**Opakování (předmět IMAk02)**

**Kartézský součin, binární relace**

* **Kartézským součinem** dvou množin A, B rozumíme množinu **A x B** = {[x,y]; xA  yB}, tj. množinu všech uspořádaných dvojic [x,y], kde xA a yB.
* **Binární relací R z množiny A do množiny B** rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu A x B.
* **Binární relací R** v neprázdné množině **A** rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu A x A.

*Příklad 1.* Na množině A = {0,1,2,3,4} jsou definovány binární relace R, S, T, U, V. Zapište je výčtem prvků:

R = {[x,y]  A x A; x > y}

S = {[x,y]  A x A; x + y = 5}

U = {[x,y]  A x A; x = y}

V = {[x,y]  A x A; x = y  x = 2.y}

* Nechť v A je definována relace R: Relaci R´ v množině M definovanou předpisem

**R´ = (A x A) - R** nazýváme **doplňkovou relací** k relaci R v množině A.

* Nechť v A je definována relace R: Relaci **R-1** = {[x,y]  A x A; {[y,x]  R} nazýváme **relací inverzní** k relaci R v množině A.

**Vlastnosti binárních relací v množině A**

Binární relace R v množině A je

* **reflexivní** právě tehdy, když (xA) ([x,x]R),

(obsahuje všechny uspořádané dvojice [x,x], kde xA, tj. v uzlovém grafu je každý uzel opatřen smyčkou)

* **antireflexivní** právě tehdy, když (xA) ([x,x]R),

(neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici typu [x,x], kde xA, tj. v uzlovém grafu není žádný uzel opatřen smyčkou)

* **symetrická** právě tehdy, když (x,yA) ([x,y]R  [y,x]R],

(s každou uspořádanou dvojicí [x,y] obsahuje i dvojici [y,x], tj. v uzlovém grafu jsou mezi dvěmi uzly buď dvě šipky nebo žádná)

* **antisymetrická**, právě tehdy, když (x,yA) [(xy  [x,y]R) [y,x]R],

(s žádnou dvojicí [x,y] různých prvků neobsahuje dvojici [y,x], tj. v uzlovém grafu je mezi dvěmi různými uzly buď jedna šipka nebo žádná)

* **tranzitivní** právě tehdy, když (x,y,zA) [([x,y]R  [y,z]R)  [x,z]R],

(jestliže se v relaci vyskytují „na sebe navazující dvojice“, pak musí relace obsahovat i dvojici, jejíž první složkou je 1. složka z první dvojice a druhou složkou je 2. složka z druhé dvojice).

* **souvislá** právě tehdy, když (x,yA) [xy  ([x,y]R  [y,x]R)],

(každé dva různé prvky z množiny A musí být „spolu v relaci“, tj. v uzlovém grafu jsou dva různé uzly spojeny alespoň jednou šipkou)

Binární relaci U v množině A nazýváme **uspořádání** v A, právě když U je **antisymetrická a tranzitivní.**

Binární relaci U v množině A nazýváme **uspořádání**

* **ostré** právě tehdy, když U je **antisymetrická, tranzitivní a antireflexivní**,
* **neostré** právě tehdy, když U je **antisymetrická, tranzitivní a reflexivní**.
* **lineární** právě tehdy, když U je **antisymetrická, tranzitivní a souvislá.**

Binární relaci R v množině M nazýváme **relací ekvivalence** na M**,** právě když je **reflexivní, symetrická a tranzitivní.**

Každá relace ekvivalence na množině M vytváří **rozklad** této množiny, což je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že průnik každých dvou tříd je prázdná množina a sjednocení všech tříd rozkladu tvoří množinu M.

Jinak lze také říci, že říci, že **rozklad** množiny M je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že každý prvek množiny M patří právě do jedné z těchto tříd.

*Příklad 2*. V množině M = {1,2,3} je deﬁnována binární relace

a) R1 = {[x,y]∈ M ×M;x < 3⇒ x+y = 3},

b) R2 = {[x,y]∈ M ×M;x = y ⇒ x = y},

c) R3 = {[x,y]∈ M ×M;x = y ⇒ x+y = 3},

d) R4 = {[x,y]∈ M ×M;x < y ⇔ x = y},

e) R5 = {[x,y]∈ M ×M;x = 2 ∨ y > x+2},

f) R6 = {[x,y]∈ M ×M;x < y ∧ x|y}.

Zapište tyto relace výčtem prvků, určete jejich kartézské a uzlové grafy,

určete jejich vlastnosti.

**Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení**

* Nechť **R** je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku a A existuje nejvýše jeden prvek b B takový, že [a,b]  **R.** Tato relace se nazývá **zobrazení z množiny A do množiny B.** Značíme R: A → B.

Nechť **R** je zobrazení z množiny A do množiny B.

* Jestliže [a,b]  **R**, pak prvek a A nazýváme **vzorem** prvku b B v zobrazení **R**; prvek b B nazýváme **obrazem** prvku a A v zobrazení **R**.
* Množina O1(**R**) = {a A: existuje b B takové, že [a,b]  **R**} se nazývá **definiční obor** zobrazení **R**. Platí O1(**R**)  A.
* Množina O2(**R**) = {b B: existuje a A takové, že [a,b]  **R**} se nazývá **obor hodnot** zobrazení **R**. O2(**R**)  B.

*Příklad 3.* Jsou dány množiny A = {x, y, z}, B = {a, b}. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B, případně určete definiční obor a obor hodnot zobrazení.

 a) **R1** = {[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]},

b) **R2** = {[x,a], [z,b]},

 c) **R3** = {[x,a], [y,a], [z,a]}.

Rozlišujeme následující **typy zobrazení R**:

I) Je – li O1(**R**) = A  O2(**R**)  B  O2(**R**) ≠ B, nazývá se **R zobrazení množiny A do množiny B**.

II) Je – li O1(**R**)  A  O1(**R**) ≠ A  O2(**R**) = B, nazývá se **R zobrazení z množiny A na množinu B**.

III) Je – li O1(**R**) = A  O2(**R**) = B, nazývá se **R zobrazení množiny A na množinu B**.

IV) Je – li O1(**R**)  A  O1(**R**) ≠ A  O2(**R**)  B  O2(**R**) ≠ B, nazývá se **R zobrazení z množiny A do množiny B**.

* Zobrazení **R** z množiny A do množiny B se nazývá **prosté** právě tehdy, když relace

**R-1** je zobrazení z množiny B do množiny A.

* Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme **bijektivní zobrazení** nebo také **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

*Příklad 4.* Jsou dány množiny A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:

 a) **R1** = {[1,a], [2,c], [3,d]},

b) **R2** = {[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]},

 c) **R3** = {[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]}.

**Ekvivalence množin, konečné a nekonečné množiny**

* Říkáme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Zapisujeme A ~ B.

*Příklad 5.* Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y, z}, C = {x, y}. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

*Poznámka.* Relace ~ dvou množin definovaná v libovolném systému množin M má vlastnosti: reflexivní, symetrická, tranzitivní. Relace ~ je tedy relací ekvivalence. Relace ekvivalence dvou množin v libovolném systému množin M vytváří rozklad systému M na třídy ekvivalentních množin.

*Příklad 6.* Je dán systém množin M = {A, B, C, D, E, F, G, H}, kde A = {a, b, c}, B = {1, 2}, C = {x, y}, D = {○, ○, ○, ○}, E = {∆, ∆, ∆}, F = { \*, \*}, G = { □ }, H = {☺, ☺, ☺, ☺}. Rozhodněte, které množiny ze systému M jsou ekvivalentní.

* Množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.
* Množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.

*Poznámka.* Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když

M  N  M ≠ N.

**Binární operace v množině (nová látka)**

* Nechť M je libovolná neprázdná množina. **Binární operací** **○** v množině M rozumíme zobrazení z množiny kartézského součinu M x M do množiny M.
* Jestliže v binární operaci je vzoru [*x,y*]  M x M přiřazen obraz *z*  M, píšeme:

 *x* ***○*** *y = z*; prvek *z*  M se nazývá **výsledek operace** **○**.

*Poznámka.* Označení binárních operací: +, **·**, **○**, **⁎**, **□**,..

 Příklady binárních operací ve školské matematice:

1. Sčítání (+), odčítání (**-**), násobení (**·**), dělení (**:**), umocňování,… (pracujeme s nimi v číselných množinách).
2. Sjednocení (), průnik (), rozdíl ( **-** ), symetrický rozdíl () množin,… (pracujeme s nimi v systémech množin).

**Vlastnosti binárních operací:**

Označení:

* ℕ - {1, 2, 3, 4, …} - množina všech přirozených čísel
* ℕ0 - {0, 1, 2, 3, 4, …} - množina všech přirozených čísel s nulou (množina všech nezáporných celých čísel)
* ℂ - {…, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …} - množina všech celých čísel
* ℚ - množina všech racionálních čísel (zlomky)
* ℝ - množina všech reálných čísel

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

* Binární operace **○** v množině M, která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici [*x,y*]  M x M, se nazývá operace **neomezeně definovaná** v množině M (zkráceně operace **definovaná** **na** množině M). Značíme **ND**.

