# MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky


# Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení na různých stupních škol

*Bakalářská práce*

Brno 2022


Vedoucí práce: Mgr. Irena Budínová, Ph.D.

Autor práce: Andrea Danešová

## Bibliografický záznam

Danešová, A. (2022). *Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení na různých stupních škol*. Brno: Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky. 71 s. Vedoucí práce: Mgr. Irena Budínová, Ph.D.

# Anotace

Bakalářská práce se zabývá soustavami lineárních algebraických rovnic s důrazem na představení různých metod jejich řešení. První část shrnuje teoretické poznatky o maticích, determinantech a soustavách lineárních algebraických rovnic. Druhá, stěžejní část se věnuje popisu metod používaných k řešení soustav na základních, středních a vysokých školách. Všechny metody jsou demonstrovány na řešených příkladech.

# Klíčová slova

soustava lineárních rovnic, matice, determinant, řešení soustavy

# Annotation

This bachelor thesis focuses on systems of linear algebraic equations with emphasis on introducing various solving processes. The first part summarizes theoretical knowledge about matrices, determinants and systems of linear algebraic equations. The second and pivotal part describes algorithms for solving the systems at lower and upper secondary schools and universities. All the algorithms are demonstrated on solved problems.


# Keywords

system of linear equations, matrix, determinant, solution of a linear system

## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení na různých stupních škol zpracovala samostatně, s využitím pouze citovaných pramenů, dalších informací a zdrojů v souladu s Disciplinárním řádem pro studenty Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity a se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů.

V Brně dne 20. dubna 2022 …………………

Andrea Danešová

## Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala Mgr. Ireně Budínové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, příjemnou spolupráci a vstřícnost při tvorbě bakalářské práce.

# Obsah

Úvod ..... 8
1. Matice ..... 10
1.1 Základní pojmy ..... 10
1.2 Speciální druhy matic ..... 11
1.3 Základní operace s maticemi ..... 11
1.4 Hodnost matice a elementární úpravy matice ..... 13
1.5 Inverzní matice ..... 14
2. Determinanty ..... 18
2.1 Pořadí a permutace ..... 18
2.2 Determinanty a jejich vlastnosti ..... 19
2.3 Výpočet inverzní matice pomocí determinantu ..... 25
3. Soustavy lineárních rovnic ..... 27
3.1 Ekvivalentní úpravy soustav lineárních rovnic ..... 28
3.2 Řešitelnost soustav lineárních rovnic ..... 29
4. Řešení soustav lineárních rovnic na základní škole ..... 32
4.1 Soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými ..... 32
4.2 Metoda dosazovací ..... 32
4.3 Metoda sčítací ..... 36
4.4 Metoda porovnávací ..... 38
4.5 Grafické řešení ..... 39
4.6 Slovní úlohy ..... 43
5. Řešení soustav lineárních rovnic na střední škole ..... 49
5.1 Soustavy tří lineárních rovnic se třemi neznámými ..... 49
5.2 Gaussova eliminační metoda ..... 54
6. Řešení soustav lineárních rovnic na vysoké škole ..... 60
6.1 Gaussova a Jordanova eliminační metoda ..... 60
6.2 Cramerovo pravidlo ..... 62
6.3 Řešení soustav pomocí inverzní matice ..... 66
Závěr ..... 68
Použitá literatura ..... 69
Seznam obrázků ..... 71

# Úvod

Bakalářská práce se věnuje soustavám lineárních algebraických rovnic a metodám jejich řešení. Jedná se o důležité téma, jelikož se prolíná téměř všemi stupni škol a o schopnost řešit soustavy lineárních rovnic se opírají i další oblasti matematiky. S řešením těchto soustav se můžeme setkat i v různých situacích běžného života a v oborech jako jsou ekonomie, chemie a fyzika. Zájem autorky o téma je podmíněn přáním okusit profesi učitele jak na druhém stupni základní školy, tak na střední škole, přičemž řešení soustav lineárních rovnic je součástí učiva na obou těchto stupních.

Hlavním zaměřením práce je popis možných způsobů řešení soustav lineárních algebraických rovnic, tak jak jsou probírány na jednotlivých stupních škol. Cílem práce je tedy poskytnout ucelený přehled metod, které se používají k řešení soustav lineárních algebraických rovnic na základních, středních a vysokých školách.

První část práce obsahuje tři kapitoly shrnující teoretické poznatky nejen o soustavách lineárních rovnic, ale také o maticích a determinantech. Soustavy lineárních rovnic jsou s maticemi neoddělitelně svázány, proto je jim v práci věnována značná pozornost. Kapitola o determinantech je zařazena zejména z důvodu jejich použití v rámci jedné popisované metody řešení soustav a také možnosti využití pro určení počtu řešení soustav.

Druhá část práce se skládá ze tří kapitol a popisuje různé metody používané k řešení soustav lineárních rovnic. Možných způsobů řešení je mnoho, práce se věnuje těm, které jsou běžně vyučovány na jednotlivých stupních škol. Čtvrtá kapitola popisuje metody, které se žáci učí používat na druhém stupni základních škol, pátá kapitola metody vyučované na středních školách. Tyto kapitoly jsou psány tak, aby jim porozuměli a mohli je použít jako studijní materiál žáci těchto stupňů škol. Z důvodu možného využití jako studijní materiál je v rámci kapitoly o řešení soustav na základních školách zařazena i podkapitola o slovních úlohách řešených pomocí soustav lineárních rovnic. Šestá kapitola popisuje metody řešení soustav, které jsou probírány na vysokých školách. Tato kapitola se ve velké míře opírá právě o poznatky uvedené v prvních třech teoretických kapitolách.

Práce může být využita jako studijní materiál studenty, kteří se chtějí věnovat studiu matic, determinantů a soustav, zejména však těm, kteří mají zájem naučit se, zopakovat si nebo pořádně porozumět různým metodám řešení soustav lineárních rovnic.

# 1. Matice

První tři kapitoly shrnují teoretické poznatky o maticích, determinantech a soustavách lineárních algebraických rovnic. Dále již budeme používat pouze označení soustavy lineárních rovnic, ovšem po celou dobu budeme mít na mysli lineární algebraické rovnice. Vycházíme zejména z publikací Lineární algebra (Bečvář, 2005), Lineární algebra a geometrie (Bican, 2009) a Lineární algebra. Učební text (Horák & Janyška, 2022). Dále jsou poznatky čerpány z Úvodu do algebry, zejména lineární (Olšák, 2013) a publikace Matematika – lineární algebra (Černá, 2007). Kompletní seznam literatury je uveden na konci práce.

## 1.1 Základní pojmy

**Definice 1.1:** *Maticí typu* $m \times n$ nad tělesem $T$, kde $m, n$ jsou přirozená čísla, rozumíme obdélníkové schéma tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in T$ pro každé $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$. Čísla $a_{ij}$ se nazývají prvky matice $A$, které leží v jejím $i$-tém řádku a $j$-tém sloupci. Matici můžeme také označovat $A = (a_{ij})_{m \times n}$ nebo jen $A = (a_{ij})$.

Jestliže $m \neq n$, pak hovoříme o *obdélníkové matici*. Jestliže $m = n$, pak se jedná o *matici čtvercovou*. O čtvercové matici, která má $n$ řádků a $n$ sloupců pak říkáme, že je to matice řádu nebo též stupně $n$.

Matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ se rovnají, jsou-li stejného typu $m \times n$, tedy mají stejný počet řádků a sloupců, a jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$.

Prvky matice $A$ typu $m \times n$ $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{kk}$, kde $k = \min(m, n)$ tvoří *hlavní diagonálu* matice. Prvky čtvercové matice $A$ řádu $n$ $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}$ tvoří *vedlejší diagonálu* matice.

## 1.2 Speciální druhy matic

**Definice 1.2:** Matice $A$, která se sestává ze samých nul, tj. $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$, se nazývá *nulová matice*.

**Definice 1.3:** Matice $A$, jejíž všechny prvky, které neleží na hlavní diagonále, jsou rovny nule, se nazývá *diagonální matice*.

**Definice 1.4:** Čtvercová matice $A$, jejíž všechny prvky ležící na hlavní diagonále jsou rovny jedné a všechny ostatní prvky jsou rovny nule, se nazývá *jednotková matice*. Jednotkovou matici označujeme $E$.

**Definice 1.5**: Matice $A$ je ve *schodovitém tvaru*, jestliže každý její nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek předcházející. Všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou tedy rovny nule. Takovéto matici se říká také *horní trojúhelníková matice*.

**Definice 1.6:** Matice $A$ se nazývá *dolní trojúhelníková matice*, jestliže má nad hlavní diagonálou samé nuly.

**Definice 1.7:** Matice, která vznikne z matice $A$ vzájemnou výměnou řádků za sloupce, se nazývá *transponovaná matice* k matici $A$. Transponovanou matici označujeme $A^T$.

**Definice 1.8:** Čtvercová matice $A$ se nazývá *symetrická*, jestliže $A = A^T$.

**Definice 1.9:** Čtvercová matice $A$ se nazývá *antisymetrická*, jestliže $A = -A^T$.

## 1.3 Základní operace s maticemi

V této kapitole popíšeme základní operace s maticemi. Nejprve definujme součet a rozdíl matic, které je možné provádět pouze s maticemi stejného typu. Operace provádíme po složkách.

**Definice 1.10:** Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou matice stejného typu $m \times n$ nad tělesem $T$. *Součtem matic* $A$ a $B$ rozumíme matici $C = (c_{ij})$ téhož typu $m \times n$, pro kterou platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$.

*Rozdílem matic* $A$ a $B$ rozumíme matici $D = (d_{ij})$ téhož typu $m \times n$, pro kterou platí $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$.

**Příklad 1.1**: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 1+0 \\ 0+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} 3-1 & 1-0 \\ 0-2 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dále můžeme definovat násobení matice libovolným reálným číslem.

**Definice 1.11:** Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a $k$ je libovolné reálné číslo. *Násobením matice A číslem* $k$ získáme matici $B = (b_{ij})$, pro kterou platí $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$.

**Příklad 1.2:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Poslední operací je součin matic, který je možné provádět pouze s maticemi specifického typu, a to takovými, že první matice má stejný počet sloupců jako druhá matice řádků.

**Definice 1.12:** Nechť $A = (a_{is})$ je matice typu $m \times n$ a $B = \left(b_{sj}\right)$ je matice typu $n \times p$ nad tělesem $T$. *Součinem matic* $A$ a $B$ rozumíme matici $C = \left(c_{ij}\right)$ typu $m \times p$, kde $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, p$.

**Příklad 1.3:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 4 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

**Věta 1.1:** Pro sčítání a násobení matic platí následující vlastnosti:

1. Sčítání matic je asociativní a komutativní.
2. Násobení matic je asociativní.
3. Násobení matic není komutativní.
4. Násobení matic je distributivní vzhledem ke sčítání.

*Důkaz:*

1. Nechť $A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right), C = (c_{ij})$ jsou matice stejného typu, pak platí: $(A + B) + C = A + (B + C)$ a $A + B = B + A$. Tyto vlastnosti vyplývají

z asociativního a komutativního zákona pro operaci sčítání v tělese $T$. Prvky na místě $ij$ v maticích v první rovnosti jsou rovny: $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} +$ $+ (b_{ij} + c_{ij})$ a v druhé rovnosti: $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$.

2. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $B = (b_{jr})$ je matice typu $n \times p$ a $C = (c_{rs})$ je matice typu $p \times q$. Pak typ matice $A \cdot B$ je $m \times p$ a typ matice $(A \cdot B) \cdot C$ je $m \times q$. Typ matice $B \cdot C$ je $n \times q$ a potom typ matice $A \cdot (B \cdot C)$ je $m \times q$. Matice $(A \cdot B) \cdot C$ a $A \cdot (B \cdot C)$ jsou tedy stejného typu, musíme ještě dokázat, že jejich prvky na týchž pozicích jsou si rovny. Matice $(A \cdot B) \cdot C$ má na místě $is$ prvek $\sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr}\right) c_{rs}$ a matice $A \cdot (B \cdot C)$ má na místě $is$ prvek $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{r=1}^{p} b_{jr} c_{rs}\right)$. Podle distributivního zákona pro operace sčítání a násobení v tělese $T$ platí: $\sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr}\right) c_{rs} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{r=1}^{p} b_{jr} c_{rs}\right)$. Dohromady tedy $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

3. Např. pro matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ je $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ a $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, obecně tedy $A \cdot B \neq B \cdot A$. Existují ovšem matice, pro které se oba součiny rovnají, takové matice nazýváme *záměnné* nebo *komutující*.

4. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $B = (b_{jr})$ je matice typu $n \times p$ a $C = (c_{jr})$ je matice typu $n \times p$. Prvek $d_{ir}$ matice $A \cdot (B + C)$ na místě $ir$ je roven $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (b_{jr} + c_{jr}) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} b_{jr} + a_{ij} c_{jr}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jr}$. Přičemž $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jr}$ je rovno také prvku matice $A \cdot B + A \cdot C$ na místě $ir$. Tedy platí rovnost: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. ■

**Věta 1.2:** Nechť $E$ je jednotková matice řádu $n$, pak pro každou matici $A$ typu $n \times m$ platí $E \cdot A = A$ a pro každou matici $B$ typu $m \times n$ platí $B \cdot E = B$.

Tato vlastnost plyne přímo z definic jednotkové matice a součinu matic.

## 1.4 Hodnost matice a elementární úpravy matice

Důležitým pojmem, souvisejícím s maticemi, je jejich hodnost. Na definici se dá nahlížet z více pohledů, pro účely této práce se nejvíce hodí tato:

**Definice 1.13:** *Hodnost matice* $A$ je takové číslo, které udává největší počet lineárně nezávislých řádků matice. Hodnost matice $A$ označujeme $h(A)$ nebo též $hod(A)$.

Řádky $r_1, \dots, r_k$ matice $A$ jsou lineárně nezávislé, pokud žádný z nich není možné vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních řádků. Přičemž řádek je lineární kombinací ostatních řádků, pokud existují $c_1, \dots, c_k \in T$ takové, že $r_i = c_1 r_1 + \cdots + c_{i-1} r_{i-1} + c_{i+1} r_{i+1} + + \cdots + c_k r_k$. V opačném případě se jedná o lineárně závislé řádky.

**Poznámka**: Hodnost matice lze definovat také jako největší počet jejích lineárně nezávislých sloupců. Počet lineárně nezávislých řádků a lineárně nezávislých sloupců matice je tedy stejný.

Chceme-li určit hodnost matice, převedeme ji do schodovitého tvaru pomocí elementárních řádkových úprav, které nemění hodnost matice. Hodnost matice je pak rovna počtu nenulových řádků matice ve schodovitém tvaru.

**Definice 1.14:** *Elementárními řádkovými úpravami* matice $A$ nad tělesem $T$ se rozumí následující úpravy:

1. libovolná záměna pořadí řádků,
2. vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem z $T$,
3. přičtení jednoho řádku vynásobeného libovolným číslem z $T$ k jinému řádku.

**Poznámka:** Tytéž úpravy lze provádět také se sloupci matice $A$, pak hovoříme o elementárních sloupcových úpravách matice $A$.

