6. ORTOGONÁLNÍ SOUSTAVY, FOURIEROVY ŘADY

Def.: - Číslo, které značíme $\langle f,g \rangle$ a definujeme vztahem

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b fg$$

nazýváme skalárním součinem funkcí *f* a *g*.

- Říkáme, že funkce *f* a *g* jsou ortogonální a píšeme $f \perp g$, právě, když platí $\langle f,g \rangle = 0$

- Říkáme, že systém funkcí $\{f_n | n \in A\}$ je ortogonální, právě když platí $\langle f_n, f_{n'} \rangle = 0$ pro $\forall n \neq n'$, $n, n' \in A$

- Číslo, které značíme $\|f\|$ a definujeme vztahem $\|f\| = \sqrt{\langle f,f \rangle}$ nazýváme normou funkce *f*.

- Systém funkcí $\{f_n | n \in A\}$ se nazývá normální, právě když platí $\|f_n\| = 1$ pro $\forall n \in A$

- Systém se nazývá ortonormální, právě když je ortogonální a zároveň normální.

Věta: Platí:

$$\langle f,g \rangle = \langle g,f \rangle$$

$$\langle f,(g+h) \rangle = \langle f,g \rangle + \langle f,h \rangle$$

$$\langle af,g \rangle = \langle f,ag \rangle = a\langle f,g \rangle \qquad \text{pro } \forall \; a \in \mathbf{R}$$

$$\langle f,f \rangle \geq 0$$

$$\langle 0,f \rangle = 0$$

Některé ortogonální systémy:

$$(\sin x, \sin(2x), \sin(3x), \cdots, \sin(nx), \cdots)$$

$$(\sin \omega x, \sin(2\omega x), \sin(3\omega x), \cdots, \sin(n\omega x), \cdots) \qquad \omega \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}, \cos x, \cos(2x), \cdots, \cos(nx), \cdots\right)$$

Pozn.: Důležité integrály

$$\int_a^{a+2\pi} \sin t.dt = 0 \qquad \int_a^{a+T} \sin(bt).dt = 0, \qquad b \neq 0, \qquad T = \frac{2\pi}{b}$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos t.dt = 0 \qquad \int_a^{a+T} \cos(bt).dt = 0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2 t.dt = \pi \qquad \int_a^{a+T} \sin^2(bt).dt = \frac{T}{2}$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2 t.dt = \pi \qquad \int_a^{a+T} \cos^2(bt).dt = \frac{T}{2}$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin t.\cos t.dt = 0 \qquad \int_a^{a+T} \sin(bt).\cos(bt).dt = 0$$

Systémy $(1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \cdots, \cos(nx), \sin(nx), \cdots)$ na intervalu $(a, a+2\pi)$
$(1, \cos(dx), \sin(dx), \cos(2dx), \sin(2dx), \cdots)$ na intervalu $(a, a+T)$,
kde a je libovolné číslo a $T = \dfrac{2\pi}{d}$, jsou ortogonální.

Def.: Nechť $(f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots)$ je ortogonální systém, *f* je funkce. Pak čísla

$$c_i = \frac{\langle f, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle}, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

nazýváme Fourierovými koeficienty funkce *f* vzhledem k systému $\{f_i\}$.

Pozn.: Značení F - koeficientů vzhledem k úplnému trigonometrickému systému
$(1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \cdots, \cos(nx), \sin(nx), \cdots)$ v intervalu $(a, a+2\pi)$
resp.
$\left(1, \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right), \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \cdots\right)$ v intervalu $(a, a+2l)$

- koeficient příslušný funkci 1 ozn. $\dfrac{a_0}{2}$
- koeficienty příslušné funkcím $\cos(nx)$, resp. $\cos\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)$ ozn. a_n
- koeficienty příslušné funkcím $\sin(nx)$, resp. $\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)$ ozn. b_n

Přičemž

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\cos(nt)dt \qquad \text{resp.} \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(t)\sin(nt)dt \qquad \text{resp.} \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)dt$$

Je-li funkce *f* - sudá, pak $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $b_n = 0$

- lichá, pak $a_n = 0$, $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$

Říkáme, že - sudé funkce mají kosinové Fourierovy řady
- liché funkce mají sinové Fourierovy řady

Def.: Řadu $\sum_{i=0}^{\infty} c_i f_i$ nazýváme Fourierovou řadou funkce *f* vzhledem k ortogonálnímu systému $\{f_i\}$. Píšeme

$$f \approx \sum_{i=0}^{\infty} c_i f_i$$

Pro sudou funkci f na intervalu $(-\pi, \pi)$, resp. $(-l, l)$

$$f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad \text{resp.} \quad f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Pro lichou funkci *f* na intervalu $(-\pi, \pi)$, resp. $(-l, l)$

$$f \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad \text{resp.} \quad f \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$