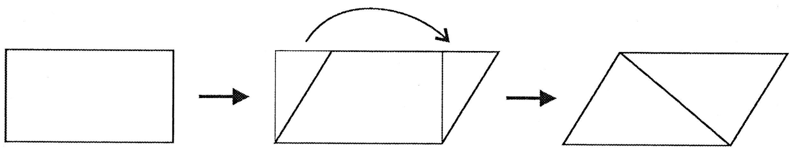
a) *Prostředky žáka základní školy*

Na ZŠ lze vyvodit obsah trojúhelníku v této metodické řadě: Žáci se nejdříve seznamují s obsahem obdélníku. Později s obsahem rovnoběžníku, který lze drobnou geometrickou úpravou změnit na obdélník,



Obr. 10 Obsah obdélníku, jehož délky stran jsou $a = \frac{1}{2}$ a $b = \frac{1}{3}$, je $S = ab = \frac{1}{6}$.

vzorec tedy opět vychází z obsahu obdélníku. Rovnoramenný trojúhelník můžeme chápat jako polovinu rovnoběžníku. Metodická řada je graficky znázorněna na obrázku 11.

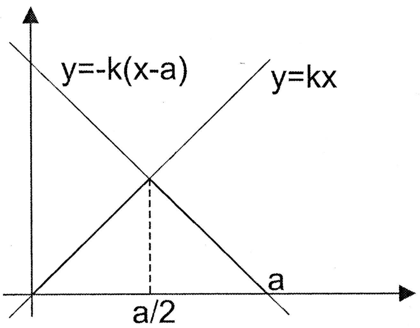


Obr. 11

Obsah trojúhelníku se tedy určí jako polovina obsahu rovnoběžníku o téže straně a téže výšce, tj. $S = \frac{av_a}{2}$.

b) *Pomocí integrálního počtu*
Rovnoramenný trojúhelník můžeme zakreslit do souřadnicových os např. jako na obrázku 12.

Vidíme, že nyní nebudeme počítat obsah pod grafem jedné, nýbrž dvou funkcí. Proto výpočet rozdělíme do dvou případů: obsah plochy pod grafem funkce $f(x) = kx$ v mezích $\langle 0, \frac{a}{2} \rangle$ a $f(x) = -k(x-a)$ v



Obr. 12

mezích $\langle \frac{a}{2}, a \rangle$. Tedy

$$S = k \int_0^{\frac{a}{2}} x \, dx + \left(-k \int_{\frac{a}{2}}^{a} (x-a) \right) dx =$$

$$= k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{a}{2}} - k \left[\frac{x^2}{2} - ax \right]_{\frac{a}{2}}^{a} = \frac{ka^2}{4}.$$

Srovnáme-li tento výsledek se známým vzorcem $S = \frac{1}{2} a v_a$, musí být $v_a = k\frac{a}{2}$. To je ale zřejmé z obrázku 12, neboť funkce $y = kx$ má v bodě $\frac{a}{2}$ hodnotu právě $k\frac{a}{2}$. Výsledky se tedy shodují.

Příklad 4.3. Vypočtěte obsah kruhu o poloměru r.

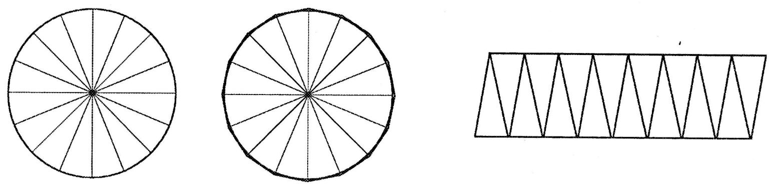
Řešení.

a) *Prostředky žáka základní školy*

Na ZŠ je i v tomto případě možno využít experimentu, který umožňuje přibližně určit obsah kruhu. Kruh rozdělíme na 16 nebo 32 shodných kruhových výsečí (aby jich bylo co nejvíce, ale při možnosti s nimi manipulovat). Výseče poskládáme do obrazce, jehož tvar připomíná rovnoběžník, nebo je můžeme ostřihnout na trojúhelníky a z trojúhelníků vytvořit rovnoběžník, jak je znázorněno na obrázku 13. Výška tohoto rovnoběžníku má délku poloměru původní kružnice a jeho jednu stranu si žáci změří (zjistí, že je o něco kratší, než délka půlkružnice[2]).

[2]Žáci se na základní škole nejdříve seznamují s obvodem kruhu, který počítají

Vypočítané číslo je přibližně rovno obsahu kruhu.