**Definice 1.15**: Čtvercová matice $A$ řádu $n$ se nazývá *regulární*, pokud $h(A) = n$. Čtvercová matice $A$ řádu $n$ se nazývá *singulární*, pokud $h(A) < n$.

## 1.5 Inverzní matice

Později se v této práci budeme zabývat metodami, pomocí kterých se řeší soustavy lineárních rovnic. Jedna z metod, které představíme, využívá inverzní matici, proto tento pojem nyní definujeme a popíšeme, jakým způsobem inverzní matici nalezneme.

**Definice 1.16:** Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu $n$. *Inverzní maticí* k matici $A$ rozumíme matici $A^{-1}$, pro kterou platí: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

**Věta 1.3:** Pokud k matici $A$ existuje inverzní matice, pak je tato inverzní matice určena jednoznačně.

*Důkaz:* Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že k matici $A$ existují dvě inverzní matice $A_1^{-1}$ a $A_2^{-1}$, přičemž $A_1^{-1} \neq A_2^{-1}$. Z definice pro tyto matice platí: $A \cdot A_1^{-1} = = A_1^{-1} \cdot A = E$ a $A \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1} \cdot A = E$. Odtud $A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot E = {A_1}^{-1} \cdot (A \cdot A_2^{-1}) = = (A_1^{-1} \cdot A) \cdot A_2^{-1} = E \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1}$. Dostali jsme rovnost $A_1^{-1} = A_2^{-1}$, což je spor s původním tvrzením. ■

**Věta 1.4:** Ke čtvercové matici $A$ řádu $n$ existuje inverzní matice právě tehdy, když $h(A) = n$ (tedy právě tehdy, když $A$ je regulární matice).

Důkaz této věty vyžaduje znalosti o determinantech, proto jej na tomto místě nebudeme provádět, ovšem vrátíme se k němu v kapitole 2.3.

Na základě věty 1.4 můžeme vyslovit větu o součinu regulárních matic.

**Věta 1.5:** Nechť matice $A$ a $B$ jsou čtvercové regulární matice řádu $n$. Pak také matice $C = A \cdot B$ je regulární matice řádu $n$.

*Důkaz*: Matice $C$ je čtvercová matice řádu $n$, což plyne z definice součinu matic. V souladu s větou 1.4 existují k maticím $A$ a $B$ inverzní matice $A^{-1}$ a $B^{-1}$. Ukážeme, že k matici $C = A \cdot B$ existuje inverzní matice, která má tvar $B^{-1} \cdot A^{-1}$:

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E,$$

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E.$$

Matice tvaru $B^{-1} \cdot A^{-1}$ je skutečně inverzní maticí k matici $A \cdot B$. Na základě věty 1.4 je tedy matice $C = A \cdot B$ regulární. ■

K nalezení inverzní matice slouží metoda eliminace. Než metodu popíšeme, je potřeba objasnit, že všechny elementární řádkové úpravy matice $A$ je možné reprezentovat vynásobením matice zleva jistou regulární maticí. Tato skutečnost vychází z principu násobení matic. Matici $B_1$, která je shodná s maticí $A$, pouze má prohozený $i$-tý a $j$-tý řádek, získáme vynásobením matice $A$ zleva maticí $P_1$, která má podobu jednotkové matice, pouze má prohozený $i$-tý a $j$-tý řádek.

**Příklad 1.4:** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Matici $B_2$, která je shodná s maticí $A$, pouze má $i$-tý řádek vynásobený číslem $c$, získáme vynásobením matice $A$ zleva maticí $P_2$, která má podobu jednotkové matice, jen má $i$-tý řádek vynásobený číslem $c$.

**Příklad 1.5:** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matici $B_3$, která je shodná s maticí $A$, ovšem na místě $i$-tého řádku má jeho součet s $c$-násobkem $j$-tého řádku, získáme vynásobením matice $A$ zleva maticí $P_3$, která má podobu jednotkové matice, pouze má na $i$-tém řádku v $j$-tém sloupci číslo $c$.

**Příklad 1.6:** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**Věta 1.6:** Nechť matice $B$ vznikne z matice $A$ konečným počtem elementárních řádkových úprav (označujeme $A \sim B$). Pak existuje regulární čtvercová matice $P$ taková, že $B = P \cdot A$.

*Důkaz:* Výše jsme uvedli, že jednotlivé elementární řádkové úpravy matice lze reprezentovat vynásobením matice jistou regulární maticí zleva. Matice $B$ vznikla z matice $A$ po $k$ elementárních řádkových úpravách, proto existují regulární matice $P_1, P_2, \ldots, P_k$, takové, že $B = P_k \cdot \left(P_{k-1} \cdot \ldots \cdot \left(P_2 \cdot (P_1 \cdot A)\right) \ldots\right) = (P_k \cdot P_{k-1} \cdot \ldots \cdot P_2 \cdot \cdot\ P_1) \cdot A = P \cdot A$. Výsledná matice $P$ je regulární, jelikož všechny matice $P_1, \ldots, P_k$ jsou regulární a součinem regulárních matic je opět matice regulární. ■

**Poznámka:** Elementární sloupcové úpravy lze taktéž reprezentovat násobením matice jistou regulární maticí, a to násobením zprava. Větu 1.6 lze tedy přeformulovat takto: Nechť matice $B$ vznikne z matice $A$ konečným počtem elementárních sloupcových úprav. Pak existuje regulární čtvercová matice $Q$ taková, že $B = A \cdot Q$.

Nyní přistoupíme k větě, která popisuje vztah pro určení inverzní matice. Budeme pracovat s *rozšířenou maticí,* což je matice, kterou získáme, když vedle prvků jedné matice napíšeme prvky druhé matice se stejným počtem řádků a prvky obou matic oddělíme pro přehlednost svislou čárou. Rozšířenou matici vytvořenou z matic $A$ a $B$

označujeme jako $(A|B)$. Veškeré řádkové úpravy pak provádíme s touto maticí jako celkem.

**Věta 1.7:** Nechť $A$ je regulární matice a konečným počtem elementárních řádkových úprav rozšířené matice $(A|E)$ získáme matici $(E|B)$, pak $B = A^{-1}$.

*Důkaz:* Podle věty 1.6 existuje čtvercová matice $P$ taková, že $(E|B) = (P \cdot A|P \cdot E)$. Pro matici $P$ platí: $P \cdot A = E$. Matice $A$ je regulární, tudíž k ní dle věty 1.4 existuje inverzní matice $A^{-1}$. Vynásobením rovnice $P \cdot A = E$ touto inverzní maticí zprava dostaneme: $(P \cdot A) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1}$, pak $P \cdot (A \cdot A^{-1}) = A^{-1}$, tj. $P = A^{-1}$. Matice $P$ je tedy inverzní maticí k matici $A$. Matice $B$ je dána vztahem: $B = P \cdot E$, tedy $B = P$, proto je matice $B$ inverzní maticí k matici $A$. ■

Na základě věty 1.7 můžeme shrnout postup výpočtu inverzní matice $A^{-1}$ k regulární matici $A$. Do rozšířené matice napíšeme napravo od matice $A$ jednotkovou matici $E$ a pomocí elementárních řádkových úprav převedeme matici $(A|E)$ na matici, která má na levé straně matici $E$, tedy na $(E|B)$. Matice $B$, která vznikne na pravé straně rozšířené matice, je inverzní maticí k matici $A$.

# 2. Determinanty

Následující kapitola se zabývá determinanty. Než však přistoupíme k jejich definici a vlastnostem, vymezme nejprve pojmy pořadí a permutace.

## 2.1 Pořadí a permutace

**Definice 2.1:** Nechť $M = \{1, 2, \dots, n\}$ je konečná množina o $n$ prvcích. Pak libovolná uspořádaná $n$-tice utvořená ze všech prvků množiny $M$ se nazývá *pořadí* z $n$ prvků $1, 2, \dots, n$.

**Definice 2.2:** Nechť $R = (r_1, \dots, r_n)$ je libovolné pořadí. *Inverzí* v pořadí rozumíme každou dvojici přirozených čísel $r_i, r_j$ v pořadí $R$ takovou, pro kterou platí $i < j$ a současně $r_i > r_j$. Inverze v pořadí je tedy taková dvojice čísel, ve které větší číslo předchází menšímu.

Pořadí $R$ se nazývá *sudé*, jestliže celkový počet jeho inverzí je sudé číslo. Pořadí $R$ se nazývá *liché*, jestliže celkový počet jeho inverzí je liché číslo. Při rozhodování, zda je pořadí liché nebo sudé, určujeme *paritu pořadí*.

**Definice 2.3:** Nechť $M = \{1, 2, \dots, n\}$ je konečná množina o $n$ prvcích. *Permutací* množiny $M$ rozumíme bijektivní zobrazení $P$ množiny $M$ na sebe sama.

Permutaci $P$, definovanou předpisem $P(i) = j_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$, budeme zapisovat ve tvaru tabulky

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix},$$

kde horní i dolní řádek představují vždy nějaké pořadí z $n$ prvků. Permutaci lze uvést i v takovém tvaru, kde horní čísla nejsou uvedena vzestupně podle velikosti. Zápis, kde horní čísla uspořádána vzestupně jsou, nazýváme *základní tvar*.

Z kombinatoriky je známo, že celkový počet permutací $n$-prvkové množiny je $n!$. Množinu všech permutací $n$-prvkové množiny budeme značit $S_n$.

Permutace $P$ se nazývá *sudá*, jestliže součet počtu inverzí v horním a dolním řádku je sudé číslo. Permutace $P$ se nazývá *lichá*, jestliže součet počtu inverzí v horním a dolním řádku je liché číslo. V tomto případě hovoříme o *paritě* nebo též *znaménku permutace*.

Znaménko permutace budeme značit $sgn\ P$ a platí pro něj: $sgn\ P = (-1)^{in\ P}$, kde $in\ P$ představuje právě celkový počet inverzí v dané permutaci.

## 2.2 Determinanty a jejich vlastnosti

**Definice 2.4:** Nechť $A$ je čtvercová matice řádu $n$ nad tělesem $T$. *Determinantem* matice $A$ rozumíme prvek z $T$ definovaný vztahem

$$\det A = \sum_{P \in S_n} sgn\ P \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}.$$

Determinant matice $A$ se také označuje $|A|$ nebo $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Determinant matice $A$ je tedy součet $n!$ součinů přes všechny možné permutace na množině indexů $\{1, 2, \ldots, n\}$, přičemž v každém součinu vystupuje $n$ činitelů takových, že z každého řádku a každého sloupce matice $A$ je vybrán právě jeden prvek. Součin je opatřen kladným znaménkem v případě, kdy daná permutace řádkových a sloupcových indexů je sudá, nebo záporným v případě, kdy je daná permutace lichá.

Popišme nyní, jak vyčíslit determinanty jednotlivých řádů, přičemž řádem determinantu rozumíme řád příslušné matice, jejíž determinant počítáme.

Determinant řádu 1 získáváme okamžitě:

$\det A = |a_{11}| = a_{11}$.

Determinant řádu 2 získáme jako součin prvků na hlavní diagonále minus součin prvků na vedlejší diagonále. Tomuto postupu se říká *křížové pravidlo*. Tedy:

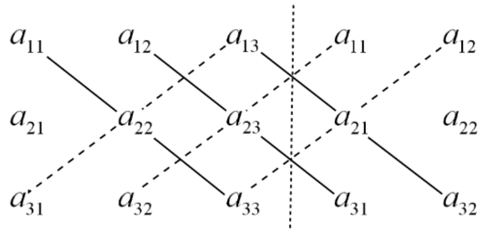
$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Determinant řádu 3 získáme z definice takto:

$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot$

$\cdot\ a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$.

Jednotlivé členy si není nutné pamatovat nazpaměť. Když první dva sloupce napíšeme za matici, pak determinant získáme jako součet součinů prvků spojených čarami na následujícím schématu:




*Obrázek 1: Sarrusovo pravidlo. Zdroj: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sarrus_rule.png.*

Součiny prvků ve směru hlavní diagonály budou opatřeny na základě počtu permutací kladným znaménkem a součiny prvků ve směru vedlejší diagonály budou opatřeny znaménkem záporným. Tomuto postupu pro výpočet determinantu matice řádu 3 se říká *Sarrusovo pravidlo*.

Determinanty vyšších řádů již nepočítáme přímo z definice, jelikož vypsat všechny členy by bylo velmi pracné. Pro zjednodušení výpočtu tedy využíváme vlastností determinantu či převodu na výpočet determinantů nižších řádů.

**Věta 2.1:** Nechť prvky $i$-tého řádku čtvercové matice $A$ řádu $n$ mají tvar: $a_{i1} = b_{i1} + c_{i1}$, $a_{i2} = b_{i2} + c_{i2}, \dots, a_{in} = b_{in} + c_{in}$ a nechť matice $B$, resp. $C$ vznikne z matice $A$ nahrazením jejího $i$-tého řádku řádkem $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}$, resp. $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}$. Potom pro determinant matice $A$ platí: $\det A = \det B + \det C$ .

*Důkaz*: Můžeme pro jednoduchost předpokládat, že první řádek matice $A$ lze vyjádřit jako $a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}$ pro každé $j = 1, \dots, n$. Potom:

$$\det A = \sum_{P \in S_n} sgn\, P \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{P \in S_n} sgn\, P \cdot (b_{1j_1} + c_{1j_1}) \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{P \in S_n} sgn\, P \cdot b_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} + \sum_{P \in S_n} sgn\, P \cdot c_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= \det B + \det C \,. \blacksquare$$

Tvrzení lze indukcí zobecnit na libovolný počet sčítanců.

**Věta 2.2**: Základní vlastnosti determinantu:

1. Determinant matice $A$ se jejím transponováním nezmění, tj. $\det A = \det A^T$.

   Jako důsledek této vlastnosti platí všechny následující vlastnosti formulované pro řádky také pro sloupce.

2. Nechť matice $B$ vznikne z matice $A$ vynásobením jednoho řádku číslem $c \in T$, potom $\det B = c \cdot \det A$.

3. Nechť matice $B$ vznikne z matice $A$ záměnou dvou libovolných řádků, potom $\det B = -\det A$.

4. Nechť se v matici $A$ jeden řádek sestává ze samých nul, potom je $\det A = 0$.

5. Nechť jsou v matici $A$ dva různé řádky shodné, potom je $\det A = 0$.

6. Nechť je v matici $A$ jeden řádek násobkem jiného řádku, potom je $\det A = 0$.

7. Nechť je v matici $A$ jeden řádek lineární kombinací ostatních řádků, potom je $\det A = 0$.

8. Nechť matice $B$ vznikne z matice $A$ přičtením k jednomu řádku libovolného násobku jiného řádku, pak se hodnota determinantu nezmění, tj. $\det B = \det A$.

9. Nechť matice $B$ vznikne z matice $A$ přičtením k nějakému řádku libovolné lineární kombinace ostatních řádků, pak se hodnota determinantu nezmění, tj. $\det B = \det A$.

10. Nechť je matice $A$ horní (dolní) trojúhelníková matice, potom je její determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále.

*Důkaz*:

1. Nechť $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ je libovolné pořadí z $n$ prvků. Pak z definice determinantu plyne, že součin $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$ se vyskytuje právě jednou v $\det A$, ale také v $\det A^T$. Tento součin bude v $\det A$ vynásoben číslem $(-1)^r$ a v $\det A^T$ číslem $(-1)^s$, kde $r$ značí celkový počet inverzí v permutaci $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$

a $s$ celkový počet inverzí v permutaci $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$. Zřejmě však $r = s$. Odtud už $\det A = \det A^T$.