 Symbolicky: $(∀ $*x, y*  M)($ ∃$ *z*  M)[ *x* ***○*** *y = z*].

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

* Binární operace **○** definovaná na množině M (je ND), se nazývá **komutativní** právě tehdy, když platí:

 $(∀ $*x, y*  M)[ *x* ***○*** *y = y* ***○*** *x*].

Značíme **K**.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

* Binární operace **○** definovaná na množině M, se nazývá **asociativní** právě tehdy, když platí:

 $(∀ $*x, y, z*  M)[ (*x* ***○*** *y*) **○** *z* = *x* **○** (*y* ***○*** *z*)].

Značíme **A**.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

* Nechť v množině M je definována binární operace **○**. Existuje-li prvek *e*  M, pro který platí:

 $ (∀ $*x*  M)[ *x* ***○*** *e = e* ***○*** *x = x*].

Pak se prvek *e*  M nazývá **neutrálním prvkem** množiny M vzhledem k operaci **○.**

Značíme **EN**.

*-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------*

* Nechť v množině M je definována binární operace **○** a nechť *e* je neutrální prvek množiny M vzhledem k operaci **○**. Prvek *ā*  M nazýváme **inverzním prvkem** k prvku *a*  M v operaci **○** v množině M právě tehdy, když platí:

 *ā* ***○*** *a = a* ***○*** *ā = e.*

Jestliže $(∀ $*a*  M)($ ∃$ *ā*  M)[ *ā* ***○*** *a = a* ***○*** *ā = e*], řekneme, že ke každému prvku množiny M existuje prvek inverzní vzhledem k operaci **○**. Značíme **EI**.

*-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------*

* Říkáme, že binární operace **○** definovaná na množině M má vlastnost **řešitelnost základních rovnic** právě tehdy, když platí:

 $(∀ $*a, b*  M) )($ ∃$ *x, y*  M)[ *a* ***○*** *x = b* ** *y* ***○*** *a = b*].

Značíme **ZR**.

**Algebraické struktury s jednou operací**

* Uspořádaná dvojice (M, ○), kde M je neprázdná množina, ve které je definována binární operace ○, se nazývá **algebraická struktura s jednou operací.**
1. Algebraická struktura (M, ○) se nazývá **grupoid** právě tehdy, když operace ○ je neomezeně definovaná v množině M (ND).
2. Grupoid (M, ○), jehož operace ○ je asociativní, se nazývá **podgrupa** (ND, A).
3. Pologrupa (M, ○) taková, že v M existuje neutrální prvek vzhledem k operaci (M, ○) a ke každému prvku *a*  M existuje prvek inverzní *ā*  M, se nazývá **grupa** (ND, A, EN, EI).

*Poznámka 6*. Jestliže v případech I., II., III. je operace **○** komutativní, pak hovoříme o

1. Komutativním grupoidu
2. Komutativní pologrupě
3. Komutativní grupě

Schéma k *Algebraickým strukturám s jednou operací*:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Vlastnost operace ○** | **Algebraická struktura** |
|  | ND | Grupoid |
|  | ND K | Komutativní grupoid |
|  (M, ○) | ND A | Pologrupa |
|  | ND A  K | Komutativní pologrupa |
|  | ND A  EN  EI  | Grupa |
|  | ND A  EN  EI  K | Komutativní grupa |

**Určení vlastností binárních operací podle tvaru operační tabulky**

Uvažujme binární operaci **○** v množině M zapsané pomocí operační tabulky, viz příklad:

*Příklad 1*: Je dána množina M = {a, b, c} a operace **○** v množině M daná tabulkou. Určete vlastnosti operace **○**.Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  **○** |  a |  b |  c |
|  a |  b |  c |  a |
|  b |  c |  c |  b |
|  c |  a |  b |  c |

 Vysvětlivky k tabulce: a **○** a = b

 b **○** c = b

 c **○** a = a

 Řešení: **ND ** K ** A ** EN ** EI ** ZR**

Pravidla pro určování vlastností operace v množině dané tabulkou:

**ND**: Tabulka je celá vyplněná prvky množiny M

**K**: Prvky tabulky, která je celá vyplněná prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle

 hlavní diagonály

**A**: Z tabulky obvykle nepoznáme - určujeme z definice nebo ze vztahu **A  (ZR EI)**

**EN**: Alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky

**EI**: Každý řádek i sloupec tabulky obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a

 sloupcích existují takové, že jsou souměrně rozloženy podle hlavní diagonály.

