IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2022)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

KONSTRUKCE OBORU INTEGRITY CELÝCH ČÍSEL ($\mathbb{Z}$, +, .)

Na kartézském součinu $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ definujeme binární relaci $\sim$ (tzv.„ekvivalenci uspořádaných dvojic přirozených čísel“):

$$[a,b] \sim [c,d] \quad \Leftrightarrow \quad a + d = b + c$$

Tato relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní na množině $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ (dokažte).
Je tedy relací ekvivalence na $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ a vytváří rozklad množiny $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ na třídy navzájem ekvivalentních dvojic přirozených čísel.

Rozklad množiny $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ vytvořený relací $\sim$ nazýváme **množinou všech celých čísel**, ozn. $\mathbb{Z}$.
Třídy rozkladu nazýváme **celá čísla**.

Poznámka:
Celá čísla, tj. třídy rozkladu $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$, budeme označovat velkými tiskacími písmeny A, B, ..., nebo pomocí kterékoli dvojice, která do této třídy patří:

Např. $\mathbf{A} = [1\dot{,}2] = \{[0,1], [1,2], [2,3], \ldots, [10,11], \ldots\} = [0\dot{,}1] = \ldots$
Můžeme též psát $[1,2] \in \mathbf{A}$

Sčítání a násobení celých čísel:

Nechť celá čísla **A, B** jsou reprezentována uspořádanými dvojicemi [a,b], [c,d], tj.
$\mathbf{A} = [a\dot{,}b]$ a $\mathbf{B} = [c\dot{,}d]$. Pak

- součet celých čísel A, B definujeme: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a\dot{,}b] + [c\dot{,}d] = [a+c\dot{,}\, b+d]$

- součin celých čísel A, B definujeme: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [a\dot{,}b] \cdot [c\dot{,}d] = [ac+bd\dot{,}\, ad+bc]$

Součet ani součin celých čísel nezávisí na volbě reprezentantů.

Algebraická struktura ($\mathbb{Z}$, +, ·) **je obor integrity s jednotkovým prvkem**.

Vlastnosti ($\mathbb{Z}$, + , ·) :
+ : ND, A, K, ZR, EN, EI
· : ND, A, K, EN
· D +
neexistují vlastní dělitelé nulového prvku

Nulový prvek (neutrální prvek vzhledem ke sčítání): $\mathbf{O} = [x\dot{,}x] = [0\dot{,}0] = \{[0,0], [1,1], [2,2], \ldots\}$

Jednotkový prvek (neutrální prvek vzhledem k násobení): $\mathbf{J} = [x+1\dot{,}x] = [1\dot{,}0] = \{[1,0], [2,1], [3,2], \ldots\}$

Opačné číslo k celému číslu $\mathbf{A} = [a\dot{,}b]$: $-\mathbf{A} = [b\dot{,}a]$

Rozdíl A – B dvou celých čísel **A, B** je celé číslo **X**, pro které platí **A = B + X**.
Je-li $\mathbf{A} = [a\dot{,}b]$, $\mathbf{B} = [c\dot{,}d]$, je $\mathbf{X} = [a+d\dot{,}\, b+c]$.

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2022)
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

USPOŘÁDÁNÍ V MNOŽINĚ VŠECH CELÝCH ČÍSEL

Kladná a záporná celá čísla

Definice: Celé číslo A = $[\dot{a,b}]$ nazveme
a) **kladným** celým číslem, právě když $a > b$,
b) **záporným** celým číslem, právě když $a < b$.

Označíme: $\mathbb{Z}^+$ - množinu všech kladných celých čísel
$\mathbb{Z}^-$ - množinu všech záporných celých čísel

Věta 1.
Pro každé celé číslo **A** nastane právě jedna ze tří možností:
A je - kladné, tj. $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^+$
- záporné, tj. $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^-$
- nulové, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{O} = [\dot{0,0}]$.

Důkaz:
Tvrzení plyne z vlastnosti uspořádání přirozených čísel: Pro každá dvě přirozená čísla a, b nastane právě jedna ze tří možností: a > b, a = b, a < b.

Množiny $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$, $\{O\}$ tedy vytvářejí rozklad množiny $\mathbb{Z}$.

Věta 2.
a) Součet libovolných dvou kladných celých čísel je kladné celé číslo.
b) Součin libovolných dvou kladných celých čísel je kladné celé číslo.

Věta 3.
a) Je-li **A** kladné celé číslo, pak číslo opačné (**-A**) je záporné celé číslo.
b) Je-li **A** záporné celé číslo, pak číslo opačné (**-A**) je kladné celé číslo.

Pomocí vět 1. – 3. lze dokázat další vlastnosti kladných a záporných celých čísel.

Přirozené uspořádání množiny všech celých čísel – porovnávání celých čísel

Definice: Pro libovolná celá čísla A, B platí: $A > B \iff A - B \in \mathbf{C}^+$.

Tato relace je AS, T, SO, AR, tzn. je lineárním ostrým uspořádáním na množině **C.**
(důkaz viz učebnice s. 179)