2. Vynásobíme-li $i$-tý řádek matice $A$ prvkem $c \in T$ získáme matici, kterou označíme $B$. Potom:

$$\det B = \sum_{P \in S_n} sgn\, P \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot (c \cdot a_{ij_i}) \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= c \cdot \sum_{P \in S_n} sgn\, P \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{ij_i} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} = c \cdot \det A.$$

3. Zaměníme-li v matici $A$ $i$-tý a $j$-tý řádek, kde $i \neq j$, zůstanou součiny v $\det A$ a $\det B$ stejné, ovšem budou mít vždy opačné znaménko, jelikož záměna dvou různých řádků změní paritu permutace. Tedy $\det B = -\det A$.

4. Jestliže má matice $A$ nulový řádek, pak každý součin $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$ je roven nule, tedy $\det A = 0$.

5. Zaměníme-li v matici $A$ dva shodné řádky, matice $A$ se zřejmě nezmění. Na základě vlastnosti 3 však musí platit $\det A = -\det A$, což platí pouze v případě, kdy je $\det A = 0$.

6. Předpokládejme, že např. první řádek je $c$-násobkem druhého řádku, potom podle vlastností 2 a 5 platí: $\det(c \cdot r_2, r_2, \ldots, r_n) = c \cdot \det(r_2, r_2, \ldots, r_n) = 0$.

7. Determinant matice $A$ lze podle zobecnění věty 2.1 rozepsat jako součet determinantů, z nichž však každý obsahuje řádek, který je násobkem jiného řádku. Z vlastnosti 6 je každý z těchto determinantů roven nule, tedy i $\det A = 0$.

8. Předpokládejme, že např. k prvnímu řádku přičteme $c$-násobek druhého řádku, potom dle věty 2.1 a vlastností 2 a 5 platí: $\det(r_1 + c \cdot r_2, r_2, \ldots, r_n) =$ $= \det(r_1, r_2, \ldots, r_n) + c \cdot \det(r_2, r_2, \ldots, r_n) = \det(r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

9. Obdobně jako vlastnost 8 plyne z věty 2.1 (jejího zobecnění na více sčítanců) a vlastností 2 a 5.

10. Jestliže je matice $A$ horní (dolní) trojúhelníková matice, pak všechny součiny $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$ jsou rovny nule kromě součinu sestaveného z prvků na hlavní diagonále. Odtud tedy $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. ■

Zejména vlastnosti 8 a 9 lze využít pro zjednodušení výpočtu determinantu z definice. Matici upravíme na takový tvar, který obsahuje co největší počet nul, jelikož pak bude většina součinů v sumě nulových, či přímo na schodovitý tvar, ze kterého determinant získáme jako součin prvků na hlavní diagonále.

Druhou možností zjednodušení výpočtu determinantu řádu $n$ je, jak již bylo dříve naznačeno, převod na výpočet $n$ determinantů řádu $n-1$, což uvádí následující věta.

**Věta 2.3:** Věta o rozvoji determinantu: Nechť $A$ je čtvercová matice řádu $n$ $(n > 1)$. Pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij},$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \cdot \det A_{ji},$$

kde $A_{ij}$ je matice řádu $n-1$, která vznikne z matice $A$ vypuštěním jejího $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce.

Uvedený vztah se nazývá *Laplaceův rozvoj determinantu* podle $i$-tého řádku, resp. $i$-tého sloupce.

*Důkaz:* Plyne z definice determinantu a jeho vlastností. Platí:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dále platí:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i-1+j-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}.$$

Dohromady tedy $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$. Platnost druhé rovnosti pro rozvoj podle $i$-tého sloupce je dána vztahem $\det A = \det A^T$. ■

Dodejme, že prvek $(-1)^{i+j} A_{ij}$ z věty o rozvoji determinantu se nazývá *algebraický doplněk* prvku $a_{ij}$ a budeme jej značit $D_{ij}$. Determinant čtvercové matice $B$, která vznikne z matice $A$ vypuštěním libovolných řádků a sloupců, se nazývá *minor* nebo též *subdeterminant* matice $A$.

Také při výpočtu determinantu pomocí Laplaceova rozvoje se vyplatí nejprve matici upravit tak, aby jeden řádek nebo sloupec obsahoval co největší počet nul. Když pak provedeme Laplaceův rozvoj podle takového řádku nebo sloupce, můžeme počítat pouze algebraické doplňky prvků, které nejsou rovny nule.

## 2.3 Výpočet inverzní matice pomocí determinantu

Na závěr kapitoly o determinantech uvedeme druhý způsob, jak nalézt inverzní matici, a to právě pomocí determinantů. Nejprve však vyslovme větu o součinu determinantů.

**Věta 2.4:** Cauchyova věta o součinu determinantů: Nechť $A, B$ jsou čtvercové matice řádu $n$. Pak platí: $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$.

*Důkaz*: Matici $A$ lze elementárními řádkovými úpravami převést na matici $A'$, která je ve schodovitém tvaru. Převedení lze provést takovými úpravami, které nemění determinant podle vlastností ve větě 2.2 (případné prohození řádků sice mění znaménko determinantu, ovšem vynásobením řádku konstantou $-1$ se opět vrátíme na znaménko původní), bude tedy platit $\det A = \det A'$. Na základě věty 1.6 existuje čtvercová matice $P$ taková, že $A' = P \cdot A$.

Matici $B$ převedeme elementárními sloupcovými úpravami na matici $B'$, která je také ve schodovitém tvaru, takže $\det B = \det B'$. Na základě poznámky u věty 1.6 existuje čtvercová matice $Q$ taková, že $B' = B \cdot Q$.

Platí tedy $\det A \cdot \det B = \det A' \cdot \det B'$. Dále jelikož matice $A'$ a $B'$ jsou ve schodovitém tvaru, tak matice $A' \cdot B'$ bude také ve schodovitém tvaru, což vyplývá z principu násobení matic, a pro její diagonální prvky $c_{ii}$ bude zřejmě platit $c_{ii} = a'_{ii} \cdot b'_{ii}$. Determinant matice ve schodovitém tvaru se rovná součinu prvků na její hlavní diagonále, odtud dostáváme rovnost $\det A' \cdot \det B' = \det(A' \cdot B')$.

Provedeme-li na matici $A \cdot B$ stejné řádkové a sloupcové úpravy, jako jsme provedli na matici $A$, resp. matici $B$, dostaneme matici $A' \cdot B'$: $P \cdot (A \cdot B) \cdot Q = (P \cdot A) \cdot (B \cdot Q) = = A' \cdot B'$. Provedené úpravy nemění determinant, takže matice $A \cdot B$ a $A' \cdot B'$ mají determinant stejný. Dohromady tedy získáváme rovnost:

$$\det A \cdot \det B = \det A' \cdot \det B' = \det(A' \cdot B') = \det(A \cdot B). \blacksquare$$

**Definice 2.5:** Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu $n$. Pak matice $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, kde $\bar{a}_{ij} = D_{ji}$ je algebraický doplněk prvku $a_{ji}$ v matici $A$, se nazývá *adjungovaná matice* k matici $A$. Označujeme ji také $adj\ A$.

V kapitole 1.4 jsme pomocí hodnosti matice definovali pojmy regulární a singulární matice. Nyní můžeme definici formulovat pomocí pojmu determinant. Vraťme se také k větě, kterou jsme již dříve uvedli jako větu 1.4, a dokažme na tomto místě její platnost.

**Definice 2.6:** Čtvercová matice $A$ řádu $n$ se nazývá *regulární*, je-li $\det A \neq 0$. Čtvercová matice $A$ se nazývá *singulární*, pokud $\det A = 0$.

**Věta 2.5:** Ke čtvercové matici $A$ řádu $n$ existuje inverzní matice právě tehdy, když $A$ je regulární matice.

*Důkaz*: Nechť nejprve k matici $A$ existuje inverzní matice $A^{-1}$. Pak platí $A \cdot A^{-1} = E$. Když přejdeme k determinantům, pak dle věty 2.4 platí: $1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) =$ $= \det A \cdot \det A^{-1}$. Odtud musí $\det A \neq 0$, tedy matice $A$ je regulární.

Nyní nechť $A$ je regulární matice, takže $\det A \neq 0$. Sestrojme matici $X = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}$ a dokažme, že $X$ je inverzní maticí k matici $A$. Označme $C = A \cdot X$. Pak prvek $c_{ij}$ matice $C$ získáme jako: $c_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(a_{i1} \cdot D_{j1} + a_{i2} \cdot D_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot D_{jn}\right)$.

Užitím věty o rozvoji determinantu dostáváme:

- pro $i = j$: $c_{ii} = \frac{1}{\det A} \cdot (a_{i1} \cdot D_{i1} + a_{i2} \cdot D_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot D_{in}) = \frac{1}{\det A} \cdot \det A = 1$,
- pro $i \neq j$: $c_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(a_{i1} \cdot D_{j1} + a_{i2} \cdot D_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot D_{jn}\right) = \frac{1}{\det A} \cdot 0 = 0$.

Zjišťujeme tedy, že matice $C$ je jednotková matice. Platí rovnost $A \cdot X = E$. Analogicky by se dokázalo, že platí i rovnost $X \cdot A = E$. Matice $X = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}$ je skutečně inverzní maticí k matici $A$. ■

**Věta 2.6:** Nechť $A$ je regulární matice. Pak $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}$.

Platnost tohoto tvrzení byla dokázána v druhé části důkazu věty 2.5. Na základě uvedeného vztahu získáváme druhý způsob, jak lze vypočítat inverzní matici k matici $A$. Inverzní matici $A^{-1}$ můžeme spočítat vynásobením adjungované matice k matici $A$ převrácenou hodnotou determinantu matice $A$.

# 3. Soustavy lineárních rovnic

**Definice 3.1:** *Soustavou $m$ lineárních algebraických rovnic o $n$ neznámých* nad tělesem $T$ budeme rozumět soustavu rovnic tvaru

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde koeficienty $a_{11},\ a_{12}, \dots,\ a_{mn}$ a absolutní členy $b_1,\ b_2, \dots,\ b_m$ jsou prvky tělesa $T$.

Soustava se nazývá *homogenní*, jestliže $b_i = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, m$. V opačném případě se soustava nazývá *nehomogenní*, tedy když $b_i \neq 0$ alespoň pro jedno $i$.

Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\ (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazýváme po řadě *matice soustavy*, *sloupec pravých stran* a *rozšířená matice soustavy*.

Soustavu můžeme zapsat také maticově ve tvaru: $A \cdot X = B$, kde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

**Definice 3.2:** *Řešením soustavy* $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých je každá uspořádaná $n$-tice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ prvků tělesa $T$, pro kterou platí všech $m$ uvedených rovností.

Z hlediska počtu řešení soustavy musí nastat právě jeden ze tří případů:

1. soustava nemá žádné řešení,
2. soustava má jediné řešení,
3. soustava má nekonečně mnoho řešení.

Pakliže existuje alespoň jedno řešení, soustava se nazývá *řešitelná*. V případě, že žádné řešení neexistuje, se soustava nazývá *neřešitelná*.

Řešit soustavu lineárních rovnic znamená nalézt všechna její řešení, tedy určit jistou podmnožinu $T^n$ všech řešení soustavy.

**Poznámka:** Množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic tvoří vektorový podprostor, u nehomogenní soustavy pak afinní podprostor. Tímto pojetím se z důvodu zaměření práce na metody řešení soustav lineárních rovnic nebudeme zabývat.

## 3.1 Ekvivalentní úpravy soustav lineárních rovnic

**Definice 3.3:** Dvě soustavy lineárních rovnic o $n$ neznámých se nazývají *ekvivalentní soustavy*, jestliže mají stejné množiny řešení.

Provádíme-li se soustavou lineárních rovnic takovou úpravu, po které získáme soustavu s ní ekvivalentní, jedná se o *ekvivalentní úpravu* dané soustavy lineárních rovnic. Výčet ekvivalentních úprav uvádí následující věta.

**Věta 3.1**: Nechť je dána soustava $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých nad tělesem $T$. Pak následující úpravy jsou ekvivalentními úpravami této soustavy:

1. libovolná záměna pořadí rovnic,
2. vynásobení libovolné rovnice nenulovým číslem z $T$,
3. přičtení lineární kombinace jiných rovnic k jedné rovnici,
4. vypuštění rovnice, která je lineární kombinací ostatních rovnic.

*Důkaz*:

1. Řešením soustavy je taková uspořádaná $n$-tice, pro kterou platí všech $m$ rovností, tudíž nezáleží na pořadí, ve kterém jsou rovnice uvedeny. Soustavy lišící se pouze pořadím rovnic jsou zřejmě ekvivalentní.
2. Pokud $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je řešením soustavy lineárních rovnic, pak je řešením každé její rovnice. Proto při dosazení do $i$-té rovnice získáváme platnou rovnost: $a_{i1}t_1 +$ $+ a_{i2}t_2 + \cdots + a_{in}t_n = b_i$. Vynásobíme-li tuto rovnici nenulovým $c \in T$, zřejmě odtud také platí: $c \cdot (a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \cdots + + a_{in}t_n) = c \cdot b_i$. Stejně tak pokud platí druhá uvedená rovnost, tak z ní zřejmě vyplývá platnost první uvedené rovnosti. Tedy soustava, která vznikne vynásobením libovolné rovnice původní soustavy nenulovým číslem z $T$ je s ní ekvivalentní.
3. Mějme soustavu $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých (1):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

a přičtěme např. k jejímu prvnímu řádku druhý řádek vynásobený číslem $c \in T$. Dostáváme soustavu (2):

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + c \cdot (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n) & = & b_1 + c \cdot b_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Nechť $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je řešením soustavy (1), pak platí: $a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1n}t_n = b_1$ a také: $c \cdot (a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n) = c \cdot b_2$. Odtud: $a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1n}t_n + c \cdot (a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n) = b_1 + c \cdot b_2$, všechny ostatní rovnice jsou stejné, tedy $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je řešením soustavy (2).

Naopak nechť $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je řešením soustavy (2), pak z první rovnice platí: $a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1n}t_n + c \cdot (a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n) = b_1 + c \cdot b_2$. Z druhé rovnice platí: $a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n = b_2$. Tudíž po dosazení a odečtení v první rovnici získáváme: $a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1n}t_n = b_1$. Řešení $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je řešením soustavy (1). Soustavy (1) a (2) jsou ekvivalentní.

4. Uvažujme soustavu, jejíž první rovnice je lineární kombinací ostatních rovnic (3):

$$\begin{array}{rcl} c_2 \cdot (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + c_m \cdot (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) & = & c_2 \cdot b_2 + \cdots + c_m \cdot b_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde $c_2, \dots, c_m \in T$. Dále uvažme soustavu (4), která vznikne ze soustavy (3) vypuštěním první rovnice:

$$\begin{array}{rcl} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Je zřejmé, že $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je řešením soustavy (3) právě tehdy, když $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je řešením soustavy (4). Jinak řečeno, soustavy (3) a (4) jsou ekvivalentní. ■

## 3.2 Řešitelnost soustav lineárních rovnic

Jedním z úkolů při řešení soustavy lineárních rovnic je rozhodnout o její řešitelnosti. Základní vztah, který určuje, zda je soustava řešitelná, popisuje Frobeniova věta.

