Křivkové integrály

- integrační obory jsou křivky
- hladká křivka - vyjádření parametricky $\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}$ popř. $z = \chi(t)$
- lze ji považovat za dráhu hmotného bodu během časového intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ bez zastavení
- orientace křivky (kladná, záporná)
- dělení křivky, norma dělení

1. Fyzikální úloha: Výpočet síly působící na hmotný bod pohybující se po křivce *C* (Máme definovanou vektorovou funkci $\vec{F}(P)$).

$$A \cong \sum_i \vec{F}(K_i)(\overrightarrow{P_i - P_{i-1}}) = S_{\vec{F}}(D)$$

Hledám limitu výše uvedených posloupností s dělením *D*, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ S_{\vec{F}}(D_n)_{n=1}^{\infty} \right\}$. Tu pak nazýváme integrálem funkce $\vec{F}(P)$ po křivce *C* a označujeme $\int\limits_C \vec{F}(P) d\vec{r}$ (Křivkový integrál 2. druhu funkce $\vec{F}(P)$ po křivce *C*).

Je-li zvolena kartézská soustava souřadnic, tj.

$\vec{F}(P) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$ a $d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$,

pak $\int\limits_C \vec{F}(P) d\vec{r} = \int\limits_C [f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz]$.

2. Máme definovánu skalární funkci *f(P)* na *C*. Pak limita integrálních součtů $S_f(D_n)$ s dělením D_n, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(D_n) = \int\limits_C f(P) ds$

se nazývá křivkový integrál 1. druhu funkce *f(P)* na *C*, přičemž

$S_f(D_n) = \sum\limits_i f(P).|P_i P_{i-1}|$, kde $|P_i P_{i-1}|$ je vzdálenost.

Základní vlastnosti křivkových integrálů

2. druhu:

Věta 3.6: Nechť *C* je orientovaná křivka a c_1, c_2 jsou čísla. Nechť $\exists$ křivkové integrály $\int\limits_C \vec{F}(P) d\vec{r}$ a $\int\limits_C \vec{G}(P) d\vec{r}$. Pak platí:

$$\int\limits_C \left[c_1 \vec{F}(P) + c_2 \vec{G}(P) \right] d\vec{r} = c_1 \int\limits_C \vec{F}(P) d\vec{r} + c_2 \int\limits_C \vec{G}(P) d\vec{r}$$

Věta 3.7: Nechť orientovaná křivka C se skládá z orientovaných křivek C_1 a C_2 a koncový bod křivky C_1 je počátečním bodem křivky C_2. Pak platí:

$$\int_C \vec{F}(P)d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}(P)d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}(P)d\vec{r}$$

Věta 3.8: Nechť C je orientovaná křivka. Nechť křivka $\overline{C}$ vznikne z křivky C změnou orientace. Pak platí:

$$\int_{\overline{C}} \vec{F}(P)d\vec{r} = -\int_C \vec{F}(P)d\vec{r}$$

1. druhu:

Věta 3.9: Nechť C je orientovaná křivka. Nechť $f(P)$ a $g(P)$ jsou reálné funkce a c_1, c_2 jsou čísla. Pak platí:

$$\int_C [c_1 f(P) + c_2 g(P)]ds = c_1 \int_C f(P)ds + c_2 \int_C g(P)ds$$

Věta 3.10: Nechť orientovaná křivka C se skládá z na sebe navazujících orientovaných křivek C_1 a C_2. Pak

$$\int_C f(P)ds = \int_{C_1} f(P)ds + \int_{C_2} f(P)ds$$

Věta 3.11: Nechť C je orientovaná křivka. Nechť křivka $\overline{C}$ vznikne z křivky C změnou orientace. Pak

$$\int_{\overline{C}} f(P)ds = \int_C f(P)ds$$

Věta 3.12: Pro délku oblouku $s(C)$ orientované křivky C platí

$$s(C) = \int_C ds$$

Výpočet křivkových integrálů

Nechť C je orientovaná křivka, která je vyjádřena parametricky funkcí $\vec{P}(t)$, tj.

