Fyzika (z řeckého φυσικός (physikos): přírodní, ze základu φύσις (physis): příroda, archaicky též silozpyt) je vědní obor, který zkoumá zákonitosti přírodních jevů.

Fyzikální zákon vyjadřuje objektivní souvislost mezi fyzikálními jevy nebo veličinami.

Kvalitativní (mají charakter tvrzení)

„Vodičem, na jehož koncích se udržuje rozdíl potenciálů prochází elektrický proud."

Kvantitativní (zapisují se formou matematických vztahů – rovnic a vzorců)

Např. Ohmův zákon $U = R \cdot I$

Fyzikální vlastnosti, stavy a změny v přírodě, které je možno změřit a zapsat číselnou hodnotou, vyjadřujeme **fyzikálními veličinami** (např. objem, hmotnost, teplota, elektrické napětí, …). Pro jednotlivé fyzikální veličiny používáme smluvené **značky**: objem V, hmotnost m, teplota T, rychlost v, elektrický náboj Q, síla F, …

Měřit fyzikální veličinu znamená určit její **hodnotu** porovnáním s určitou, předem smluvenou, hodnotou veličiny téhož druhu zvolenou za **měřící jednotku** (= jednotku fyzikální veličiny). Výsledkem porovnání měřené fyzikální veličiny se zvolenou měřící jednotkou je **číselná hodnota**. Číselná hodnota fyzikální veličiny udává, kolikrát je hodnota měřené veličiny větší než zvolená měřící jednotka.

Hodnota **fyzikální veličiny** je tedy určena ***číselnou hodnotou*** a příslušnou měřící ***jednotkou***.

Hodnota fyzikální veličiny = číselná hodnota . jednotka.

Je-li X obecně symbol fyzikální veličiny, {X} její číselná hodnota a [X] měřící jednotka, platí:

$$X = \{X\} \, .[X]$$

Číselná hodnota {X} označuje **kvantitu** (množství), měřící jednotka [X] **kvalitu** fyzikální veličiny.

Platí-li např. pro velikost rychlosti 15 $m.s^{-1}$, pak {v} = 15 a [v] = 1 $m.s^{-1}$.

<u>Číselná hodnota fyzikální veličiny nemá sama o sobě žádný smysl</u>, neboť hodnotu fyzikální veličiny můžeme vyjádřit v různých jednotkách. Proto <u>je nutné uvádět číselnou hodnotu fyzikální veličiny vždy s její jednotkou!</u>

Zápis l = 25 nemá smysl (předpokládáme, že l značí délku). Není uvedena jednotka - může tedy být l = 25 mm nebo l = 25 cm nebo l = 25 m. Zápis bez jednotek není připustný, neboť vede k nejednoznačnosti.

Fyzikální veličiny

Skalární: jsou určeny pouze velikostí (hodnotou) a jednotkou (čas, hmotnost, energie, délka, teplota, frekvence, práce, náboj, odpor, kapacita, …)

Vektorové: jsou určeny pouze velikostí (hodnotou), orientovaným směrem a jednotkou (rychlost, síla, …). Znázorňují se orientovanou úsečkou.

Mezinárodní soustava jednotek

Mezinárodní soustavu jednotek tvoří tyto skupiny jednotek:

Základní jednotky (a veličiny)

Definují se přírodním dějem.
Jde o 7 jednotek a veličin.

Veličina		Jednotka SI	
Název	**Symbol**	**Název**	**Značka**
délka	l	metr	m
hmotnost	m	kilogram	kg
čas	T	sekunda	s
elektrický proud	I	ampér	A
termodynamická teplota	T	kelvin	K
látkové množství	n	mol	mol
svítivost	I	kandela	cd

Odvozené jednotky

Odvozují se ze základních jednotek pomocí definičních vztahů odpovídajících fyzikálních veličin:

$m.s^{-1}$, $kg.m^{-3}$, …

Některé z nich mají své názvy podle význačných fyziků:

např. $N = kg.m.s^{-2}$ (newton), $J = kg.m^2.s^{-2}$ (joule), …

Odvozené jednotky

Rovinný úhel	radián	rad	$m\ m^{-1} = 1$
Prostorový úhel	steradián	sr	$m^2\ m^{-2} = 1$
Kmitočet	hertz	Hz	s^{-1}
Síla	newton	A	$m\ kg\ s^{-2}$
Tlak, napětí	pascal	Pa	$N\ m^{-2}$
Energie, práce, …	joule	J	N m
Výkon	watt	W	$J\ s^{-1}$
Elektrický náboj	coulomb	C	A s
Elektrický potenciál	volt	V	$W\ A^{-1}$
Elektrický odpor	ohm	Ω	$V\ A^{-1}$

Násobné a dílčí jednotky tvoří se ze základních a odvozených jednotek <u>pomocí mocnin o základu 10:</u>

Jednotky násobné				**Jednotky dílčí**		
exa-	E	10^{18}	**základní veličina**	mili-	m	10^{-3}
peta-	P	10^{15}		mikro-	μ	10^{-6}
tera-	T	10^{12}		nano-	n	10^{-9}
giga-	G	10^{9}		piko-	p	10^{-12}
mega-	M	10^{6}		femto-	f	10^{-15}
kilo-	k	10^{3}		atto-	a	10^{-18}

V některých případech je možné též použít předpon *centi*- (se značkou c), *deci*- (d) a *hekto*- (h) - např. 1 cm = 0,01 m, 1 dm = 0,1 m, 1 hl = 100 l, …

Pozor! Je zde jedna výjimka: <u>kilogram je jednotka základní, nikoli násobná !!!</u>

Násobky jednotek

Prefix	Symbol for Prefix		Scientific Notation
exa	E	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
peta	P	1 000 000 000 000 000	10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga	G	1 000 000 000	10^{9}
mega	M	1 000 000	10^{6}
kilo	k	1 000	10^{3}
hecto	h	100	10^{2}
deka	da	10	10^{1}
----	--	1	10^{0}
deci	d	0.1	10^{-1}
centi	c	0.01	10^{-2}
milli	m	0.001	10^{-3}
micro	µ	0.000 001	10^{-6}
nano	n	0.000 000 001	10^{-9}
pico	p	0.000 000 000 001	10^{-12}
femto	f	0.000 000 000 000 001	10^{-15}
atto	a	0.000 000 000 000 000 001	10^{-18}

https://www.jednotky.cz/

International System of Units (SI)

SI Base Units

Base Quantity	Name	Symbol
Length	meter	m
Mass	kilogram	kg
Time	second	s
Electric current	ampere	A
Temperature	kelvin	K
Amount of substance	mole	mol
Luminous intensity	candela	cd

SI Derived Units

Derived Quantity	Name	Symbol	Equivalent SI units
Frequency	hertz	Hz	s^{-1}
Force	newton	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Pressure	pascal	Pa	N/m^2
Energy	joule	J	N·m
Power	watt	W	J/s
Electric charge	coulomb	C	s·A
Electric potential	volt	V	W/A
Electric resistance	ohm	Ω	V/A
Celsius temperature	degree Celsius	°C	K*

*Unit degree Celcius is equal in magnitude to unit kelvin.

SI Prefixes

Factor	Name	Symbol	Numerical Value
10^{12}	tera	T	1 000 000 000 000
10^{9}	giga	G	1 000 000 000
10^{6}	mega	M	1 000 000
10^{3}	kilo	k	1 000
10^{2}	hecto	h	100
10^{1}	deka	da	10
10^{-1}	deci	d	0.1
10^{-2}	centi	c	0.01
10^{-3}	milli	m	0.001
10^{-6}	micro	μ	0.000 001
10^{-9}	nano	n	0.000 000 001
10^{-12}	pico	p	0.000 000 000 001

- Adapted from NIST Special Publication 811
- SI rules and style conventions recommend using spaces rather than commas to separate groups of three digits.

FLINN SCIENTIFIC, INC

"Your Safer Source for Science Supplies"

AP6899

Vedlejší jednotky

jejich používání je příslušnou normou dovoleno, i když do jednotek soustavy SI nepatří. Povolení bylo uděleno na základě praktických důvodů. Jedná se např. o tyto jednotky:

minuta (min), hodina (h), litr (l), tuna (t), …

Při výpočtech je ale převádíme na jednotky soustavy SI.

Table 6. Non-SI units accepted for use with the International System of Units

Quantity	Name of unit	Symbol for unit	Value in SI units
time	minute	min	1 min = 60 s
	hour [a]	h	1 h = 60 min = 3600 s
	day	d	1 d = 24 h = 86 400 s
plane angle	degree [b, c]	°	$1° = (\pi/180)$ rad
	minute	′	$1′ = (1/60)° = (\pi/10\,800)$ rad
	second [d]	″	$1″ = (1/60)′ = (\pi/648\,000)$ rad
area	hectare [e]	ha	1 ha = 1 hm^2 = 10^4 m^2
volume	litre [f]	L, l	1 L = 1 l = 1 dm^3 = 10^3 cm^3 = 10^{-3} m^3
mass	tonne [g]	t	1 t = 10^3 kg

Mechanika

- 1. **kinematika** – zajímá se o popis pohybu (trajektorie, dráha, rychlost, …). Kinematika tedy zkoumá **JAK** se příslušné těleso či hmotný bod pohybuje.

- 2. **dynamika** – zajímá se o příčiny pohybu (tj. o síly působící na daný hmotný bod či těleso). Zkoumá, **PROČ** se těleso či hmotný bod pohybuje.

Kinematika

= fyzika pohybu x neřešíme příčiny pohybu

- **Mechanickým pohybem** se ve fyzice označuje takový pohyb, při kterém dochází ke změně polohy tělesa vzhledem ke vztažné soustavě, opakem **klid**.
- **Klid a pohyb a klid těles jsou relativní.** Proto se určuje **vztažná soustava**
- **Fyzikální těleso** je každá ohraničená část látky bez ohledu na skupenství.
- **Hmotný bod** je každé těleso, jehož rozměry lze vzhledem k uvažovaným vzdálenostem zanedbat.

Vztažná soustava

Při **mechanickém pohybu** mění těleso svou polohu vzhledem k jiným tělesům ve svém okolí. Pokud těleso nebo jeho části tuto polohu vzhledem k okolním tělesům nemění, říkáme, že je v **klidu**.

Soustava těles, ke kterým vztahujeme pohyb nebo klid sledovaného tělesa, se nazývá **vztažná soustava**. Vztažnou soustavu se snažíme volit tak, aby popis pohybu tělesa byl co nejjednodušší.

Vztažná (nebo také referenční) soustava je tedy zvolená skupina těles (příp. i jediné vztažné těleso), které jsou vzájemně v klidu, anebo zadaném či známém vzájemném pohybu (referenční tělesa). Vztažné soustavy dělíme na inerciální a neinerciální.

Za vztažnou soustavu nejčastěji volíme povrch Země, nebo tělesa pevně spojená s povrchem Země, např. silnice, budovy, … K nim vztahujeme pohyb nebo klid např. dopravních prostředků a jiných pohyblivých těles.

Za vztažnou soustavu někdy volíme také tělesa, která se sama vzhledem k povrchu Země pohybují.

Příklad

Předmět, ležící na sedadle jedoucího auta je vzhledem k tomuto vozidlu v klidu, ale pohybuje se vzhledem k povrchu Země. Tentýž předmět na sedadle stojícího automobilu je v klidu vzhledem k vozidlu i k povrchu Země, ale koná otáčivý pohyb kole zemské osy a spolu se Zemí obíhá kolem Slunce.

Sledujeme-li určitý pohyblivý předmět ve vagonu jedoucího vlaku , vztahujeme jeho pohyb nebo klid ke stěnám vagonu a neuvažujeme jeho pohyb vzhledem k okolní krajině

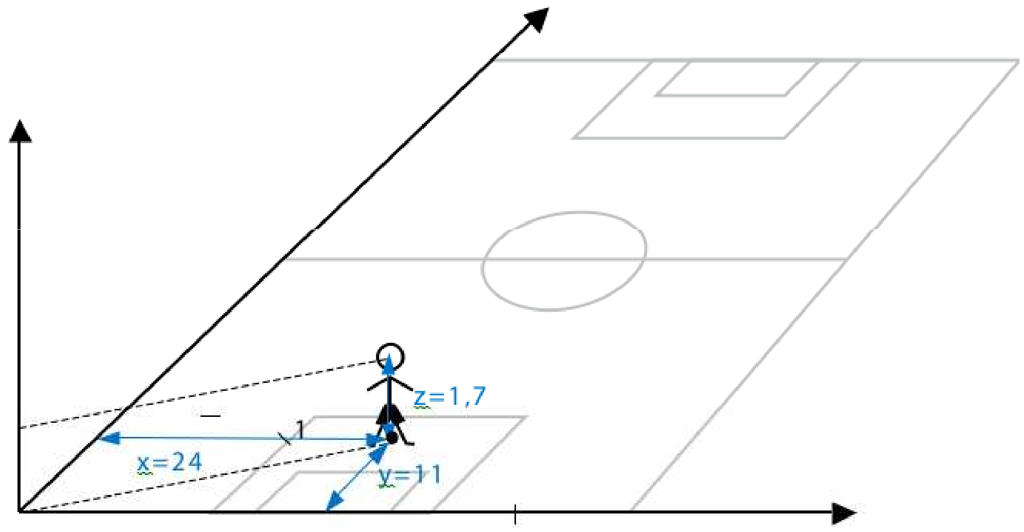
Poloha hmotného bodu

Chceme-li popsat mechanický pohyb hmotného bodu vzhledem ke zvolené vztažné soustavě, musíme znát jeho polohu v libovolném okamžiku jeho pohybu. Tu určujeme pomocí vhodné pravoúhlé soustavy souřadnic, kterou spojujeme se zvolenou vztažnou soustavou.

Soustava souřadnic

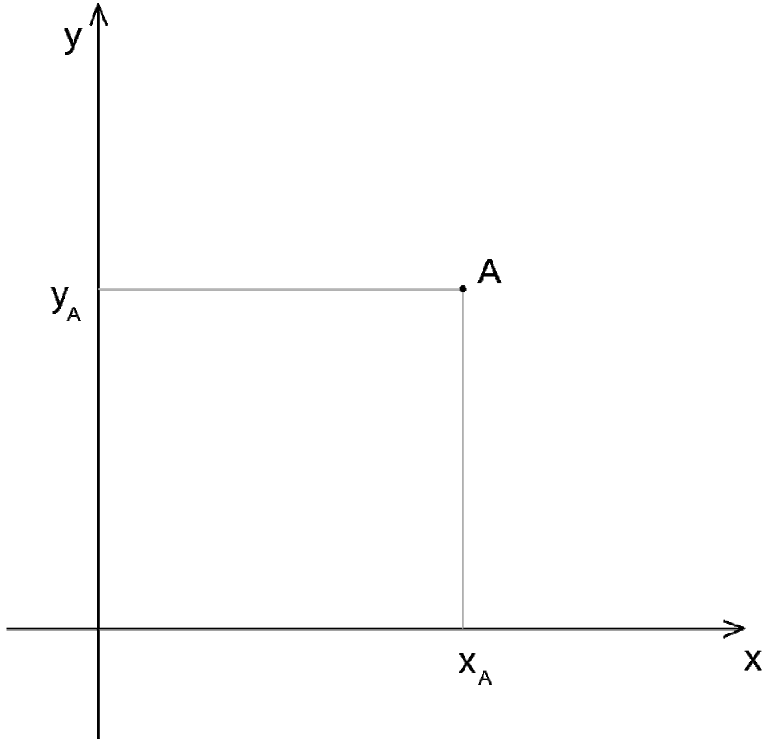
Volbou vztažné soustavy neříkáme nic o zvolené souřadnicové soustavě. Zatímco pojem vztažné soustavy má fyzikální obsah, je pojem souřadnicové soustavy matematického rázu a závisí na libovůli subjektu bez fyzikálního obsahu. V dané vztažné soustavě lze použít libovolný souřadnicový systém. Obvykle se volí takový systém souřadnic, který popis daného pohybu co nejvíce zjednodušuje.

Mezi jednotlivými systémy souřadnic lze přecházet určitou matematickou transformací souřadnic, která opět nemění podkladovou fyziku, ale jen vlastnosti jejího popisu.

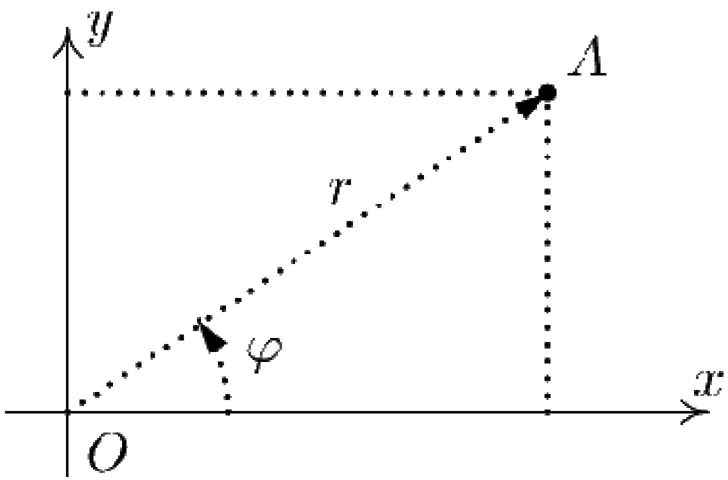


Soustavy souřadnic v rovině

Kartézská soustava souřadnic



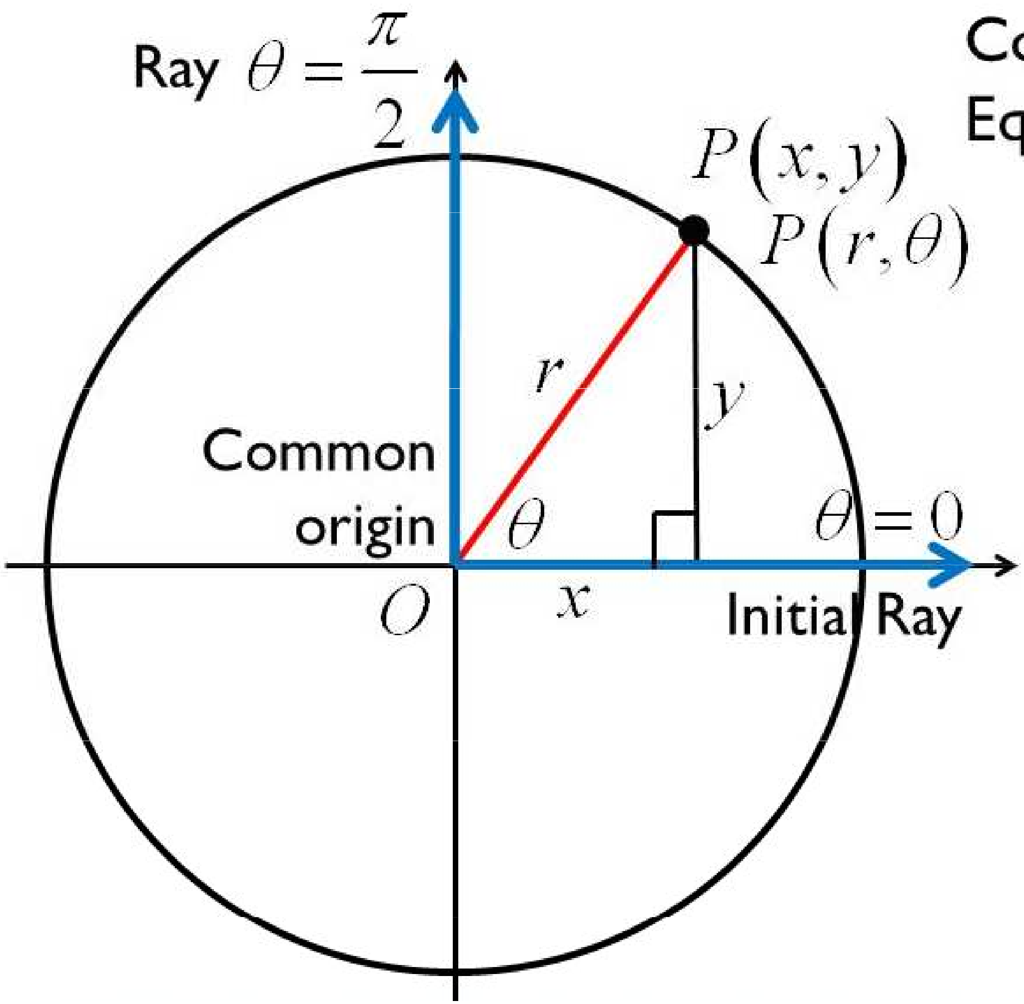
Polární soustava souřadnic



$$r \in [0, \infty),\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Kartézská a polární soustava souřadnic - transformace



Coordinate Conversion Equations:

$$x = r\cos\theta$$

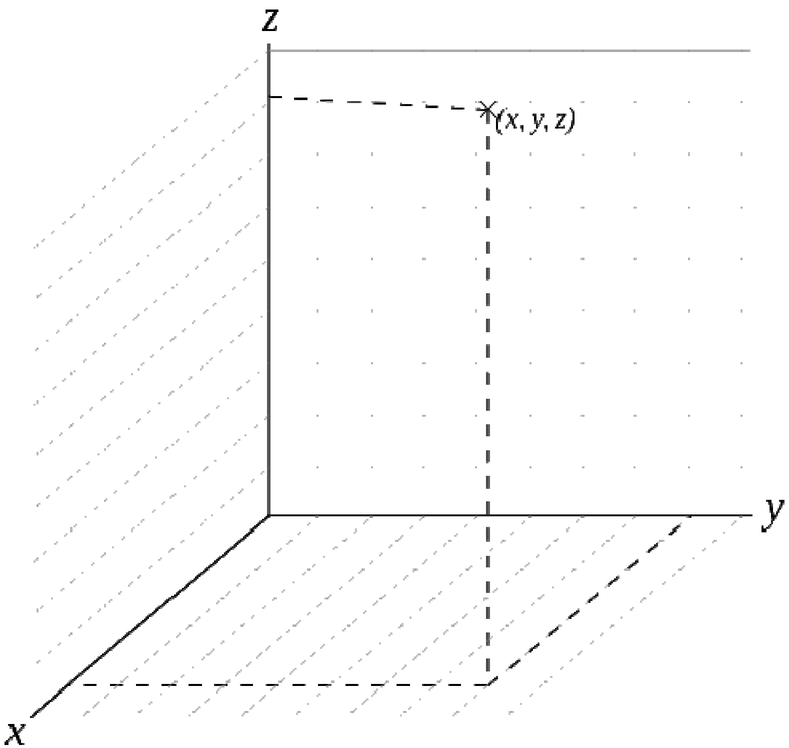
$$y = r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

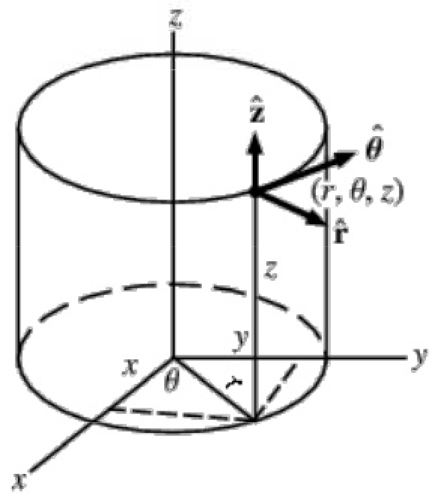
Soustavy souřadnic v prostoru

Kartézské souřadnice



Cylindrical Coordinates

Just add the vertical dimension



Conversion from cylindrical to cartesian (rectangular):

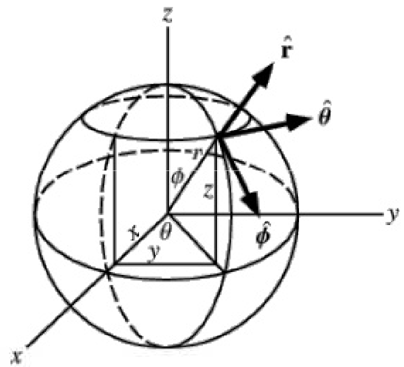
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

Conversion from cartesian to cylindrical:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \sin\theta = \frac{y}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$z = z$$

Spherical Coordinates

like the earth, but not exactly



Note: In this picture, r should be ρ.