**Věta 3.2:** Frobeniova věta, resp. Kronecker-Capelliho věta: Soustava $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice této soustavy, tedy $h(A) = h(A|b)$.

*Důkaz*: Nechť soustava lineárních rovnic má řešení $(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Pak platí:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1n}t_n & = & b_1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}t_1 + a_{m2}t_2 + \cdots + a_{mn}t_n & = & b_m \end{array}$$

neboli

$$t_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + t_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

to znamená, že sloupec pravých stran je lineární kombinací sloupců matice $A$. To platí právě tehdy, když $h(A) = h(A|b)$. ■

Z Frobeniovy věty vyplývá, že homogenní soustava lineárních rovnic je řešitelná vždy. Sloupec pravých stran obsahuje samé nuly, jeho připojením ke sloupcům matice $A$ se tedy nezmění hodnost, proto vždy platí $h(A) = h(A|b)$. Homogenní soustava může mít buď právě jedno řešení, kterým je uspořádaná $n$-tice $(0, 0, \dots, 0)$ nazývaná *nulové řešení*, nebo má nekonečně mnoho řešení (zahrnující také nulové řešení).

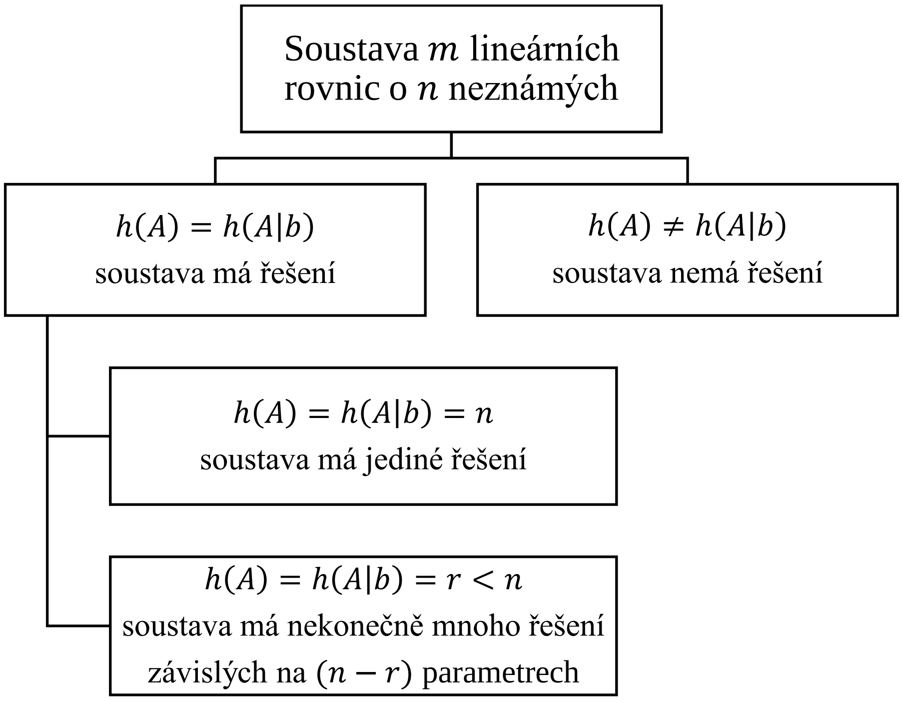
Dále uveďme větu, která popisuje, jak v případě řešitelné soustavy určit, zda má jediné řešení, nebo jich má nekonečně mnoho.

**Věta 3.3:** Soustava $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých má jediné řešení, pokud matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost, která se rovná počtu neznámých soustavy, tedy $h(A) = h(A|b) = n$.

*Důkaz*: Soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat maticově ve tvaru: $A \cdot X = B$. Matice $A$ je regulární (pokud zpočátku nebyla čtvercová, stačí vynechat lineárně závislé řádky), takže k ní podle věty 2.5 existuje inverzní matice $A^{-1}$. Vynásobíme-li původní maticový zápis soustavy inverzní maticí $A^{-1}$ zleva, dostáváme $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Odtud dostáváme vztah pro řešení soustavy: $X = A^{-1} \cdot B$. Jelikož inverzní matice je určena jednoznačně, jedná se o jediné řešení dané soustavy. ■

Hodnost matice nemůže být větší, než je počet sloupců matice, který je stejný jako počet neznámých. Proto pokud je soustava řešitelná a zároveň nenastává rovnost z věty 3.3, musí nutně $h(A) = h(A|b) = r < n$, kde $n$ je počet neznámých. V takovém případě má soustava nekonečně mnoho řešení, které závisí na $(n - r)$ parametrech.

Uvedené poznatky o řešitelnosti soustavy shrnuje následující schéma:




*Obrázek 2: Řešitelnost soustav lineárních rovnic.*

Řešení obsahující parametry se nazývá *obecné řešení* soustavy lineárních rovnic. Dosadíme-li za parametry konkrétní čísla, dostáváme jedno řešení, které nazýváme *partikulární řešení*. Vzhledem k těmto pojmům můžeme popsat vztah mezi řešením nehomogenní a homogenní soustavy lineárních rovnic takto: obecné řešení nehomogenní soustavy rovnic je rovno součtu partikulárního řešení této nehomogenní soustavy a obecného řešení příslušné homogenní soustavy.

Nyní víme, jak určit počet řešení soustavy lineárních rovnic na základě hodnosti matice soustavy a hodnosti rozšířené matice soustavy. Řešit soustavu znamená nalézt všechna její řešení, k čemuž slouží metody, které popíšeme ve zbývajících kapitolách.

# 4. Řešení soustav lineárních rovnic na základní škole

Žáci se obvykle s tématem soustav lineárních rovnic poprvé setkávají v učebnicích pro 9. ročníky základních škol, případně pro kvarty na víceletých gymnáziích. V tomto období jsou řešeny pouze soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými, obvykle označovanými jako $x$ a $y$. Nezbytným předpokladem pro pochopení učiva je dobrá znalost práce s rovnicemi.

## 4.1 Soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

**Definice 4.1**: Soustava

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned}$$

kde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$ se nazývá s*oustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými* $x, y$.

Množinu řešení této soustavy rovnic tvoří všechny takové uspořádané dvojice $[x;\ y]$, které jsou řešením obou rovnic. Soustava dvou rovnic se dvěma neznámými může mít právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení nebo nemít řešení žádné.

Všechny metody používané k hledání řešení soustavy rovnic využívají ekvivalentní úpravy rovnic a jejich soustav. Jedná se o úpravy, při jejichž použití zůstane zachována stejná množina řešení.

## 4.2 Metoda dosazovací

První metodou, která se používá k řešení soustav dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými, je metoda dosazovací nebo též substituční.

Při použití dosazovací metody začneme vyjádřením jedné neznámé z jedné rovnice soustavy. Vyjádřenou neznámou následně dosadíme do druhé rovnice. Tím získáme jednu rovnici o jedné neznámé, kterou vyřešíme. Spočítanou hodnotu jedné neznámé pak dosadíme do původního vyjádření, a tím získáme i hodnotu druhé neznámé.

Postup si nyní ukážeme na příkladech.

**Příklad 4.1**: Dosazovací metodou řešte soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými $x$ a $y$ (Odvárko & Kadleček, 2019, s. 12):

$$\begin{aligned} x + 7y &= 13 \\ 3x - 7 &= -5y \end{aligned}$$

**Řešení:** Druhá rovnice soustavy není v základním tvaru $ax + by = c$. Do tohoto tvaru bychom ji mohli snadno upravit, ovšem pro výpočet příkladu to není potřeba, můžeme tedy ihned začít řešit.

V prvním kroku z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou. Jelikož máme čtyři možnosti, je vhodné si v tomto kroku vždy rozmyslet, která volba je nejvýhodnější. V tomto případě bude nejlepší vyjádřit z první rovnice soustavy neznámou $x$, jelikož je u ní koeficient 1, takže díky této volbě nebudeme pracovat se zlomky:

$$\begin{aligned} x + 7y &= 13 \qquad /-7\mathrm{y} \\ x &= -7y + 13 \end{aligned}$$

Získaný výraz dosadíme za $x$ do druhé rovnice:

$$3 \cdot (-7y + 13) - 7 = -5y$$

Získáváme jednu rovnici s jednou neznámou $y$, jejíž hodnotu z ní vypočítáme:

$$\begin{aligned} -21y + 39 - 7 &= -5y \\ -21y + 32 &= -5y \qquad /+5y - 32 \\ -16y &= -32 \qquad /\cdot\left(-\frac{1}{16}\right) \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Spočítanou hodnotu $y$ dosadíme do výrazu vyjadřujícího $x$ z první rovnice a vypočítáme hodnotu neznámé $x$:

$$\begin{aligned} x &= -7 \cdot 2 + 13 \\ x &= -14 + 13 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Soustava má jedno řešení, a to uspořádanou dvojici $[-1; 2]$. Řešení zapíšeme jako množinu: $K = \{[-1; 2]\}$.

Pro kontrolu správnosti výsledku se na základních školách běžně provádí zkouška spočívající v dosazení výsledku do obou rovnic a porovnání stran:

$$
\begin{array}{lll}
L_1([-1;2]) = -1 + 7 \cdot 2 = 13 & P_1([-1;2]) = 13 & L_1 = P_1 \\
L_2([-1;2]) = 3 \cdot (-1) - 7 = -10 & P_2([-1;2]) = -5 \cdot 2 = -10 & L_2 = P_2
\end{array}
$$

V obou rovnicích soustavy se po dosazení řešení pravé a levé strany rovnají, ověřili jsme tedy správnost uvedeného řešení.

Právě vyřešená soustava byla příkladem soustavy s jedním řešením. Uvedeme ještě příklad soustavy, která nemá žádné řešení, a soustavy, která má naopak řešení nekonečně mnoho.

**Příklad 4.2:** Určete kolik řešení má soustava rovnic (Herman et al., 1999, s. 92):

$$
\begin{aligned}
6x + 5y &= 15 \\
2x + \frac{5}{3}y &= 3
\end{aligned}
$$

**Řešení:** Začneme opět tím, že z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou. V tomto případě není žádná varianta výrazně výhodnější než ostatní, vyjádříme tedy z první rovnice neznámou $x$:

$$
\begin{aligned}
6x + 5y &= 15 & /-5y \\
6x &= -5y + 15 & /\cdot \frac{1}{6} \\
x &= -\frac{5}{6}y + \frac{15}{6}
\end{aligned}
$$

Toto vyjádření $x$ dosadíme do druhé rovnice a nově vzniklou rovnici o jedné neznámé vyřešíme:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \left(-\frac{5}{6}y + \frac{15}{6}\right) + \frac{5}{3}y &= 3 \\
-\frac{5}{3}y + \frac{15}{3} + \frac{5}{3}y &= 3 \quad /\cdot 3 \\
-5y + 15 + 5y &= 9 \\
0y + 15 &= 9 \quad /-15 \\
0 &= -6
\end{aligned}
$$

Docházíme k neplatné rovnosti, $0 \neq -6$, což znamená, že neexistuje žádná uspořádaná dvojice čísel, která by byla současně řešením obou rovnic ze zadání. Soustava tedy nemá řešení, množina řešení je prázdná: $K = \emptyset$.

O tom, že soustava rovnic nemá řešení, se můžeme přesvědčit ještě jiným způsobem. Vrátíme se znovu k původní soustavě a vynásobíme druhou rovnici číslem 3, abychom získali v obou rovnicích stejný koeficient před neznámou $x$. Provádíme pouze ekvivalentní úpravu. Soustava, která vznikne má tedy stejné řešení jako soustava ze zadání, a vypadá takto:

$$\begin{aligned} 6x + 5y &= 15 \\ 6x + 5y &= 9 \end{aligned}$$

Levé strany obou rovnic jsou stejné, ale absolutní členy na pravých stranách se liší. Najít takovou uspořádanou dvojici $[x; y]$, aby se výraz $6x + 5y$ rovnal současně $15$ i $9$ není možné, rovnice tedy opravdu nemá řešení. Poznatky z tohoto příkladu můžeme formulovat do obecně platného závěru: Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými nemá žádné řešení, pokud si rovnice odporují.

**Příklad 4.3:** Určete, kolik řešení má soustava rovnic (Herman et al., 1999, s. 92):

$$\begin{aligned} -x + 4 &= 7y \\ 40 - 10x &= 70y \end{aligned}$$

**Řešení**: Budeme postupovat stejným způsobem jako v předcházejících dvou příkladech. Začneme tedy vyjádřením jedné neznámé z jedné rovnice. V tomto případě bude nejvýhodnější vyjádřit z první rovnice neznámou $x$, jelikož je před ní koeficient $-1$, díky čemuž opět nebudeme muset řešit rovnici se zlomky:

$$\begin{aligned} -x + 4 &= 7y && /-4 \\ -x &= 7y - 4 && /\cdot(-1) \\ x &= -7y + 4 \end{aligned}$$

Získaný výraz dosadíme do druhé rovnice a rovnici vyřešíme:

$$\begin{aligned} 40 - 10 \cdot (-7y + 4) &= 70y \\ 40 + 70y - 40 &= 70y && /-70y \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Došli jsme k platné rovnosti $0 = 0$. To znamená, že soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

Stejně jako v předchozím příkladě, i tady obecně popíšeme, pro jakou dvojici rovnic má soustava nekonečně mnoho řešení. Vraťme se k původní soustavě a upravme ji do základního tvaru s neznámými na levé straně a absolutními členy na pravé. První rovnici vynásobíme číslem $-10$ a druhou číslem $-1$, aby byly před neznámou $x$ stejné koeficienty. Dostáváme tuto soustavu:

$$\begin{aligned} 10x + 70y &= 40 \\ 10x + 70y &= 40 \end{aligned}$$

Po této úpravě jsou obě rovnice naprosto stejné, tudíž vypovídají totéž. Řešením soustavy jsou tedy všechny uspořádané dvojice $[x; y]$, které jsou řešením lineární rovnice se dvěma neznámými $10x + 70y = 40$, a těch je nekonečně mnoho.

Přestože řešení soustavy je nekonečně mnoho, nejsou to všechny dvojice reálných čísel. Hodnotu jedné neznámé můžeme vždy volit libovolně, ovšem druhou musíme určit v závislosti na první tak, aby platila rovnost. Řešení získáme takovým způsobem, že jednu neznámou zvolíme za parametr $t$ a druhou neznámou vyjádříme z rovnice právě pomocí tohoto parametru. V této soustavě to bude vypadat takto:

$$y = t$$

$$\begin{aligned} 10x + 70y &= 40 && /-70y \\ 10x &= -70\text{y} + 40 && /\cdot \frac{1}{10} \\ x &= -7y + 4 \\ x &= -7t + 4 \end{aligned}$$

Všechna řešení dané soustavy vyjádříme jako množinu: $K = \{[-7t + 4; t], t \in R\}$.

Toto vyjádření vypovídá, že za hodnotu $t$ můžeme dosadit libovolné reálné číslo a dopočítáním $x$ získáme uspořádanou dvojici, která je řešením dané soustavy. Jelikož reálných čísel je nekonečně mnoho, je nekonečně mnoho i řešení dané soustavy.