**ZR**: Každý řádek i sloupec obsahuje všechny prvky množiny M

**Agresivní prvek** *g*  M poznáme tak, že v celém jemu příslušejícím řádku i sloupci se vyskytuje pouze prvek *g*.

**Problém asociativity operace ○**

Vyjdeme ze vztahu **A  (ZR EI):**

1. Pokud nastane situace, že **EI ** ZR** nebo **EI ** ZR**, pak platí, že operace **○** není asociativní, tj. **A**
2. Pokud nastane situace, že **EI ** ZR** nebo **EI ** ZR**, pak asociativitu operace **○** nelze určit přímo, ale je potřeba využít *Definici 4* ověřením všech možných trojic prvků z dané množiny (zdlouhavé)

*Příklad 2*: Je dána množina M = {a, b, c} a operace **○** v množině M daná tabulkou. Určete vlastnosti operace **○**.Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Určete typ algebraické struktury (M, ○).

1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  **○** |  a |  b |  c |
|  a |  b |  a |  c |
|  b |  c |  b |  a |
|  c |  a |  c |  b |

2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  **○** |  a |  b |  c |
|  a |  c |  a |  a |
|  b |  a |  c |  b |
|  c |  a |  b |  c |

3.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  **○** |  a |  b |  c |
|  a |  c |  a |  a |
|  b |   |  c |  b |
|  c |  a |  b |  c |

**Algebraické struktury se dvěma operacemi**

* Na množiněM jsou definovány dvě binární operace ⨁ a ⨀. Operace ⨀ je **distributivní vzhledem k operaci** ⨁ právě tehdy, když platí

 $ (∀ $*x, y, z*  M)[ (*x* ⨁ *y*) ⨀ *z* = (*x* ⨀ *z*) ⨁ (*y* ⨀*z*)] … pravý distributivní zákon (PDZ)

**

 [*z*⨀ (*x* ⨁ *y*) = (*z* ⨀ *x*)⨁(*z* ⨀*y*)] … levý distributivní zákon (LDZ).

Značíme **⨀D ⨁.**

Nechť M je neprázdná množina, ve které jsou definovány dvě operace ⨁ a ⨀.

* Algebraická struktura (M,⨁ , ⨀ ) se nazývá **polookruh** právě tehdy, když:
1. Operace ⨁ je ND ** A ** K
2. Operace ⨀ je ND ** A
3. Platí ⨀ D ⨁
* Je-li operace ⨁ navíc K, pak polookruh (M, ⨁, ⨀) nazýváme **komutativní polookruh**.
* Pologrupu (M, ⨁ ) nazýváme **aditivní pologrupa**.
* Pologrupu (M,⨀) nazýváme **multiplikativní pologrupa**.
* Polookruh (M,⨁ , ⨀ ), jehož aditivní pologrupa (M,⨁) je komutativní grupou, se nazývá **okruh.**
* Je-li operace ⨀ navíc K, pak okruh (M,⨁ , ⨀ ), nazýváme **komutativní okruh.**
* Nechť (M,⨁ , ⨀) je okruh. Prvky *a* ≠ 0, *b ≠*  0, *a, b*  M, pro které platí *a* ⨀ *b* = 0, se nazývají **dělitelé nuly** okruhu (M,⨁ , ⨀ ).
* Komutativní okruh (M,⨁ , ⨀ ), ve kterém neexistují dělitelé nuly, se nazývá **obor integrity**.
* Okruh (M,⨁ , ⨀ ), pro který platí, že (M – {0},⨀ ) je grupa, se nazývá těleso.
* Je-li operace · navíc K, pak těleso (M,⨁ , ⨀ ).nazýváme **komutativní těleso.**

*Poznámka*: Uvažujeme polookruh (M,⨁ , ⨀ ):

* Operace ⨁se nazývá **sčítání.** V zápise

*a* ⨁ *b = c*

nazýváme prvky *a, b* **sčítanci,** prvek *c* nazýváme **součet** prvků *a, b*.

Neutrální prvek nazýváme **nulový prvek**, značíme 0. Pokud k prvku *a* existuje prvek inverzní, nazýváme jej **opačný prvek** k prvku *a*, značíme *– a*. Existuje-li prvek *x*, pro který platí

*b* ⨁ *x = a,* nazýváme jej **rozdíl** prvků *a, b*  a zapisujeme

*x = a* ⊝  *b.*

V tomto zápise prvek *a* nazýváme **menšenec**, prvek *b* nazýváme **menšitel**. Pokud existuje prvek ⊝*b*, pak platí *x = a* ⊝ *b = a* ⨁ *(*⊝ *b).* Operace ⊝ se nazývá **odčítání**.