Conversion from spherical to cartesian (rectangular):

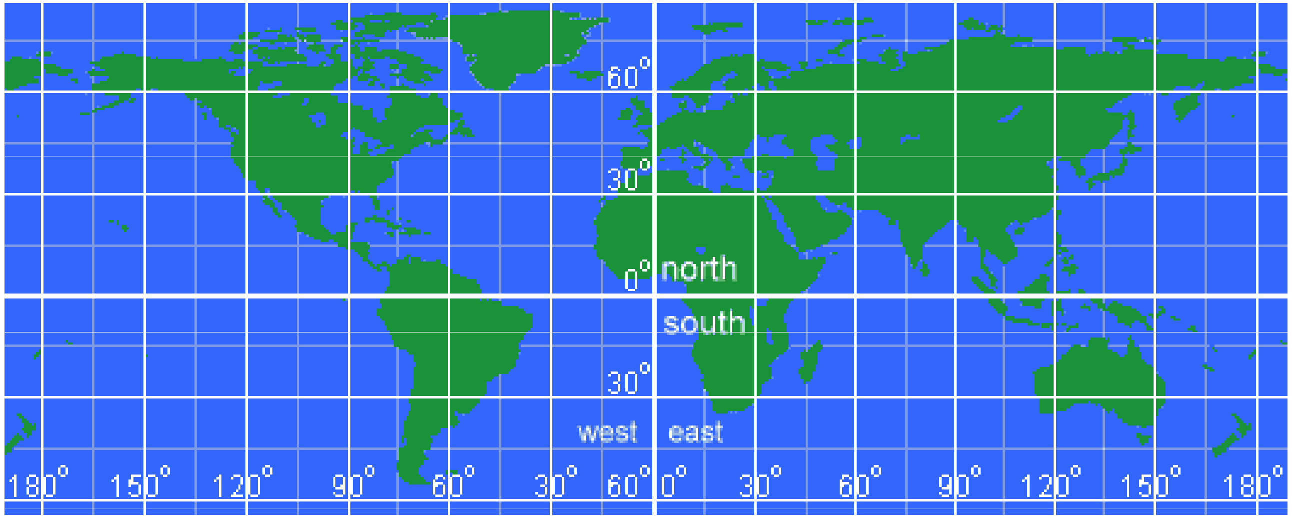
$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\varphi$$

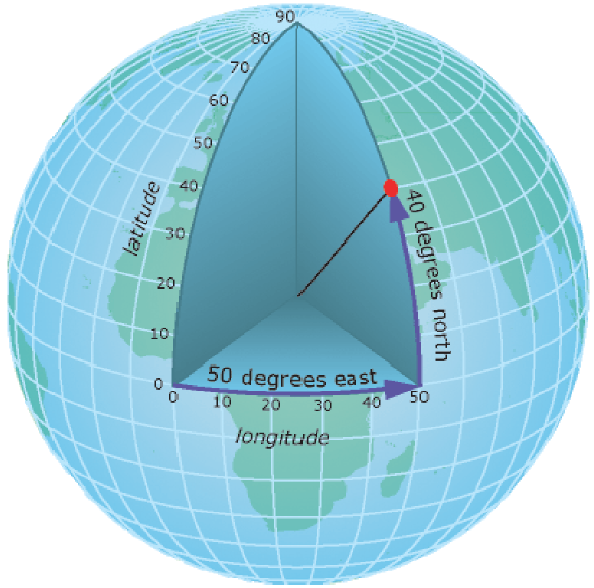
Conversion from cartesian to spherical:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \sin\theta = \frac{y}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\cos\varphi = \frac{z}{\rho}$$

Příklad

Medvěd šel ze svého obydlí 1 km na jih. Poté změnil směr a kráčel 1 km na východ. Pak se otočil a kráčel 1 km k severu a ocitl se přesně v místě odkud vyšel (t.j. u svého obydlí). Jakou barvu má medvěd?





Odpověď: Bílý lední medvěd, bydlí na severním pólu.

Vektory

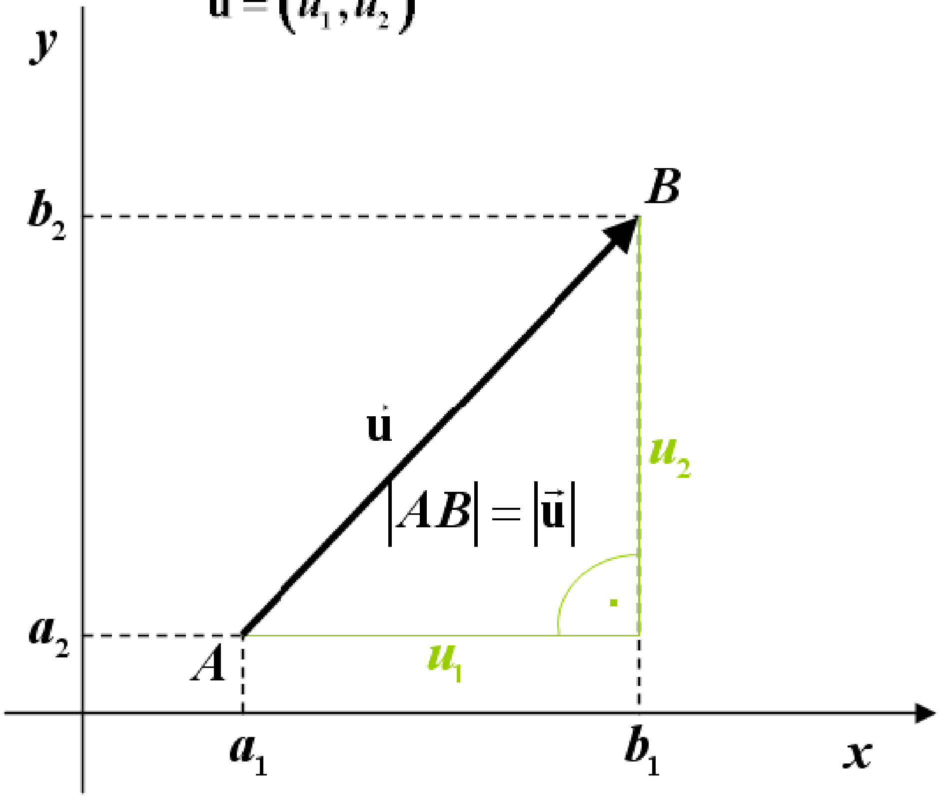
Vektor je <u>orientovaná úsečka</u>. Má svůj <u>směr</u> a má svoji <u>velikost</u>.

v rovině od $A[a_1,a_2]$ k $B[b_1,b_2]$

$$u_1 - b_1 - a_1$$

$$u_2 = b_2 - a_2$$

$$\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$$



v prostoru od $A[a_1,a_2,a_3]$ k $B[b_1,b_2,b_3]$

$$u_1 = b_1 - a_1$$

$$u_2 = b_2 - a_2$$

$$u_3 = b_3 - a_3$$

$$\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$$

Hodnoty a_1, a_2, a_3 a b_1, b_2, b_3 jsou **souřadnice volného vektoru** který nevychází z bodu [0, 0] **.**

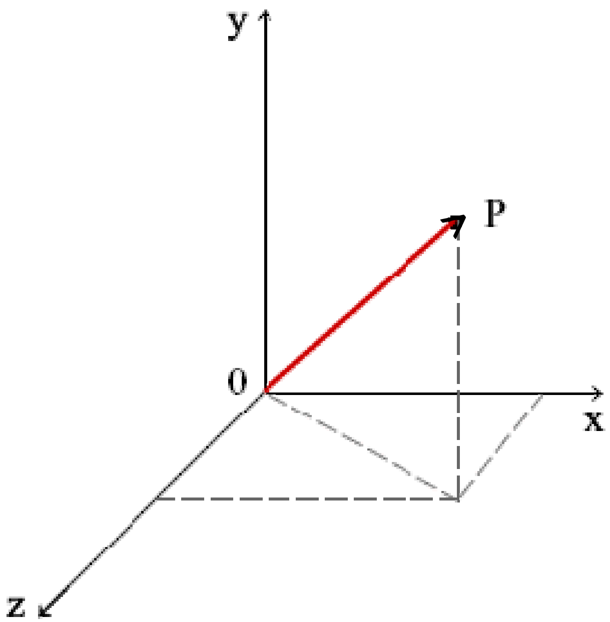
Hodnoty u_1 a u_2 jsou **souřadnice vázaného vektoru** který vychází z bodu [0, 0] **.**

Vektory

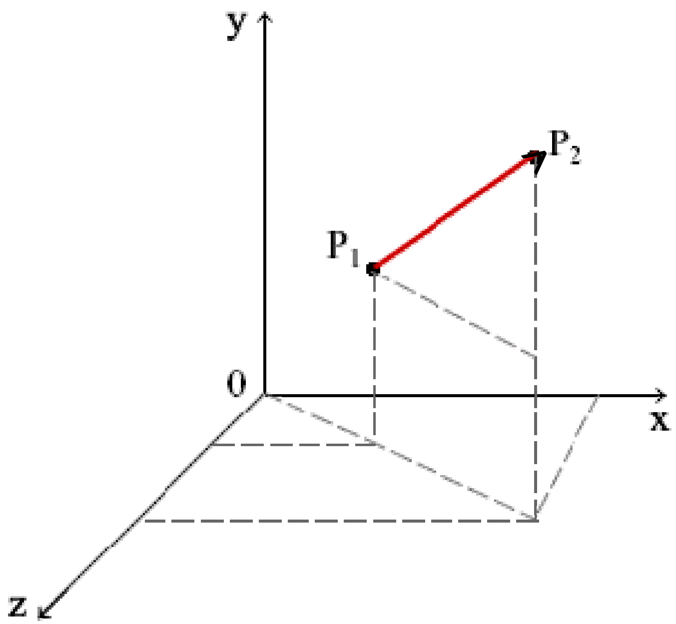
Vektory vázané na určitý bod v prostoru (např. síla působící v bodě zvaném působiště síly, okamžitá rychlost hmotného bodu v daném místě trajektorie, …).

Vektory vázané na přímku, na níž leží vektor (např. síla působící na tuhé těleso).

Vektory volné nejsou vázány na určité umístění (např. moment dvojice sil).

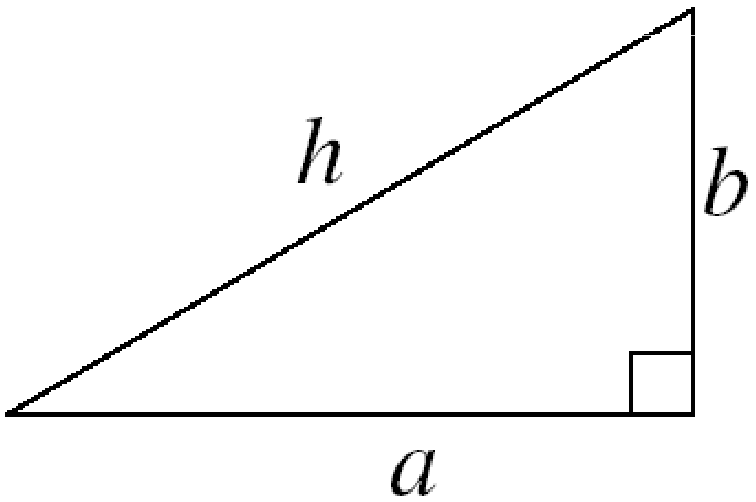


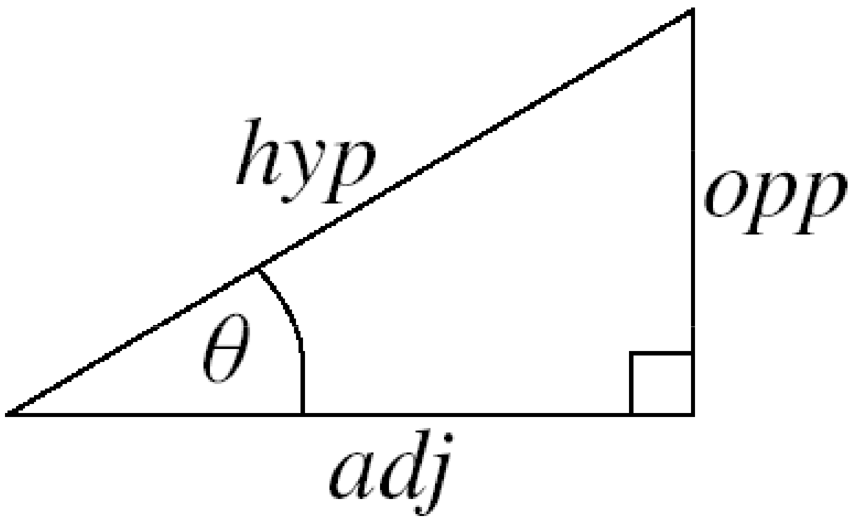
$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Pythagorova věta, úhly v pravoúhlém trojúhelníku





Pythagoras's Theorem

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Trigonometric Ratios

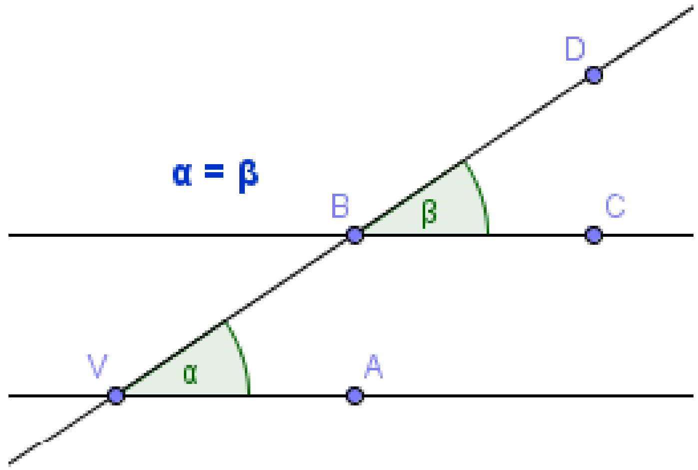
$$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp}$$

$$\cos(\theta) = \frac{adj}{hyp}$$

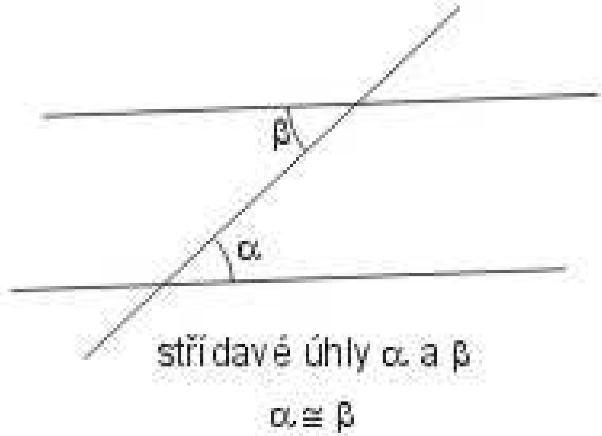
$$\tan(\theta) = \frac{opp}{adj}$$

Dvojice úhlů - souhlasné a střídavé

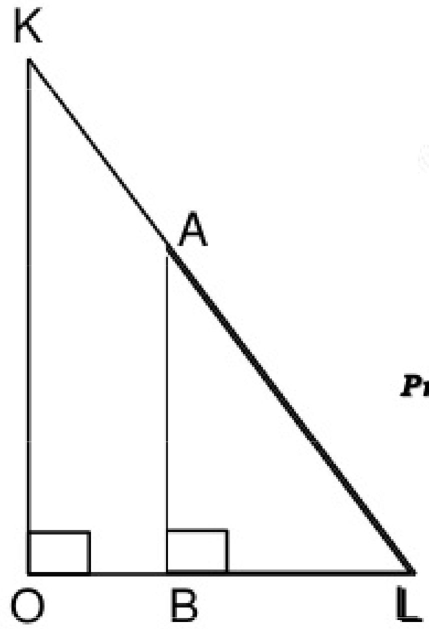
Souhlasné úhly jsou úhly, jejichž první ramena jsou rovnoběžná a druhá leží na jedné přímce. Musí také platit, že úhly mají stejnou orientaci. Souhlasné úhly jsou ***shodné***.



Střídavé úhly jsou dva úhly, jejichž první ramena leží na jedné přímce a druhá ramena jsou rovnoběžná, přitom směr příslušných ramen je opačný (střídavý). Střídavé úhly jsou ***shodné***.



Podobnost trojúhelníků

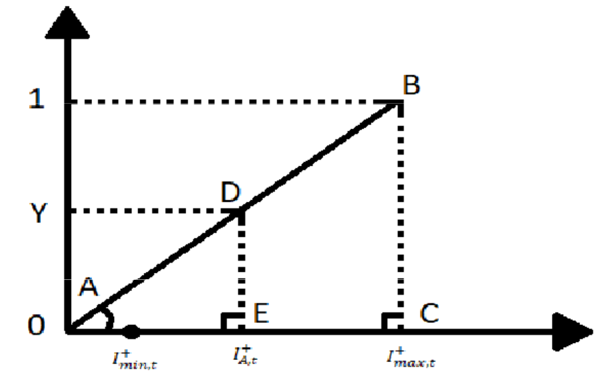


Congruent Angles

$$\angle KOL \cong \angle ABL$$
$$\angle LKO \cong \angle LAB$$
$$\angle KLO \cong \angle ALB$$

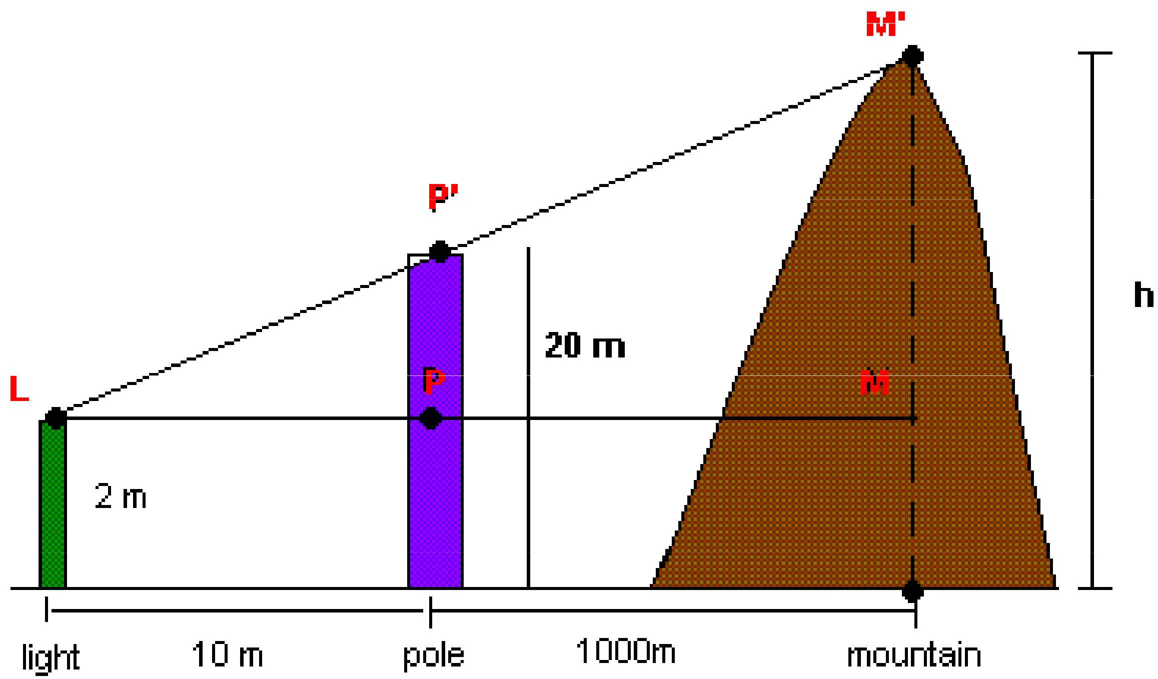
Proportional Sides

$$\frac{KO}{AB} = \frac{KL}{AL} = \frac{OL}{BL}$$

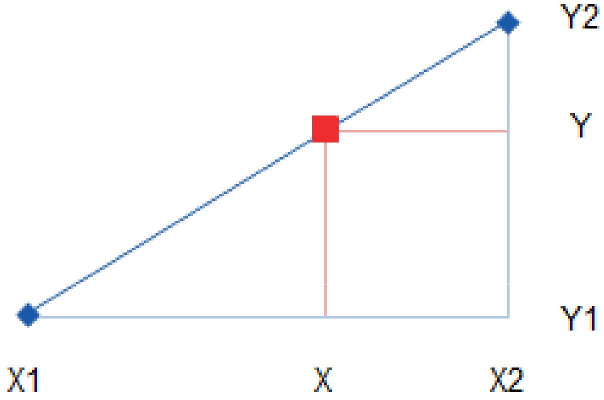


Lze využít k lineární interpolaci hodnot v tabulkách.

Lze využít při geodetických měřeních.

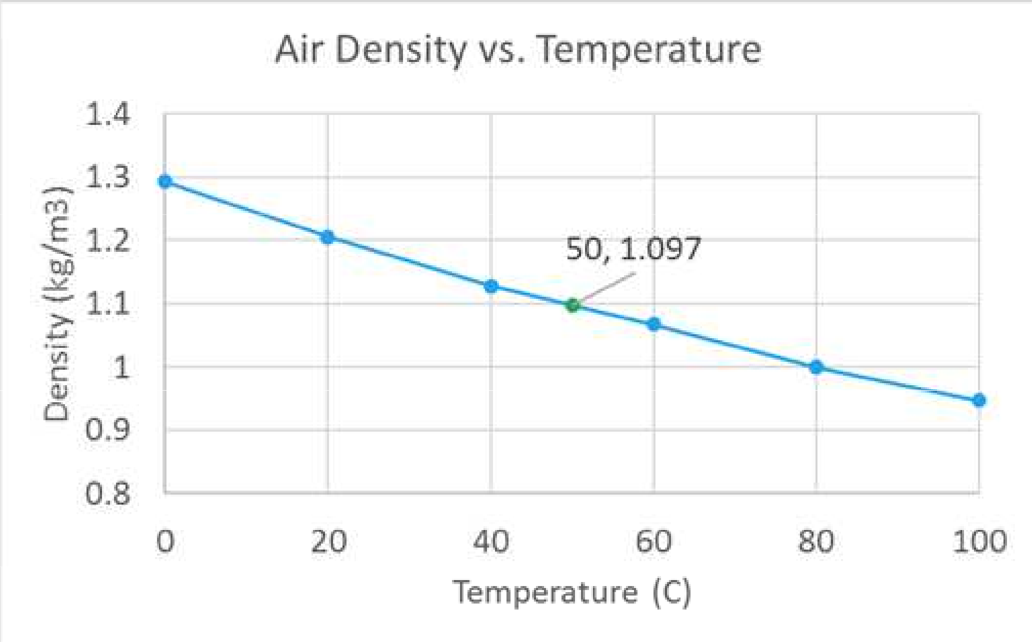


Lineární interpolace tabelovaných dat na základě podobnosti trojúhelníků



$$\frac{(X - X1)}{(X2 - X1)} = \frac{(Y - Y1)}{(Y2 - Y1)}$$

$$Y = Y1 + (X - X1)\,\frac{(Y2 - Y1)}{(X2 - X1)}$$



Temperature	Density
- t -	- ρ -
(°C)	(kg/m3)
0	1.293
20	1.205
40	1.127
60	1.067
80	1
100	0.946

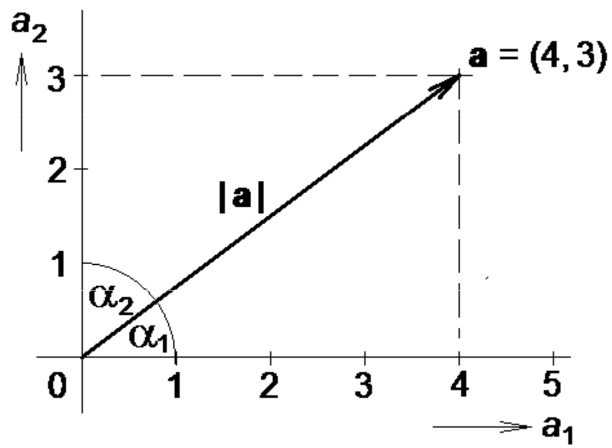
D_{50} = 1,067 + (50-40).(1,127-1,067)/(60-40)

D_{50} = 1,067 + (1,127-1,067)/2

D_{50} = 1,067 + 0,030 = 1,097 kg/m^3

Směrové kosiny

Směrové kosiny se ve statice (mechanice těles) označují kosiny úhlů, které vektor **a** svírá s **kladnými směry os souřadnicového systému**.



$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2}$$

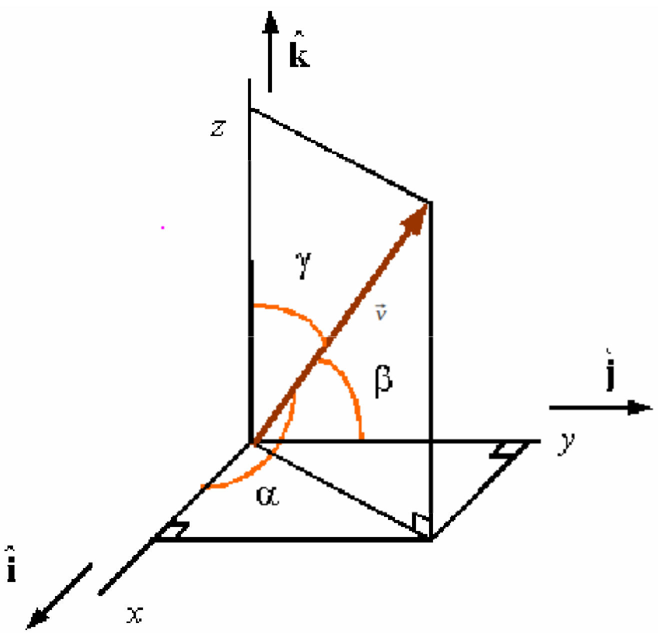
$$\cos\alpha_i = \frac{a_i}{|a|} \qquad \sum_{\forall i} \cos^2\alpha_i = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$



Rovnoběžnost vektorů

podíl *x*-ových, *y*-ových a *z*-ových souřadnic se musí rovnat jednomu číslu (násobku).

v rovině	v prostoru
$\vec{u} = (u_1, u_2)$	$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$
$\vec{v} = (v_1, v_2)$	$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$
$k = \dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2}$	$k = \dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{u_3}{v_3}$

k = konst.