Kdybychom zvolili za parametr neznámou $x$, dostali bychom sice jiné vyjádření, ovšem výsledná množina řešení by byla totožná.

Chceme-li opět formulovat obecný závěr týkající se počtu řešení soustavy, můžeme ho vyjádřit takto: Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými má nekonečně mnoho řešení, pokud rovnice vypovídají totéž.

## 4.3 Metoda sčítací

Druhou metodou probíranou na základních školách je metoda sčítací. Při použití této metody je potřeba upravit rovnice tak, aby alespoň u jedné neznámé byly koeficienty opačná čísla. Pokud tato podmínka není splněna již v zadání, násobíme jednu či obě rovnice vhodným nenulovým číslem. Následně obě rovnice sečteme, čímž získáme jednu rovnici o jedné neznámé. Jejím vyřešením získáme hodnotu jedné neznámé, pomocí které pak po dosazení do jedné z původních rovnic určíme i hodnotu druhé neznámé.

**Příklad 4.4:** Sčítací metodou řešte soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými $x$ a $y$ (Herman et al., 1999, s. 89):

$$\begin{aligned} 27x + 4y &= -58 \\ 3x - 5y &= -1 \end{aligned}$$

**Řešení**: Koeficienty u stejných neznámých se v rovnicích liší, proto musíme začít úpravou rovnic. Možností, jak je vynásobit, aby koeficienty před jednou z neznámých byly opačná čísla, je více. Zvolíme tu, že druhou rovnici vynásobíme číslem $-9$:

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= -1 \quad /\cdot(-9) \\ -27x + 45y &= 9 \end{aligned}$$

Získáme tuto soustavu:

$$\begin{aligned} 27x + 4y &= -58 \\ -27x + 45y &= 9 \end{aligned}$$

Koeficienty před neznámou $x$ jsou opačná čísla, sečteme tedy obě rovnice a dostaneme rovnici o jedné neznámé, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned} 0x + 49y &= -49 \quad /\cdot\frac{1}{49} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Spočítanou hodnotu $y$ dosadíme do jedné z rovnic soustavy a vypočítáme hodnotu neznámé $x$:

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= -1 \qquad /+5y \\ 3x &= 5y - 1 \qquad /\cdot\frac{1}{3} \\ x &= \frac{5}{3}y - \frac{1}{3} \\ x &= \frac{5}{3}\cdot(-1) - \frac{1}{3} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Soustava má jedno řešení: $K = \{[-2; -1]\}$. Zkouška by se prováděla stejným způsobem jako u příkladu 4.1 v kapitole 4.2.

V kroku, kdy se sčítají upravené rovnice, by u některých soustav mohlo dojít k tomu, že se odečtou obě neznámé. V případě, že bychom pak po úpravě došli k rovnosti $0 = 0$, by to znamenalo, že má soustava nekonečně mnoho řešení. Pakliže bychom došli k neplatné rovnosti, že jakékoliv číslo různé od nuly se rovná nule, znamenalo by to, že soustava nemá řešení žádné.

## 4.4 Metoda porovnávací

Řešíme-li soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými metodou porovnávací, vyjádříme nejprve z obou rovnic stejnou neznámou pomocí druhé neznámé. Tato vyjádření porovnáme, čímž dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé. Rovnici vyřešíme, čímž získáme hodnotu této neznámé. Jejím dosazením do jednoho z původních vyjádřeních získáme i hodnotu neznámé druhé.

**Příklad 4.5:** Porovnávací metodou řešte soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými $x$ a $y$ (Herman et al., 1999, s. 81):

$$\begin{aligned} 3x - y &= -3 \\ 2x + y &= -2 \end{aligned}$$

**Řešení**: Nejprve vyjádříme z obou rovnic jednu neznámou. V tomto kroku je opět vhodné vybrat neznámou tak, aby následně nebylo nutné počítat se zlomky. V tomto případě budeme vyjadřovat neznámou $y$, jelikož je před ní koeficient $-1$ v první rovnici a $1$ v rovnici druhé. Vyjádřením neznámé $y$ z obou rovnic tedy obdržíme:

$$\begin{array}{rcll} 3x - y &=& -3 & /-3x \\ 2x + y &=& -2 & /-2x \\ \hline -y &=& -3x - 3 & /\cdot(-1) \\ y &=& -2x - 2 & \\ \hline \mathrm{y} &=& 3x + 3 & \\ y &=& -2x - 2 & \end{array}$$

Hledáme takovou hodnotu $x$, pro kterou mají oba výrazy vyjadřující $y$ stejnou hodnotu. Tu určíme tak, že dáme obě vyjádření do rovnosti a vzniklou rovnici vyřešíme:

$$\begin{array}{rcll} 3x + 3 &=& -2x - 2 & /+2x - 3 \\ 5x &=& -5 & /\cdot \dfrac{1}{5} \\ x &=& -1 & \end{array}$$

Když známe hodnotu $x$, spočítáme pomocí ní hodnotu $y$ tak, že ji dosadíme do jednoho z původních vyjádření:

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot (-1) + 3 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Množina řešení obsahuje jedinou uspořádanou dvojici: $K = \{[-1; 0]\}$.

Kdyby soustava měla nekonečně mnoho řešení, pak bychom v kroku, ve kterém porovnáváme vyjádření téže neznámé z každé z rovnic, dospěli k rovnosti $0 = 0$. Pokud by soustava neměla řešení žádné, pak bychom v tomtéž kroku dospěli k neplatné rovnosti, že se jakékoli reálné číslo různé od nuly rovná nule.

## 4.5 Grafické řešení

Poslední metodou řešení, kterou se žáci učí používat na základních školách, je metoda grafického řešení soustav dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. S touto metodou se seznamují v rámci probírání učiva o funkcích.

Grafické řešení spočívá v tom, že z obou rovnic vyjádříme, jak $y$ závisí na $x$. Tím získáme předpisy dvou lineárních funkcí, jejichž grafem jsou přímky. Obě funkce nakreslíme do jedné kartézské soustavy souřadnic a zjišťujeme, pro které $x$ nabývají obě funkce stejné hodnoty $y$. O těchto bodech totiž platí, že leží zároveň na obou přímkách, jsou řešením obou rovnic, a jsou tedy řešením dané soustavy.

Na grafickém řešení lze názorně ukázat, v jakých případech mají soustavy rovnic jedno, žádné a nekonečně mnoho řešení. V případě, že jsou narýsované přímky různoběžné, pak se protínají v jednom bodě, a právě tento bod je jediným řešením soustavy. Pokud jsou přímky rovnoběžné, pak neexistuje žádné $x$, pro které by funkce nabývaly stejné hodnoty, soustava tedy nemá řešení žádné. Poslední možností je, že grafy obou lineárních funkcích jsou totožné přímky. Pak jsou všechny body na těchto přímkách řešením dané soustavy, řešení je tedy nekonečně mnoho (Herman et al., 2000).

Všechny tyto možnosti ukážeme na řešených příkladech.

**Příklad 4.6:** Řešte početně i graficky soustavu rovnic (Herman et al., 2000, s. 86):

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 10 &= 0 \\ 2x + y - 9 &= 0 \end{aligned}$$

**Řešení**: Začneme tím, že z obou rovnic vyjádříme neznámou $y$ pomocí $x$. Tím získáme předpisy dvou lineárních funkcí, které můžeme označit $f$ a $g$:

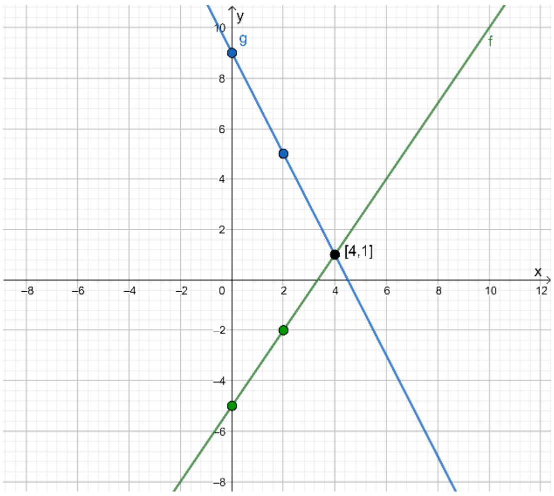
$$f: y = \frac{3}{2}x - 5, \qquad g: y = -2x + 9$$

Nyní, když známe předpisy funkcí, přistoupíme k nakreslení jejich grafů. Jelikož grafem lineární funkce je přímka, stačí pro každou funkci najít dva body, kterými prochází, protože ty určí celou přímku:

$$f: y = \frac{3}{2}x - 5, \qquad g: y = -2x + 9$$

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $2$ |
| $y$ | $-5$ | $-2$ |

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $2$ |
| $y$ | $9$ | $5$ |




*Obrázek 3: Různoběžné přímky.*

Z obrázku zjišťujeme, že se přímky protnou v bodě $[4; 1]$, což je tedy řešení dané soustavy rovnic.

Zadání požadovalo, aby byla soustava řešena početně i graficky. Provedeme tedy i početní řešení, které zároveň poslouží jako kontrola.

Již dříve jsme z obou rovnic vyjádřili neznámou $y$, čehož lze využít při porovnávací metodě. Obě vyjádření tudíž porovnáme, čímž získáme jednu rovnici, z které vypočteme hodnotu $x$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 5 &= -2x + 9 \quad /+2x+5 \\ \frac{7}{2}x &= 14 \qquad /\cdot\frac{2}{7} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Dosazením vypočtené hodnoty $x$ do jednoho z původních vyjádření získáme hodnotu $y$:

$$\begin{aligned} y &= -2 \cdot 4 + 9 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Početním řešením docházíme k totožnému výsledku. Zapíšeme řešení: $K = \{[4; 1]\}$.

**Příklad 4.7:** Grafickou metodou zdůvodněte, proč daná soustava nemá řešení (Herman et al., 2000, s. 84):

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 9x - 6y &= 6 \end{aligned}$$

**Řešení**: Ze zadání víme, že soustava rovnic nemá žádné řešení. Pro zdůvodnění však budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě. Začneme tím, že z každé rovnice vyjádříme $y$, čímž získáme předpisy dvou lineárních funkcí:

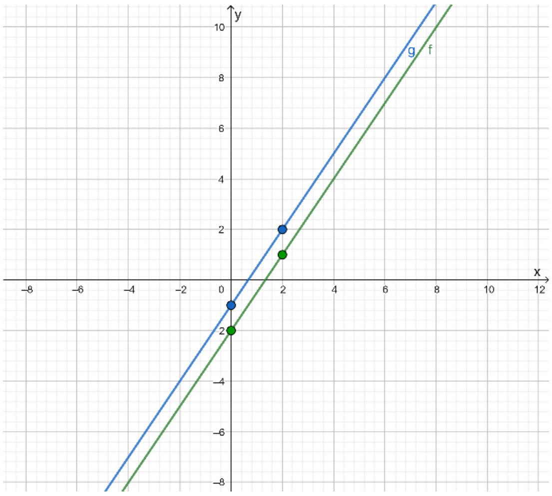
$$f: y = \tfrac{3}{2}x - 2, \qquad g: y = \tfrac{3}{2}x - 1$$

Již z tohoto vyjádření je zřejmé, že grafy obou funkcí budou rovnoběžné, jelikož koeficient před $x$ určuje sklon přímky, a ten je u obou funkcí stejný. Přesvědčíme se však pomocí sestrojení grafů funkcí.

$$f: y = \tfrac{3}{2}x - 2, \qquad g: y = \tfrac{3}{2}x - 1$$

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 2 |
| $y$ | $-2$ | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 2 |
| $y$ | $-1$ | 2 |



*Obrázek 4: Rovnoběžné přímky.*

Grafy obou funkcí jsou skutečně rovnoběžné přímky, což vysvětluje, proč soustava nemá žádné řešení. Rovnoběžné přímky nemají žádný společný bod, tudíž ani daná soustava rovnic nemá žádné řešení. Neexistuje totiž žádná uspořádaná dvojice $[x; y]$ taková, která by ležela zároveň na obou přímkách, a tedy byla současně řešením obou rovnic.

**Příklad 4.8:** Potvrďte graficky, že daná soustava má nekonečně mnoho řešení (Herman et al., 2000, s. 82):

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 3 \end{aligned}$$

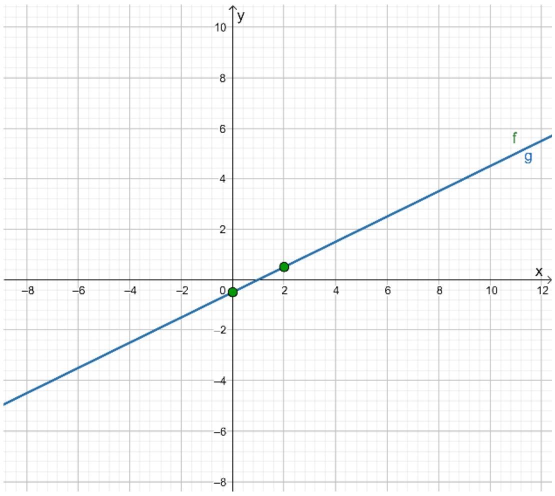
**Řešení**: Opět začneme tím, že z obou rovnic vyjádříme $y$ a následně nakreslíme do jednoho obrázku grafy obou lineárních funkcí, které tímto vyjádřením získáme.

$$f: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \qquad g: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Oba funkční předpisy jsou stejné, přímky jsou tedy totožné.

$$f: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

| $x$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |




*Obrázek 5: Totožné přímky.*

To, že jsou přímky totožné, znamená, že každý bod, který leží na jedné z přímek, leží současně i na druhé, tedy je řešením dané soustavy. Takovýchto bodů je nekonečně mnoho, proto i řešená soustava má nekonečně mnoho řešení.

## 4.6 Slovní úlohy

Kromě toho, že se žáci v devátých třídách poprvé seznamují s metodami řešení soustav dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými, učí se následně tyto poznatky využít k řešení slovních úloh. U nich je navíc vyžadováno, aby žáci dokázali interpretovat údaje ze zadání a sami soustavu rovnic sestavili, než mohou přistoupit k jejímu řešení.

Slovní úlohy řešené pomocí soustav lineárních rovnic mohou být velmi různorodé. Odvárko a Kadleček (2019) zařazují ve své učebnici k této látce úlohy o směsích, roztocích a pohybu.