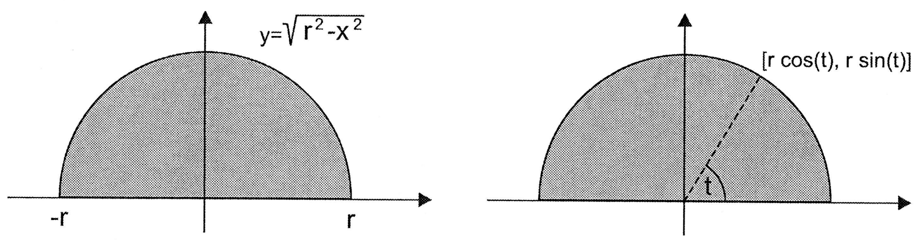


Obr. 13

b) *Pomocí integrálního počtu*
Připomeňme, jakými způsoby je možno zadat rovnici kružnice:

(1) analyticky jako $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (horní půlkružnice) a $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (dolní půlkružnice).

(2) parametrickými rovnicemi $\varphi(t) = r\cos t$, $\psi(t) = r\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



Obr. 14 Bod na kružnici vyjádřený analytickým a parametrickým způsobem

Jednodušší z hlediska výpočtu integrálu je zvolit parametrické vyjádření pro kružnici. Při parametrickém vyjádření počítáme obsah rovinného útvaru podle vzorce

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)|\varphi'(t)|\,dt. \tag{40}$$

pomocí vzorce $o = 2\pi r$. Můžeme naznačit, že na čím více výsečí bychom kruh rozdělili, tím více by se délka jeho základy přibližovala číslu πr. Tímto způsobem u žáků rozvíjíme limitní myšlení.

V případě kružnice je $\varphi(t) = r\cos t$, $\psi(t) = r\sin t$, $\varphi'(t) = -r\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a

$$S = \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 t \, dt = r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \, dt = r^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi r^2.$$

Můžeme ale počítat i analyticky např. obsah subgrafu horní půlkružnice, a to pomocí substituce $x = r\sin t$:

$$\frac{1}{2}S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} x = r\sin t \\ dx = r\cos t \, dt \\ -r \to -\frac{\pi}{2} \\ r \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r\cos t \, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 t)} \cdot r\cos t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \, dt =$$

$$= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt =$$

$$= r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} r^2.$$

Obsah celé kružnice je potom dvojnásobný, tj. $S = \pi r^2$.

Příklad 4.4. Určete obsah části roviny pod grafem funkce $y = -x^2 + 4$.

Řešení. O určení obsahu úseče paraboly se snažil již starověký myslitel Archimédes. Archimédes vyřešil tento problém s úctyhodnou přesností pomocí důmyslného vepisování trojúhelníků do úseče paraboly. Došel k závěru, že obsah úseče paraboly je roven dvěma třetinám obsahu obdélníku, do kterého je úseč paraboly vepsána.

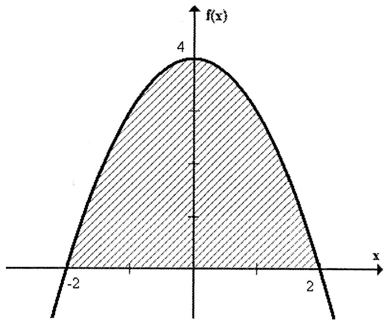
Mohli bychom se také pokusit obsah daného útvaru aproximovat pomocí obsahu mnohoúhelníka. Poměrně jednoduché je interval $\langle -2, 2 \rangle$ ekvidistantně rozdělit např. na 8 dílů a parabolu nahradit osmi obdélníky, jejichž výšku určíme např. jako funkční hodnotu v půlce daného dělicího intervalu. Vypočítáme obsah každého z těchto osmi obdélníků a sečteme je. $f(0,25) = 3,9375$, $S_1 = 0,5 \cdot 3,9375 = 1,96875$, $f(0,75) = 3,4375$, $S_2 = 1,71875$, $f(1,25) = 2,4375$, $S_3 = 1,21875$, $f(1,75) = 0,9375$, $S_4 = 0,46875$, $S = 2\cdot(S_1+S_2+S_3+S_4) = 2 \cdot 5,375 = 10,75$.

Výpočet pomocí integrálního počtu je přesný a rychlý:

$$S = \int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = -\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8 = \frac{32}{3} = 10,\overline{6}$$

Jestliže dosadíme naše hodnoty do Archimédova výsledku (tj. že obsah úseče paraboly je roven dvěma třetinám obsahu obdélníku, do kterého je úseč paraboly vepsána), dostáváme $S = \frac{2}{3}\cdot 4\cdot 4 = 10,\overline{6}$ a je vidět, že Archimédův postup byl opravdu velmi přesný.