Úhel 2 vektorů

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

úhel svíraný dvěma vektory se pohybuje v **rozmezí 0°- 180°**. Pokud by při výpočtu vyšlo θ = 250°, bude mít úhel svíraný dvěma vektory velikost 360°- 250° = 110°.

v rovině

$$\cos\varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

v prostoru

$$\cos\varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Kolmost vektorů - pravý úhel $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (= skalární součin vektorů)

Podmínka pro kolmost vektorů plyne z výše uvedeného vztahu pro výpočet úhlu vektory svíraného. Pro úhel 90° má cosinus hodnotu 0, tím pádem je podmínka kolmosti vektorů následující:

v rovině

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$$

v prostoru

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$$

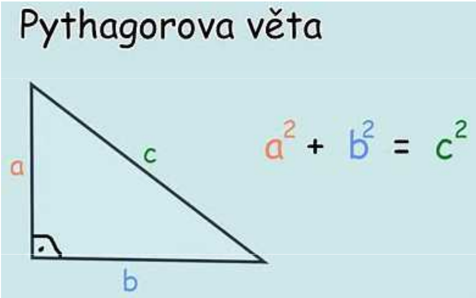
Velikost vektoru

v rovině

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

v prostoru

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$



Operace se skaláry a vektory

- **Zákon komutativní** (záměna)

$$\boxed{\begin{gathered} A + B = B + A \\ A.B = B.A \end{gathered}}$$

- **Zákon distributivní** (roznásobení)

$$\boxed{\begin{gathered} A.(B + C) = A.B + A.C \\ A + (B.C) = (A + B).(A + C) \end{gathered}}$$

- **Neutrálnost nuly a jedničky**

$$\boxed{A + 0 = A}$$

A	0	A+0
0	0	0
1	0	1

$$\boxed{A.1 = A}$$

A	1	A.1
0	1	0
1	1	1

Např.

skalární součin 2 vektorů <u>je</u> komutativní
vektorový součin 2 vektorů <u>není</u> komutativní

Součin vektoru a skaláru (reálného čísla) *k*

Násobením vektoru <u>reálným číslem *k*</u> dojde jen k vynásobení obou jeho souřadnic číslem *k*. V geometrické interpretaci se to projeví „natažením“ nebo „zmenšením“ vektoru, případně jeho převrácením, pokud je *k* záporné.

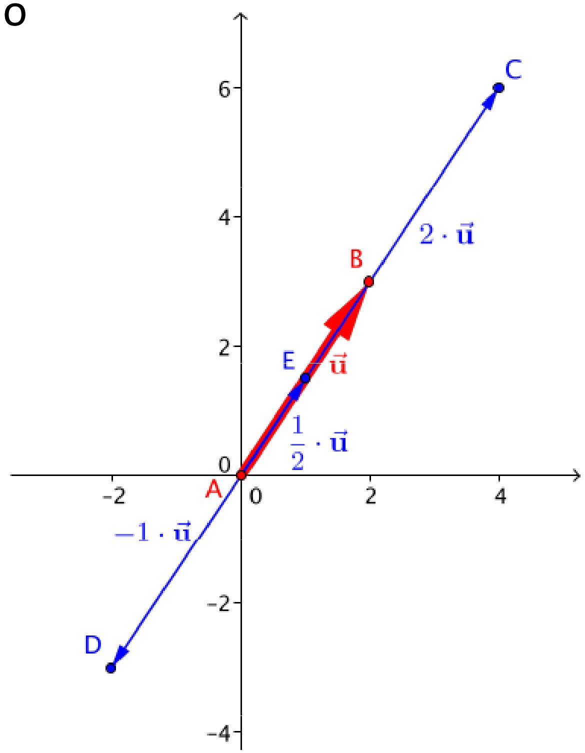
Speciálním případem je např. násobení jednotkového vektoru jeho velikostí

v rovině

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2)$$

v prostoru

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$$



Opačný vektor -*u* k vektoru *u*

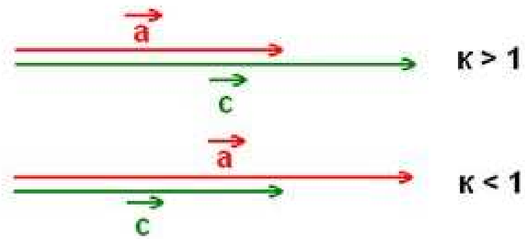
v rovině

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2)$$

v prostoru

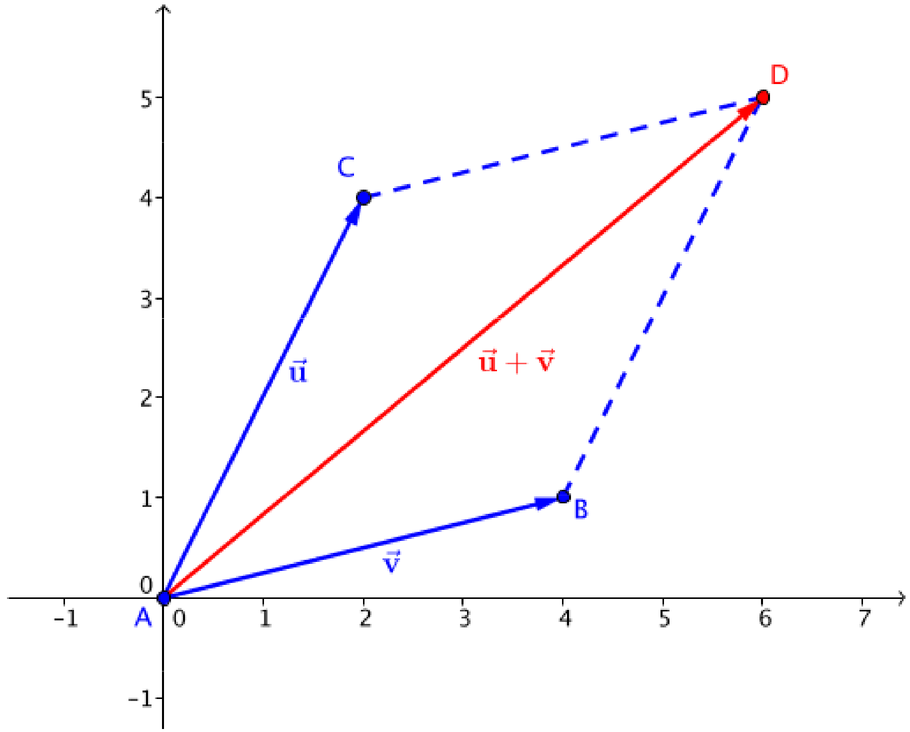
$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$$

k = -1



Součet vektorů

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$



1) Konstrukci výsledného součtového vektoru dvou vektorů lze provést pomocí rovnoběžek - takzvaným **doplněním na rovnoběžník**.

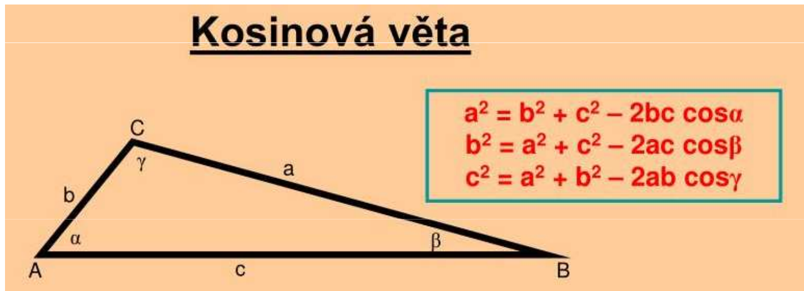
v rovině

$$\vec{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

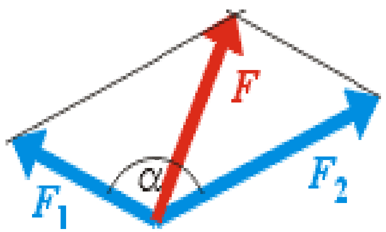
v prostoru

$$w = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

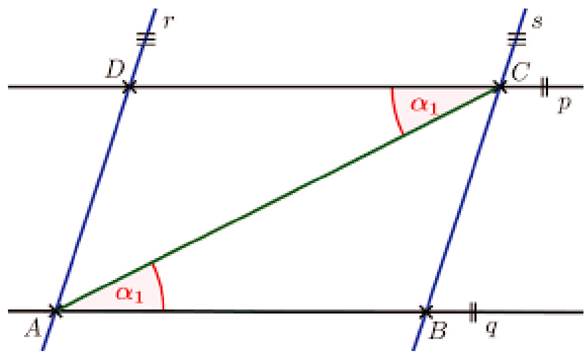
Každá úhlopříčka dělí rovnoběžník na 2 stejné trojúhelníky.

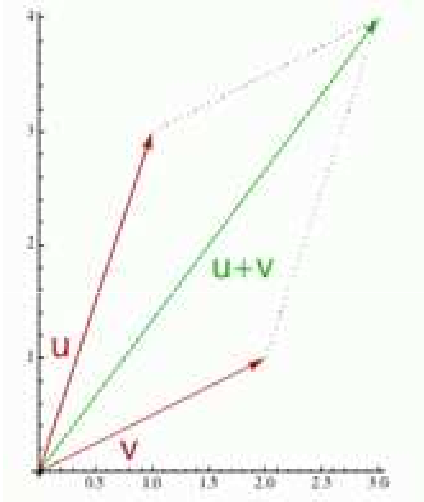


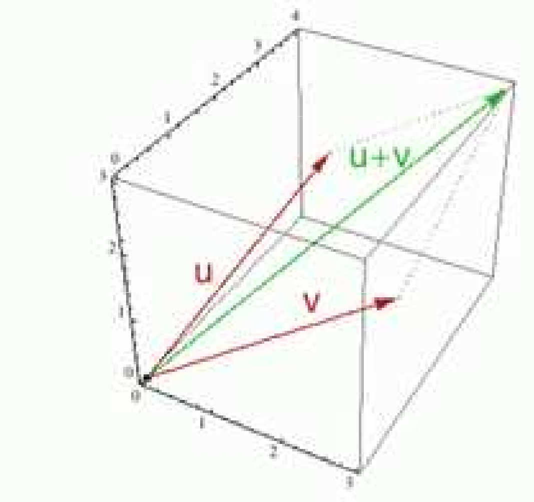
Pokud známe velikosti F_1 a F_2 dvou vektorů a úhel a, Který svírají, můžeme určit velikost výsledného vektoru F pomocí **kosinové věty**:

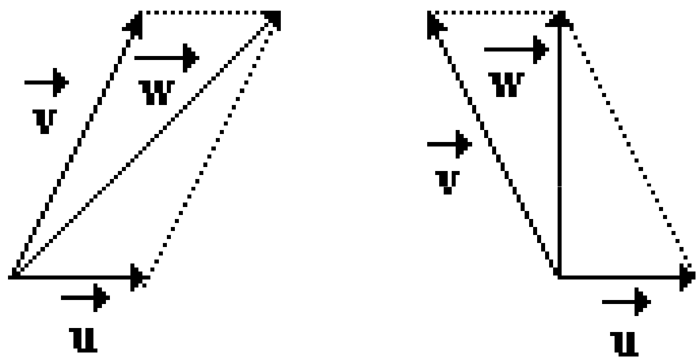


$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$



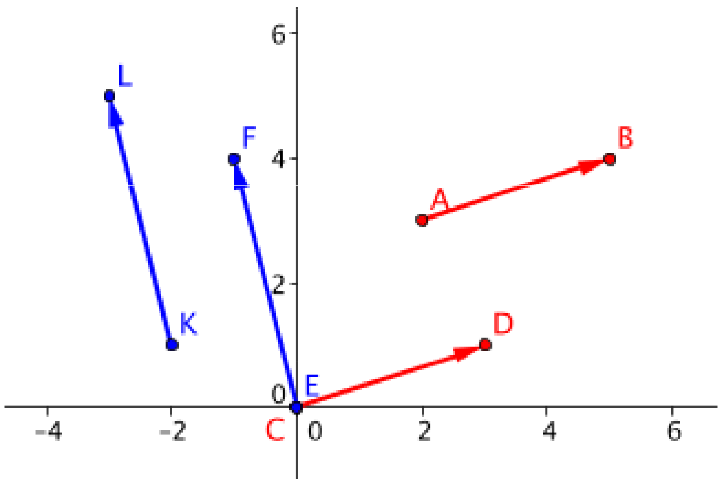


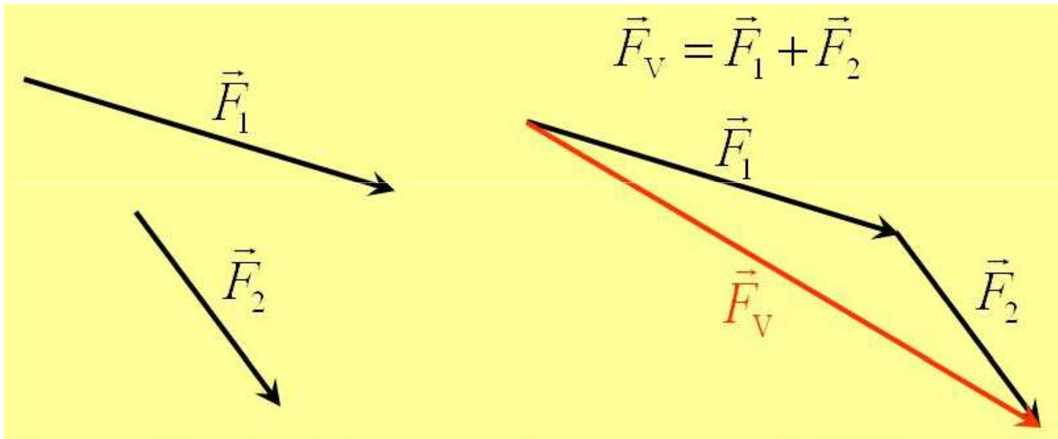




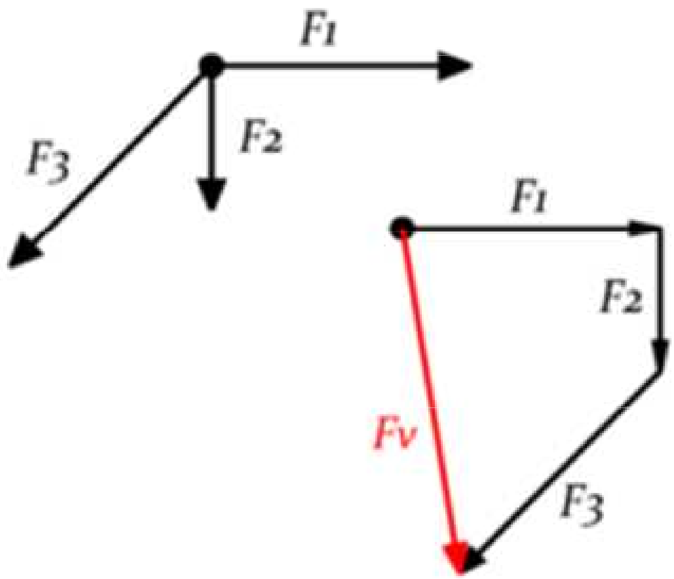
Pokud potřebujeme sečíst více vektorů, sečteme jednoduše libovolné dva, k jejich výsledku přičteme další vektor, a tak dále, až vyčerpáme všechny vektory.

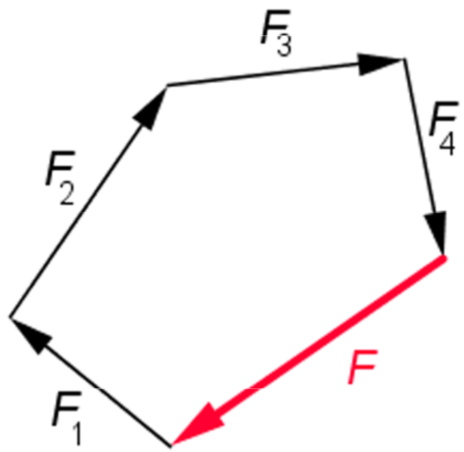
2. Sčítání vektorů lze provádět technicky ještě jiným způsobem - **přesouváním konce jednoho vektoru k začátku druhého**.





Pokud potřebujeme sečíst více vektorů, sečteme jednoduše libovolné dva, k jejich výsledku přičteme další vektor, a tak dále, až vyčerpáme všechny vektory.





Speciální případy

Sčítáme-li **dva vektory mířící stejným směrem**, dosadíme do vztahu úhel, který svírají a = 0°. Protože cos 0° = 1 dostaneme velikost výsledné síly:

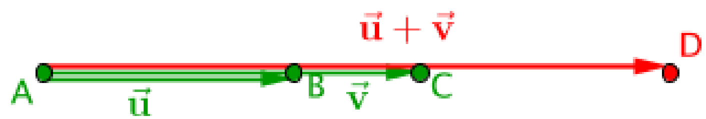
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2$$

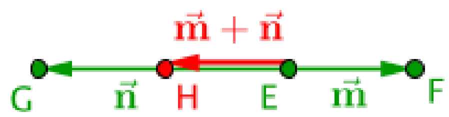
To odpovídá známé skutečnosti, že výsledné působení dvou sil stejného směru je rovno jejich prostému součtu. Podobně pro síly mířící opačným směrem, kdy a = 180° (cos 180° = -1) dostáváme výslednou sílu rovnu rozdílu působících sil:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 - F_2)^2} = F_1 - F_2$$

Pokud přitom vyjde velikost výsledné síly F záporná, znamená to pouze, že výslednice míří opačným směrem než $\boldsymbol{F_1}$ (tedy směrem $\boldsymbol{F_2}$).
Pokud budeme **sčítat dva kolmé vektory** dosadíme do vztahu pro součet dvou vektorů a = 90° (cos 90° = 0) a získáme tak známou Pythagorovu větu, která zde vyjadřuje délku úhlopříčky obdélníku:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

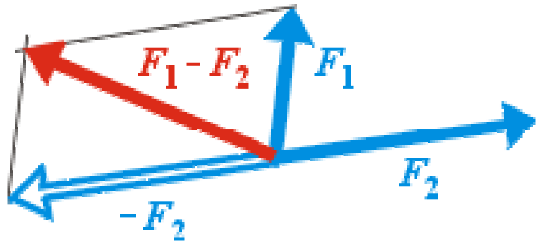


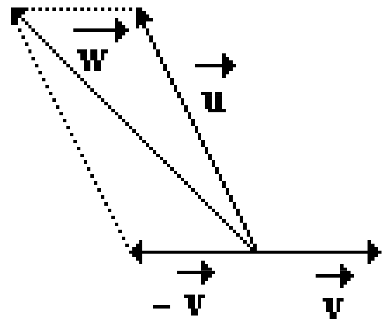


Odčítání vektorů

Chceme-li od vektoru $\boldsymbol{F_1}$ odečíst vektor $\boldsymbol{F_2}$, viz obrázek vpravo, uděláme z vektoru $\boldsymbol{F_2}$ vektor opačný a přičteme ho k $\boldsymbol{F_1}$.

$$F_1 - F_2 = F_1 + (-F_2)$$

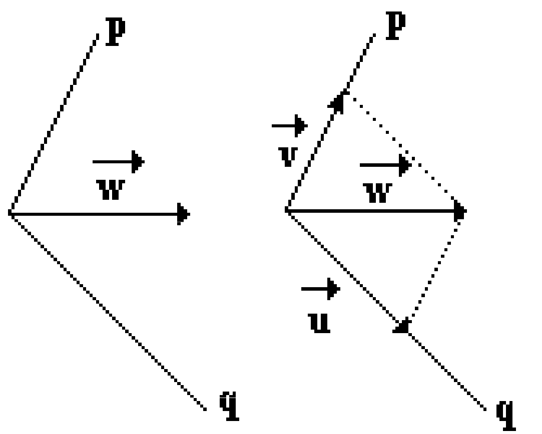


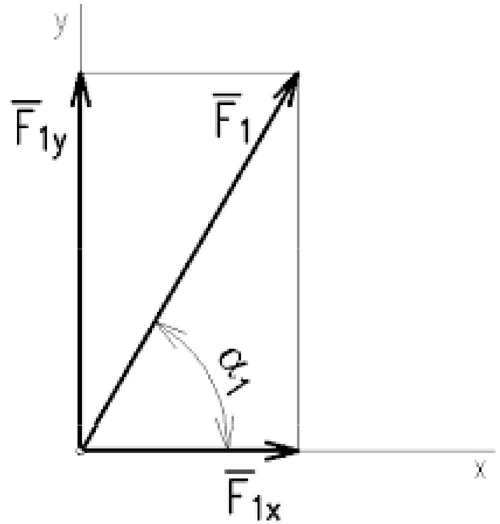


Jsou-li dány vektory ***u***, ***v***, potom vektor ***w*** = ***v*** + (***-u***) nazýváme **rozdíl vektorů *v*** a ***u***. Zapisujeme ***w*** = ***v*** - ***u***.

Rozklad vektoru do dvou daných směrů

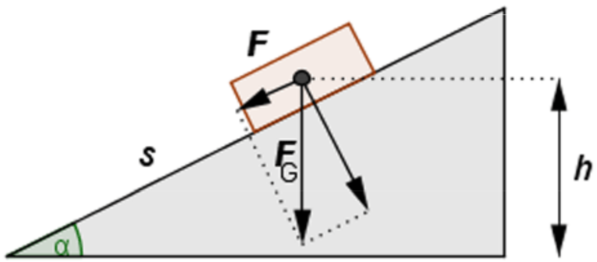
- operace, která se ve fyzice <u>používá velice často</u>. V tomto případě hledáme dva takové vektory, které leží v daných směrech a jejichž vektorovým součtem dostaneme zadaný vektor.