**Příklad 4.9:** Třídní pokladník Jarda bude objednávat vstupenky na divadelní představení Jehla v kupce sena. Cena dražších vstupenek je 110 Kč, levnější stojí 90 Kč. Jarda vybral celkem 2620 Kč od 26 zájemců. Nezapsal si ale, kolik z nich si předplatilo dražší vstupenky a kolik vstupenky lacinější. Dokážeš to vypočítat? (Odvárko & Kadleček, 2019, s. 16)

**Řešení:** Nejprve uděláme stručný zápis zadání, ze kterého následně určíme, jak bude vypadat soustava rovnic.

Neznámé budou v tomto případě počty zájemců o různě drahé vstupenky:

*Počet zájemců o dražší vstupenky ...* $x$

*Počet zájemců o levnější vstupenky ...* $y$

*Počet zájemců celkem ...* $26$

Dále zapíšeme, co platí o částkách vybraných na koupi vstupenek:

*Částka vybraná na koupi dražších vstupenek ...* $110 \cdot x$ *Kč*

*Částka vybraná na koupi levnějších vstupenek ...* $90 \cdot y$ *Kč*

*Celková vybraná částka ...* $2620$ *Kč*

Celkový počet zájemců se musí rovnat počtu zájemců o dražší vstupenky a počtu zájemců o levnější vstupenky dohromady. To zapíšeme do rovnice, čímž získáme jednu rovnici soustavy. Zároveň celková vybraná částka se musí rovnat částkám vybraným na koupi dražších a levnějších vstupenek dohromady, což dává druhou rovnici soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 26 \\ 110x + 90y &= 2620 \end{aligned}$$

Soustava je sestavená, přejdeme k jejímu řešení. K tomu můžeme využít kteroukoliv z dříve popsaných metod. Použijeme metodu sčítací. Vynásobíme první rovnici číslem $-11$ a druhou rovnici číslem $\frac{1}{10}$, aby byly koeficienty před $x$ opačná čísla:

$$\begin{aligned} x + y &= 26 \qquad /\cdot (-11) \\ 110x + 90y &= 2620 \quad /\cdot \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Získáváme tuto soustavu:

$$\begin{aligned} -11x - 11y &= -286 \\ 11x + 9y &= 262 \end{aligned}$$

Sečteme obě rovnice a spočítáme hodnotu $y$:

$$\begin{aligned} -2y &= -24 \quad /\cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ y &= 12 \end{aligned}$$

Dosazením do jedné z původních rovnic dopočítáme hodnotu $x$:

$$\begin{aligned} x + y &= 26 \qquad /-\text{y} \\ x &= -y + 26 \\ x &= -12 + 26 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Spočítaná hodnota $x$ odpovídá počtu zájemců o dražší vstupenky a $y$ počtu zájemců o levnější vstupenky. Řešení slovní úlohy je vhodné ověřit zkouškou. Nejprve ověříme správnost řešení soustavy:

$$\begin{array}{lll} L_1([14;12]) = 14 + 12 = 26 & P_1([14;12]) = 26 & L_1 = P_1 \\ L_2([14;12]) = 110 \cdot 14 + 90 \cdot 12 = 2620 & P_2([14;12]) = 2620 & L_2 = P_2 \end{array}$$

Následně provedeme zkoušku údajů ze zadání: $14 + 12 = 26$, $110 \cdot 14 + 90 \cdot 12 = 2620$.

Zkouška potvrdila správnost řešení. Můžeme napsat odpověď: Dražší vstupenky si předplatilo 14 zájemců a levnější vstupenky si předplatilo 12 zájemců.

**Příklad 4.10:** Chceme připravit 200 gramů 30% kyseliny dusičné. Máme k dispozici dostatek 12% a 60% této kyseliny. Kolik které z nich budeme potřebovat? (Odvárko & Kadleček, 2019, s. 17)

Než začneme s řešením úlohy, je potřeba vyjasnit, co znamenají údaje v zadání. V učebnici je uvedeno, že mluvíme-li o 30% kyselině, máme na mysli roztok, ve kterém je na 100 g roztoku obsaženo 30 g kyseliny a 70 g vody. Obdobně u 12% a 60% kyseliny. S touto informací jsme již schopni příklad vyřešit pomocí soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými.

**Řešení**: V této slovní úloze budou neznámé představovat hmotnosti 12% a 60% roztoku kyseliny, které použijeme k přípravě 30% roztoku:

*Hmotnost roztoku 12% kyseliny ve výsledném roztoku …* $x\ g$

*Hmotnost roztoku 60% kyseliny ve výsledném roztoku …* $y\ g$

*Celková hmotnost výsledného roztoku …* $200\ g$

Dále popíšeme, jakou hmotnost ve výsledném roztoku zaujme pouze samotná kyselina z použitého 12% a 60% roztoku:

*Hmotnost kyseliny z 12% roztoku ve výsledném roztoku* ... $0{,}12 \cdot x\ g$

*Hmotnost kyseliny z 60% roztoku ve výsledném roztoku* ... $0{,}60\ \cdot y\ g$

*Celková hmotnost kyseliny ve výsledném roztoku* ... $0{,}30 \cdot 200\ g$

Na základě zápisu vytvoříme soustavu. První rovnice vypovídá o tom, že součet hmotností použitého 12% roztoku a 60% roztoku se musí rovnat celkové hmotnosti výsledného roztoku. Druhá představuje informaci, že součet hmotností kyseliny z 12% a 60% roztoku se musí rovnat celkové hmotnosti kyseliny ve výsledném roztoku. Sestavíme tedy soustavu rovnic a vyřešíme ji pomocí dosazovací metody:

$$\begin{aligned} x + y &= 200 \\ 0{,}12x + 0{,}6y &= 0{,}3 \cdot 200 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme neznámou $x$:

$$\begin{aligned} x + y &= 200 \qquad /-y \\ x &= -y + 200 \end{aligned}$$

Vyjádření dosadíme za $x$ do druhé rovnice a dopočítáme hodnotu $y$:

$$\begin{aligned} 0{,}12 \cdot (-y + 200) + 0{,}6y &= 0{,}3 \cdot 200 \\ -0{,}12y + 24 + 0{,}6y &= 60 \qquad /-24 \\ 0{,}48y &= 36 \qquad /\cdot \frac{25}{12} \\ y &= 75 \end{aligned}$$

Dosazením do vyjádření $x$ určíme hodnotu druhé neznámé:

$$\begin{aligned} x &= -75 + 200 \\ x &= 125 \end{aligned}$$

Soustava je vyřešena. Hodnota $x$ odpovídá hmotnosti v gramech 12% roztoku kyseliny a $y$ hmotnosti v gramech 60% roztoku kyseliny použitého k přípravě 30% roztoku.

Provedeme zkoušku správnosti řešení soustavy:

$$\begin{aligned} &L_1([125; 75]) = 125 + 75 = 200 && P_1([125; 75]) = 200 && L_1 = P_1 \\ &L_2([125; 75]) = 0{,}12 \cdot 125 + 0{,}6 \cdot 75 = 60 && P_2([125; 75]) = 0{,}3 \cdot 200 = 60 && L_2 = P_2 \end{aligned}$$

Následně ověříme, že spočítané údaje vyhovují zadání: $125 + 75 = 200$, $0{,}12 \cdot\ 125 +\ 0{,}6 \cdot 75 = 60;\ 60 : 200 = 0{,}3$.

Ověřili jsme správnost řešení. Napíšeme odpověď: Budeme potřebovat 125 gramů 12% kyseliny dusičné a 75 gramů 60% kyseliny dusičné.

**Příklad 4.11:** Cesta od Adama k Evě je dlouhá 4 km. Adam si s Evou dojednal schůzku a vyrazil za ní rychlostí 6 km/h. Eva v témž okamžiku vyšla Adamovi naproti rychlostí 4 km/h. Kolik kilometrů ujde Adam k místu setkání a kolik ujde Eva? Za jak dlouho se setkají? (Odvárko & Kadleček, 2019, s. 20)

**Řešení**: Opět uděláme stručný zápis, který využijeme při sestavování soustavy rovnic. Tentokrát jako neznámé $x$ a $y$ označíme počet kilometrů, které ujdou Adam a Eva:

*Vzdálenost, kterou ujde Adam …* $x$ *km*

*Vzdálenost, kterou ujde Eva …* $y$ *km*

*Celková vzdálenost …* 4 *km*

Dále popíšeme, jak dlouho Adam a Eva půjdou, než se setkají, k čemuž využijeme údajů o tom, jakou jdou rychlostí:

*Doba chůze Adama …* $\frac{x}{6}$ *h*

*Doba chůze Evy …* $\frac{y}{4}$ *h*

Součet vzdáleností, kterou ujde Adam a Eva se musí rovnat celkové vzdálenosti, kterou je potřeba ujít. Vzhledem k tomu, že Adam a Eva vyšli ve stejný okamžik a předpokládáme, že oba půjdou tak dlouho, dokud se nesetkají, budou se doby jejich chůze rovnat. Z těchto údajů sestavíme soustavu:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ \frac{x}{6} &= \frac{y}{4} \end{aligned}$$

K řešení použijeme tentokrát porovnávací metodu, proto nejprve z obou rovnic vyjádříme neznámou $x$:

$$\begin{array}{rcll} x + y &=& 4 & /-y \\ \dfrac{x}{6} &=& \dfrac{y}{4} & /\cdot 6 \\ \hline x &=& -y + 4 & \\ x &=& \dfrac{3}{2}y & \end{array}$$

Obě vyjádření porovnáme a dopočítáme hodnotu $y$:

$$\begin{aligned} -y+4 &= \frac{3}{2}y \quad /-\frac{3}{2}y-4 \\ -\frac{5}{2}y &= -4 \quad /\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) \\ y &= \frac{8}{5} \\ y &= 1{,}6 \end{aligned}$$

Dosazením do jednoho z vyjádření $x$ dopočítáme druhou neznámou:

$$\begin{aligned} x &= -1{,}6+4 \\ x &= 2{,}4 \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy jsme získali odpověď na otázku, kolik kilometrů ujde Adam a kolik ujde Eva k místu setkání. V zadání se dále ptají, za jak dlouho se setkají. Označme tuto dobu jako $t$. Doba, za kterou se setkají, odpovídá době chůze Adama a Evy, kterou jsme vyjádřili hned na začátku, takže ji můžeme spočítat dosazením do jednoho z vyjádření:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{6} \\ t &= \frac{2{,}4}{6} \\ t &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Vyjádření doby je v hodinách, proto údaj převedeme na minuty: 0,4 h odpovídá 24 minutám.

Provedeme zkoušku správnosti řešení soustavy:

$$\begin{aligned} &L_1([2{,}4;1{,}6]) = 2{,}4+1{,}6 = 4 && P_1([2{,}4;1{,}6]) = 4 && L_1 = P_1 \\ &L_2([2{,}4;1{,}6]) = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}4 && P_2([2{,}4;1{,}6]) = \frac{1{,}6}{4} = 0{,}4 && L_2 = P_2 \end{aligned}$$

Ověříme, že spočítané údaje vyhovují zadání: $2{,}4 + 1{,}6 = 4{,}0$; $\frac{2{,}4}{0{,}4} = 6$; $\frac{1{,}6}{0{,}4} = 4$.

Zkouška potvrdila správnost řešení, takže napíšeme odpověď: Adam ujde k místu setkání 2,4 km a Eva ujde k místu setkání 1,6 km. Setkají se za 24 minut.

# 5. Řešení soustav lineárních rovnic na střední škole

Při probírání tématu soustav lineárních rovnic na středních školách se obvykle začíná opakováním dříve probrané látky. Žáci si tak nejprve připomínají možnosti řešení soustav dvou rovnic se dvěma neznámými. Následně však přecházejí k řešení soustav tvořených více rovnicemi s větším počtem neznámých. Látka se obvykle vysvětluje a procvičuje na soustavách tří rovnic se třemi neznámými. Znalosti je možné následně aplikovat i na větší soustavy.

## 5.1 Soustavy tří lineárních rovnic se třemi neznámými

Soustavu tří lineárních rovnic se třemi neznámými definujeme stejně, jako jsme definovali soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými, pouze v definici přidáváme jednu rovnici a v každé rovnici přibývá jeden sčítanec s reálným násobkem třetí neznámé. Neznámé budeme odteď označovat jako $x_1, x_2, x_3$. Řešením jsou potom všechny uspořádané trojice $[x_1;\ x_2;\ x_3]$ takové, že když je dosadíme do každé ze tří rovnic, dostaneme platnou rovnost.

Řešení můžeme nalézt metodami, které jsme využívali při řešení soustav dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Při použití dosazovací, sčítací a porovnávací metody nejprve převedeme soustavu na soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými, kterou pak dořešíme kteroukoliv z těchto metod. Užití těchto tří metod ukážeme na příkladech.

**Příklad 5.1:** Řešte soustavu rovnic (Janeček, 1995, s. 95):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**Řešení:** Soustavu vyřešíme pomocí dosazovací metody. Nejprve vyjádříme z jedné rovnice jednu neznámou. Nejvhodnější je vyjadřovat z první rovnice, jelikož absolutní člen je roven 0 a zároveň koeficienty u neznámých jsou rovny 1, respektive $-1$. Vyjádříme tedy z této rovnice neznámou $x_1$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \qquad\qquad /-x_2 + x_3 \\ x_1 &= -x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Vyjádření dosadíme do zbývajících rovnic, které upravíme:

$$\begin{array}{rcl} 2\cdot(-x_2+x_3)+x_2-x_3 &=& 1 \\ 4\cdot(-x_2+x_3)+2x_2-3x_3 &=& 0 \\ \hline -2x_2+2x_3+x_2-x_3 &=& 1 \\ -4x_2+4x_3+2x_2-3x_3 &=& 0 \\ \hline -x_2+x_3 &=& 1 \\ -2x_2+x_3 &=& 0 \end{array}$$

Získáváme soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými, kterou budeme dál řešit dosazovací metodou. Vyjádříme z první rovnice neznámou $x_3$ a dosadíme ji do druhé rovnice:

$$\begin{array}{rcll} -x_2+x_3 &=& 1 & /+x_2 \\ x_3 &=& x_2+1 & \\ \hline -2x_2+x_2+1 &=& 0 & /-1 \\ -x_2 &=& -1 & /\cdot(-1) \\ x_2 &=& 1 & \end{array}$$

Hodnotu $x_2$ dosadíme do vyjádření neznámé $x_3$ a dopočítáme její hodnotu. Následně dosazením do vyjádření $x_1$ dopočítáme i tuto neznámou:

$$\begin{array}{rcl} x_3 &=& 1+1 \\ x_3 &=& 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& -1+2 \\ x_1 &=& 1 \end{array}$$

Získáváme řešení, které zapíšeme jako množinu: $K = \{[1;1;2]\}$.

Při provádění zkoušky musíme ověřit, že po dosazení řešení dostaneme platnou rovnost ve všech třech rovnicích:

$$\begin{array}{lll} L_1([1;1;2]) = 1+1-2 = 0 & P_1([1;1;2]) = 0 & L_1 = P_1 \\ L_2([1;1;2]) = 2\cdot 1+1-2 = 1 & P_2([1;1;2]) = 1 & L_2 = P_2 \\ L_3([1;1;2]) = 4\cdot 1+2\cdot 1-3\cdot 2 = 0 & P_3([1;1;2]) = 0 & L_3 = P_3 \end{array}$$

Zkouška ověřila správnost spočítaného řešení soustavy.