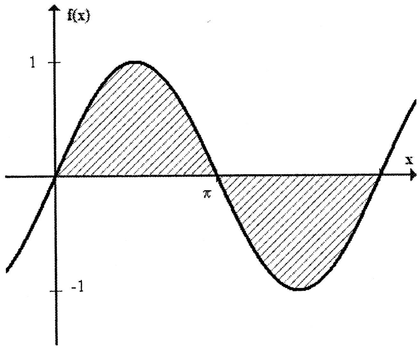
Hledaná plocha je znázorněna na obrázku 15.



Obr. 15

Příklad 4.5. Vypočtěte obsah plochy mezi osou x a grafem funkce $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Řešení. Musíme si uvědomit, že při výpočtu počítáme plochu mezi grafy dvou funkcí. V našem případě jde o funkce $y = \sin x$ a $y = 0$ (obrázek 16). Na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ platí $\sin x > 0$, zatímco na intervalu $\langle \pi, 2\pi\rangle$ je to naopak.

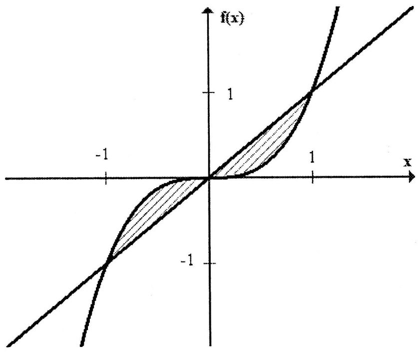


Obr. 16

Platí tedy:

$$S = \int_0^{\pi} (\sin x - 0)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (0 - \sin x)\, dx = \big[-\cos x \big]_0^{\pi} - \big[\cos x \big]_{\pi}^{2\pi}$$
$$= 1 + 1 = 2.$$

Příklad 4.6. Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného kubickou parabolou $y = x^3$ a přímkou $y = x$.



Obr. 17

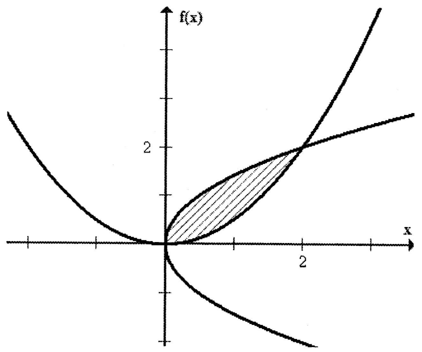
Řešení. Nejdříve musíme zjistit, v jakých mezích máme integrovat, najdeme tedy průsečíky grafů daných funkcí:

$$\begin{aligned} x^3 &= x \\ x^3 - x &= 0 \\ x(x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

a tedy průsečíky jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Dále si musíme uvědomit, na intervalu $(-1,0)$ platí $x^3 > x$ a na intervalu $(0,1)$ platí $x^3 < x$, tedy

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx = \\ &= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 4.7. Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného oblouky parabol $y^2 = ax$, $ay = x^2$, $a > 0$.



Obr. 18 Grafy křivek $y^2 = ax$, $ay = x^2$, kde $a = 2$.

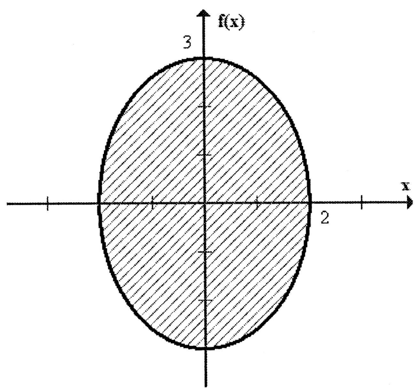
Řešení. Nejdříve vypočteme x-ové souřadnice průsečíků obou křivek:

$$\begin{aligned} ax &= \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 \\ x^4 - a^3x &= 0 \\ x(x^3 - a^3) &= 0, \end{aligned}$$

$x_1 = 0, x_2 = a$. Nyní je zřejmé, že můžeme vyjádřit funkční závislosti obou parabol tak, aby byly obě v proměnné x (neboť vyjádření první paraboly $x = \frac{y^2}{a}$ je v proměnné y). Tedy $y = \sqrt{ax}$, $y = \frac{x^2}{a}$.