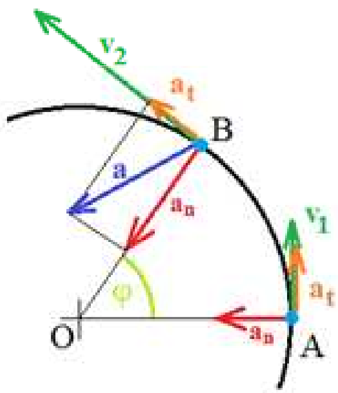


Příklady

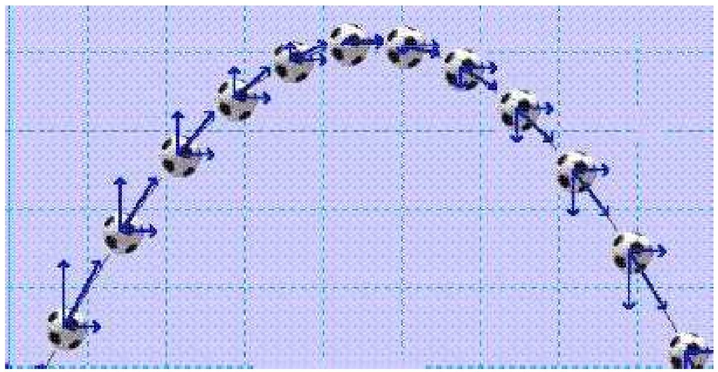
Pohyb na nakloněné rovině



Pohyb po kružnici



Křivočarý pohyb, šikmý vrh



Skalární součin

Výsledkem skalárního součinu dvou vektorů je skalár, tedy číslo. Skalární součin dvou vektorů ***a***, ***b*** zapisujeme tečkou mezi vektory a jeho hodnotu určujeme ze vztahu

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \qquad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\alpha$$

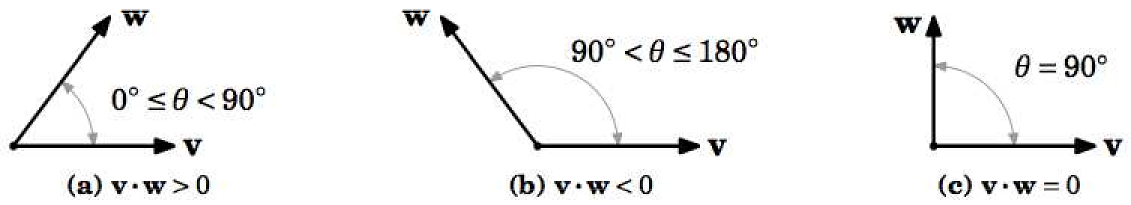
kde *a*, *b* jsou velikosti skalárně násobených vektorů, *a* je úhel, který násobené vektory svírají. Skalární součin je komutativní.

v rovině

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

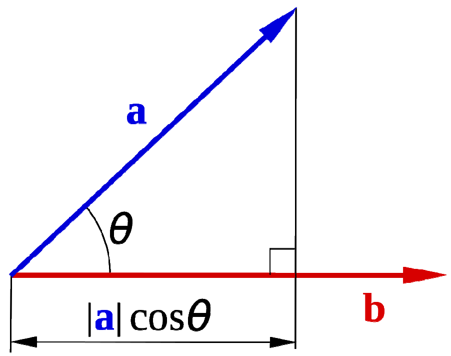
v prostoru

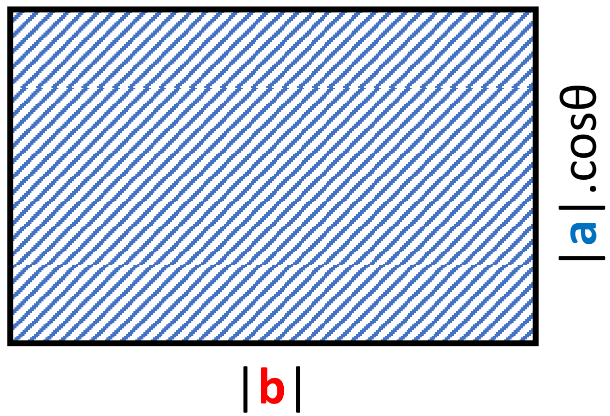
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$



Velikost skalárního součinu

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos(\theta)$$

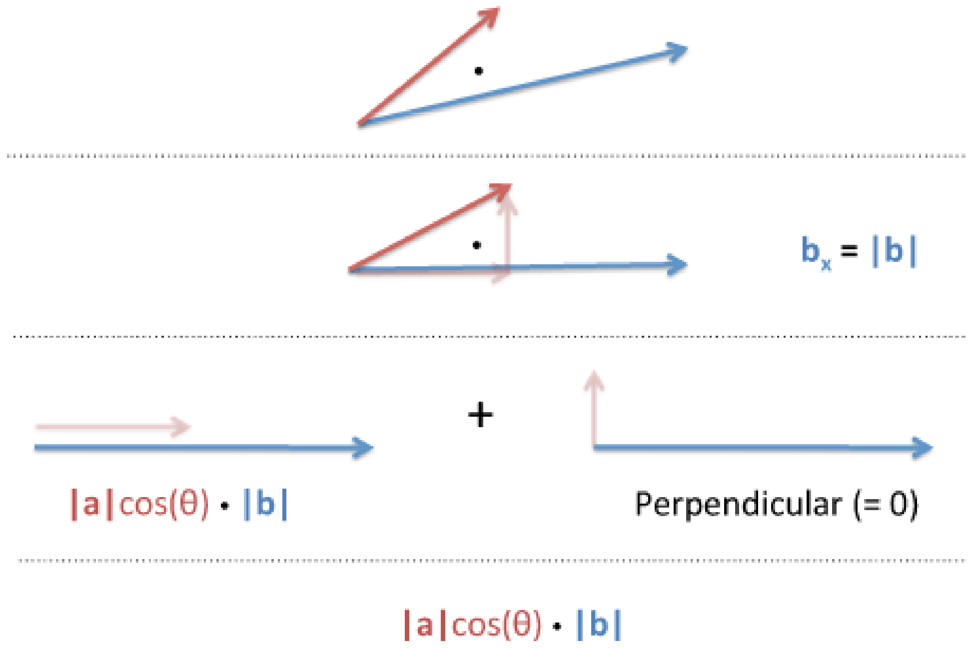


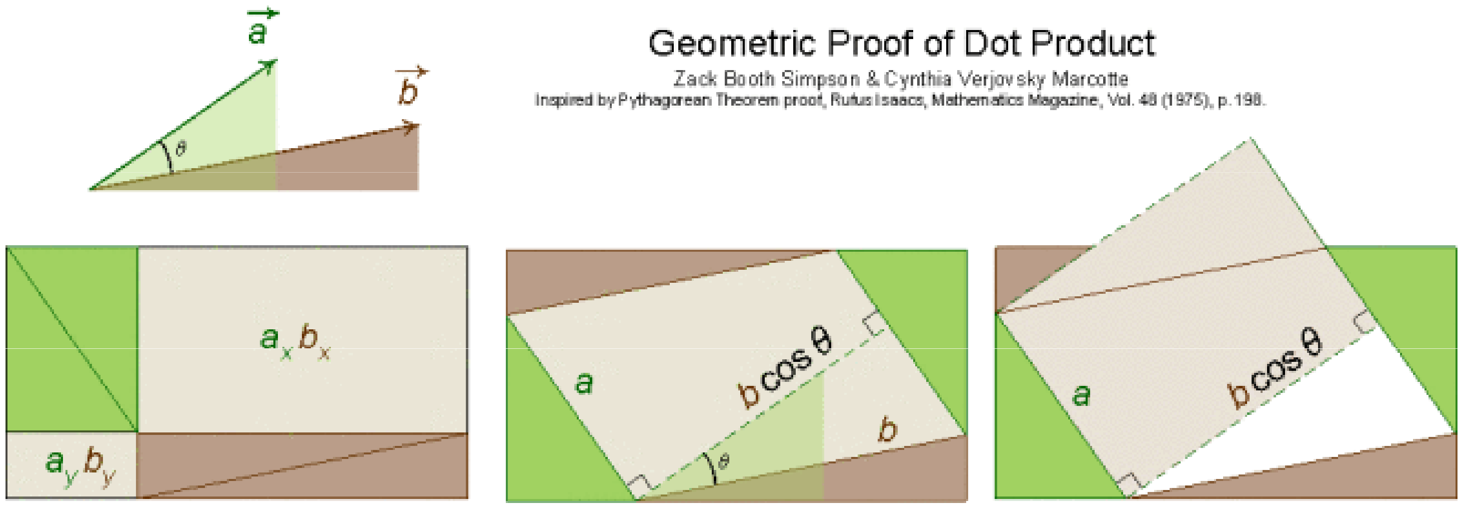


1. Násobené 2 vektory

2. Jeden z vektorů se zorientuje rovnoběžně s osou x.

3. Druhý z vektorů se rozloží na složky rovnoběžné s osami x a y.





$$a_x b_x + a_y b_y = ab\cos\theta = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

Typickým uplatněním **skalárního součinu** ve fyzice je <u>výpočet *toků* </u>různých vektorů plochami. Každá (rovinná) plocha *S* je charakterizována stejnojmenným normálovým vektorem, určujícím její velikost i prostorovou orientaci. Jestliže pak takovou plochu umístíme do nějakého vektorového pole (pro začátek homogenního), definujeme ***tok*** vektoru uvažovaného pole danou plochou jako jejich skalární součin. Některé příklady:

V proudící kapalině (nebo plynu) definujeme **objemový tok** (tok vektoru rychlosti):

$$Q_V = \vec{v} \bullet \vec{S}$$

V magnetickém poli definujeme **magnetický indukční tok**:

$$\Phi_m = \vec{B} \bullet \vec{S}$$

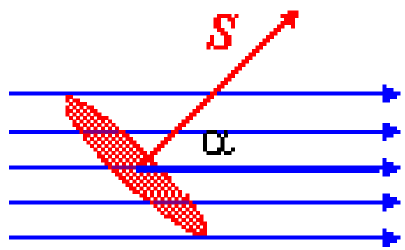
Podobně v elektrickém poli zavádíme **tok elektrické intenzity**:

$$\Phi_e = \vec{E} \bullet \vec{S}$$

Elektrický proud lze chápat jako **tok vektoru proudové hustoty** plochou průřezu vodiče:

$$I = \vec{j} \bullet \vec{S}$$

V teorii elektromagnetického vlnění je **zářivý tok** vlastně tokem tzv. Poyntingova vektoru.



Příklad

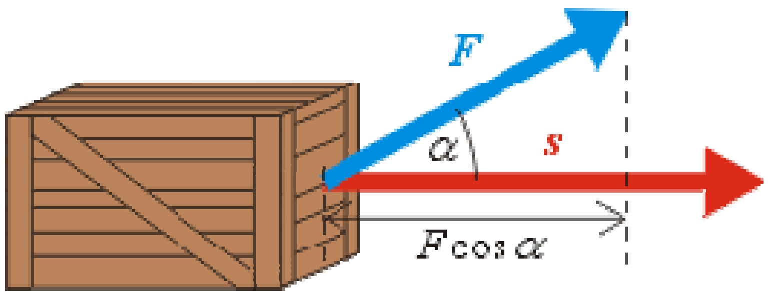
Typickou ukázkou **skalárního součinu** je také například definiční vztah pro práci *W* vykonanou silou ***F*** při posunutí daném vektorem ***s***:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

Uvedený skalární součin můžeme vyjádřit jako

, $$W = Fs\cos\alpha$$

kde *F* je velikost působící síly, *s* je vzdálenost o kterou se předmět posunul, *α* je úhel, který svírala síla se směrem pohybu.

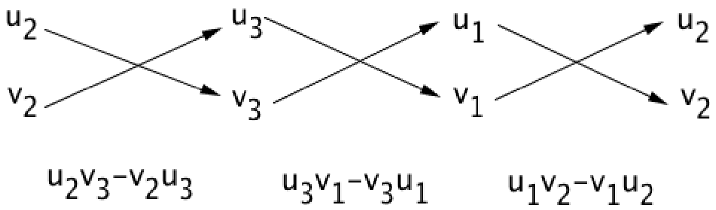


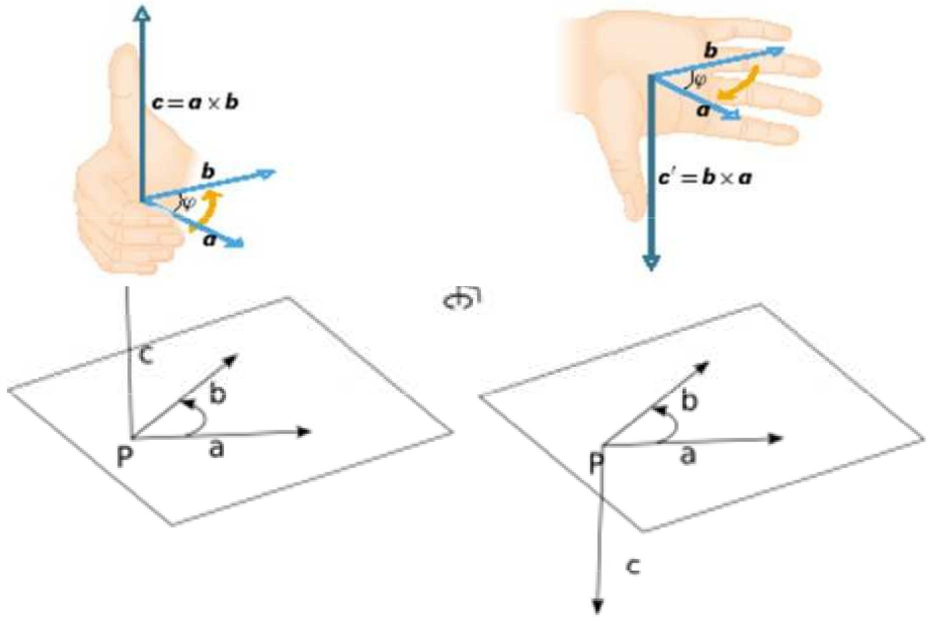
Skalární součin násobí vzdálenost uraženou předmětem se složkou síly ve směru pohybu: *F.cosα.* Právě tato složka koná skutečně práci. Pokud bude vektor síly ***F*** kolmý na směr pohybu, je tato složka nulová a síla v daném směru nekoná žádnou práci.

Vektorový součin $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

Vektorový součin značíme křížkem, výsledkem vektorového součinu je opět vektor. Výsledný vektor ***w*** je kolmý na rovinu, ve které leží původní vektory ***u*** a ***v***. <u>Vektorový součin počítáme pouze v prostoru </u>(nikoli v rovině).

$$\mathbf{w} = \left(u_2 v_3 - v_2 u_3 \,, u_3 v_1 - v_3 u_1 \,, u_1 v_2 - v_1 u_2\right)$$

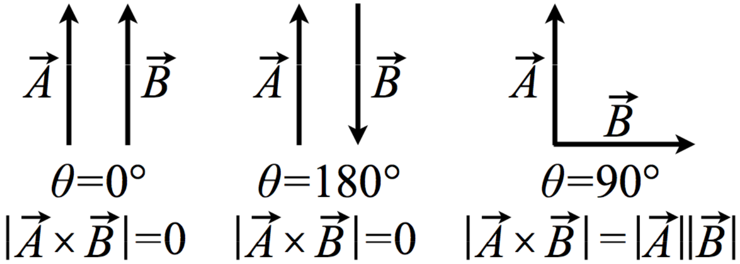


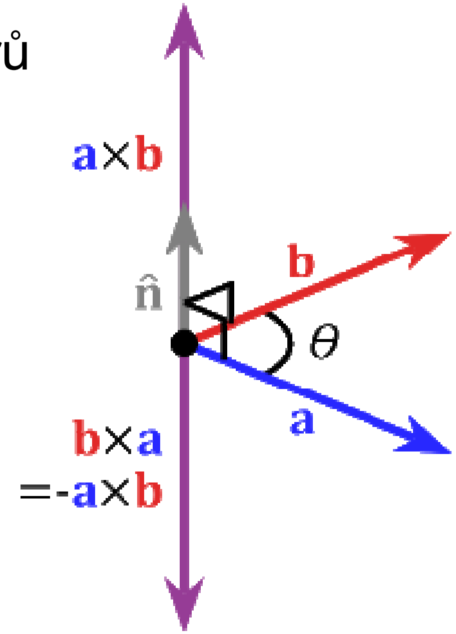


<u>Výsledný vektor je vždy kolmý na dva násobené vektory</u>. Jeho směr lze určit **pravidlem pravé ruky**:

Přiložíme-li pravou ruku kolmo k vektorům tak, že prsty směřují od špičky prvního násobeného vektoru ke špičce druhého, pak vztyčený palec ukazuje směr výsledného vektoru = první násobený, druhý násobený a výsledný vektor (v tomto pořadí) tvoří takzvaný **pravotočivý systém**.

Směr vektorového součinu závisí na pořadí násobení vektorů (<u>vektorový součin </u>tedy <u>není komutativní</u>!)

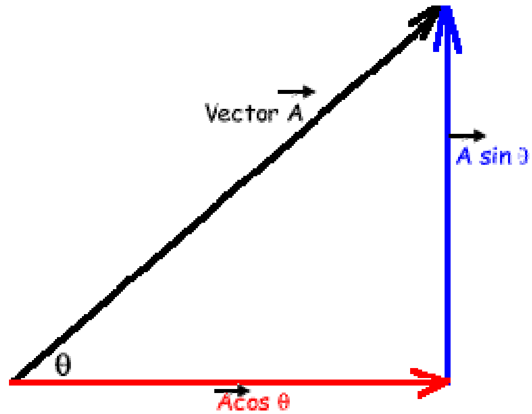




Velikost vektorového součinu

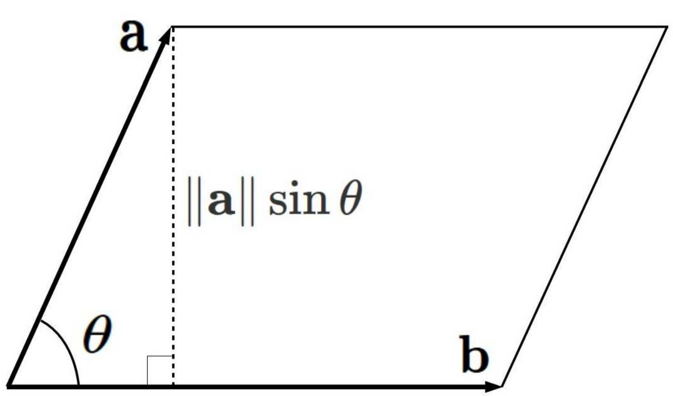
Velikost vektoru ***w*** (vektorového součinu) lze vypočítat pomocí vzorce pro výpočet velikosti vektoru, musíme ovšem znát vektor ***w***.

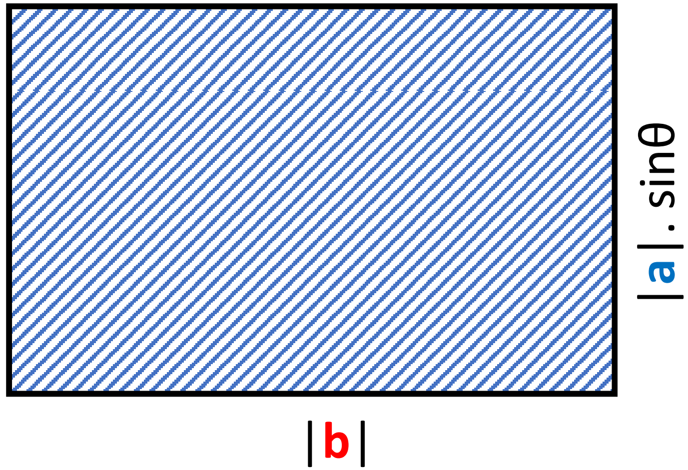
$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$$

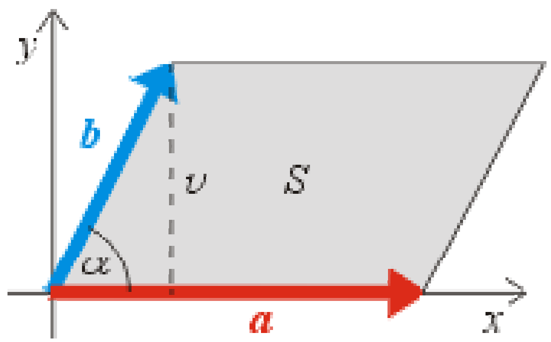


Velikost výsledného vektoru vektorového součinu odpovídá číselně ploše rovnoběžníku určeného násobenými vektory. Pro plochu *S* zobrazeného rovnoběžníku můžeme psát:

$$S = av = ab\sin\alpha$$







Vyjádříme-li si dále vektory na obrázku ve složkách

$$\boldsymbol{a} = (a_x,\ 0,\ 0) \qquad \boldsymbol{b} = (b_x,\ b_y,\ 0)$$

můžeme spočítat z definice vektorového součinu složky výsledného vektoru ***c***:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (0,\ 0,\ a_x b_y)$$

Výsledný vektor má nenulovou pouze složku ve směru osy *z*, to znamená, že je skutečně kolmý na rovinu *xy*, ve které leží vektory ***a*** a ***b***.

$$c = \sqrt{0^2 + 0^2 + (a_x b_y)^2} = a_x b_y = ab \sin \alpha$$

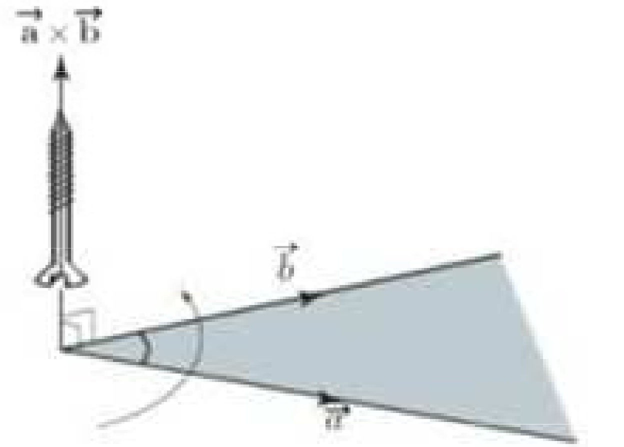
Vektorový součin ve fyzice používá pro vyjádření veličin, jako je například *moment hybnosti*, *obvodovou rychlost*, *moment síly* nebo *magnetická síla* působící na pohybující se nabitou částici.

Příklad

Moment síly ***M*** je vektor (kromě jeho velikosti tedy záleží i na jeho směru) a lze jej vyjádřit pomocí vektorového součinu:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

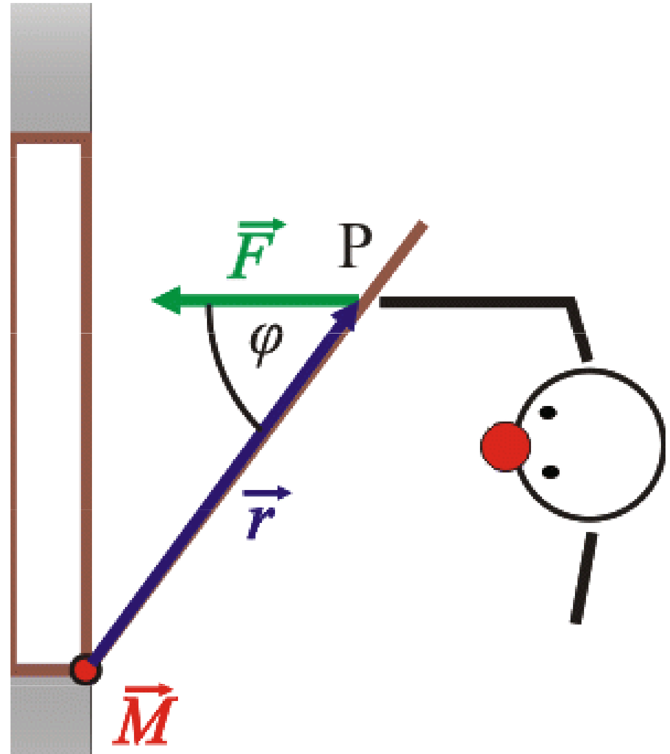
kde ***r*** je polohový vektor působiště síly ***F*** vzhledem k ose otáčení jako počátku.



Pokud bude pohyb konce montážního klíče ve směru hodinových ručiček, moment síly směřuje podle pravidla pravé ruky za nákresnu, tj. ve směru utahování šroubu.

Příklad

Určete velikost a směr vektoru momentu **M** vodorovné síly **F**, kterou klaun na okno působí vzhledem k ose závěsů.



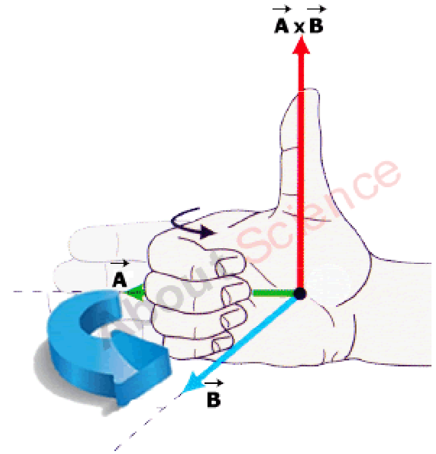
Pokud vektory **r** a **F** svírají obecný úhel φ, je velikost momentu síly rovna:

$$M = r \, . \, F \, . \sin \varphi$$

V případě, že jsou vektory **r** a **F** kolmé, je $\sin \varphi = 1$, a pro velikost momentu síly platí:

$$M = r \, . \, F$$

Podle pravidla pravé ruky je vektor momentu síly **M** je rovnoběžný se závěsy okna a míří nahoru (vychází přímo vzhůru z roviny obrázku, tj. před nákresnu). Jeho velikost je $r \, . \, F \, . \sin \varphi$, kde φ je úhel sevřený vektory.

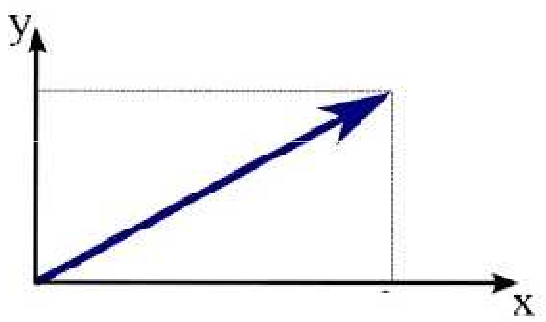


Polohový vektor

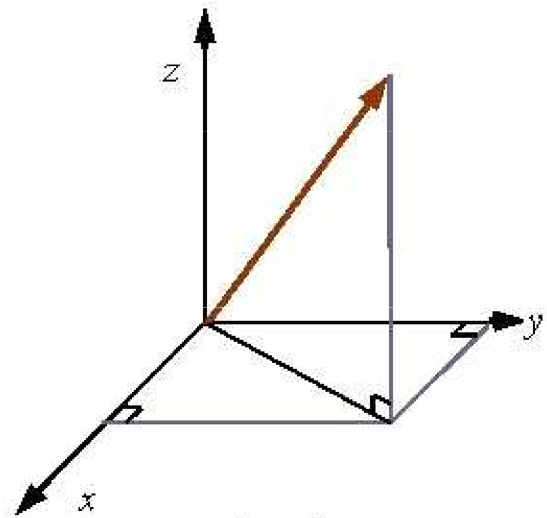
Polohu hmotného bodu vzhledem ke zvolené vztažné soustavě také určujeme pomocí polohového vektoru **r**. Polohový vektor znázorňujeme jako orientovanou úsečku, jejíž počáteční bod leží v počátku souřadnicové soustavy a koncový bod v uvažovaném hmotném bodu.
Souřadnice polohového vektoru jsou totožné se souřadnicemi hmotného bodu.