* Operace ⨀se nazývá **násobení.** V zápise

*a* ⨀  *b = c*

nazýváme prvek *a,* resp*. b*  **1. činitel**, resp. **2. činitel**, prvek *c* nazýváme **součin** prvků *a, b*. Neutrální prvek nazýváme **jednotkový prvek**, značíme 1. Pokud k prvku *a* existuje prvek inverzní, nazýváme jej **převrácený prvek** k prvku *a*, značíme $\frac{1}{a}$nebo též *a -1*. Existuje-li pro prvky *a, b ≠ 0*  prvek *x*, pro který platí *b* ⨀ *x = a,* nazýváme jej **podíl** prvků *a, b*  a zapisujeme

*x = a* ⨸ *b* nebo taky  *x =* $\frac{a}{b}$*.*

V tomto zápise prvek *a* nazýváme **dělenec** (**čitatel**), prvek *b* nazýváme **menšitel** (**jmenovatel**). Pokud existuje prvek $\frac{1}{b}$, resp. *b -1*, pak platí

*x = a* ⨸ *b =* $\frac{a}{b}$ *= a* ⨀ $\frac{1}{b}$ *= a* ⨀ *b -1* *.* Operace ⨸ se nazývá **dělení**.

|  |
| --- |
| Podíl prvků pro *b = 0* nedefinujeme, neboť: 1. v případě, že *a = 0*, je řešením rovnice 0 ⨀ *x* = 0 každý prvek množiny M. 2. v případě, že a *≠ 0,* rovnice  0 ⨀ *x* = *a* nemá řešení v množině M. Případ 1. vede k tomu, že by dělení nebylo operací! |

Schéma k *Algebraickým strukturám se dvěma operacemi*:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  **operace a vlastnosti** | **algebraická struktura** |
|  | ⨁ ND K A | ***Polookruh******(komutativní)*** |
| ⨀ ND (K) A |
| ⨀ D ⨁ |
| ⨁ ND K A  EN  EI | ***Okruh******(komutativní)*** |
|   | ⨀ ND (K) A |
|  | ⨀ D ⨁ |
|  | ⨁ ND K A  EN  EI  | ***Komutativní okruh bez dělitelů nuly = Obor integrity***  |
| (M, ⨁ , ⨀ ) | ⨀ ND K A |
|  | ⨀ D ⨁ |
|  | Neexistují  *a* ≠ 0, *b ≠*  0, *a, b*  M, pro které platí *a* ⨀ *b* = 0. |
|  | ⨁ ND K A  EN  EI | ***Těleso (komutativní)*** |
|  | ⨀ ND (K) A |
|  | ⨀ D ⨁ |
|  | (M – {0},⨀ ) je grupa, tj. na množině M – {0} je operace ⨀ ND A  EN  EI |

**Příklady algebraických struktur číselných množin se dvěmi operacemi**

*Příklad:* Uvažujme binární operace obyčejné sčítání + a obyčejné násobení · v číselných množinách:

1. (ℕ, +, · ) **komutativní polookruh s jednotkovým prvkem**

 + … ND **  K ** A ** EN **  EI

 · … ND **  K ** A ** EN **  EI

 e = 1

 ·D **+**

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

2. (ℕ0, +, · ) **komutativní polookruh s nulovým** (e = 0) **a jednotkovým prvkem** (e = 1)

 + … ND **  K ** A ** EN **  EI

 e = 0

 · … ND **  K ** A ** EN **  EI

 e = 1

 ·D **+**

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

3. (ℂ, +, · ) **komutativní okruh bez dělitelů nuly = obor integrity**

 + … ND **  K ** A ** EN **  EI

 e = 0

 · … ND **  K ** A ** EN **  EI

 e = 1

 ·D **+**

 V množině ℂ neexistují dělitelé nuly.

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

4. (ℚ, +, · ), (ℝ, +, · ) **komutativní těleso**

 + … ND **  K ** A ** EN **  EI

 e = 0

 · … ND **  K ** A ** EN **  EI

 e = 1

 ·D **+**

 (ℚ – {0},· ), (ℝ – {0},· ) komutativní grupa, tzn. na množině ℚ – {0} a na množině

ℝ – {0} má operace · vlastnosti: ND **  K ** A ** EN **  EI