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)\,dx = \left[\frac{2\sqrt{a}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3a}x^3\right]_0^a =$$
$$= \frac{2\sqrt{a}}{3}\cdot a\sqrt{a} - \frac{1}{3a}a^3 = \frac{a^2}{3}.$$

Příklad 4.8. Vypočítejte plošný obsah elipsy, jejíž poloosy jsou $a = 2$, $b = 3$.



Obr. 19

Řešení. Danou elipsu vyjádříme rovnicí $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ a tuto rovnici vyjádříme explicitně jako $y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$, přičemž uvažujeme $y > 0$ (tj. část elipsy nad osou x). Obsah celé elipsy budeme počítat jako dvojnásobek subgrafu funkce $y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$:

$$S = 2 \cdot \frac{3}{2} \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \\ -2 \to -\frac{\pi}{2} \\ 2 \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\, dt = 12 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 12 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} = 6\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi$$

a to odpovídá vzorci pro obsah elipsy

$$S = \pi ab.$$

Mnohem jednodušší by v tomto případě ovšem bylo použít místo obecného vyjádření parametrických rovnic. Elipsa má parametrické rovnice $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Potom

$$S = \int_0^{2\pi} b\sin t\, |-a\sin t|\, dt = ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt =$$

$$= ab\Big[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\Big]_0^{2\pi} = \pi ab,$$

a je-li v našem případě $a = 2$ a $b = 3$, dostáváme opět $S = 6\pi$.

Příklad 4.9. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného obloukem paraboly $y = x^2 - 6x + 11$ a jejími tečnami v bodech dotyku $T_1[1,6]$ a $T_2[4,3]$.

Řešení. Nejdříve musíme najít rovnice tečen, což můžeme udělat např. podle vzorce pro tečnu $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Poněvadž je $f'(x) = 2x - 6$, má tečna procházející bodem $[1,6]$ rovnici $y = -4(x-1)+6 = -4x + 10$ a tečna procházející bodem $[4,3]$ rovnici $y = 2(x-4)+3 = 2x - 5$.

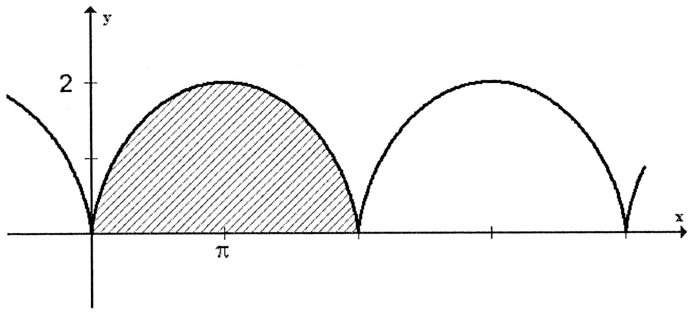
Dále najdeme průsečík obou tečen: $-4x + 10 = 2x - 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

$$S = \int_1^{\frac{5}{2}} \big(x^2 - 6x + 11 - (-4x + 10)\big)\, dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \big(x^2 - 6x + 11 -$$

$$- (2x - 5)\big)\, dx = \int_1^{\frac{5}{2}} (x^2 - 2x + 1)\, dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 (x^2 - 8x + 16)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right]_{\frac{5}{2}}^4 = 1,125 + 1,125 = 2,25.$$

Příklad 4.10. Vypočtěte obsah části roviny ohraničené jedním obloukem cykloidy.



Obr. 20 Cykloida

Řešení. Cykloida je křivka, kterou opisuje bod kružnice o poloměru $r = \frac{a}{2}$, valící se po ose x. Její parametrické rovnice jsou $x = a(t - \sin t)$

a $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Potom

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)[a(t - \sin t)]' \, dt = \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} dt - 2a^2 \int_0^{2\pi} \cos t \, dt + a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \\
&= a^2 \big[t\big]_0^{2\pi} - 2a^2 \big[\sin t\big]_0^{2\pi} + a^2 \Big[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t\Big]_0^{2\pi} = \\
&= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2.
\end{aligned}$$

4.2. Délka křivky

Délka křivky se pomocí analytického vyjádření vypočítá ze vztahu

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx \tag{41}$$

a pomocí parametrického vyjádření jako

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt. \tag{42}$$

Příklad 4.11. Vypočtěte délku kružnice (neboli obvod kruhu) o poloměru r.