Velikost polohového vektoru *r* se rovná vzdálenosti hmotného bodu od počátku soustavy souřadnic.

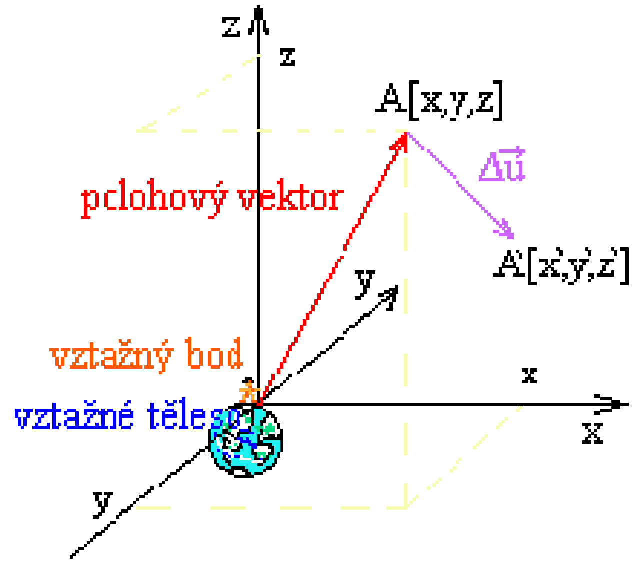
Směr polohového vektoru určují úhly, které polohový vektor svírá s osami souřadného systému.



vektor di R2



vektor di R3



Polohový vektor

Poloha, polohový vektor – popisuje polohu částice

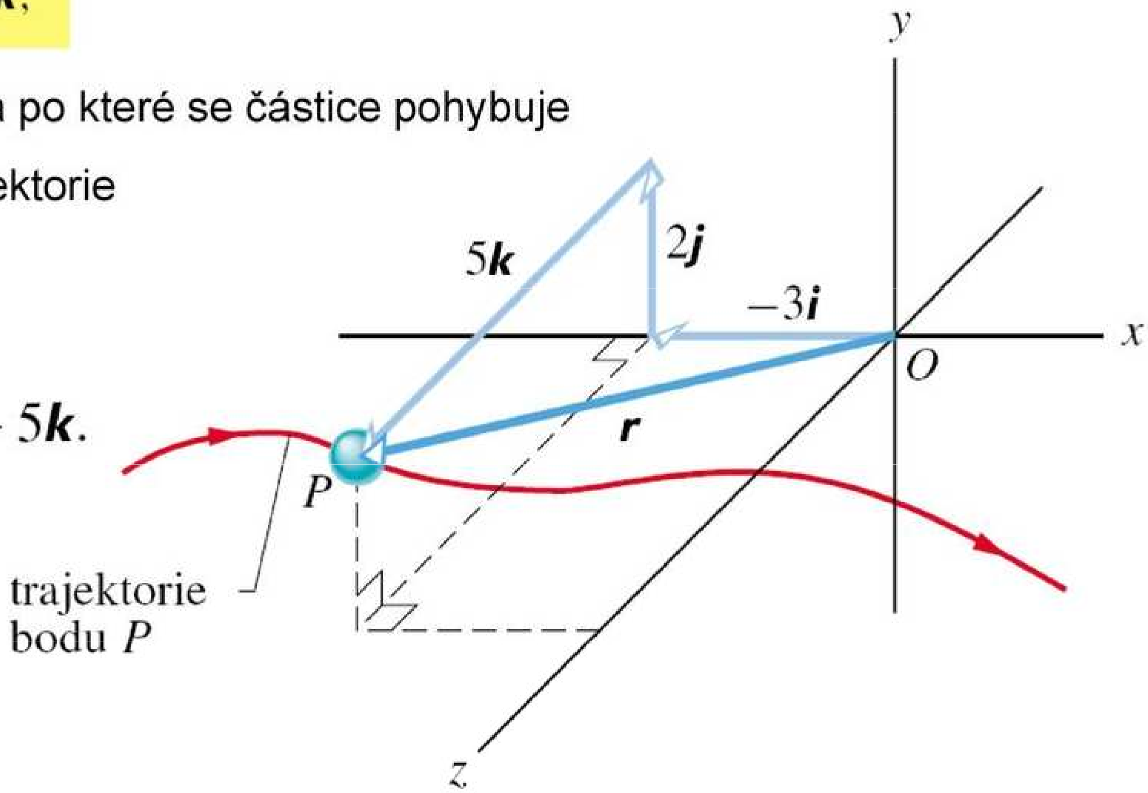
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

Trajektorie – křivka po které se částice pohybuje

Dráha = délka trajektorie

Příklad:

$$\boldsymbol{r} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}.$$



(= rozklad polohového vektoru do směrů os kartézské soustavy souřadnic)

Polohový vektor lze popsat i cylindrickými a sférickými souřadnicemi.

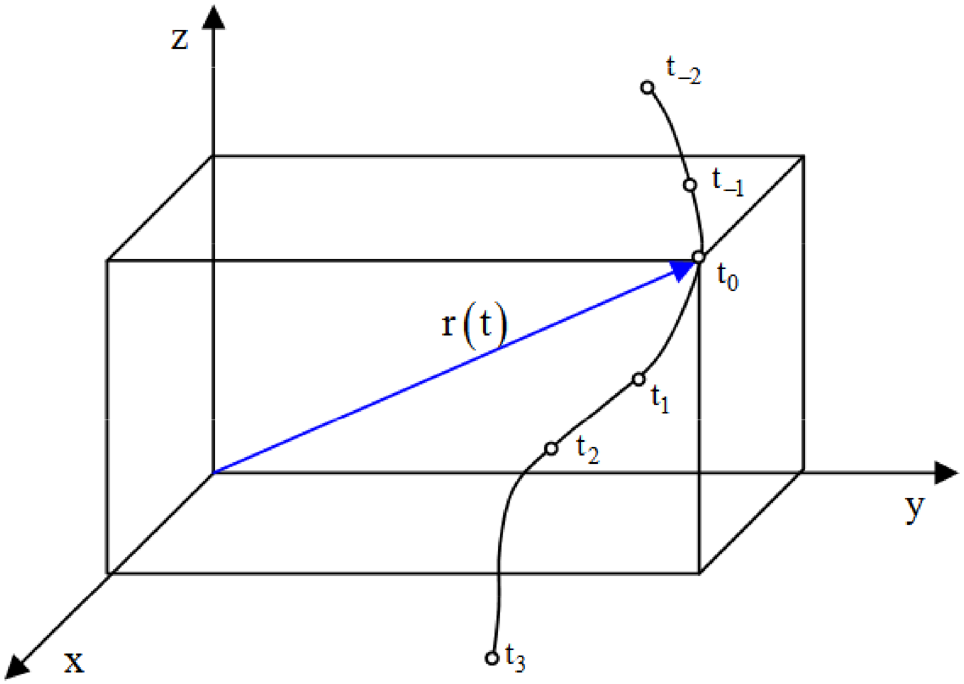
Trajektorie hmotného bodu

Trajektorii lze definovat jako <u>spojnici všech poloh, kterými prochází koncový bod polohového vektoru</u> **r**:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

Je to souvislá geometrická čára v prostoru (resp. v rovině nebo v přímce), kterou opisuje hmotný bod při svém pohybu v daném časovém intervalu. Trajektorií může být přímka, anebo křivka (kružnice, elipsa, spirála apod.).

<u>Trajektorie není fyzikální veličina (nemá jednotku).</u>



Posunutí Δ**r** je vektor, který vyjadřuje změnu polohového vektoru za určitý čas pohybu hmotného bodu. Posunutí je dáno pouze počátečním a koncovým bodem pohybu hmotného bodu (těžiště tělesa) jakožto spojnice bodů „start-cíl“ pohybu, a to bez ohledu na absolvovanou dráhu a trajektorii daného pohybu za čas pohybu.

Poloha $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$

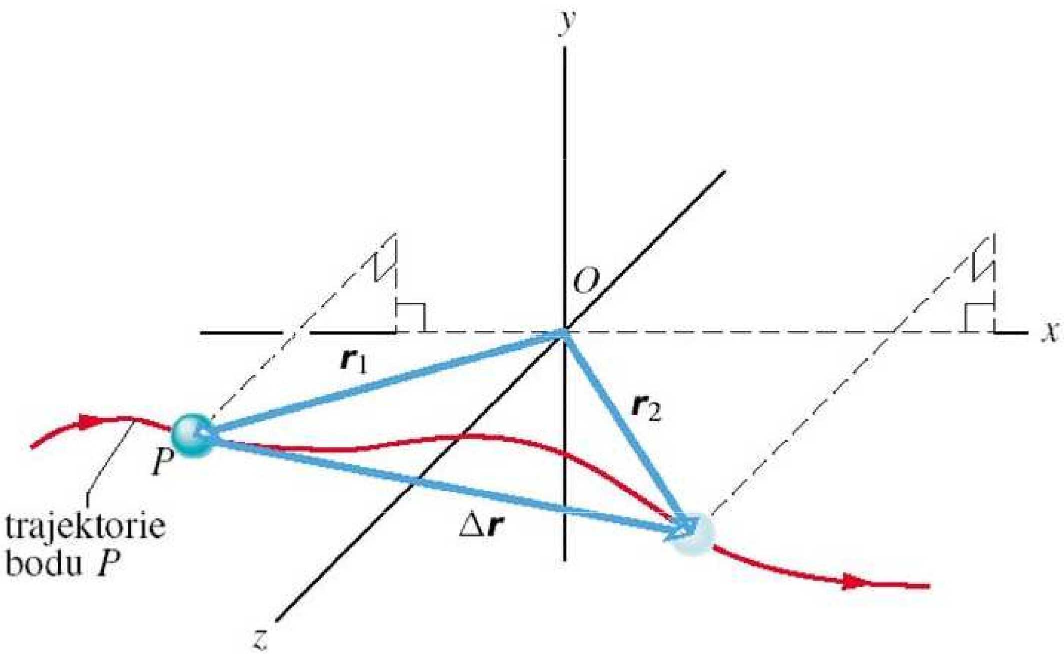
Posunutí $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$

PŘÍKLAD 4.1

$\boldsymbol{r}_1 = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$

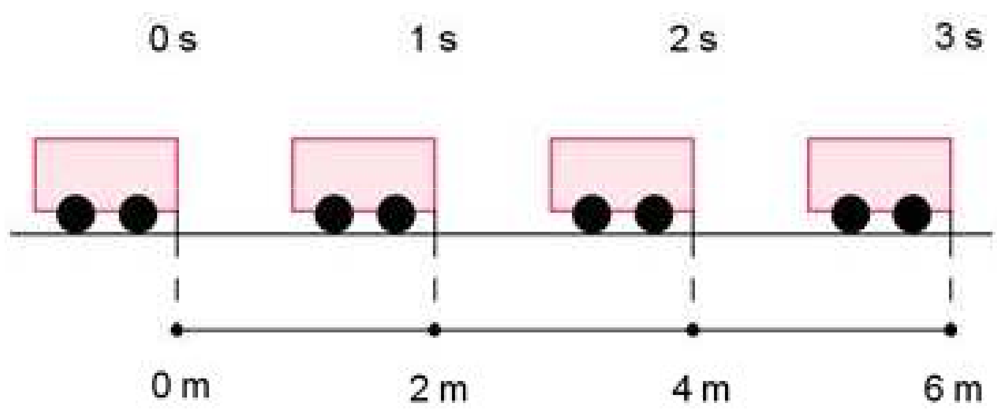
$\boldsymbol{r}_2 = 9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$

$\Delta\boldsymbol{r} = 12\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$



Dráha hmotného bodu *s* je <u>délka trajektorie</u>, tj. skalární fyzikální veličina, jejíž velikost se při pohybu v čase mění, tj. s = s(t).

Jde tedy pouze o <u>vzdálenost, kterou hmotný bod (resp. těžiště tělesa) opíše za určitou dobu</u>, značí se obvykle *s*, případně dráha jako vzdálenost *d* nebo délka *l*. Dráha se měří se v soustavě SI v metrech, případně v dekadických násobcích nebo dílech metru.



V některých, zejm. starších učebnicích může výraz „dráha“ označovat trajektorii a výraz „délka dráhy“ dráhu. Např. „Planeta se pohybuje po eliptické dráze o délce ... “

Specifický tvar trajektorie nám pak umožňuje pohyby kvalitativně klasifikovat:

Podle tvaru trajektorie:

- **pohyb přímočarý**
- **pohyb křivočarý**

Podle toho, zda všechny body tělesa opisují stejnou nebo různou trajektorii:

- **pohyb posuvný**
- **pohyb otáčivý**

<u>Tvar trajektorie je závislý na volbě vztažné soustavy</u>. Tentýž pohyb může být vzhledem k jedné vztažné soustavě přímočarý, vzhledem k jiné vztažné soustavě křivočarý.

Příklad

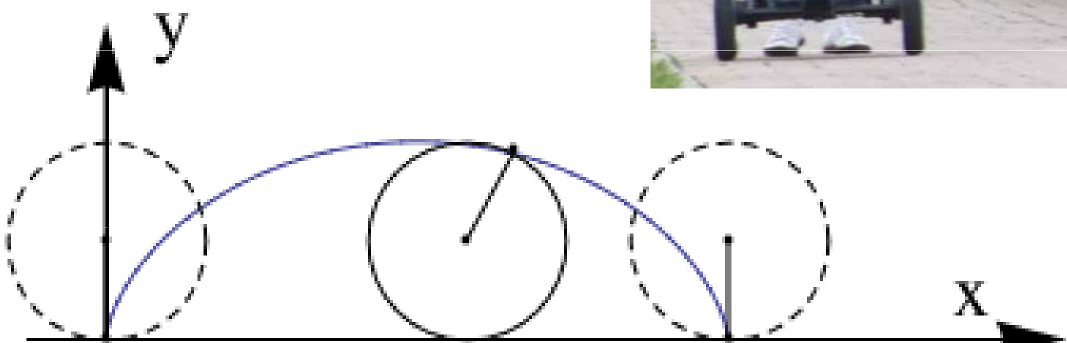
Volně padající míček ve vagonu jedoucím po přímé trati stálou rychlostí se ve vztažné soustavě pevně spojené s vagonem pohybuje po přímce (volný pád), zatímco ve vztažné soustavě spojené se Zemí opisuje parabolu (složený pohyb vodorovný vrh).

Příklad

Cyklista i bicykl jsou vůči chodci v pohybu. Z pohledu chodce bod na obvodu kola bicyklu opisuje cykloidu.

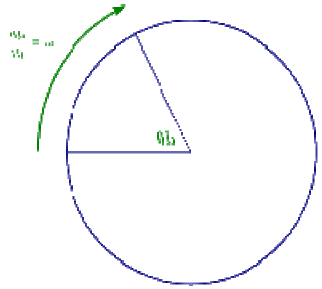
Cyklista je vůči bicyklu v klidu a vůči chodci v pohybu. Z pohledu cyklisty bod na obvodu kola bicyklu opisuje kružnici.

cykloida



rotační + translační pohyb

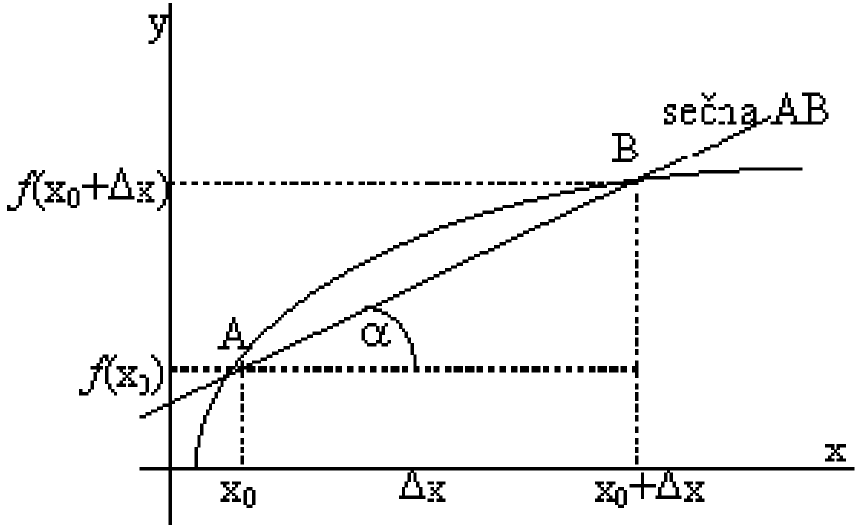
kružnice



rotační pohyb

Derivace

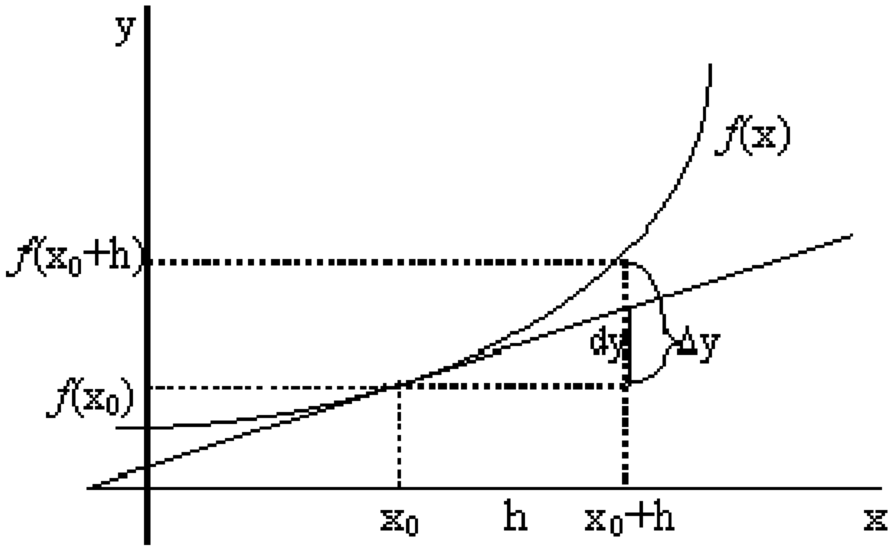
Derivace je směrnice tečny ke grafu dané funkce v daném bodě.



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Pokud derivace funkce y=f(x) v bodě x_0 existuje, říkáme, že funkce f je v bodě x_0 **diferencovatelná**.

Diferenciál

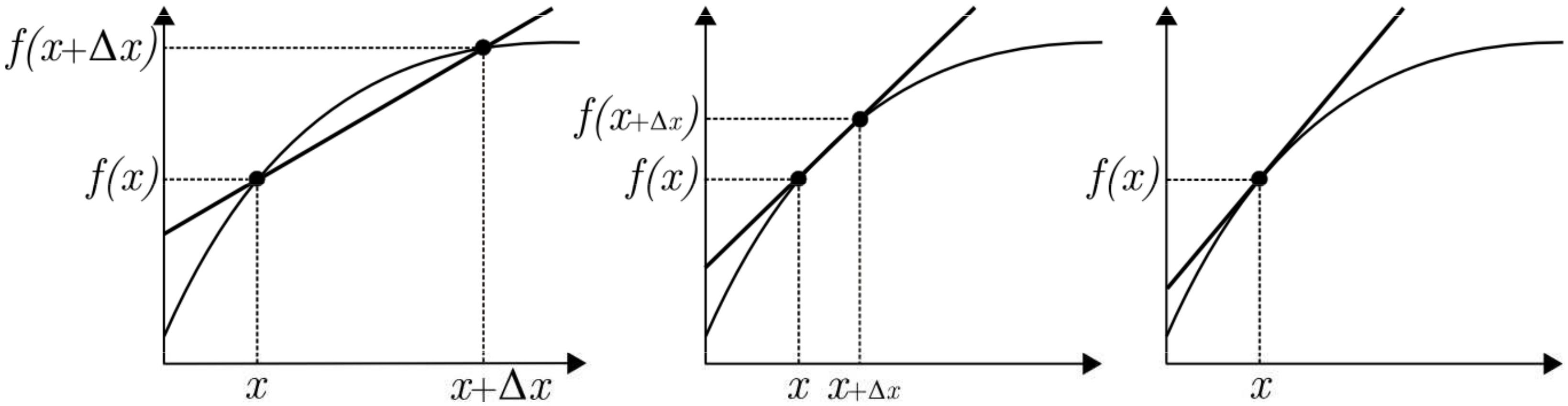


Diferenciál je přírůstek bodu tečny ke grafu funkce *f* v bodě $[x_0, y_0]$

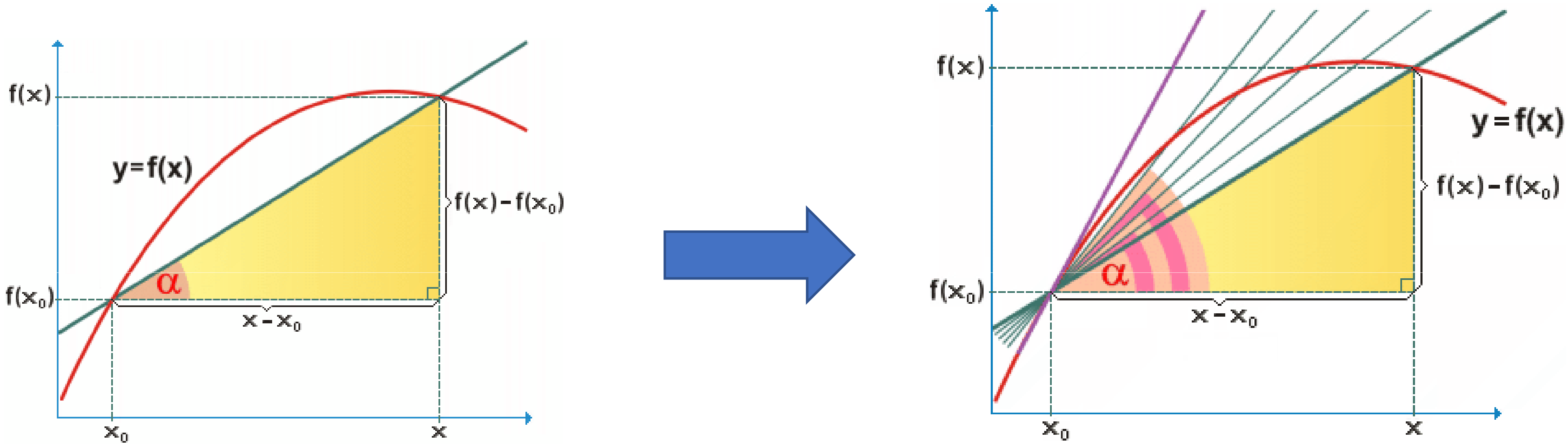
$$dy = f(x_0+h) - f(x_0) = A.h$$

kde $A = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$ a $h = dx$

Derivace

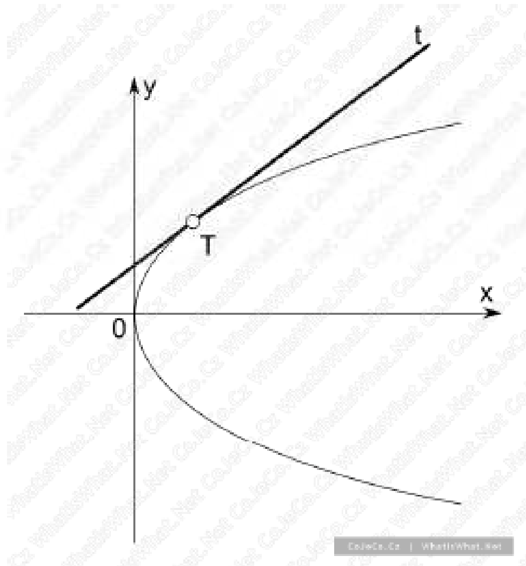


$f(x+\Delta x)$
$f(x)$
x
$x+\Delta x$
$f(x+\Delta x)$
$f(x)$
x
$x+\Delta x$
$f(x)$
x



f(x)
y=f(x)
f(x)-f(x₀)
α
f(x₀)
x-x₀
x₀
x
f(x)
y = f(x)
f(x) - f(x₀)
α
f(x₀)
x - x₀
x₀
x

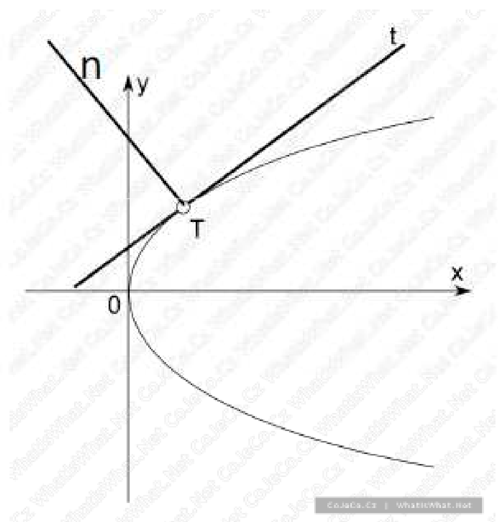
Tečna a normála křivky



Tečnu můžeme definovat jako přímku, která má s křivkou <u>jeden společný bod dotyku</u>. Na rozdíl od průsečíku, leží všechny okolní body křivky v polorovině, která je určena přímkou. Pokud je křivka grafem nějaké funkce, pak první derivace funkce je směrnice tečny.