**Příklad 5.2:** Řešte soustavu rovnic (Janeček, 1995, s. 95):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -8 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

**Řešení:** Soustavu budeme řešit metodou sčítací. Rovnice musíme upravit tak, abychom po sečtení eliminovali jednu neznámou. Vynásobíme první rovnici číslem 3 a sečteme ji s druhou rovnicí soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -8 \quad /\cdot 3 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= -24 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$7x_2 - 7x_3 = -14$$

Vynásobíme první rovnici číslem $-2$ a sečteme ji s třetí rovnicí soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -8 \quad /\cdot (-2) \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$-7x_2 + 8x_3 = 21$$

Získáváme soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými. Koeficienty před neznámou $x_2$ jsou opačná čísla, můžeme tedy soustavu dále řešit sčítací metodou a rovnice okamžitě sečíst:

$$\begin{aligned} 7x_2 - 7x_3 &= -14 \\ -7x_2 + 8x_3 &= 21 \end{aligned}$$

$$x_3 = 7$$

Vzniklou rovnici již nemusíme nijak upravovat, získali jsme ihned hodnotu neznámé $x_3$. Jejím dosazením do jedné ze dvou rovnic se dvěma neznámými dopočítáme hodnotu neznámé $x_2$ a následně dosazením do jedné z původních rovnic soustavy dopočítáme i hodnotu neznámé $x_1$:

$$
\begin{aligned}
7x_2 - 7x_3 &= -14 \qquad /+7x_3 \\
7x_2 &= 7x_3 - 14 \quad /\cdot \frac{1}{7} \\
x_2 &= x_3 - 2 \\
x_2 &= 7 - 2 \\
x_2 &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -8 \qquad /-2x_2 + 3x_3 \\
x_1 &= -2x_2 + 3x_3 - 8 \\
x_1 &= -2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 - 8 \\
x_1 &= 3
\end{aligned}
$$

Množina řešení dané soustavy obsahuje jednu uspořádanou trojici: $K = \{[3; 5; 7]\}$. Správnost řešení by opět ověřila zkouška, která by se prováděla stejným způsobem jako v příkladu 5.1.

**Příklad 5.3:** Řešte soustavu rovnic (Janeček, 1995, s. 95):

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\
x_1 - x_2 - 8x_3 &= 0 \\
3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

**Řešení:** Soustavu budeme řešit pomocí porovnávací metody. V prvním kroku vyjádříme ze všech tří rovnic stejnou neznámou. Můžeme vybrat kteroukoliv, vyjádřeme neznámou $x_1$:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \qquad /-x_2 + 2x_3 \\
x_1 - x_2 - 8x_3 &= 0 \qquad /+x_2 + 8x_3 \\
3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4 \qquad /-5x_2 - 4x_3 \\
\hline
x_1 &= -x_2 + 2x_3 \\
x_1 &= x_2 + 8x_3 \\
3x_1 &= -5x_2 - 4x_3 + 4 \quad /\cdot \frac{1}{3} \\
\hline
x_1 &= -x_2 + 2x_3 \\
x_1 &= x_2 + 8x_3 \\
x_1 &= -\frac{5}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Z těchto tří vyjádření sestavíme dvě rovnice tak, že porovnáme vždy dvě vyjádření. Není podstatné, jaké dvojice zvolíme, pouze musíme využít všechna vyjádření:

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 &= x_2 + 8x_3 \\ -x_2 + 2x_3 &= -\frac{5}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Získáváme soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými. Setrváme u porovnávací metody a soustavu dořešíme. Z obou rovnic vyjádříme neznámou $x_2$ a jejich porovnáním získáme jednu rovnici s jednou neznámou, ze které dopočítáme hodnotu $x_3$:

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 &= x_2 + 8x_3 && /-x_2 - 2x_3 \\ -x_2 + 2x_3 &= -\frac{5}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{4}{3} && /+\frac{5}{3}x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} -2x_2 &= 6x_3 && /\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{2}{3}x_2 &= -\frac{10}{3}x_3 + \frac{4}{3} && /\cdot\frac{3}{2} \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} x_2 &= -3x_3 \\ x_2 &= -5x_3 + 2 \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} -3x_3 &= -5x_3 + 2 && /+5x_3 \\ 2x_3 &= 2 && /\cdot\frac{1}{2} \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Když známe hodnotu neznámé $x_3$, můžeme jejím dosazením do jednoho z vyjádření $x_2$ dopočítat hodnotu této neznámé. Následně dosazením do jednoho z vyjádření $x_1$ dopočítáme i hodnotu poslední neznámé:

$$\begin{aligned} x_2 &= -3 \cdot 1 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 + 8 \cdot 1 \\ x_1 &= 5 \end{aligned}$$

Soustava je vyřešena, zapíšeme množinu řešení: $K = \{[5; -3; 1]\}$.

Soustavy tří lineárních rovnic se třemi neznámými je tedy možné řešit pomocí metod, které se užívají při řešení soustav dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Jejich použití u větších soustav by však již bylo nevhodné a zdlouhavé, proto se obvykle počínaje řešením soustav tří rovnic se třemi neznámými žáci na středních školách učí používat metodu nazvanou Gaussova eliminační metoda, kterou popíšeme v následující kapitole.

## 5.2 Gaussova eliminační metoda

Při použití Gaussovy eliminační metody převedeme soustavu pomocí ekvivalentních úprav na soustavu se specificky rozmístěnými koeficienty. Nová soustava musí mít v případě soustavy tří rovnic:

- v první rovnici nenulový koeficient u první neznámé,
- v druhé rovnici nulový koeficient u první neznámé a nenulový koeficient u druhé neznámé,
- v třetí rovnici nulový koeficient u první a druhé neznámé a nenulový koeficient u třetí neznámé.

Ostatní koeficienty mohou být libovolné. Ve zvláštních případech soustavu nepůjde upravit na tento tvar, a tak se bude vyskytovat nulový koeficient i u druhé neznámé v druhé rovnici nebo u třetí neznámé ve třetí rovnici. Bude tomu tak u soustav, které mají nekonečně mnoho řešení, nebo nemají řešení žádné.

Popsaného odstupňovaného tvaru soustavy dosáhneme tím, že nejprve seřadíme rovnice tak, aby v první byl nenulový koeficient u první neznámé. Pak ke druhé a třetí rovnici přičteme nebo od nich odečteme takové násobky první rovnice, aby se v nich eliminovala první neznámá. Následně seřadíme druhou a třetí rovnici tak, aby druhá rovnice měla nenulový koeficient u druhé neznámé a přičteme nebo odečteme takový její násobek od třetí rovnice, aby se v třetí rovnici eliminovala druhá neznámá. Z takto upravené soustavy zpětným dosazením dopočítáme hodnoty všech neznámých.

Častější přístup k řešení je takový, že soustavu přepíšeme do matice. Na levou stranu matice napíšeme koeficienty od všech neznámých, na pravou stranu napíšeme absolutní členy, které od zbytku matice oddělíme svislou čárou. Tím získáme rozšířenou matici soustavy. Tuto matici pak elementárními úpravami převedeme na schodovitý tvar stejným způsobem, jako jsme popsali v předchozím odstavci. Z toho pak návratem k rovnicím dopočítáme hodnoty neznámých. Jedná se o totožné postupy, ovšem práce s maticemi může být přehlednější a rychlejší než přepisování celých rovnic.

**Příklad 5.4:** Řešte soustavu rovnic (Charvát et al., 1999, s. 115):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

**Řešení**: Začneme tím, že soustavu přepíšeme do matice. Píšeme pouze koeficienty před neznámými na levou stranu matice a absolutní členy na stranu pravou. Každý řádek v matici zastupuje jednu rovnici a je třeba kontrolovat, že jsou koeficienty stejných neznámých v matici zapsány pod sebou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Nyní začneme matici upravovat do schodovitého tvaru. Nejprve potřebujeme vytvořit 0 v prvním sloupci druhého a třetího řádku. Od druhého řádku odečteme řádek první a od třetího řádku dvojnásobek prvního řádku:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Pod diagonálou jsou okamžitě samé nuly, matice je tedy ve schodovitém tvaru a my z ní můžeme zpětným dosazením dopočítat řešení tak, že se na jednotlivé řádky opět díváme jako na rovnice s původními neznámými:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice získáme hodnotu neznámé $x_3$:

$$\begin{aligned} -x_3 &= 1 \quad /\cdot(-1) \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Dosazením za $x_3$ do druhé rovnice dopočítáme hodnotu neznámé $x_2$:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \qquad\qquad /-x_3 \\ x_2 &= -x_3 + 1 \\ x_2 &= -1 \cdot (-1) + 1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Nakonec dopočítáme hodnotu neznámé $x_1$, čímž získáme kompletní řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \qquad\qquad /-x_2 - x_3 \\ x_1 &= -x_2 - x_3 + 1 \\ x_1 &= -2 - 1 \cdot (-1) + 1 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Množina řešení soustavy vypadá takto: $K = \{[0; 2; -1]\}$.

Právě vyřešená soustava rovnic měla jedno řešení. Uvedeme ještě dva příklady, na kterých vysvětlíme, jak při řešení soustavy pomocí Gaussovy eliminační metody z matice poznáme, že soustava má nekonečně mnoho řešení nebo nemá řešení žádné.

**Příklad 5.5:** Řešte soustavu rovnic (Charvát et al., 1999, s. 115):

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 13 \end{aligned}$$

**Řešení**: Nejprve soustavu přepíšeme do matice:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 8 & 13 \end{array}\right)$$

Začneme matici upravovat do schodovitého tvaru. V prvním kroku odečítáme od druhého a třetího řádku nenulové násobky řádku prvního tak, aby se v prvních sloupcích v těchto řádcích vyskytovala 0. Od druhého řádku tedy odečteme první řádek a od třetího řádku odečteme šestinásobek prvního řádku:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 8 & 13 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -6r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

V dalším kroku provádíme takovou úpravu, aby v druhém sloupci třetího řádku byla 0. Toho dosáhneme odečtením druhého řádku od řádku třetího:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jelikož druhý a třetí řádek byly naprosto stejné, vznikl v matici po tomto odečtení nulový řádek. To znamená, že třetí rovnice soustavy byla nadbytečná, vypovídala totéž, co první a druhá rovnice. Když se nyní vrátíme k rovnicím, ze kterých budeme dopočítávat řešení, budeme mít soustavu pouze dvou rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_2 - 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Nová soustava je tvořena dvěma rovnicemi, které ale mají tři neznámé. To, že je rovnic méně než neznámých, určuje, že soustava má nekonečně mnoho řešení. Chceme-li tato řešení vyjádřit, zvolíme za jednu neznámou parametr $t$ a zbylé neznámé vyjádříme pomocí tohoto parametru:

$$x_3 = t \quad t \in R$$

$$\begin{aligned} 3x_2 - 4x_3 &= 1 && /+4x_3 \\ 3x_2 &= 4x_3 + 1 && /\cdot\frac{1}{3} \\ x_2 &= \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{3} + \frac{4}{3}t && t \in R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 && /+x_2 - 2x_3 \\ x_1 &= x_2 - 2x_3 + 2 \\ x_1 &= \frac{1}{3} + \frac{4}{3}t - 2t + 2 \\ x_1 &= \frac{7}{3} - \frac{2}{3}t && t \in R \end{aligned}$$

Řešení soustavy je nekonečně mnoho a mají tvar: $K = \left\{\left[\frac{7}{3} - \frac{2}{3}t; \frac{1}{3} + \frac{4}{3}t; t\right], t \in R\right\}$.

Pokud po úpravě matice na schodovitý tvar zůstane v matici méně nenulových řádků, než je počet neznámých v soustavě rovnic, a žádný řádek nemá na levé straně matice samé nuly a současně na pravé číslo různé od nuly, soustava má nekonečně mnoho řešení.

**Příklad 5.6:** Řešte soustavu rovnic (Charvát et al., 1999, s. 115):

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**Řešení**: Přepíšeme soustavu do matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Nejprve opět vytváříme nuly v prvním sloupci druhého a třetího řádku. Začneme tím, že vynásobíme druhý a třetí řádek matice číslem 5. Od druhého řádku pak odečteme trojnásobek prvního řádku a k třetímu řádku přičteme dvojnásobek prvního:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 5 \\ \cdot 5 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 20 & -15 & 5 \\ -10 & -5 & -20 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3r_1 \\ +2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -18 & -1 \\ 0 & 5 & -18 & 4 \end{array}\right)$$

Pro dokončení schodovitého tvaru potřebujeme vytvořit 0 v druhém sloupci třetího řádku. Odečteme tedy od třetího řádku řádek druhý:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -18 & -1 \\ 0 & 5 & -18 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -18 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Získáváme schodovitý tvar matice, můžeme z něj číst řešení. V tomto případě jsou na posledním řádku na levé straně samé nuly a na pravé straně číslo 5, tedy číslo různé od 0. Při přepisu tohoto řádku do rovnice dostáváme:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \quad = \quad 5$$

Žádná uspořádaná trojice $[x_1; x_2; x_3]$, která by splňovala tuto rovnost však neexistuje. Množina řešení soustavy je prázdná: $K = \emptyset$.

Vždy, když při úpravě matice na schodovitý tvar vznikne řádek, který má na levé straně samé nuly a na pravé straně číslo různé od nuly, soustava nemá řešení.

Při řešení soustav více lineárních rovnic s více neznámými Gaussovou eliminační metodou je postup totožný, pouze je většinou potřeba udělat více kroků, než je matice upravena do schodovitého tvaru.

**Příklad 5.7:** Řešte soustavu rovnic se čtyřmi neznámými $x_1, x_2, x_3, x_4$ (Charvát et al., 1999, s. 115):

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

**Řešení:** Postup řešení bude totožný jako v předcházejících příkladech. Můžeme tedy soustavu přepsat do matice a tentokrát již bez komentování upravit na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \\ +2r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -5 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 33 & -15 & -15 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ +11r_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -26 & -26 \end{array}\right)$$

Matice je ve schodovitém tvaru, dopočítáme řešení:

$$\begin{aligned} -26x_4 &= -26 \quad /\cdot\left(-\frac{1}{26}\right) \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x_3 - x_4 &= -1 \qquad /+x_4 \\ -3x_3 &= x_4 - 1 \quad /\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ x_3 &= -\frac{1}{3}\,x_4 + \frac{1}{3} \\ x_3 &= -\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3} \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= -1 \qquad /-5x_3 + 2x_4 \\ -x_2 &= -5x_3 + 2x_4 - 1 \quad /\cdot(-1) \\ x_2 &= 5x_3 - 2x_4 + 1 \\ x_2 &= 5\cdot 0 - 2\cdot 1 + 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + x_4 &= 3 \qquad /+2x_3 - x_4 \\ x_1 &= 2x_3 - x_4 + 3 \\ x_1 &= 2\cdot 0 - 1 + 3 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

Množina řešení obsahuje jednu uspořádanou čtveřici: $K = \{[2;\ -1; 0; 1]\}$.

# 6. Řešení soustav lineárních rovnic na vysoké škole

## 6.1 Gaussova a Jordanova eliminační metoda

Základní metodou využívanou k řešení soustav lineárních rovnic je i v rámci vysokoškolského učiva Gaussova eliminační metoda, která byla již popsána v kapitole o řešení soustav lineárních rovnic na středních školách. Při této metodě vycházíme z poznatku, že ekvivalentní úpravy soustavy lineárních rovnic nemění množinu jejích řešení. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy, kterou následně pomocí ekvivalentních úprav převedeme na schodovitý tvar. Z takto upravené rozšířené matice soustavy nejprve na základě Frobeniovy věty rozhodneme o počtu řešení a v případě, že soustava má řešení, toto řešení, případně nekonečně mnoho řešení, zpětnou substitucí určíme.