$\vec{P}(t) = \vec{r}(t) = \varphi(t).\vec{i} + \psi(t).\vec{j} + \chi(t).\vec{k}$ (analogicky pro 2-dim)

Pak pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí:

a) $$\int_C \vec{F}(P)d\vec{r} = \int_C [f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz] =$$

$$= \int_\alpha^\beta [f_1(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)).\varphi'(t) + f_2(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)).\psi'(t) + f_3(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)).\chi'(t)]dt$$

b) $$\int_C f(P)ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)).\sqrt{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)]}dt$$

tzn., že $ds = \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)}\,dt$ je-li křivka dána parametricky,

$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$ v polárních souřadnicích,

$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$ je-li křivka v rovině dána jako graf funkce *f(x)*

ds - diferenciál délky oblouku

Geometrické a fyzikální aplikace

Nechť *C* je po částech hladká křivka. Pak platí:

1. Délka křivky *C* je

$$s = \int_C ds$$

2. Hmotnost křivky *C* je

$$m = \int_C \rho(P)\,ds\,,$$

kde $\rho = \rho(P)$ je délková hustota v libovolném bodě *P* křivky *C*.

3. Souřadnice těžiště $T[x_0, y_0, z_0]$ křivky *C* jsou

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_C x\rho(P)\,ds$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_C y\rho(P)\,ds$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\int_C z\rho(P)\,ds\,,$$

kde integrály jsou příslušné statické momenty. Všechny vzorce uvedeme dále podrobněji pro jednotlivé typy souřadnic.

Nechť silové pole je dáno vektorovou funkcí $\vec{F}(P)$. Pak práce *A* tohoto pole po křivce *C* je

$$A = \int_C \vec{f}(P)\,\overrightarrow{dr}$$

V dále uvedených vzorcích předpokládáme spojitost (popř. spojitost po částech) všech funkcí, které se v nich vyskytují.

1. Křivky v rovině. Křivka je dána:
   a) grafem funkce $y = f(x)$, $a \le x \le b$
   b) parametricky rovnicemi $x = \Phi(t)$, $y = \Psi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ (označujeme $d\Phi / dt = \dot{\Phi}$, $d\Psi / dt = \dot{\Psi}$)
   c) v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $r \ge 0$.

   Délková hustota ρ je funkcí proměnné *x*, popř. *t*, popř φ. Je-li funkce ρ konstantní, lze ji vytknout před integrační znak.

Délka křivky:

a) $$s = \int_a^b \sqrt{\left[1 + f'^2(x)\right]}dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

b) $$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

c) $$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}.d\varphi$$

Hmotnost:

a) $$m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{\left[1 + f'^2(x)\right]}dx = \int_a^b \rho\sqrt{\left(1 + y'^2\right)}dx$$

b) $$m = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} \rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}dt$$

c) $$m = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\sqrt{\left[r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)\right]}d\varphi$$

Statický moment vzhledem k ose *x*, popř. *y*:

a) $$S_x = \int_a^b f(x)\rho(x)\sqrt{\left[1 + f'^2(x)\right]}dx = \int_a^b y\rho\sqrt{\left(1 + y'^2\right)}dx$$

$$S_y = \int_a^b x\rho(x)\sqrt{\left[1 + f'^2(x)\right]}dx = \int_a^b x\rho\sqrt{\left(1 + y'^2\right)}dx$$

b) $$S_x = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\rho(t)\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} y\rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}dt$$

$$S_y = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\rho(t)\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} x\rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}dt$$

c) $$S_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\left[r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)\right]}d\varphi$$

$$S_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{\left[r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)\right]}d\varphi$$