Tečný vektor, je vektor tečny křivky, jejíž body jsou určeny polohovým vektorem ***r*** = ***r****(t)*, která prochází bodem $r_0= [x_0, y_0, z_0]$ dané křivky, tedy bodem, v němž má $t = t_0$ směr určený vektorem

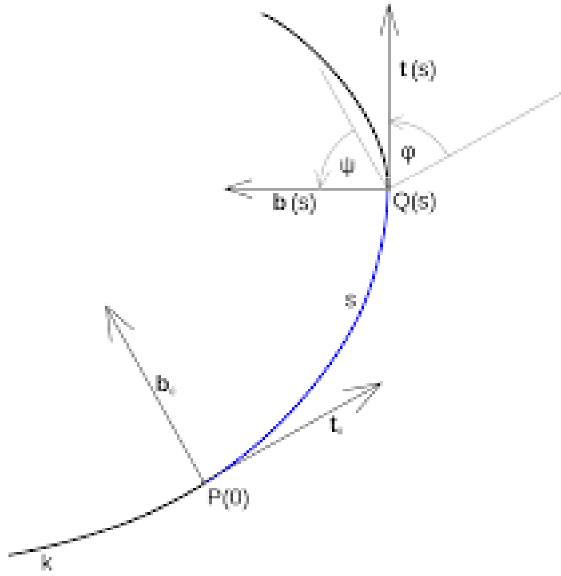
$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_0\right]$$



Všechny přímky, které prochází daným bodem křivky *r = r(s)*,kde *s* je oblouk křivky, a jsou kolmé na tečný vektor *t* v tomto bodě, se označují jako **normály** křivky v daném bodě. Jednotkový vektor *n*, který má stejný směr jako vektor *dt / ds*, se nazývá jednotkový vektor hlavní normály.

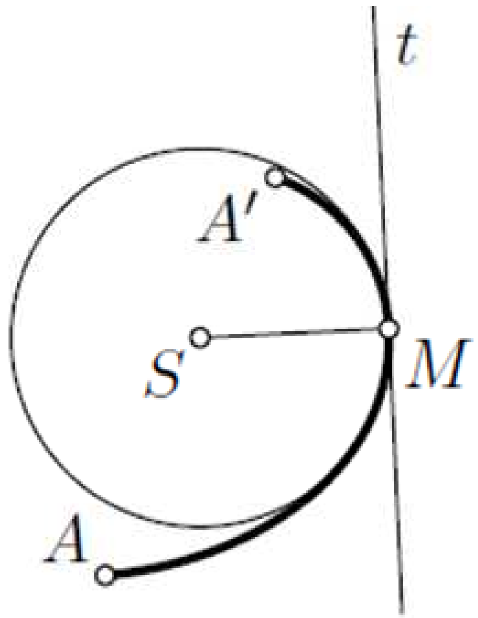
Oskulační kružnice

Křivost křivky *k* je funkcí jejího parametru t. V daném bodu určuje míru vychýlení křivky od tečny. Je-li křivka parametrizována obloukem, pak je křivost přímo rovna velikosti vektoru druhé derivace. Převrácená hodnota křivosti $1/k$ určuje **poloměr křivosti** křivky v daném bodě, tj. poloměr **oskulační kružnice** sestrojené ke křivce v daném bodě.



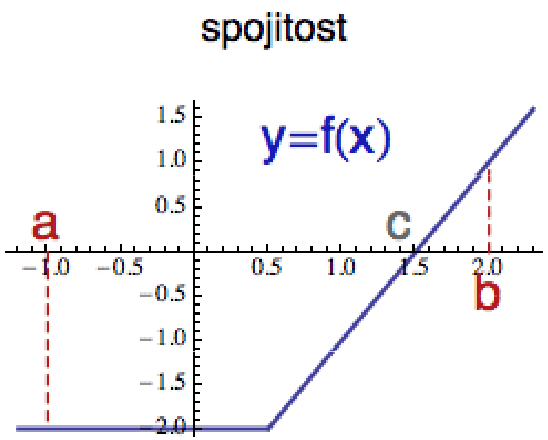
$$k = \frac{|y''|}{\sqrt{\left(1+(y')^2\right)^3}}$$

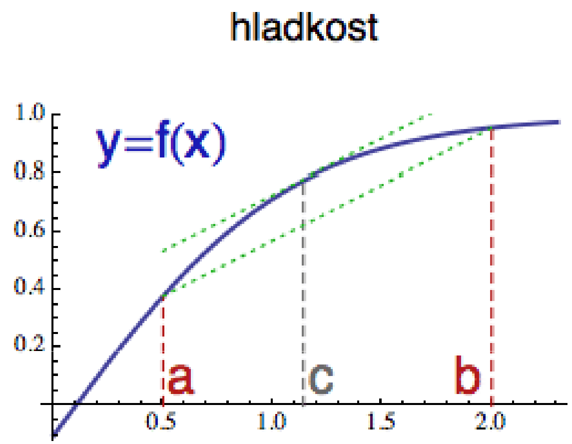
Oskulační kružnice rovinné křivky v určitém bodě je kružnice, která tímto bodem prochází, má zde s danou rovinnou křivkou společnou první derivaci a rovněž i druhou derivaci. Poloměr oskulační kružnice rovinné křivky v určitém bodě se nazývá **poloměr křivosti**.



Spojitá funkce je taková matematická funkce, jejíž hodnoty se mění plynule, tedy při dostatečně malé změně hodnoty x se hodnota f(x) změní libovolně málo. Intuitivní (ne zcela přesná) představa spojité funkce spočívá ve funkci, jejíž graf lze nakreslit jedním tahem, aniž by se tužka zvedla z papíru. Funkce, která není spojitá, se označuje jako **nespojitá**.

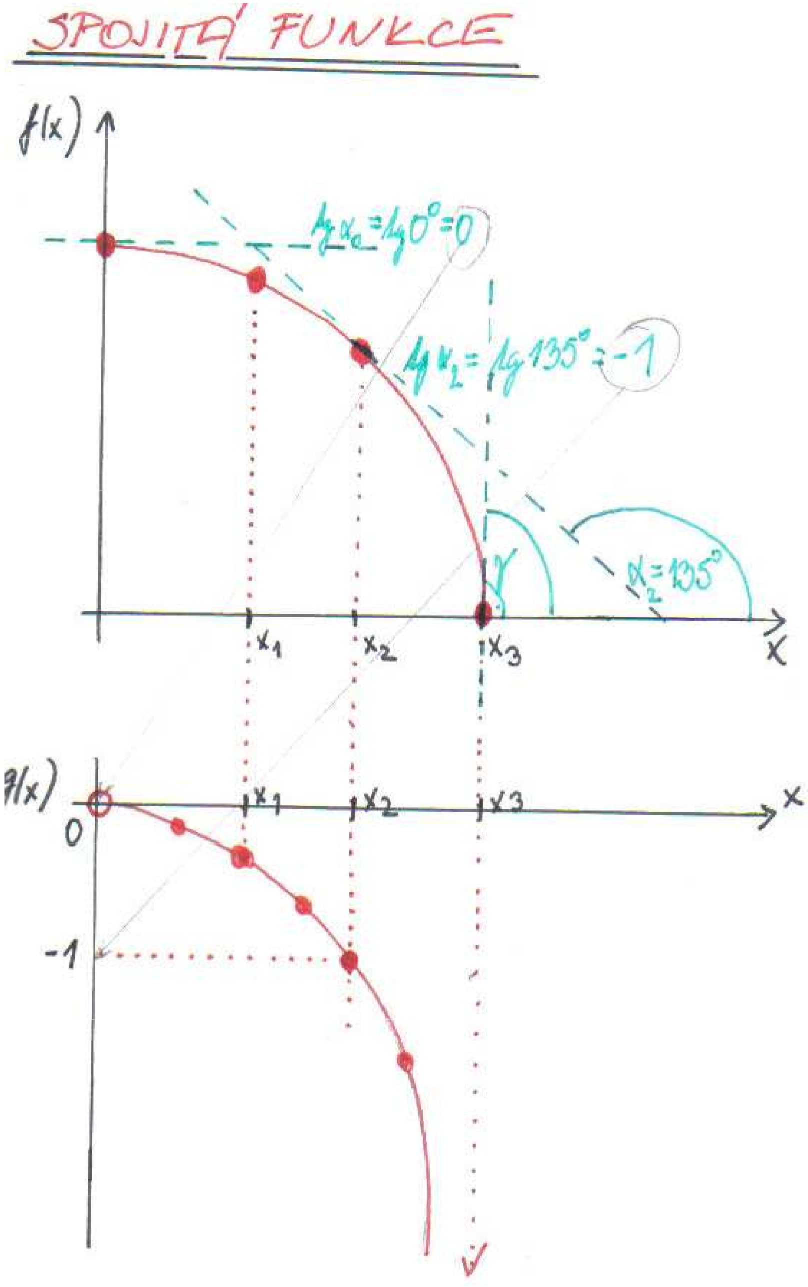
Diferencovatelná funkce je funkce, jejíž derivace existuje v každém bodě její domény: pokud x_0 je vnitřní bod v doméně funkce f(x), pak se říká, že f(x) je diferencovatelné na x_0, pokud existuje derivace $f'(x_0)$. V důsledku toho graf diferencovatelné funkce musí mít tečny (ne vertikální !) v každém bodu ve svém oboru, průběh funkce je poměrně hladký a nemůže obsahovat žádné přerušení, úhel nebo hrot.

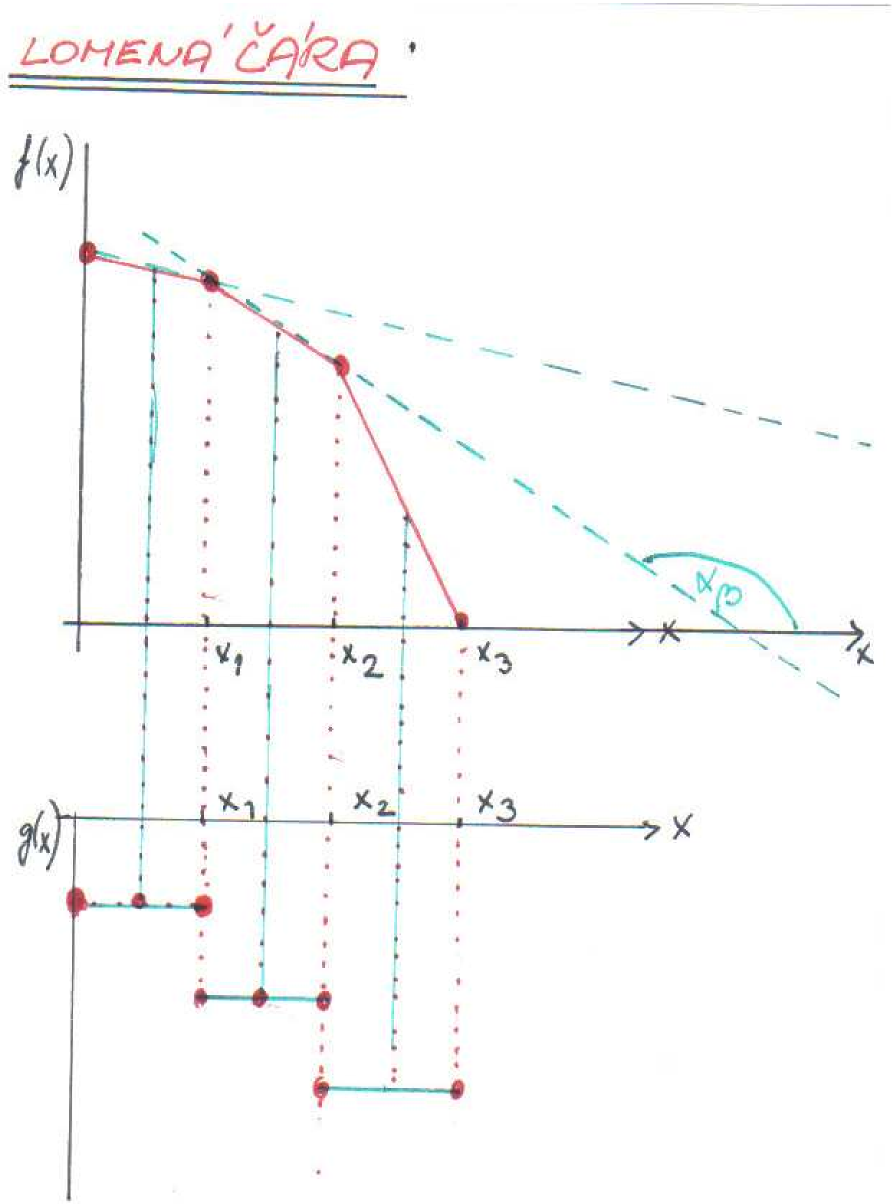




Křivka je **hladká** tehdy a jen tehdy, má-li spojitou derivaci.

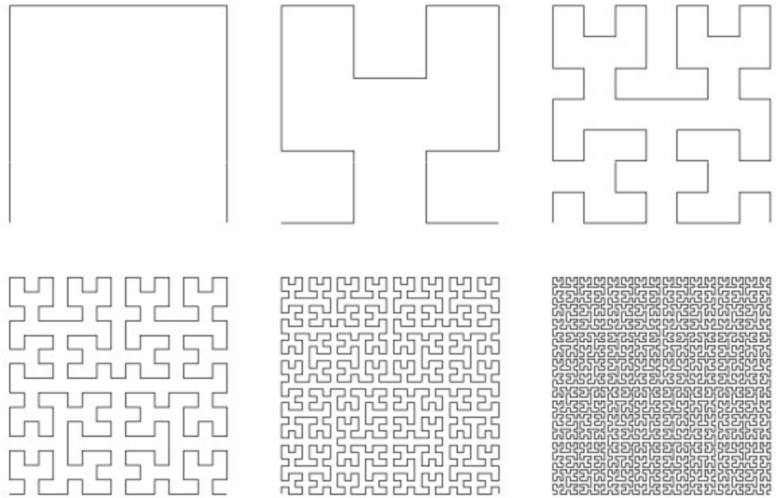
Pokud je derivace spojitá, původní (nederivovaná) funkce byla hladká.





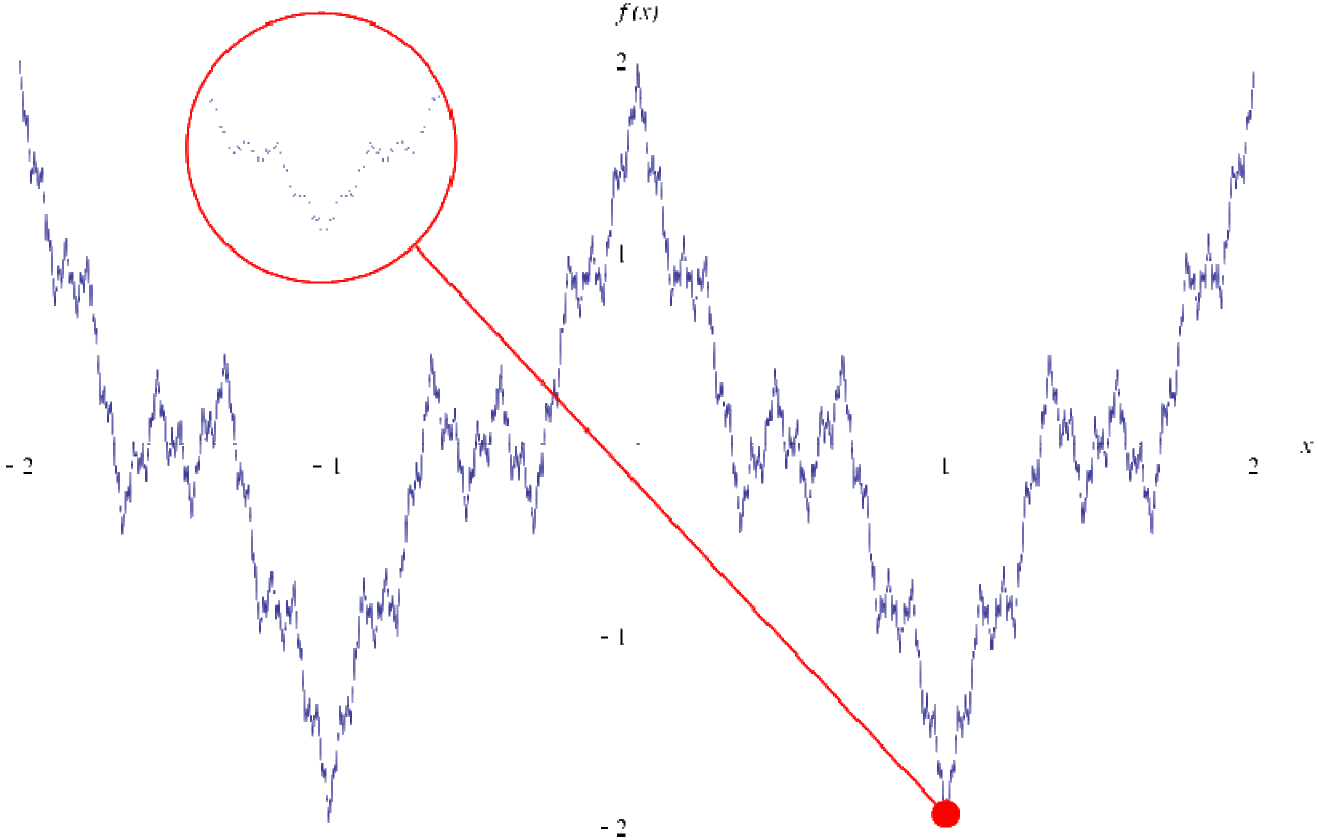
Spojité křivky nemající v žádném svém bodě derivaci.

Peanova křivka

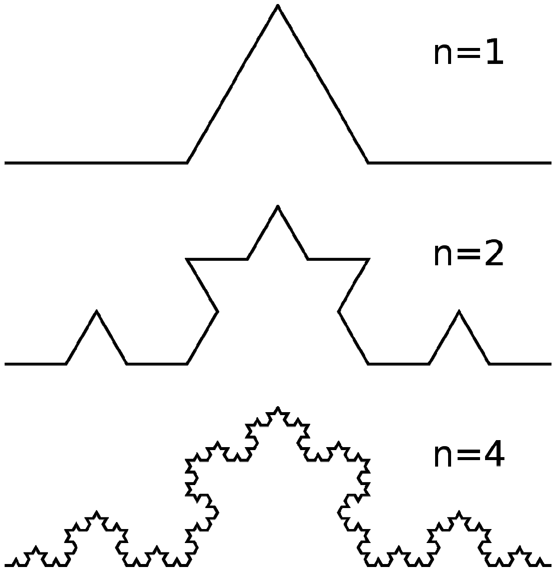


Weierstrassova funkce

$$W_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n x)$$

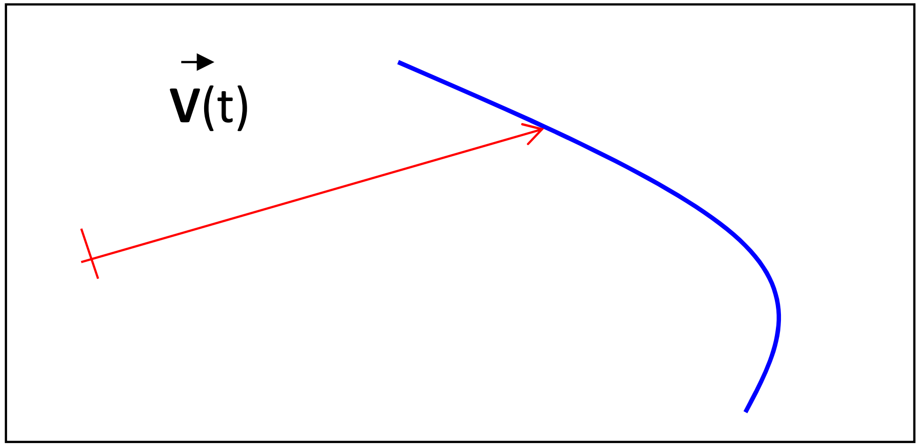


Kochova křivka



Vektorová funkce skalárního argumentu

Když každému číslu z daného intervalu I přiřadíme vektor **v**, říkáme, že na intervalu je definována vektorová funkce skalárního argumentu, kterou zapisujeme jako **v**(t).



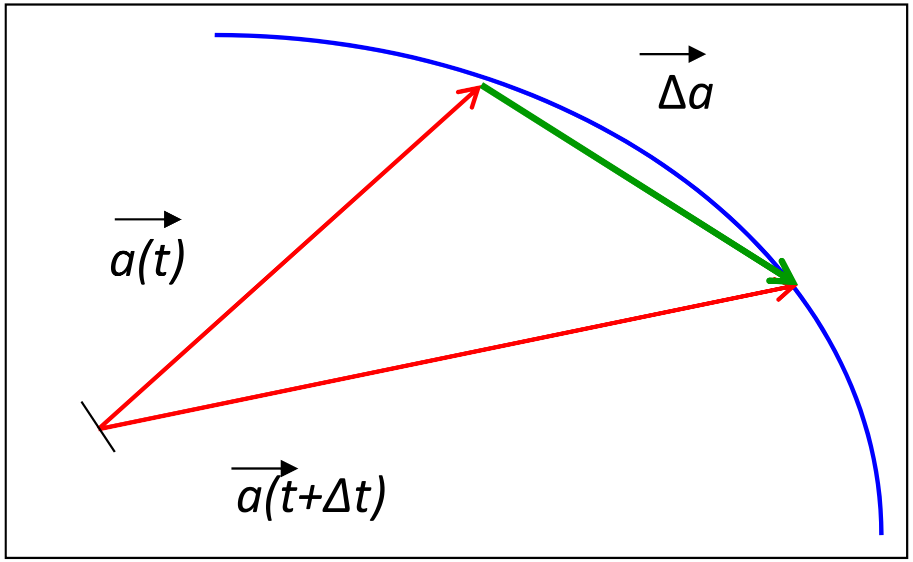
Vektory můžeme při znázornění vynést z jednoho bodu, jak je to znázorněno na obrázku.

Souřadnice takového vektoru jsou obyčejnými reálnými funkcemi téže proměnné. Pojem limity a spojitosti tak můžeme snadno přenést na vektorové funkce. Vektorová funkce **v**(t) má v bodě t_0 limitu **b** , když mají limitu souřadnice a platí:

$$b_x = \lim_{t \to t_0} v_x(t) \ , \ b_y = \lim_{t \to t_0} v_y(t) \ , \ b_z = \lim_{t \to t_0} v_z(t)$$

Podobně definujeme spojitost vektorové funkce.