Řešení.
a) *Prostředky žáka základní školy*
Na ZŠ můžeme obvod kruhu vyvozovat pouze přibližnými metodami, z nichž jedna je např. pomocí vepsaných a opsaných mnohoúhelníků, jejichž počet stran se neustále zvětšuje – začneme např. pravidelným šestiúhelníkem a pokračujeme osmiúhelníkem, dvanáctiúhelníkem atd. Postupně určujeme obvod každého mnohoúhelníku a vždy vypočítáme aritmetický průměr z obvodu mnohoúhelníka vepsaného a opsaného.

Takto se neustále přibližujeme správnému výsedku, ale přesnou hodnotu obvodu kruhu neurčíme. I přesto se jedná o velmi náročné výpočty, které by bylo na základní škole možno doporučit pouze nadaným deváťákům.

Jinou možností je experimentální činnost, kdy žáci vždy k danému průměru změří obvod kruhu (např. pomocí válečku a provázku či papírového měřítka). Počítají poměr obvodu k průměru kruhu a při pečlivé práci jim vychází vždy podobné číslo, které se blíží k číslu 3,14. Z toho se odvodí, že $\frac{o}{d} = \pi$, tj. $o = \pi d$. Tato manipulativní činnost může hrát také důležitou úlohu v tom, že si žáci uvědomí, že poměr obvodu kruhu a jeho poloměru je pro všechny kruhy konstantní číslo.

b) *Pomocí integrálního počtu*
Opět můžeme zvolit analytické i parametrické vyjádření kružnice.

Analytické vyjádření půlkružnice je $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r, r\rangle$. Tedy

$$
\begin{aligned}
l &= \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \\
&= \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{r\, dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \\
&= r[\arcsin t]_{-1}^{1} = r(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = r\pi.
\end{aligned}
$$

To je obvod půlkruhu a obvod celého kruhu určíme již jen vynásobením dvěma, tj. $o = 2l = 2\pi r$.

Parametrickými rovnicemi $\varphi(t) = r\cos t$, $\psi(t) = r\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ můžeme počítat délku celé kružnice:

$$
\begin{aligned}
o &= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}\, dt = \\
&= \int_{0}^{2\pi} r dt = r[x]_0^{2\pi} = 2\pi r.
\end{aligned}
$$

Příklad 4.12. Vypočtěte délku části paraboly $y = \frac{x^2}{4}$ v mezích $\langle 2, 4\rangle$.

Řešení.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}\, dx.$$

Vzhledem k obtížnosti výpočtu daného integrálu (možno použít Eulerovu substituci) se jeví jednodušší najít k dané funkci funkci inverzní a vypočítat délku jejího grafu. Zmíněnou inverzní funkcí je $x = 2\sqrt{y}$, délku budeme hledat na intervalu $\langle 1, 4\rangle$, neboť pro $x = 2$ je $y = 1$ a pro $x = 4$ je $y = 4$). Potom $f'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ a

$$l = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{y}}\, dy.$$

Nyní zavedeme substituci $1 + \frac{1}{y} = u^2$, odtud vyjádříme y, vypočteme $dy = \frac{-2u}{(u^2-1)^2}\, du$ a změníme meze. Tedy

$$\begin{aligned} l &= \int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} u \frac{-2u}{(u^2-1)^2}\, du = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left[\frac{\frac{1}{2}}{u+1} - \frac{\frac{1}{2}}{(u+1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{u-1} - \frac{\frac{1}{2}}{(u-1)^2}\right] du = \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{2(u-1)}\right]_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) + 2\sqrt{5} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Příklad 4.13. Vypočítejte délku křivky danou parametrickými rovnicemi $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = t - \frac{t^3}{3}$ pro $t \in \langle 1, 2\rangle$.

Řešení. Platí $\varphi'(t) = 2t$, $\psi'(t) = 1 - t^2$, tedy

$$\begin{aligned} l &= \int_1^2 \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}\, dt = \int_1^2 \sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\, dt = \\ &= \int_1^2 (1 + t^2)\, dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_1^2 = 2 + \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

4.3. Objemy a povrchy těles

Pomocí jednoduchého intergrálu lze kromě obsahů rovinných obrazců a délek křivek počítat též objemy těles. My se však omezíme pouze na rotační tělesa (tj. tělesa, která vzniknou rotací plochy kolem určité osy). Jiná tělesa sice jednoduchý integrál také dokáže v některých případech spočítat, exstuje však vhodnější metoda dvojných a trojných integrálů.

Povrchy mnohostěnů se vypočítají snadno elementárními metodami, neboť jde vlastně o výpočty obsahů rovinných útvarů (obdélníků, čtverců, trojúhelníků apod.).

