Domácí úkol 1 – řešení

1. Je dán systém $S: A\cdot\vec{x}=\vec{b}$ lineárních rovnic

$$-4x_1+5x_2+3x_3=7$$
$$x_2+4x_3=-2$$
$$-2x_1+x_2-x_3=3$$

kde A je matice systému S, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ je vektor neznámých a $\vec{b}$ vektor pravých stran rovnic systému.

1. Ověřte platnost $|A|\neq 0$, čímž zjistíte, zda systém lze řešit Cramerovým pravidlem.

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot1\cdot(-1)+0\cdot1\cdot3+(-2)\cdot5\cdot4-(-2)\cdot1\cdot3-0\cdot5\cdot(-1)-(-4)\cdot1\cdot4=$$

$$=4+0-40+6-0+16=\underline{\underline{-14}}$$

2. Následně vypočtěte determinanty matic A_i $(i\in\{1,2,3\})$ vzniklých dosazením vektoru $\vec{b}$ místo i-tého sloupce matice A_i.

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=7\cdot1\cdot(-1)+(-2)\cdot1\cdot3+3\cdot5\cdot4-3\cdot1\cdot3-(-2)\cdot5\cdot(-1)-7\cdot1\cdot4=$$

$$=-7-6+60-9-10-28=\underline{\underline{0}}$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(-4)\cdot(-2)\cdot(-1)+0\cdot3\cdot3+(-2)\cdot7\cdot4-(-2)(-2)3-0\cdot7\cdot(-1)-(-4)\cdot3\cdot4=$$

$$=-8+0-56-12-0+48=\underline{\underline{-28}}$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=(-4)\cdot1\cdot3+0\cdot1\cdot7+(-2)\cdot5\cdot(-2)-(-2)\cdot1\cdot7-0\cdot5\cdot3-(-4)\cdot1\cdot(-2)=$$

$$=-12+0+20+14-0-8=\underline{\underline{14}}$$

3. Na závěr stanovte řešení pomocí Cramerova pravidla.

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}\qquad x_2=\frac{|A_2|}{|A|}\qquad x_3=\frac{|A_3|}{|A|}$$

$$\underline{\underline{x_1=0}}\qquad \underline{\underline{x_2=2}}\qquad \underline{\underline{x_3=-1}}$$

② Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & -1 \\ -3 & -6 & -5 & 8 \\ 2 & 6 & 10 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a permutace $p = (j_1, j_2, j_3, j_4) = (3, 4, 1, 2)$ konečné množiny $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. Určete počet inverzí v permutaci p.

Všech dvojic tvořených prvky čtyřprvkové množiny je 6, vypíšeme si je a u každé ověříme, zda došlo k inverzi.

(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
×	✓	✓	✓	✓	×

$$\underline{\underline{N(p) = 4}}$$

2. Jakou hodnotu by měl při výpočtu determinantu matice A součin $(-1)^{N(p)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot a_{4j_4}$, pokud bychom použili vzorec z definice determinantu?

$$(-1)^{N(p)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot a_{4j_4} = (-1)^4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{\underline{160}}$$

3. Vypočítejte determinant matice A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 & -1 \\ -3 & -6 & -5 & 8 \\ 2 & 6 & 10 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +6r_1 \\ = \\ -6r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 & -1 \\ -3 & 0 & 25 & 2 \\ 2 & 0 & -20 & 5 \\ 1 & 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 25 & 2 \\ 2 & -20 & 5 \\ 1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot [(-3) \cdot (-20) \cdot 0 + 2 \cdot (-8) \cdot 2 + 1 \cdot 25 \cdot 5 -$$

$$- 1 \cdot (-20) \cdot 2 - 2 \cdot 25 \cdot 0 - (-3) \cdot (-8) \cdot 5] = -1[0 - 32 + 125 + 40 - 0 - 120] = \underline{\underline{-13}}$$

(3) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů:

$$\vec{a} = (4, -2, 0, 2)$$
$$\vec{b} = (-2, 1, 0, -1)$$
$$\vec{c} = (12, -6, 0, 6)$$
$$\vec{d} = (2, -1, 0, 1)$$

1. Určete dimenzi podprostoru W.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 12 & -6 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (+2\bar{r}_1) \\ (+6\bar{r}_1) \\ (+\bar{r}_1) \end{array} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\dim W = 1}}$$

2. Vaším dalším úkolem je nalézt bázi α_W podprostoru W. Předpokládejme, že $\vec{a} \in \alpha_W$. Vyberte další vektory, které patří do báze α_W.

Žádný další vektor do báze α_W nepřidáme, protože podprostor W má dimenzi 1. Pokud by měl podprostor vyšší dimenzi, doplnili bychom do báze vektory odpovídající nenulovým řádkům matice z 1. upravené na schodovitý tvar.

④ Je dána množina vektorů $M = \{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$

$\vec{u} = (-3, -2, -4)$

$\vec{v} = (-2, 0, 2)$

$\vec{w} = (-5, 1, -5)$

Ověřte, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Následně nalezněte souřadnice vektoru $\vec{x} = (6, -6, 0)$ v bázi $\alpha = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \\ -5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$$

Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ díky své lineární nezávislosti.

Nyní hledáme souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi α, tedy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vyhovující

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{u} + \alpha_2 \cdot \vec{v} + \alpha_3 \cdot \vec{w}$$

Po rozepsání získáváme

$$6 = \alpha_1 \cdot (-3) + \alpha_2 \cdot (-2) + \alpha_3 \cdot (-5)$$
$$-6 = \alpha_1 \cdot (-2) + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1$$
$$0 = \alpha_1 \cdot (-4) + \alpha_2 \cdot (2) + \alpha_3 \cdot (-5)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \\ -4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & -5 & 6 \\ -4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -4 & -13 & 30 \\ 0 & 2 & -7 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -7 & 12 \\ 0 & -4 & -13 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 27 & 54 \end{array}\right)$$

$27\alpha_3 = 54$

$\alpha_3 = 2$

$2\alpha_2 - 7\alpha_3 = 12$

$2\alpha_2 - 14 = 12$

$\alpha_2 = 13$

$-2\alpha_1 + \alpha_3 = -6$

$-2\alpha_1 + 2 = -6$

$\alpha_1 = 4$

$$\underline{\underline{\vec{x}_\alpha = (4;\ 13;\ 2)}}$$