Derivace vektoru podle skalárního argumentu



Vlastnosti derivace:

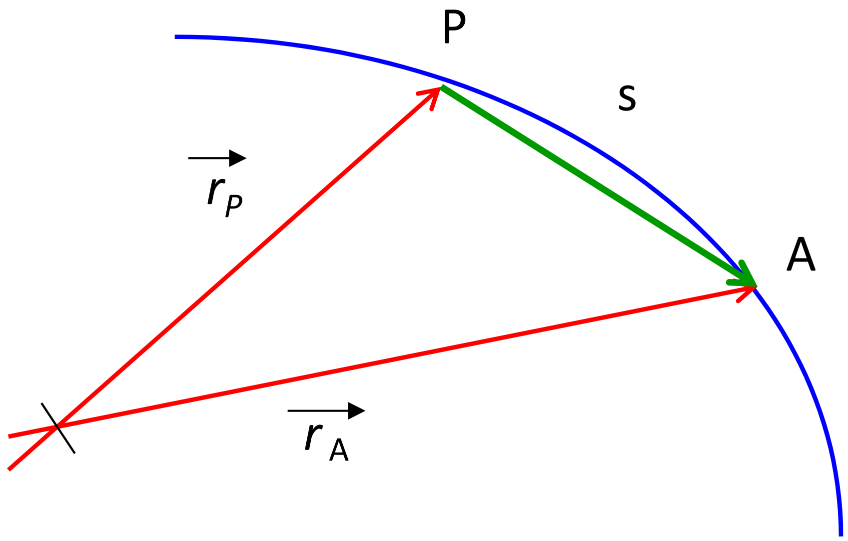
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)' = \vec{a}' + \vec{b}'$$

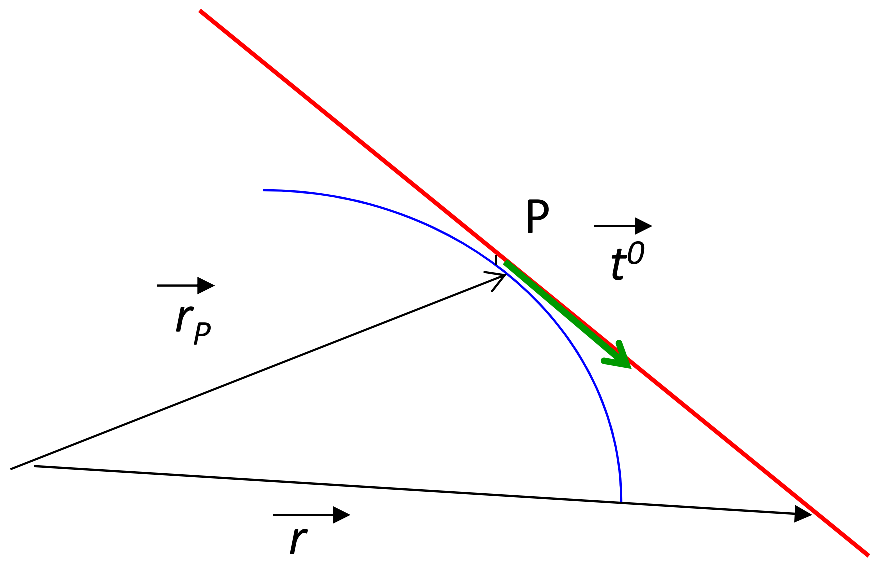
$$\left(\vec{a}\,.\vec{b}\right)' = \vec{a}'.\vec{b} + \vec{a}\,.\vec{b}'$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)' = \vec{a}'\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}'$$

Rovnice tečny k prostorové křivce

Na křivce zvolíme pevný bod A, tečnu sestrojíme v bodě P. polohu libovolného bodu křivky můžeme určit jeho **radiusvektorem** nebo jeho **vzdáleností** *s* od bodu A, měřenou na křivce. Radiusvektor je potom funkcí *s.* Tento parametr se nazývá přirozeným parametrem křivky $r = r(s)$.





t^0 je jednotkový vektor ve směru tečny.

Rovnice tečny bude:

Integrál

Proces integrování funkce je opačný k procesu derivování funkce. Pojem integrálu je zobecněním pojmů jako plocha, objem, součet či suma.

Neurčitý integrál

Primitivní funkce k funkci f(*x*) na intervalu (a, b) je taková funkce F(*x*), že pro každé $x \in$ (a, b) je F‘(x) = f(*x*). Procesu hledání primitivní funkce se často říká **integrování** (integrace), jelikož primitivní funkce se používá při určování obsahu plochy pod křivkou (integrálu) podle základní věty integrálního počtu.

Ke každé funkci f(x) spojité na (a, b) existuje v (a, b) primitivní funkce. Je jich dokonce nekonečně mnoho. Je-li F(x) jedna z nich, pak všechny ostatní mají tvar F(x) + C, kde C je integrační konstanta, která je libovolná.

Používáme formální zápis

$$\int f(x).dx = F(x) + C,$$

$\int f(x)\,dx$ znamená množinu všech primitivních funkcí k funkce f(x) a nazývá se neurčitý integrál funkce f(x).

Integrační vzorce

$\int \mathrm{d}x = x + c$	platí na $\mathbb{R}$
$\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$(a \in \mathbb{R},\, a \neq -1)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\|x\| + c$	platí pro $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
$\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$	platí na $\mathbb{R}$
$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$(a > 0,\, a \neq 1)$, platí na $\mathbb{R}$
$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c$	platí na $\mathbb{R}$
$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$	platí na $\mathbb{R}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + c$	platí na $(-\pi/2 + k\pi,\, \pi/2 + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\, x + c$	platí na $\big(k\pi,\, (k+1)\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + c$	$(a \neq 0)$, platí na $\mathbb{R}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$	$(a \neq 0)$, platí na $\langle -a;\, a\rangle$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\|x + \sqrt{x^2+a}\| + c$	$x^2 + a > 0$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln\|f(x)\| + c$	platí na intervalech, kde je $f(x) \neq 0$ spojitá

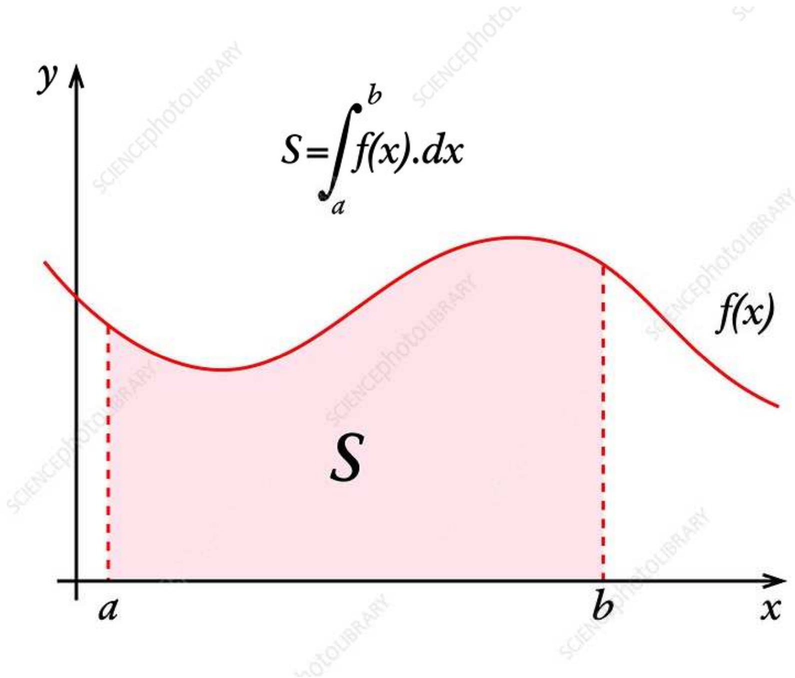
Určitý integrál

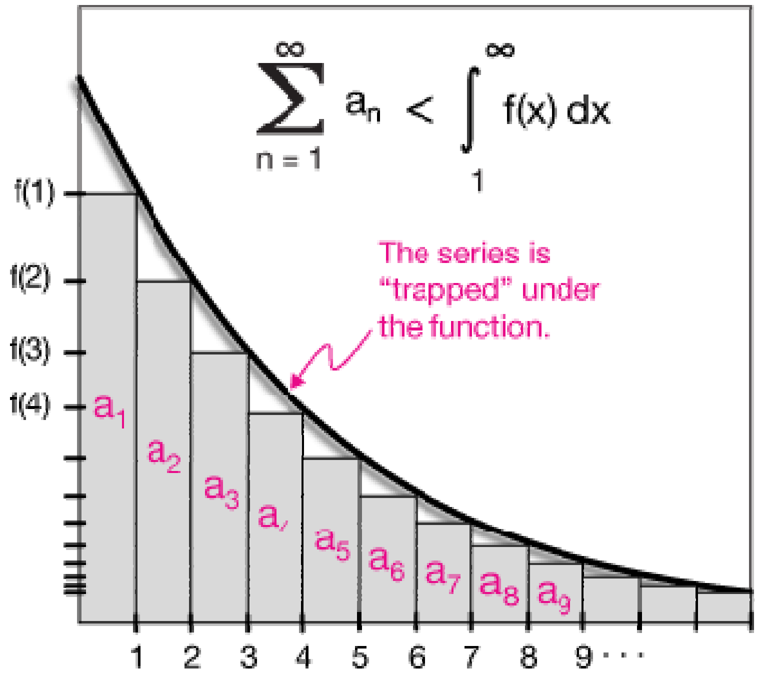
Určitý integrál nezáporné funkce *f*(*x*) mezi dvěma body *a*, *b* je roven ploše obrazce omezeného přímkami *x* = *a*, *x* = *b*, osou *x* a křivkou definovanou grafem funkce *f*(*x*). Určitý integrál není funkce, ale číslo.

$$\int_a^b f(x)dx$$

(Určitý) integrál funkce *f*(*x*) od *a* do *b*.
a je **DOLNÍ MEZ**,
b je **HORNÍ MEZ** integrálu.

Určitý integrál z funkce je roven obsahu plochy ohraničené touto funkcí nebo dráze uražené tělesem, jehož rychlost je popsána touto funkcí.





Určitý integrál

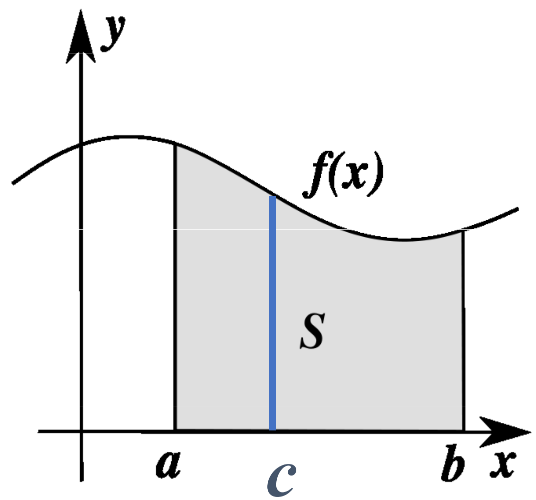
Určitý integrál budeme počítat podle vzorce:

Funkce $F(x)$ je integrál (primitivní funkce) k $f(x)$.

Při výpočtu integrujeme funkci $f(x)$ a odečteme od sebe funkční hodnoty v horní (b) a dolní (a) mezi.

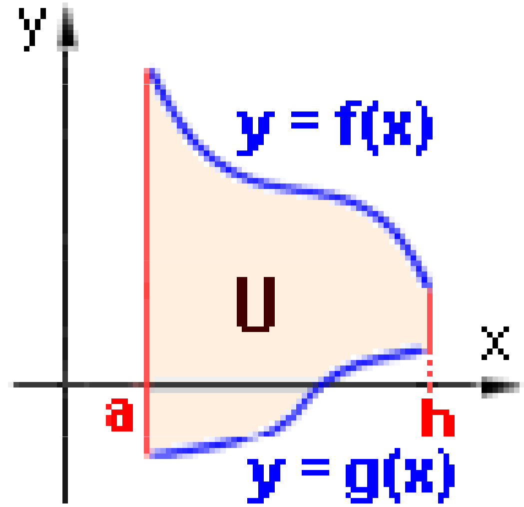
Při **záměně mezí** se mění znaménko určitého integrálu.

Pokud je číslo c z intervalu (a,b), platí:

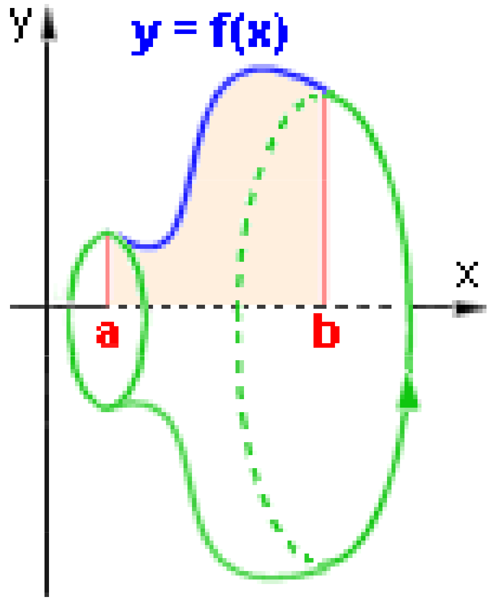


Určitý integrál

Obsah plochy ***U*** **mezi dvěma křivkami** danými grafy funkcí *f*(*x*) a *g*(*x*) při využití určitého integrálu řešíme podle vztahu:



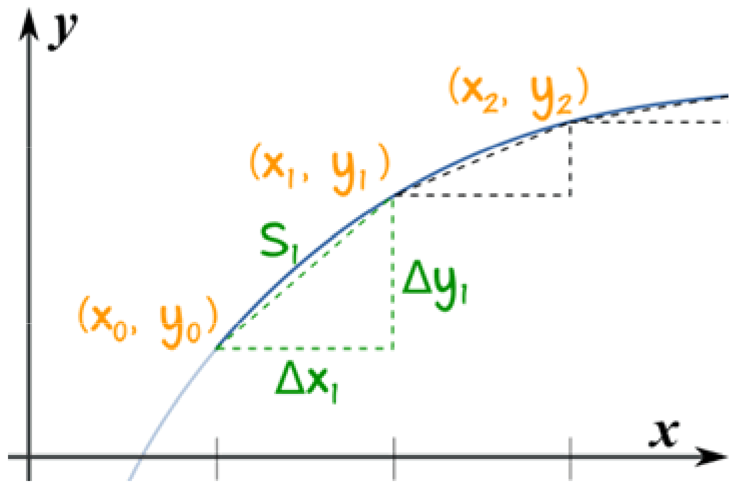
Pokud se grafy obou křivek protínají, nejsou většinou zadány meze, ty dopočítáme jako průsečíky grafů funkcí.



Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky dané funkcí *f*(*x*) je možné určit využitím určitého integrálu:

Určitý integrál

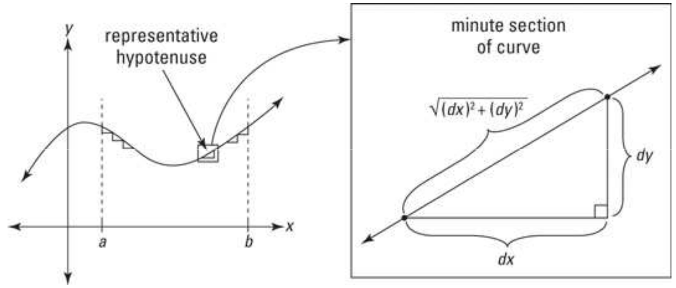
Délka rovinné křivky



Nechť je funkce f(x) definovaná na intervalu <a,b> a má zde spojitou derivaci. Pak je délka této křivky

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Calcworkshop.com



Křivka nemusí být vždy zadána explicitní funkcí y = f(x) , může být dána rovněž parametrickými rovnicemi x = x(t), y =y(t), t ∈< a, b > .

$$\text{Single-variable } y = f(x), \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx.$$

$$\text{Vector function } (x(t), y(t)), \quad L = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2}\, dt.$$

$$\text{Polar function } r = f(\theta), \quad L = \int_a^b \sqrt{f(\theta)^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta.$$

Střední hodnota funkce na intervalu

Nechť je funkce f(x) spojitá na intervalu <a, b> . Pak existuje číslo c ∈ < a b, > takové, že platí

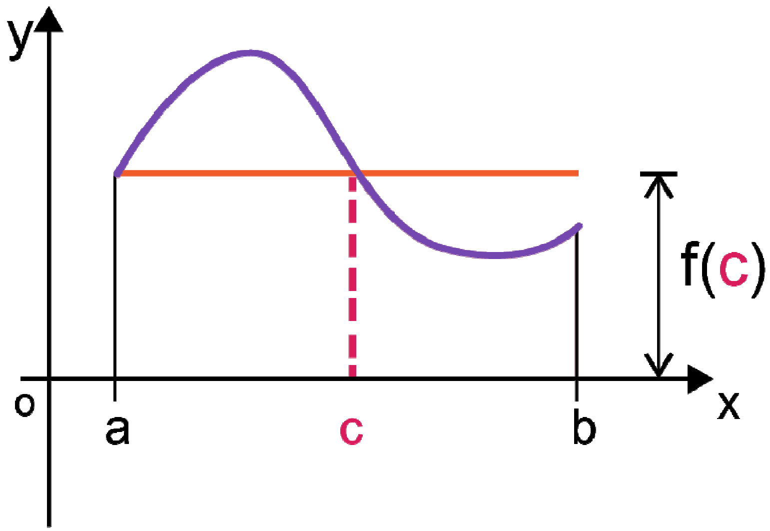
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Calcworkshop.com

f(c) je střední hodnota funkce *f* na intervalu [a, b]

c je hodnota x, odpovídající střední hodnotě *f(c)*



Calcworkshop.com

Např. pokud je *f(x)* funkce charakterizující rychlost, odpovídá *f(c)* střední hodnotě rychlosti.

Určitý integrál z rychlosti podle času je roven změně polohy během časového úseku od t_1 do t_2. Pokud polohu v závislosti na čase označíme x(t), platí tedy

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$$

Tento vzorec je zobecněním známého vztahu pro pohyb konstantní rychlostí

$$x(t_2) - x(t_1) = v \cdot (t_2 - t_1) \qquad \triangle x = v \cdot \triangle t$$

Tyto vzorce se liší pouze v tom, že ten, který využívá integrál, lze použít i pro pohyb proměnlivou rychlostí.

Určitý integrál se využívá v řadě fyzikálních definic – například určitý integrál síly podle polohy je vykonaná práce, určitý integrál ze zrychlení je změna rychlosti, objemový integrál z hustoty je hmotnost tělesa apod.

Neurčitý integrál z rychlosti podle času je poloha. Argumentem integrálu je zde funkce představující závislost rychlosti na čase; výsledkem je množina primitivních funkcí, které představují závislost polohy na čase. Těchto funkcí je nekonečně mnoho, jedna pro každou možnou počáteční polohu objektu. (To odpovídá fyzikální realitě, že ze znalosti rychlosti lze spočítat polohu objektu v čase *t*, jen pokud známe jeho polohu v nějakém čase t_0 odpovídající integrační konstantě).

Příklad

Pokud se těleso pohybuje **volným pádem**, pak jeho rychlost je

$$v(t) = -g.t$$

kde **g** je tíhové zrychlení a znaménko mínus vyjadřuje směr dolů. Pro polohu pak platí:

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int -g.t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + c$$

Číslo *c* se nazývá integrační konstanta, za níž dosazením různých hodnot dostaneme různé možné závislosti polohy na čase. Například funkce

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 50$$

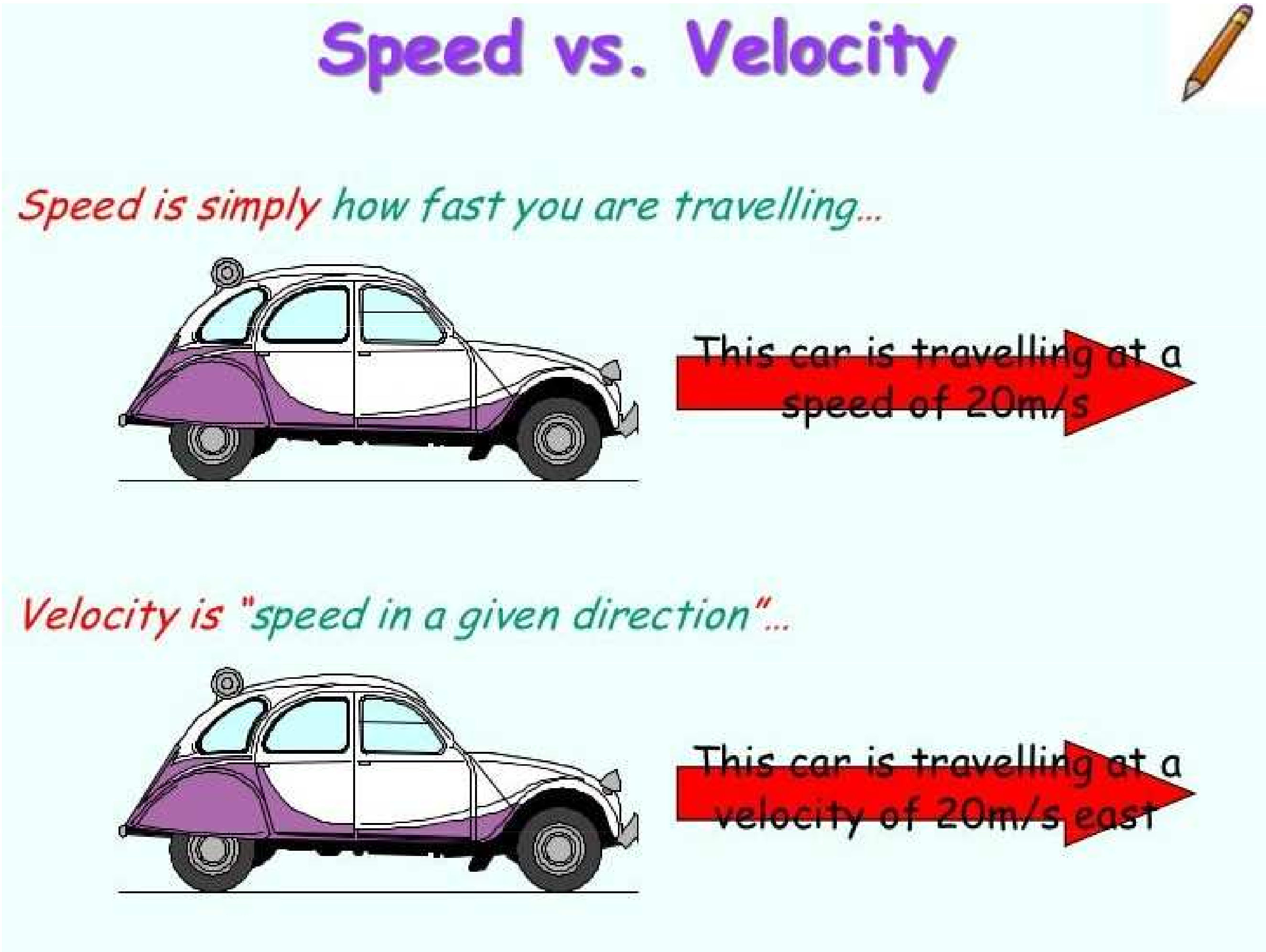
popisuje volný pád z výšky 50 metrů.

Určitý integrál lze spočítat jako rozdíl dvou hodnot neurčitého integrálu. Například výpočet dráhy uražené mezi časem 3 sekundy a 5 sekund se spočte tak, že zvolíme libovolnou z primitivních funkcí (zde je nejpřirozenější volit $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ a spočteme její rozdíl v obou časových mezích:

$$x(t) = \int_3^5 -g.t\,\mathrm{d}t = x(5) - x(3) = -\frac{1}{2}g5^2 - (-\frac{1}{2}g3^2) = -8.g$$

Rychlost hmotného bodu

Rychlost je charakteristika pohybu, která nám sděluje, jakým způsobem se mění poloha hmotného bodu v čase.



Velikost rychlosti

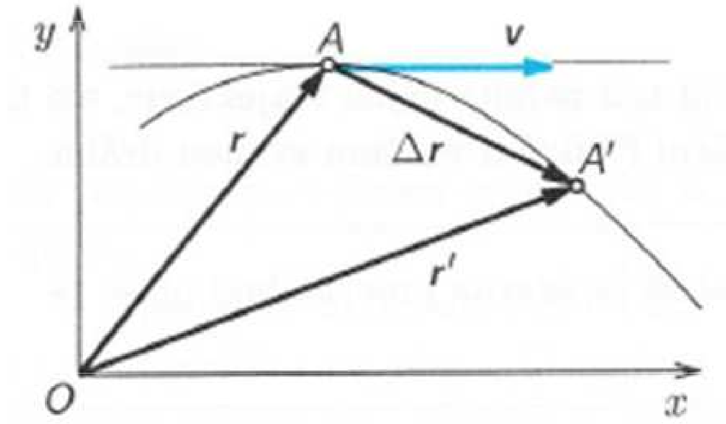
v (skalár)

Rychlost

v (vektor)

Okamžitá rychlost hmotného bodu

Okamžitá rychlost (**v**) je <u>vektor</u> <u>charakterizující změnu polohového vektoru **r** za velmi krátký časový interval</u>.