Souřadnice těžiště:

$$x_0 = \frac{S_y}{m}, \qquad y_0 = \frac{S_x}{m}$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose *x*, popř. *y*:

a) $$I_x = \int_a^b f^2(x)\rho(x)\sqrt{\left[1 + f'^2(x)\right]}dx = \int_a^b y^2\rho\sqrt{\left(1 + y'^2\right)}dx$$

$$I_y = \int_a^b x^2\rho(x)\sqrt{\left[1 + f'^2(x)\right]}dx = \int_a^b x^2\rho\sqrt{\left(1 + y'^2\right)}dx$$

b) $$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)\rho(t)\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} y^2\rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}dt$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \Phi^2(t)\rho(t)\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2\rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}dt$$

c) $$I_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) r^2(\varphi)\sin^2\varphi\sqrt{\left[r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)\right]}d\varphi$$

$$I_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) r^2(\varphi)\cos^2\varphi\sqrt{\left[r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)\right]}d\varphi$$

Při výpočtu momentů setrvačnosti vzhledem k počátku je vzdálenost v kartézských souřadnicích rovna $\sqrt{x^2 + y^2}$ a v polárních souřadnicích *r*.

2. Křivky v prostoru. Křivka C je dána parametricky rovnicemi

$x = \Phi(t)$, $y = \Psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, $\frac{d\Phi}{dt} = \dot{\Phi}$ atd.

Délka:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$$

Hmotnost:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} \rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}dt$$

Statický moment vzhledem k rovině *xy*, popř. *xz*, popř. *yz*:

$$S_{xy} = \int_{t_1}^{t_2} \chi(t)\rho(t)\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} z\rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}dt$$

$$S_{xz} = \int_{t_1}^{t_2} \Psi(t)\rho(t)\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} y\rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}dt$$

$$S_{yz} = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t)\rho(t)\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} x\rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}dt$$

Souřadnice těžiště:

$$x_0 = \frac{S_{yz}}{m}, \qquad y_0 = \frac{S_{xz}}{m}, \qquad z_0 = \frac{S_{xy}}{m}$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose x, popř. y, popř. z:

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\left[\Psi^2(t) + \chi^2(t)\right]\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(y^2 + z^2\right)\rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}dt$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\left[\Phi^2(t) + \chi^2(t)\right]\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(x^2 + z^2\right)\rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}dt$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\left[\Phi^2(t) + \Psi^2(t)\right]\sqrt{\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)\right]}dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(x^2 + y^2\right)\rho\sqrt{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)}dt$$

Cirkulace vektoru

Def. 3.4: Je-li křivka L uzavřená, pak křivkový integrál 2. druhu vektoru $\vec{a}$ po celé křivce L nazýváme cirkulací $C(\vec{a})$ vektoru $\vec{a}$ po křivce L. Přičemž

$$C(\vec{a}) = \oint_L \vec{a}.d\vec{r} = \oint_L \left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right) = \oint_L a_\tau ds,$$

kde a_x, a_y, a_z jsou složky vektoru $\vec{a}$

$d\vec{r}$ je vektor rovnoběžný s tečnou τ, jeho modul (délka) se rovná diferenciálu délky oblouku křivky; $|d\vec{r}| = ds$; $\vec{a}d\vec{r} = a_\tau ds$, kde a_τ je projekce vektoru $\vec{a}$ na tečnu τ. $C(\vec{a})$ vyjadřuje práci vektorového pole vektoru $\vec{a}$ po uzavřené křivce.

Věta 3.13: Nechť A je uzavřená množina, jejíž hranice tvoří uzavřená, po částech hladká křivka C. Nechť funkce $P(x,y)$, $Q(x,y)$ a $P_y(x,y)$, $Q_x(x,y)$ jsou spojité na A. Pak

$$\iint_A \left[Q_x(x,y) + P_y(x,y)\right]dxdy = \int_C \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right]$$

