Algebraické struktury s jednou operací

Uspořádaná dvojice (M, ○), kde M je neprázdná množina, ve které je definována binární operace ○, se nazývá **algebraická struktura s jednou operací.**

Příklad : Příklad algebraických struktur: (ℕ, +), (ℂ, -), (ℚ - {0}, :), (ℝ, ·)

Definice:

I. Algebraická struktura (M, ○) se nazývá **grupoid** právě tehdy, když operace ○ je neomezeně definovaná v množině M. (ND)

II. Grupoid (M, ○), jehož operace ○ je asociativní, se nazývá **pologrupa.** (ND, A)

III. Pologrupa (M, ○) taková, že v M existuje neutrální prvek vzhledem k operaci (M, ○) a ke každému prvku $a \in$ M existuje prvek inverzní $\bar{a} \in$ M, se nazývá **grupa** (ND, A, EN, EI).

Jestliže v případech I., II., III. je operace ○ komutativní, pak hovoříme o komutativním grupoidu, komutativní pologrupě, komutativní grupě.

	Vlastnost operace ○	**Algebraická struktura**
(M, ○)	ND	Grupoid
	ND K	Komutativní grupoid
	ND A	Pologrupa
	ND A K	Komutativní pologrupa
	ND A EN EI	Grupa
	ND A EN EI K	Komutativní grupa

Příklady algebraických struktur s jednou operací

1. $(\mathbb{N}, +)$ … komutativní pologrupa s neutrálním prvkem $e = 0$

2. $(\mathbb{N}, -)$ … není ani grupoid

4. $(\mathbb{N}, \cdot)$ … komutativní pologrupa s neutrálním prvkem $e = 1$

5. $(\mathbb{N}, :)$ …není ani grupoid

6. $(\mathbb{C}, +)$ … komutativní grupa

7. $(\mathbb{C}, -)$ … grupoid s vlastností ZR

operace odčítání není K: $a - x = b$ $y - a = b$, $x = a - b$ $y = b + a$,

$a - b \in \mathbb{C}$ $b + a \in \mathbb{C}$, tj. obě rovnice jsou pro lib. $a, b \in \mathbb{C}$ vždy řešitelné

8. $(\mathbb{C}, \cdot)$ … komutativní pologrupa

9. $(\mathbb{C}, :)$ …není ani grupoid

10. $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ … komutativní grupy s neutrálním prvkem

11. $(\mathbb{Q}, -)$, $(\mathbb{R}, -)$… grupoid s vlasností ZR

12. $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$… komutativní pologrupy

13. $(\mathbb{Q}, :)$, $(\mathbb{R}, :)$… není ani grupoid

14. $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ … komutativní grupa

Důkazy v komutativní grupě:

$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$, $\bar{\bar{a}} = a$, $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$ apod.

Algebraické struktury se dvěma operacemi

$(M, \oplus, \odot)$

$\oplus$ - sčítání, EN - nulový prvek, 0 ; $\bar{a} = -a$ opačný prvek k prvku a

$\odot$ - násobení, EN - jednotkový prvek, 1 ; $\bar{a} = a^{-1} = \frac{1}{a}$ převrácený prvek k a

$(M, \oplus, \odot)$

- polookruh (kom.) $\oplus$: $ND \wedge A \wedge K$
  $\odot$: $ND \wedge A\ (\wedge K)$
  $\odot D \oplus$
- okruh (kom.) $\oplus$: $ND \wedge A \wedge K \wedge \overset{0}{EN} \wedge EI \wedge ZR$
  $\odot$: $ND \wedge A\ (\wedge K)$
  $\odot D \oplus$
- obor integrity - kom. okruh, ve kterém neexistují vlastní dělitelé nulového prvku $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \odot b = 0)$
- těleso (kom.) $\oplus$: $ND \wedge A \wedge K \wedge \overset{0}{EN} \wedge EI \wedge ZR$
  $\odot$: $ND \wedge A\ (\wedge K)$, $\odot D \oplus$
  $(M - \{0\}, \odot)$ - grupa, tj. operace $\odot$ má na mn. $M - \{0\}$ vlastnosti $ND, A, \overset{1}{EN}, EI, ZR$

Př. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ - komutat. polookruh s oběma neutrálními prvky, který není okruhem

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ - obor integrity, není tělesem

$(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ - tělesa, obory integrity

$(M, \oplus, \odot)$ - polookruh; Ex.-li prvek x takový, že $a = b \oplus x = x \oplus b$, pak x se nazývá <u>rozdíl</u> prvků a, b. $x = a \ominus b$
Ex.-li prvek x takový, že $a = b \odot x = x \odot b$, pak x se nazývá <u>podíl</u> prvků a, b. $x = a \oslash b$

Okruh $(M, \oplus, \odot)$ $\quad x = a \ominus b$ def. $x = a \ominus b = a \oplus (-b)$

Těleso $(M, \oplus, \odot)$ $\quad x = a \oslash b$, $b \neq 0$ def. $x = a \oslash b = a \odot \frac{1}{b}$