IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2022)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.,

Ekvivalence množin, konečné a nekonečné množiny

Definice 1: Říkáme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Zapisujeme A ~ B.

Příklad 1. Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y, z}, C = {x, y}. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

Poznámka. Relace ~ dvou množin definovaná v libovolném systému množin $\mathcal{M}$ má vlastnosti: reflexivní, symetrická, tranzitivní. Relace ~ je tedy relací ekvivalence. Relace ekvivalence dvou množin v libovolném systému množin $\mathcal{M}$ vytváří rozklad systému $\mathcal{M}$ na třídy ekvivalentních množin.

Příklad 2. Je dán systém množin $\mathcal{M}$ = {A, B, C, D, E, F, G, H}, kde A = {a, b, c}, B = {1, 2},

C = {x, y}, D = {○, ○, ○, ○}, E = {Δ, Δ, Δ}, F = { *, *}, G = { □ }, H = {☺, ☺, ☺, ☺}. Rozhodněte, které množiny ze systému $\mathcal{M}$ jsou ekvivalentní.

Definice 2: Množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.

Definice 3: Množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.

Poznámka. Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když
$M \subset N \wedge M \neq N$.

KARDINÁLNÍ ČÍSLA

Definice 4: Třídu, do které patří množina **A** z neprázdného systému množin $\mathcal{M}$ a všechny množiny z tohoto systému, které jsou s množinou **A** ekvivalentní, nazveme **kardinální číslo množiny A**. Kardinální číslo množiny **A** budeme značit: |**A**|

Poznámka: Pro kardinální číslo množiny se užívá také pojmu mohutnost množiny.

Příklad 3. Je dán systém množin $\mathcal{M}$ = {A, B, C, D, E, F, G, H} z *Příkladu 2* výše. Určete kardinální čísla množin ze systému $\mathcal{M}$.

Řešení: V *Příkladu 2* relace ekvivalence množin rozložila zadaný systém množin na následující třídy:

T_1 = {A, E}, T_2 = {B, C, F}, T_3 = {D, H}, T_4 = {G}.

Třída T_1 je kardinálním číslem každé z množin A, E. Můžeme psát $T_1 = |A| = |E|$.

K označení třídy, tj. kardinálního čísla, si můžeme vybrat kteroukoli z množin patřících do této třídy. Každá z těchto množin dané kardinální číslo (danou třídu rozkladu) reprezentuje.

Třída T_2 je kardinálním číslem množin B, C, F, tedy $T_2 = |B| = |C| = |F|$. Dále $T_3 = |D| = |H|$, $T_4 = |G|$.

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2022)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.,

Důležité: Pro každé dvě množiny X, Y platí: Kardinální čísla množin X, Y se rovnají, právě když jsou množiny X, Y ekvivalentní. $\mathbf{|X| = |Y| \Leftrightarrow X \sim Y}$

Definice 4: Kardinální čísla konečných množin nazveme **přirozenými čísly**.

Poznámka: Kardinální číslo množiny L tedy nazveme „pět“ a označíme $|L| = 5$.

Z uvedených příkladů je zřejmé, že kardinální číslo konečné množiny vyjadřuje společnou vlastnost této množiny a všech množin, které mají stejně prvků jako tato množina, tj. jsou stejně početné.

Porovnávání kardinálních čísel

Definice 5: Jestliže $|A| \neq |B|$ a množina A je ekvivalentní s vlastní podmnožinou množiny B, říkáme, že kardinální číslo množiny A **je menší než** kardinální číslo množiny B, píšeme $\mathbf{|A| < |B|}$.

Poznámka: Z této definice vycházíme při porovnávání přirozených čísel.

Příklad 4: Uvažujme systém množin $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ z minulého příkladu:

Platí např. $|A| < |D|$, protože $|A| \neq |D|$ a A je ekvivalentní např. s množinou $D^* = \{○, ○, ○\}$, což je vlastní podmnožina množiny D.

$|A| < |D|$, protože $|D| \neq |A|$ a $A \sim D^*$, $D^* \subset D$, $D^* \neq D$, kde $D^* = \{○, ○, ○\}$.

Sčítání kardinálních čísel

V dalším textu budeme pracovat se systémem množin *M*, který obsahuje prázdnou množinu, jednoprvkovou množinu, s každými dvěma množinami A, B i jejich sjednoceni $A \cup B$ a jejich kartézský součin $A \times B$ a také s každými dvěma množinami A,B i množinu B^*, která je s množinou B ekvivalentní ($B \sim B^*$) a s množinou A disjunktní ($A \cap B = \emptyset$)

Definice 6: Jestliže pro množiny A, B ze systému množin $\mathcal{M}$ platí $A \cap B = \emptyset$, pak **součtem kardinálních čísel |A|, |B|** rozumíme kardinální číslo sjednocení množin A, B, tj. $\mathbf{|A| + |B| = |A \cup B|}$.

Příklad 5: Vypočtěte součet kardinálních čísel množin A, B, kde

a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, b) množin A, B, kde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, x\}$.

Řešení:

a) $A \cap B = \emptyset$, tedy $|A| + |B| = |A \cup B|$, tj. $|A| + |B| = |\{a, b, c, 1, 2\}|$
Srovnejte: $|A| = 3$, $|B| = 2$, $3 + 2 = 5 = |A \cup B|$.

b) $A \cap B \neq \emptyset$, množiny A, B mají společný prvek. K určení součtu kardinálních čísel si tedy musíme zvolit jiného reprezentanta jednoho z kardinálních čísel, např. místo množiny B zvolíme jinou množinu, která je s ní ekvivalentní (tedy také má stejné kardinální číslo s B) a která je současně s tou druhou množinou (tedy s A) disjunktní (nemá s ní společné prvky):
Např. zvolíme $C = \{p, q\}$. Platí $C \sim B$ a $A \cap C = \emptyset$.

Pak $|A| + |B| = |A| + |C| = |A \cup C|$, tj.

$$|\{a,b,c\}| + |\{a,x\}| = |\{a,b,c\}| + |\{p,q\}| = |\{a,b,c\} \cup \{p,q\}| = |\{a,b,c,p,q\}|.$$

Srovnejte: $|A| = 3$, $|B| = |C| = 2$, $3 + 2 = 5 = |A \cup C|$.

Násobení kardinálních čísel

Definice 7: **Součinem kardinálních čísel $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$** rozumíme kardinální číslo kartézského součinu množin A, B, tj. $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

Příklad 6: Vypočtěte součet kardinálních čísel množin A, B, kde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, x\}$.

Řešení:

$|A| \cdot |B| = |A \times B|$, tj. $|A| \cdot |B| = |\{[a,a], [a,x], [b,a], [b,x],[c,a], [c,x]\}|$

Srovnejte: $|A| = 3$, $|B| = 2$, $3 \cdot 2 = 6 = |A \times B|$.