Plošné integrály

- pojem plochy
- parametrizace - část roviny B zdeformujeme podle určitých pravidel na plochu S zobrazení $P(u,v)$ z E_2 do E_3 nazveme parametrizací, přičemž $\{[x,y,z]\in E_3 | x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v), z=\chi(u,v) pro \forall [u,v]\in B\}$ nazveme jednoduchou hladkou plochou. (Mají jen jednu stranu.)
- orientace plochy - jednotkový normálový vektor $\vec{u}$
- orientace souhlasná (nesouhlasná) s okrajem
- průměr $d(S)$ plochy S - nejmenší číslo, které není menší, než vzdálenost dvou libovolných bodů z S
- dělení D plochy, norma dělení - největší číslo z $d(S_i)$

Def. 3.5: Nechť na ploše S je dána funkce $f(x,y,z)$. Rozdělme plochu S pomocí dělení D na n částí S_i. Zvolme v každé S_i bod X_i a sestrojme součet $\sigma(D_n)=\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\Delta S_i$, kde ΔS_i je obsah části S_i. Limitu $\lim_{n\to\infty}\sigma(D_n)$ označíme za plošný integrál 1. druhu po ploše S a označujeme $\iint_S f(x,y,z)dS$

Def. 3.6: Nechť na ploše S je dána vektorová funkce $\vec{F}(x,y,z)$. Nechť D je dělení plochy S tvořené plochami $S_1, S_2, ..., S_n$. Zvolme na každé ploše S_i bod X_i a vytvořme součet $\sigma(D_n)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(X_i)\vec{n}(X_i)\Delta S_i$. Jestliže $\exists$ limita posloupnosti odpovídajících součtů $\sigma(D_n)$, pak ji nazveme plošným integrálem druhého druhu vektorového pole $\vec{F}$ po ploše S, ozn.

$$\iint_S \vec{F}d\vec{S}=\iint_S [f_1(x,y,z)dydz+f_2(x,y,z)dxdz+f_3(x,y,z)dxdy]$$

Fyzikální význam: Tok vektorového pole $\vec{F}$ plochou S.

Věta 3.14: Jestliže můžeme plochu S rozdělit na dvě části S_1 a S_2, pak

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{S_1} f(x,y,z)dS+\iint_{S_2} f(x,y,z)dS$$

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{F}(x,y,z)d\vec{S}+\iint_{S_2}\vec{F}(x,y,z)d\vec{S}$$

Věta 3.15: Plošný integrál druhého druhu lze převést na plošný integrál prvního druhu:

$$\iint_S \vec{F}d\vec{S}=\iint_S \vec{F}(\vec{n}dS)=\iint_S(\vec{F}.\vec{n})dS$$

Věta 3.16: Je-li dána plocha *S* pomocí zobrazení $\overline{P}(u,v)$:

$x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$ pro $\forall[u,v]\in B$, pak

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_B f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)).\sqrt{(EG-F^2)}dudv,$$ kde

$$E=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2$$

$$G=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)^2$$

$$F=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)$$

Geometrické a fyzikální aplikace plošných integrálů

Zadání plochy:

a) v parametrickém tvaru $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, kde $[u,v]\in D$.
S plošnou hustotou $\rho(u,v)$

b) $z=f(x,y)$ nad oblastí *O*, $\rho(u,v)$

c) $z=z(r,\varphi)$ nad oblastí *D*: $\varphi\in\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$, $r\in\langle r_1(\varphi),r_2(\varphi)\rangle$, $\rho(u,v)$

Obsah *P* plochy *S*:

a) $$P(S)=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

b) $$P(S)=\iint_O\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

c) $$P(S)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}\sqrt{r^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\,dr$$

Statický moment vzhledem k rovině *xy, yz, xz*:

$$S_{xy}=\iint_D\rho(u,v).z(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

$$S_{yz}=\iint_D\rho(u,v).x(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

$$S_{xz}=\iint_D\rho(u,v).y(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

Pak souřadnice těžiště:

$$x_T=\frac{S_{yz}}{m},\qquad y_T=\frac{S_{xz}}{m},\qquad z_T=\frac{S_{xy}}{m}$$