Povrch rotačního tělesa počítáme v případě analytického vyjádření podle vztahu

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \tag{43}$$

a v případě paramterického vyjádření jako

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{44}$$

Objem rotačního tělesa počítáme podle vztahu

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \tag{45}$$

a v případě parametrického vyjádření jako

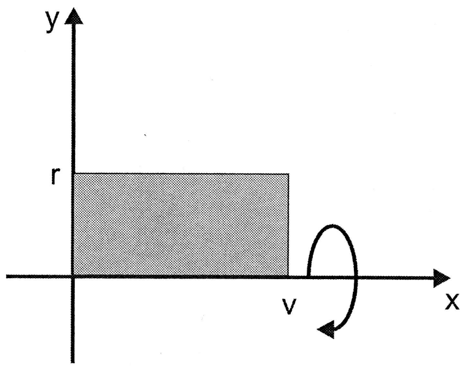
$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\, dt \tag{46}$$

Příklad 4.14. Vypočtěte povrch a objem rotačního válce o poloměru podstavy r a výšce tělesa v.

Řešení.
a) *Prostředky žáka základní školy*
Po zvládnutí výpočtů obsahů rovinných útvarů vypočítají žáci tento příklad velmi snadno, neboť obsahy dvou podstav jsou obsahy dvou kruhů a obsah pláště válce je roven obsahu obdélníka, jehož jedna strana je $2\pi r$ a druhá strana je v, tedy $S = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2\pi r(r + v)$.

Při odvozování objemu válce se vychází z analogie výpočtu objemu kolmého hranolu, jehož objem se odvodí z objemu kvádru. Kvádr s celočíselnými stranami je možno vyplnit jednotkovými krychlemi a odvodí se vzorec $V = abc$, tedy obsah podstavy se násobí výškou. Na základě této analogie se může vyvodit vztah pro výpočet objemu hranolu pro libovolný kolmý hranol nebo válec. Tato činnost je opět pouze experimentální a neprovádí se zde důkaz. Celkem je tedy objem válce $V = \pi r^2 v$.

b) *Pomocí integrálního počtu*



Obr. 21 Vznik rotačního válce

Válec získáme, jestliže necháme rotovat obdélník kolem jedné jeho strany (obrázek 21). Obdélník je vlastně plochou pod grafem konstantní funkce $y = r$ v mezích od $x = 0$ až $x = v$ a tedy

$$S = 2\pi \int_0^v r\sqrt{1+0}\, dx = 2\pi r v.$$

Obdobně vypočítáme objem válce:

$$V = \pi \int_0^v r^2\, dx = \pi r^2 [x]_0^v = \pi r^2 v.$$

Příklad 4.15. Vypočtěte povrch a objem rotačního kužele, jehož poloměr podstavy je r a výška v.

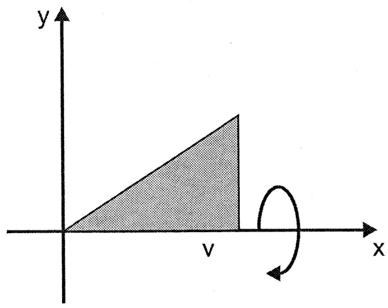
Řešení.

a) *Prostředky žáka základní školy*

Povrch kužele je tvořen podstavou (kruh) a pláštěm (kruhová výseč). K tomuto faktu můžou žáci sami dojít, když si např. papírový kužel rozlepí, nebo naopak ze sítě vytvoří kužel. Potom tedy povrch kužele je $S = \pi r^2 + \pi r s$, kde s je strana kužele, $s = \sqrt{v^2 + r^2}$.

S výpočtem objemu kužele je to složitější, neboť objem kužele je roven $\frac{1}{3}$ objemu válce, který má stejnou podstavu a výšku. To můžeme žákům ilustrovat experimentem, kdy máme modely dutých těles a přeléváme vodu z kužele do válce.

b) *Pomocí integrálního počtu*



Obr. 22 Vznik rotačního kužele

Rotační kužel můžeme získat rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho odvěsny (obrázek 22). Danou funkcí je lineární funkce $y = kx$, kde směrnici k určíme jako $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{v}$, v mezích od $x = 0$ do $x = v$. Potom

$$S = 2\pi \int_0^v \frac{r}{v} x \sqrt{1 + \frac{r^2}{v^2}}\, dx = 2\pi \frac{r}{v^2} \sqrt{r^2 + v^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^v = \pi r \sqrt{r^2 + v^2},$$

$$V = \pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2} x^2\, dx = \frac{\pi r^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^v = \frac{1}{3} \pi r^2 v.$$

Příklad 4.16. Vypočtěte povrch a objem koule o poloměru r.