Obdobnou metodou, jako je Gaussova eliminační metoda, je Jordanova metoda úplné eliminace. Principem této metody je úprava levé strany rozšířené matice soustavy do tvaru jednotkové matice. Po takovéto úpravě dostáváme na pravé straně rozšířené matice přímo hodnoty neznámých.

**Příklad 6.1**: Řešte soustavu lineárních rovnic (Černá, 1997, s. 86):

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 9x_4 &= 3 \end{aligned}$$

**Řešení:** Nejprve napíšeme rozšířenou matici soustavy $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Tuto matici začneme postupně upravovat tak, abychom na levé straně získali jednotkovou matici. Nejprve na levé straně vytvoříme matici ve schodovitém tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -r_1 \\ -2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & 9 \\ 0 & -7 & 8 & 7 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3r_2 \\ -7r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ \\ -r_3\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6\end{array}\right)$$

Nyní začneme vytvářet nuly nad hlavní diagonálou. Postup bude totožný, jako když jsme vytvářeli schodovitý tvar, pouze tentokrát budeme postupovat odspodu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ \\ \cdot\frac{1}{6}\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\begin{array}{c}-r_4\\ -r_4\\ +6r_4\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\begin{array}{c}+2r_3\\ -r_3\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & 0 & 0 & 7\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\begin{array}{c}+3r_2\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)$$

Matice je upravena tak, že na levé straně je diagonální matice. V posledním kroku úprav pouze vynásobíme jednotlivé řádky takovým reálným číslem, aby byly na hlavní diagonále samé jedničky. Vynásobíme druhý řádek číslem $-1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \cdot(-1)\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)$$

Z takto upravené matice určíme řešení. Hodnost matice $A$ se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy i počtu neznámých, soustava má tedy právě jedno řešení. Toto řešení čteme přímo z pravé strany rozšířené matice soustavy:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1\\ x_2 &= 2\\ x_3 &= 3\\ x_4 &= -1\end{aligned}$$

Řešení zapíšeme jako množinu: $K = \{[1; 2; 3; -1]\}$.

## 6.2 Cramerovo pravidlo

Další možností řešení soustav lineárních rovnic na vysokoškolské úrovni je využití Cramerova pravidla. To vyžaduje znalost pojmu determinant a postup jeho výpočtu. Princip pravidla popisuje následující věta.

**Věta 6.1:** Cramerovo pravidlo: Nechť je dána soustava $n$ lineárních rovnic o $n$ neznámých, jejíž matice soustavy $A$ je regulární. Pak má tato soustava jediné řešení $(x_1, \dots, x_n)$ přičemž platí:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \qquad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n,$$

kde matice $A_j$ je matice vzniklá z matice $A$ nahrazením j-tého sloupce sloupcem pravých stran.

*Důkaz*: Soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat maticově ve tvaru: $A \cdot X = B$, kde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Matice $A$ je z předpokladu regulární, takže k ní existuje inverzní matice $A^{-1}$. Touto inverzní maticí vynásobíme zleva rovnost $A \cdot X = B$, čímž dostáváme $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Odtud $X = A^{-1} \cdot B$, což je jediné řešení dané soustavy.

Pro inverzní matici platí: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{1j} & D_{2j} & \cdots & D_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix}$. Dosazením do $X = A^{-1} \cdot B$ dostáváme:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{1j} & D_{2j} & \cdots & D_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Z této maticové rovnice vyjádříme neznámou $x_j$:

$$x_j = \frac{1}{\det A} \cdot \left(D_{1j} \cdot b_1 + D_{2j} \cdot b_2 + \cdots + D_{nj} \cdot b_n\right) =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Užitím Laplaceovy věty o rozvoji determinantu skutečně dostáváme: $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ pro každé $j = 1, \dots, n$. ■ (Horák & Janyška, 2022)

**Příklad 6.2**: Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla (Horák, 1998, s. 132):

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

**Řešení:** Začneme spočítáním determinantu matice soustavy pomocí Sarrusova pravidla:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \cdot$$

$$\cdot 1 - (-1) \cdot 5 \cdot 2 = 6 + 8 + 5 + 4 - 6 + 10 = 27$$

Determinant je různý od nuly, matice je tedy regulární. Přistoupíme k počítání dílčích determinantů matic, které vzniknou nahrazením $j$-tého sloupce v matici $A$ sloupcem pravých stran:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 29 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 29 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 -$$

$$-(-1) \cdot 29 \cdot 2 = 20 - 4 + 29 - 2 - 20 + 58 = 81$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 5 & 29 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 29 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 29 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \cdot$$

$$\cdot 2 - 10 \cdot 5 \cdot 2 = 174 - 80 + 10 + 116 - 12 - 100 = 108$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 5 & 1 & 29 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 29 \cdot (-4) + 10 \cdot 5 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot (-4) -$$

$$-3 \cdot 29 \cdot 1 - (-1) \cdot 5 \cdot 2 = 6 + 116 + 50 + 40 - 87 + 10 = 135$$

Spočítané determinanty dosadíme do vzorce $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{81}{27} = 3$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{108}{27} = 4$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{135}{27} = 5$$

Množina řešení je tedy: $K = \{[3;\ 4;\ 5]\}$.

Cramerovo pravidlo popisuje řešení soustavy lineárních rovnic v případě, kdy je matice soustavy regulární a soustava má právě jedno řešení, jak bylo řečeno ve větě 6.1. Obecně lze však vzorec z Cramerova pravidla použít i tehdy, kdy matice soustavy není regulární, ovšem platí $h(A) = h(A|b) = r$ a $r < n$, kde $n$ je počet neznámých, tedy u soustavy, která má nekonečně mnoho řešení. Z matice soustavy vybereme libovolný nenulový subdeterminant řádu $r$. Na základě této volby přepíšeme soustavy rovnic tak, že ponecháme pouze ty rovnice, jejichž koeficienty byly obsaženy ve vybraném nenulovém subdeterminantu, a které jsou tedy lineárně nezávislé. Ostatní rovnice jsou lineárně závislé na ponechaných rovnicích, tudíž je můžeme vypustit, aniž bychom změnili množinu řešení. Současně u ponechaných rovnic převedeme $n - r$ neznámých, jejichž koeficienty nebyly obsaženy ve vybraném subdeterminantu, na pravou stranu soustavy tak, že na levé straně zůstane regulární matice. Na tyto neznámé se dále díváme jako na parametry, které můžeme volit libovolně. Získáváme soustavu, jejíž množina řešení je stejná jako množina řešení původní soustavy. Tato soustava má regulární matici, takže ji lze vyřešit pomocí Cramerova pravidla (Bican, 2009).

**Příklad 6.3**: Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla (Černá, 1997, s. 87):

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned}$$

**Řešení:** Začneme spočítáním determinantu matice $A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 - 2 - 12 - 1 + 4 = 0$$

Determinant matice soustavy je roven 0, což znamená, že matice obsahuje lineárně závislé řádky. Závislost lze v tomto případě určit, aniž bychom matici upravovali na schodovitý tvar. Zatímco první dva řádky jsou lineární nezávislé, třetí lze získat jako součet dvojnásobku prvního řádku s druhým řádkem. Totéž platí i o rozšířené matici soustavy, tedy $h(A) = h(A|b) = 2 < n$. Soustava má nekonečně mnoho řešení.

Nyní vybereme libovolný nenulový subdeterminant řádu 2, např. $\det A_{33}$ získaný vynecháním třetího řádku a třetího sloupce matice soustavy:

$$\det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

Na základě této volby upravíme soustavu tak, že ponecháme první dvě rovnice, které jsou lineárně nezávislé, a neznámé $x_3$ převedeme na pravou stranu:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 3 + x_3 \end{aligned}$$

Takto upravenou soustavu, kde $x_3$ je parametr, vyřešíme pomocí Cramerova pravidla:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 - x_3 & -2 \\ 3 + x_3 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 3x_3 + 6 + 2x_3 = 18 - x_3$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 - x_3 \\ 2 & 3 + x_3 \end{vmatrix} = 3 + x_3 - 8 + 2x_3 = -5 + 3x_3$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A_{33}} = \frac{18}{7} - \frac{1}{7}x_3$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A_{33}} = -\frac{5}{7} + \frac{3}{7}x_3$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení: $K = \left\{\left[\frac{18}{7} - \frac{1}{7}x_3;\ -\frac{5}{7} + \frac{3}{7}x_3; x_3\right], x_3 \in R\right\}$

Řešení soustav lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla je poměrně pracné, zejména u soustav s větším počtem neznámých. V praxi se proto příliš často nepoužívá. Obvykle je upřednostňována Gaussova eliminační metoda.

## 6.3 Řešení soustav pomocí inverzní matice

U soustavy lineárních rovnic, jejíž matice je regulární, lze k nalezení řešení použít metodu využívající inverzní matici. Se vztahem pro řešení soustavy, který metoda využívá, jsme se již setkali v rámci důkazu Cramerova pravidla.

Je-li matice $A$ soustavy lineárních rovnic regulární, pak k ní existuje inverzní matice $A^{-1}$ a pro řešení soustavy platí:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

**Příklad 6.4:** Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice (Černá, 1997, s. 86):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

**Řešení:** Začneme ověřením, že je matice $A$ regulární. Spočítáme její determinant:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 8 - 8 - 4 + 4 - 8 = -6$$

Determinant je různý od 0, matice je regulární, což je nutný předpoklad pro použití této metody. Přistoupíme k nalezení inverzní matice $A^{-1}$. Vytvoříme matici $(A|E)$, kterou budeme ekvivalentními úpravami upravovat tak, aby na levé straně vznikla jednotková matice $E$. Pomocí těchto úprav zároveň získáme na pravé straně inverzní matici $A^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -4r_1 \\ -2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -r_3 \\ +2r_3 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \cdot 1/3 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +r_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \sim \\ \cdot 1/2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Našli jsme inverzní matici $A^{-1}$. Řešení rovnice nyní získáme, když vynásobíme inverzní matici a matici $B$, jenž je tvořena sloupcem pravých stran soustavy:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Řešení zapíšeme jako množinu: $K = \{[1; 2;\ -2]\}$.

Stejně jako užití Cramerova pravidla i metoda řešení soustavy lineárních rovnic pomocí inverzní matice má především teoretický význam. Při hledání inverzní matice nejprve upravujeme matici soustavy na schodovitý tvar. Tento postup provádíme také při Gaussově eliminační metodě, v jejímž případě po této úpravě přecházíme rovnou k vyjadřování řešení. U metody řešení pomocí inverzní matice pokračujeme úpravou na jednotkovou matici, přičemž po celou dobu upravujeme současně dvě matice. Na závěr provádíme násobení matic. Tato metoda je tedy numericky i časově podstatně náročnější.

# Závěr

Bakalářská práce se zabývala soustavami lineárních algebraických rovnic a metodami jejich řešení. Cílem práce bylo poskytnout ucelený přehled metod, které se k řešení těchto soustav používají na základních, středních a vysokých školách.

První část práce byla tvořena třemi kapitolami shrnujícími teoretické poznatky o maticích, determinantech a soustavách lineárních rovnic. Byly v nich uvedeny základní definice, věty a vlastnosti, ze kterých poté vycházely metody řešení soustav, jež byly uvedeny v následujících kapitolách.

Zbývající kapitoly se v souladu s cílem práce zaobíraly popisem konkrétních metod řešení soustav lineárních rovnic. Všechny metody byly předvedeny na řešených příkladech. Čtvrtá kapitola byla věnována metodám řešení, které jsou užívány na základních školách. V tomto období se studenti učí řešit soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. K řešení se používá dosazovací, sčítací a porovnávací metoda a grafické řešení. Součástí kapitoly byly rovněž ukázky slovních úloh řešených pomocí soustav dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými.

Pátá kapitola byla věnována metodám užívaným k řešení soustav na středních školách. Studenti zde opět používají metody, které se naučili na základní škole, tentokrát převážně při řešení soustav tří lineárních rovnic se třemi neznámými. Také se však poprvé seznamují s Gaussovou eliminační metodou, která je pro řešení větších soustav, počínaje právě soustavami tří rovnic se třemi neznámými, vhodnější.

Poslední kapitola byla věnována metodám řešení, které jsou vyučovány na vysokých školách jakožto součást lineární algebry. Tato kapitola značně vycházela z teoretických poznatků, které byly uvedeny v prvních třech kapitolách. Také na vysokoškolské úrovni je obvykle nejpoužívanější metodou Gaussova eliminační metoda. Kromě ní lze použít podobnou metodu nazvanou Jordanova metoda úplné eliminace. Další užívanou metodou je Cramerovo pravidlo, které k výpočtu řešení užívá determinanty. Poslední popsaná metoda umožňuje najít řešení soustavy pomocí inverzní matice k matici soustavy.

Práci je možné použít jako studijní materiál pro zájemce o získání nových poznatků nebo prohloubení znalostí o maticích, determinantech, soustavách lineárních rovnic a převážně o metodách, které se používají k řešení těchto soustav.

# Použitá literatura


Bečvář, J. (2005). *Lineární algebra* [online]. 3. vyd. Praha: MatfyzPress. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/becvar_-_linearni_algebra.pdf.

Bican, L. (2009). *Lineární algebra a geometrie*. 2. vyd. Praha: Academia.

Černá, B. (1997). *Cvičení z lineární algebry*. Brno: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně.

Černá, B. (2007). *Matematika – lineární algebra*. 4. vyd. Brno: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně.

Fajmon, B. (2021). *Algebra 2 (MA 0005)* [online]. Brno: Katedra matematiky PEDF MUNI. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/el/ped/jaro2022/MA0011/um/algebra2.pdf.

Hašek, R. (2018). *Lineární algebra – KMA/LA* [online]. České Budějovice: Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/lalgebra/LA_TextyPrednasek_ZS18_1.pdf.

Hefferon, J. (2020). *Linear algebra* [online]. 4. vyd. Colchester, Vermont USA: Saint Michael's College. Dostupné z: https://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/book.pdf.

Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1999). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií: Rovnice a jejich soustavy.* Praha: Prometheus.

Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (2000). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií: Funkce.* Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus.

Horák, P. (1998). *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.

Horák, P., Janyška, J. (2022). *Lineární algebra. Učební text* [online]. Brno: Masarykova univerzita. Dostupné z: https://www.math.muni.cz/~janyska/LA_CELE.pdf.

Charvát, J., Zhouf, J., & Boček, L. (1999). *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice.* Dotisk 3. vyd. Praha: Prometheus.

Janeček, F. (1995). *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. Dotisk 5. vyd. Praha: Prometheus.

Marval, M. (2001). *Determinanty* [online]. Opava: Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě. Dostupné z: https://www.slu.cz/math/cz/knihovna/docs/algebra1/7.-determinanty/.

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2019). *Matematika pro 9. ročník základní školy, 1. díl. Soustavy rovnic, funkce, lomené výrazy.* Dotisk 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus.

Olšák, P. (2013). *Úvod do algebry, zejména lineární*. 2. přeprac. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze.

# Seznam obrázků

Obrázek 1: Sarrusovo pravidlo. ........................................................................ 20
Obrázek 2: Řešitelnost soustav lineárních rovnic. ..................................................... 31
Obrázek 3: Různoběžné přímky. ........................................................................ 40
Obrázek 4: Rovnoběžné přímky. ........................................................................ 42
Obrázek 5: Totožné přímky. ............................................................................ 43