Řešení. Prostředky žáka ZŠ lze povrch koule vypočítat velmi obtížně, protože koule nemá síť. Může se ale provést (byť velmi nepřesný) experiment, když se z pomeranče oloupe kůra ve čtyřech stejných částech, na papír se nakreslí 4 kruhy o poloměru stejném jako je poloměr koule a kůra se na ně nalepí. Z této činnosti se usoudí, že $S = 4\pi r^2$.

Objem koule lze přibližně určit takto: Pokud je již znám povrch koule, můžeme si představovat jehlany, které mají podstavu na plášti koule a hlavní vrchol ve středu koule. Jehlanů je v kouli tolik, aby právě naplnily celý objem – tzn., že také všechny podstavy přibližně tvoří povrch koule. Je-li potom objem jehlanu $S = \frac{1}{3}S_p v$, je objem koule $S = \frac{1}{3}4\pi r^2 r = \frac{4}{3}\pi r^3$.

b) *Pomocí integrálního počtu*
Kouli dostaneme rotací půlkruhu kolem osy x. Tento půlkruh se nachází pod grafem funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ v mezích od $x = -r$ do $x = r$. Pro výpočet povrchu koule bude vhodnější použít parametrické vyjádření kružnice (kvůli složitosti integrálu) $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, a tedy

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = \\
&= 2\pi \int_0^\pi r\sin t\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \\
&= 2\pi \int_0^\pi r\sin t\sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = \\
&= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2\pi r^2[-\cos t]_0^\pi = 4\pi r^2.
\end{aligned}
$$

Můžeme si všimnout zajímavosti, že povrch koule o poloměru r je stejný jako plášť válce, který má poloměr podstavy r a výšku $2r$.

Objem koule můžeme počítat pomocí analytického vyjádření:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi r^2 [x]_{-r}^{r} - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \\
&= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.
\end{aligned}
$$

Příklad 4.17. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací subgrafu funkce $\sin x$ v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ kolem osy x.

Řešení.

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Příklad 4.18. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací subgrafu paraboly $y = 4 - x^2$ kolem osy x.

Řešení.

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2 \, dx = \pi \int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4) \, dx =$$
$$= \pi \left[16x - 8\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = 2\pi \left(32 - 8\frac{8}{3} + \frac{32}{5}\right) =$$
$$= \frac{512}{15}\pi.$$

Příklad 4.19. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy mezi $y = x$ a $y = x^2$ a) kolem osy x, b) kolem osy y.

Řešení. a) Průsečíky daných funkcí jsou $x = 0$ a $x = 1$, takže

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) \, dx = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

b) Nyní převedeme funkce do proměnné y, tj. $x = y$ a $x = \sqrt{y}$, $y \in \langle 0, 1\rangle$. Tedy

$$V = \pi \int_0^1 \left((\sqrt{y})^2 - y^2\right) \, dy = \pi \int_0^1 (y - y^2) \, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Příklad 4.20. Vypočítejte objem tělesa, vzniklého rotací subgrafu jednoho oblouku cykloidy kolem osy x.

Řešení. Parametrické rovnice cykloidy jsou $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt = \\
&= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) \cdot a(1 - \cos t)\,dt = \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt = \\
&= \pi a^2 \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) - \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\right]_0^{2\pi} = \\
&= 2\pi^2 a^3 + 0 + 3\pi^2 a^3 + 0 = 5\pi^2 a^3.
\end{aligned}$$

Příklad 4.21. Vypočtěte obsah plochy, která vnikne rotací grafu funkce $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, kolem osy x.

Řešení.

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx = \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{4x+1}\,dx = \pi \int_0^1 \sqrt{4x+1}\,dx = \\
&= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \cdot 5\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Příklad 4.22. Vypočtěte obsah plochy vytvořené rotací křivky, jejíž parametrické rovnice jsou $\varphi(t) = a\sin 2t$, $\psi(t) = 2a\sin^2 t$, $a > 0$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Řešení. $\varphi'(t) = 2a\cos 2t$, $\psi'(t) = 4a\sin t\cos t = 2a\sin 2t$,

$$S = 2\pi\int_0^\pi 2a\sin^2 t\sqrt{4a^2\cos^2 2t + 4a^2\sin^2 2t}\,dt =$$

$$= 8\pi a^2\int_0^\pi \sin^2 t\sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t}\,dt =$$

$$= 8\pi a^2\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = 4\pi a^2\,[t]_0^\pi + 2\pi a^2\,[\sin 2t]_0^\pi = 4\pi^2 a^2.$$

Cvičení

4.1. Pomocí integrálního počtu určete obsah
a) obdélníku se stranami délek a, b,
b) pravoúhlého trojúhelníku, který má výšku dvakrát delší než podstavu,
c) rovnoramenného trojúhelníku, který má výšku dvakrát větší než podstavu,
d) elipsy, která má délku hlavní poloosy dvakrát větší než délku vedlejší poloosy.

[a) ab, b) a^2, c) a^2, d) $2\pi a^2$]

4.2. Určete velikost plochy omezené danými křivkami:
a) $y = x^2 - x$, $y = 0$,
b) $y = x$, $y = x^2 - 4x + 6$,
c) $y = x^2 + 1$, $y = 4 - x^2$,
d) $x = y^2$, $x = 4 - y^2$,
e) $y = 2x$, $y = 4 - x$, $y = -\frac{x}{2}$,
f) $y = -x$, $y = \sqrt{x}$, $y = 1 - 2x$,
g) $y = x$, $y = x^2$, $x = 3$,
h) $y = \sin x$, $y = \cos x$ na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$.

[a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $2\sqrt{6}$, d) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$, e) $\frac{40}{3}$, f) $\frac{19}{48}$, g) $\frac{29}{6}$, h) $\sqrt{2} - 1$]

4.3. Určete obsah plochy pod parabolou, která prochází body $A[0; -3]$, $B[1; 0]$, $C[-1; -4]$, a osou x.

[$\frac{22}{3}$, zadanou parabolou je graf funkce $y = x^2 + 2x - 3$]

4.4. Nalezněte délku dané křivky:
a) $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$,
b) $y = x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq 4$,
c) $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

[a) $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{17})$, b) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$, c) $\ln(1 + \sqrt{2})$]

4.5. Vypočtěte povrch a objem rotačního kužele, který má třikrát větší výšku, než je průměr jeho podstavy.

[$S = \pi\frac{3a^2}{4}\sqrt{5}$, $V = \frac{1}{4}\pi a^3$]

4.6. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy omezené danými křivkami kolem osy x.
a) Pod křivkou $y = \sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0; 4\rangle$,
b) pod křivkou $y = \cos x$ na intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$,
c) $y = x$ a $y = x^2$,
d) $y = 2x^3$, $y^2 = 4x$,
e) $y = \frac{2}{x-2}$, $x + y = 5$,
f) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = \ln 2$,
g) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.

[a) 8π, b) $\frac{1}{4}\pi^2$, c) $\frac{2\pi}{15}$, d) $\frac{10}{7}\pi$, e) $\frac{1}{3}\pi$, f) $\frac{9}{8}\pi$, g) $\pi(e - 2)$]

4.7. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne otáčením křivky kolem osy x:
a) $y = x^3$, $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$,
b) $y^2 = 4ax$, $0 \leq x \leq 3a$.

[a) $\frac{196}{27^2}\pi$, b) $\frac{56}{3}\pi^2$]

4.8. Určete obsah plochy vytvořené otáčením oblouku asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$.

[$\frac{12}{5}\pi a^2$]

Literatura

[1] Berman, G. N.: *Sbornik zadač po kursu matěmatičeskogo analiza.* Fizmatgiz, Moskva 1960

[2] Děmidovič, B. P.: *Sbornik zadač i upražněnij po matěmatičeskomu analizu.* GITTL, Moskva 1954

[3] Garner, Lynn E.: *Calculus and Analytic Geometry.* Dellen Publishing Company, Macmillan, Inc. Canada, 1988

[4] Jirásek, F., Kriegelstein, E., Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky.* SNTL, Praha 1982

[5] Moučka, J., Rádl, P.: *Matematika pro studenty ekonomie.* Grada, Praha 2010

[6] Novák, V.: *Integrální počet funkcí jedné reálné proměnné.* Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, Brno 2005

PEDAGOGICKÁ FAKULTA ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA BRNO

Sbírka příkladů z integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné

Mgr. Irena Budínová, Ph.D.

Vydala Masarykova univerzita v roce 2014
1. vydání, 2014
Náklad 120 výtisků
Tisk MSD, spol. s r.o., Lidická 23, 602 00 Brno

ISBN 978-80-210-6995-4

ISBN 978-80-210-6995-4

muni PRESS