$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}. \qquad \boldsymbol{x} = \int \boldsymbol{v}\, dt.$$

Složky okamžité rychlosti

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

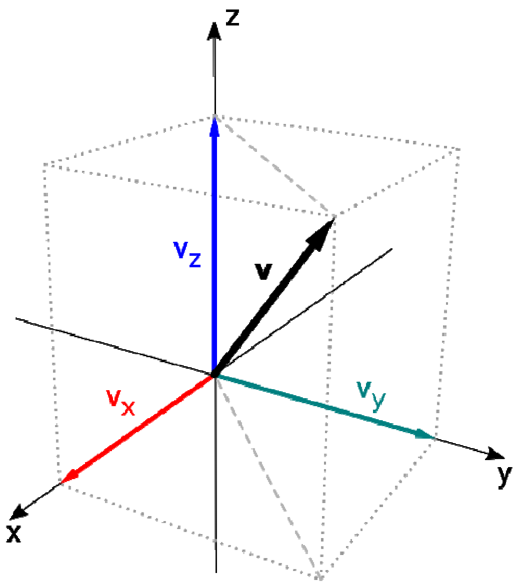
$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

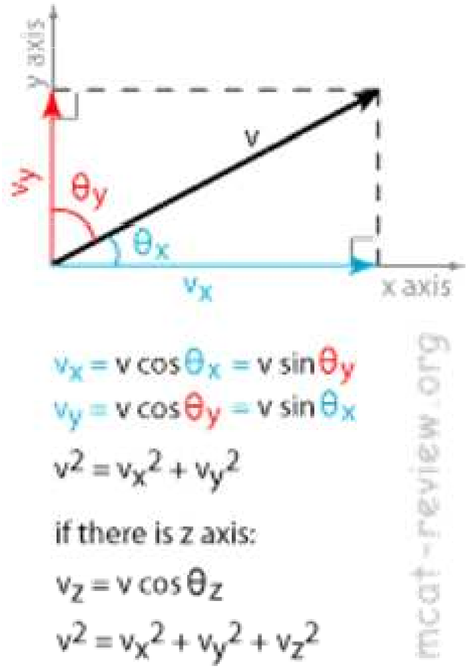
Směrové kosiny

$\cos(\alpha) = v_x/v$

$\cos(\beta) = v_y/v$

$\cos(\gamma) = v_z/v$





Velikost okamžité rychlosti: $|\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Velikost okamžité rychlosti hmotného bodu

Velikost okamžité rychlosti (*v*) je dána podílem velikosti změny polohového vektoru a časového intervalu, který změna polohy trvala.

$$|\mathbf{v}| = v = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

Je to vlastně **průměrná rychlost** na velmi krátkém úseku trajektorie a ve velmi malém časovém intervalu.

průměrná velikost rychlosti – skalár	$v_p = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}}$ $v_p = \frac{s}{t}$ $[v_p] = \mathrm{m/s} = \mathrm{m \cdot s^{-1}}$	**Průměrná velikost rychlosti vyjadřuje „jak rychle" urazí těleso danou dráhu za daný čas. Nezáleží na směru pohybu.**
průměrná rychlost – vektor (na ose *x*)	$\mathbf{v}_p = (v_{p_x}) = \frac{\text{posunutí}}{\text{čas}}$ $v_{p_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$ $[v_{p_x}] = \mathrm{m/s} = \mathrm{m \cdot s^{-1}}$	**Průměrná rychlost určuje, „jak rychle" se těleso posunulo z jedné polohy do druhé za daný čas. Závisí jen na počáteční a koncové poloze tělesa.**

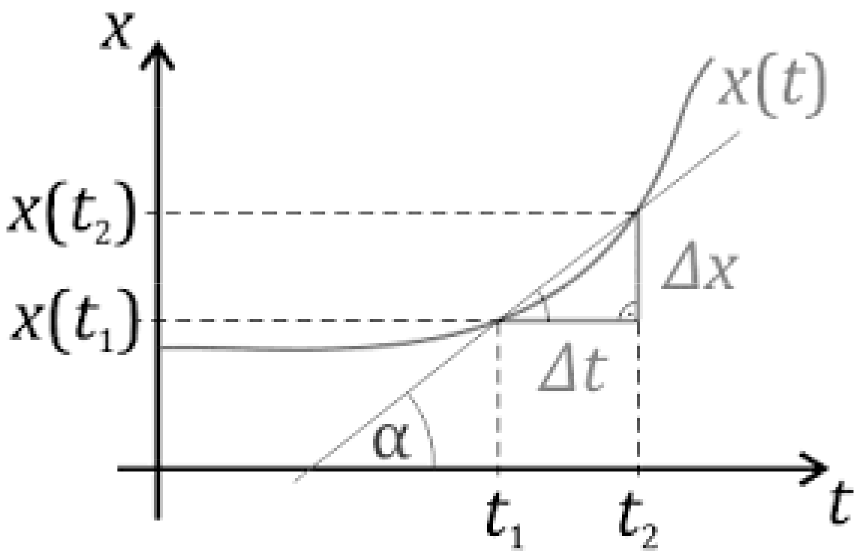
Průměrná rychlost hmotného bodu

Průměrná rychlost (v_p) podíl celkové dráhy s a doby t, za kterou hmotný bod tuto dráhu urazí.

Průměrná rychlost je skalár, hlavní jednotkou je m.s^{-1}. U dopravních prostředků se používá jednotka km.h^{-1}.

Pro jednoznačný popis pohybu hmotného bodu není průměrná rychlost dostačující. Během pohybu po dané dráze *s* se velikost rychlosti může měnit. Průměrná rychlost tedy závisí na dráze *s*, na níž byla změřena.

Pozor!!! Průměrnou rychlost nelze počítat jako aritmetický průměr rychlostí!



s = dráha
v = rychlost
t = čas

$$\frac{s}{v \cdot t}$$

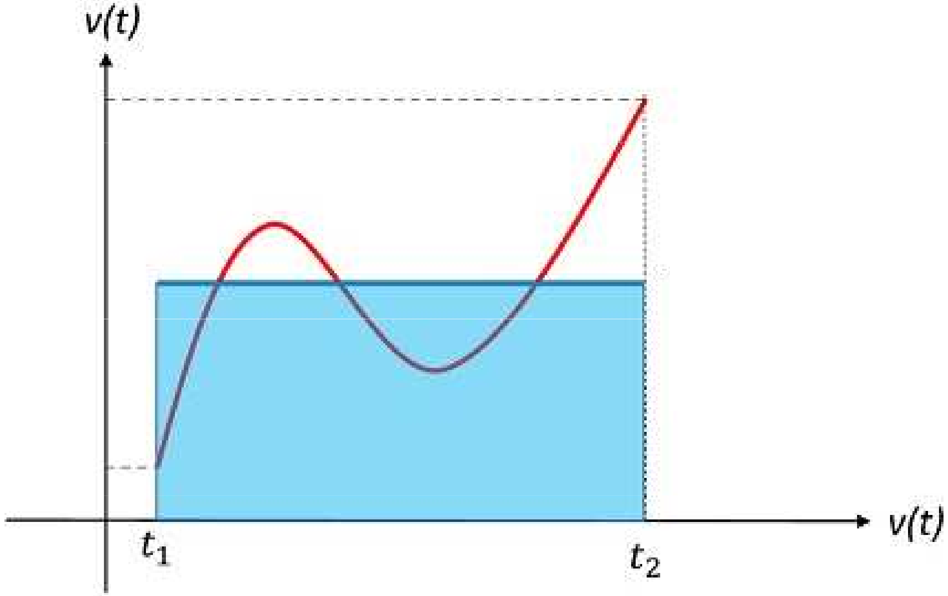
Příklad

Průměrná rychlost cyklisty jedoucího v hornatém terénu bude jiná po ujetí prvních 5 kilometrů do kopce a jiná po ujetí dalších 10 kilometrů z kopce.

Průměrná rychlost hmotného bodu

Pokud lze rychlost na intervalu t ∈ <a, b> popsat spojitou funkcí v(t), je **průměrná rychlost** rovna

$$v_{av} = \frac{\int_a^b v(t)dt}{b-a},$$



Zrychlení hmotného bodu

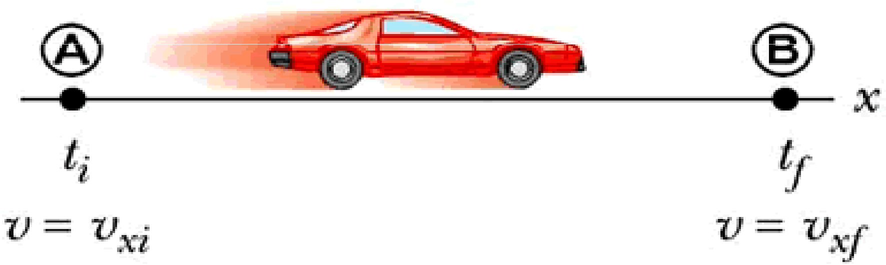
Zrychlení (akcelerace) je charakteristika pohybu, která popisuje, jakým způsobem se mění rychlost tělesa (hmotného bodu) v čase.

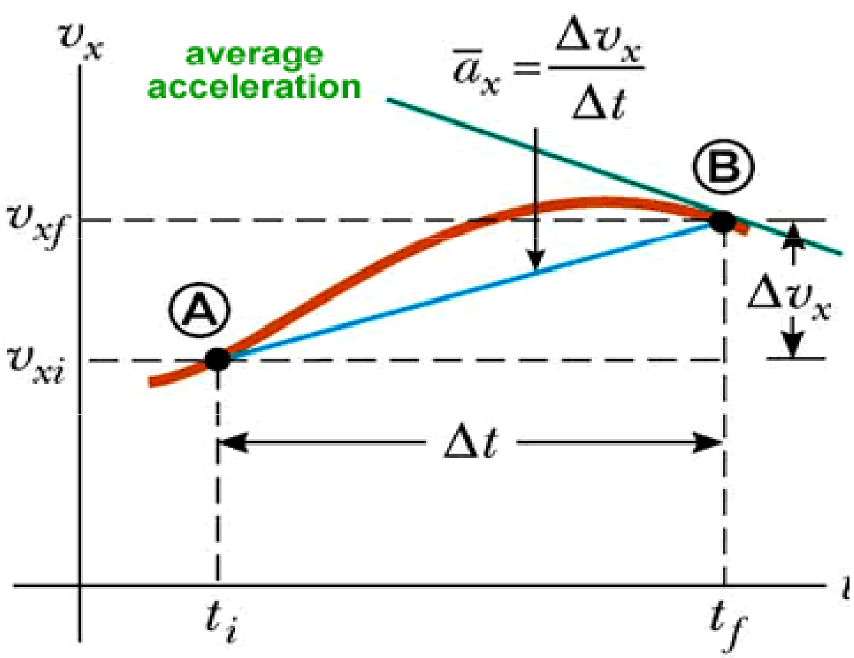
Průměrné zrychlení $$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

Okamžité zrychlení $$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

Instantaneous Acceleration

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$



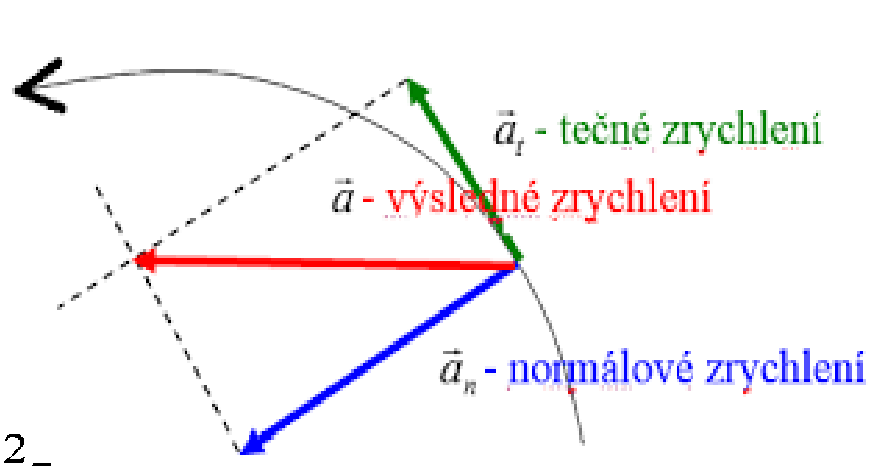


Zrychlení

Změny rychlosti charakterizuje vektorová veličina **zrychlení *a*.** Jednotkou je m.s^{-2}

Okamžité zrychlení je dáno změnou vektoru rychlosti za jednotku času

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad \mathbf{v} = \int \mathbf{a}\, dt$$



$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

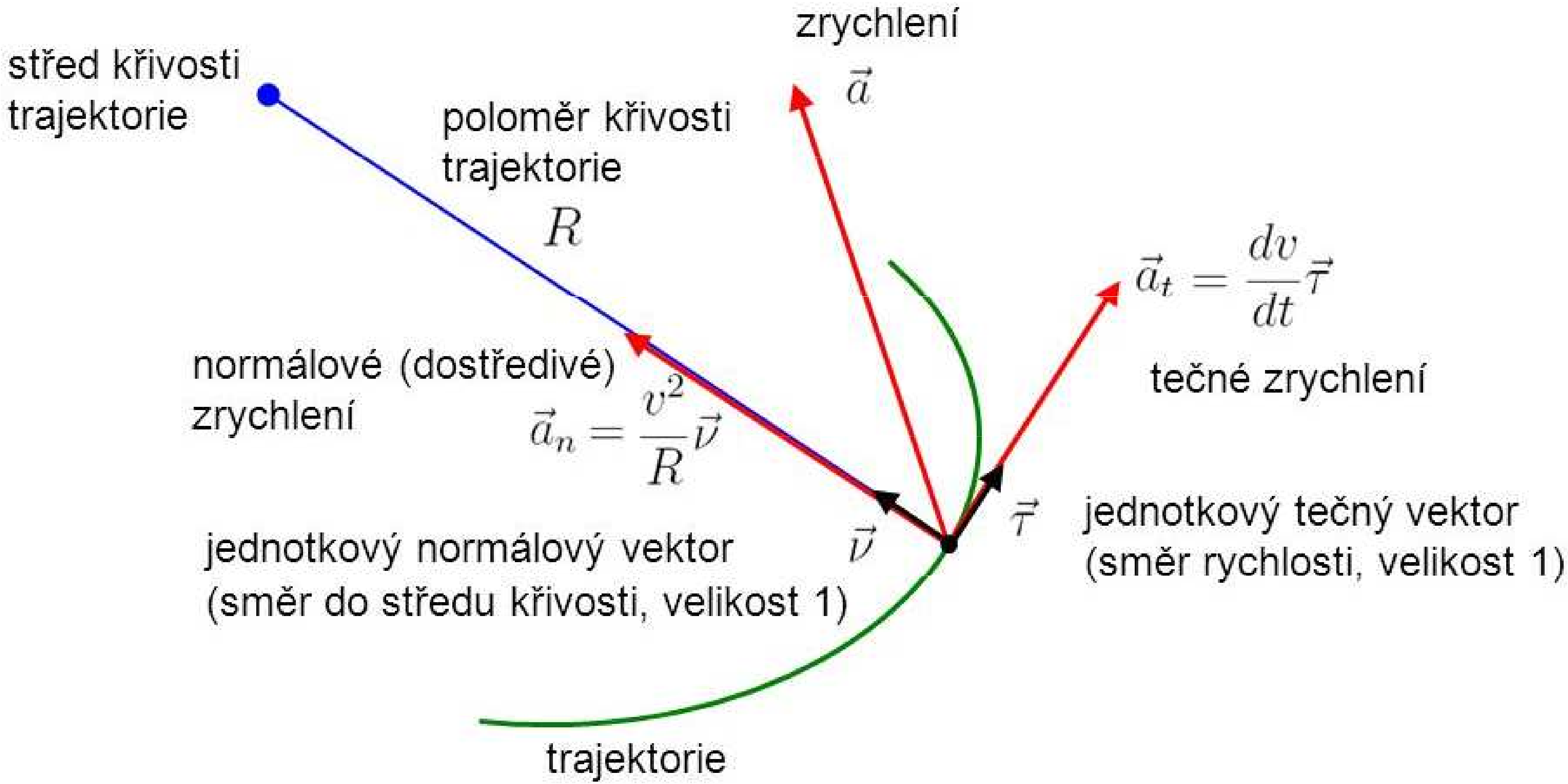
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

U křivočarého pohybu bývá zvykem rozložení vektoru zrychlení **a** do dvou navzájem kolmých složek – tečné a normálové.

Tečné (tangenciální) zrychlení (a$_t$) charakterizuje změnu velikosti rychlosti (**v**) s časem. Tečné zrychlení je rovno časové derivaci velikosti rychlosti.

$$a_v = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{\nu}}$$



Roste-li velikost rychlosti, je **tečné zrychlení** orientováno souhlasně se směrem rychlosti, klesá-li velikost rychlosti, jsou orientace tečného zrychlení a rychlosti opačné.

Velikost **normálového zrychlení** ($\mathbf{a}_n$) souvisí se zakřivením dráhy pohybu. Směřuje do středu křivosti oskulační kružnice.

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

R je poloměr oskulační kružnice dráhy bodu a *v* je velikost rychlosti bodu v místě, pro které je určena hodnota $\mathbf{a}_n$.

Tečné zrychlení $\mathbf{a}_t$ a normálové zrychlení $\mathbf{a}_n$ představují rozklad vektoru zrychlení **a**. Platí tedy vztah

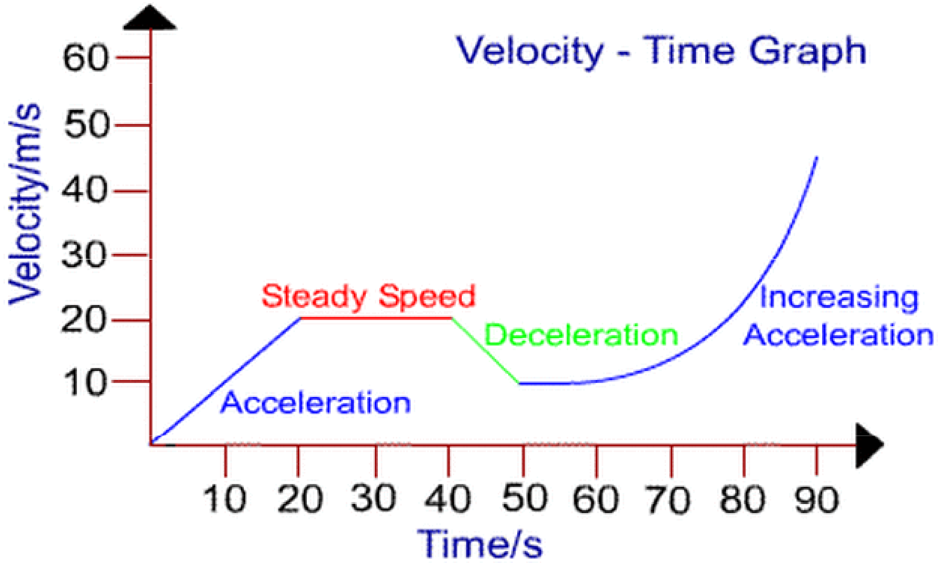
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

Pro velikost zrychlení pak platí

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Příklad

V reálném světě se obvykle vyskytují pohyby zahrnující různé základní druhy pohybů. Např. pohyb automobilu se skládá z pohybu rovnoměrně zrychleného (rozjíždění), pohybu rovnoměrného (jízda konstantní rychlostí) a pohybu rovnoměrně zpomaleného (brzdění).



Rozdělení pohybů podle rychlosti

- **Přímočarý pohyb:** směr rychlosti je po celou dobu pohybu stálý (konstantní).
- **Křivočarý pohyb:** směr rychlosti se během pohybu mění.

- **Rovnoměrný pohyb:** velikost rychlosti je po celou dobu pohybu stálá (konstantní).
- **Nerovnoměrný pohyb:** velikost rychlosti se během pohybu mění.

Přímočarý pohyb (rovnoměrný + nerovnoměrný)

Při přímočarém pohybu se nemění směr vektoru rychlosti, ale může se měnit velikost rychlosti. To znamená, že se nemění směr vektoru zrychlení, který musí být souhlasný se směrem vstupní rychlost, je-li nenulová, avšak velikost vektoru zrychlení se měnit může. Pro přímočarý pohyb platí, že normálové zrychlení je nulové.

Pro přímočarý pohyb hmotného bodu platí definice velikosti průměrné rychlosti na určitém časovém úseku:

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

kde ***Δs je změna dráhy*** a ***Δt změna času***.

Čím menší bude tento časový úsek, tím více se bude hodnota průměrné rychlosti blížit hodnotě okamžité rychlosti, matematicky to lze vyjádřit limitou (resp. derivací):

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

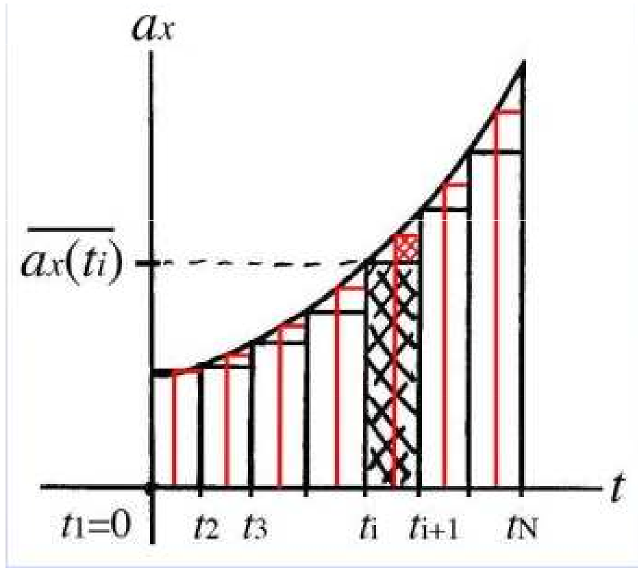
Stejné pravidlo můžeme zavést z definice zrychlení:

$$a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

kde ***Δv je změna rychlosti***.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Opačné vztahy lze získat integrací:

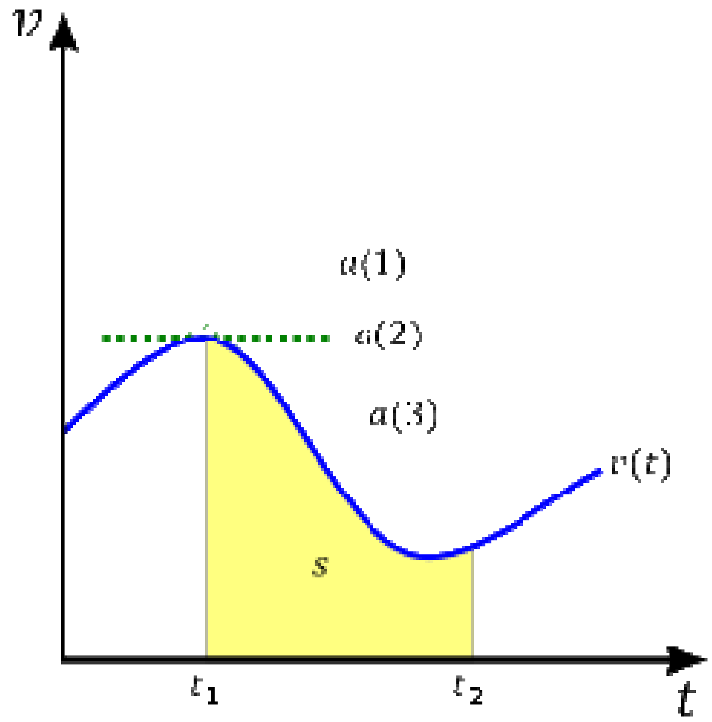


Rychlost

$$v = \int a(t)\mathrm{d}t$$

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t$$

Dráha pohybu tělesa



$$s = \int v(t)\mathrm{d}t$$

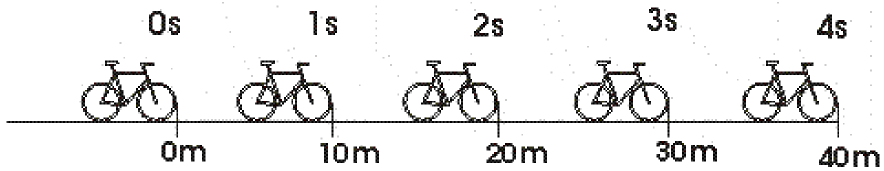
$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$$

Rovnoměrný přímočarý pohyb

Rovnoměrný přímočarý pohyb je pohyb po přímce se stálou rychlostí. Pro rovnoměrný přímočarý pohyb platí následující rovnost: $a_{\mathrm{t}} = a_{\mathrm{n}} = 0$

Hmotný bod urazí ve stejných a libovolně malých časových intervalech stejné dráhy. Rychlost se během pohybu nemění, je konstantní.

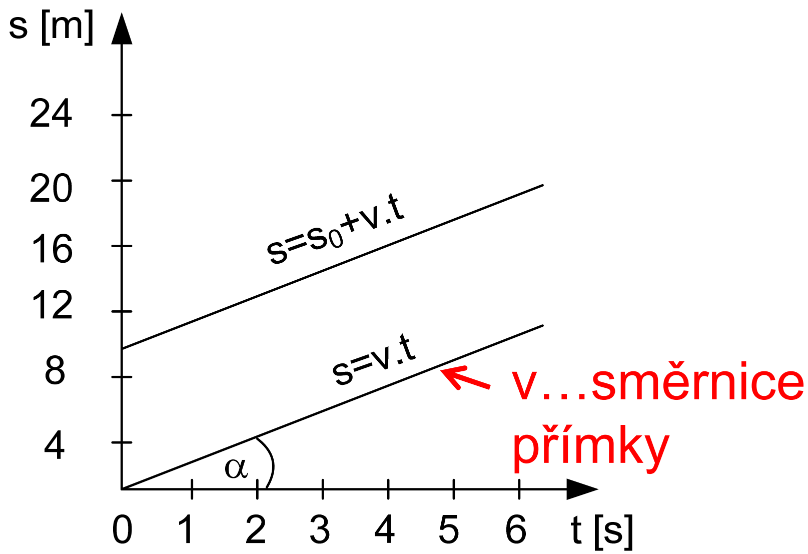
Rychlost rovnoměrného přímočarého pohybu je z definice konstantní, tedy rovna počáteční rychlosti tělesa: $v = v_0$ $\quad \Delta v = 0$



Dráha rovnoměrného přímočarého pohybu:

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t^2} v(t)\mathrm{d}t = vt_2 - vt_1 = v\Delta t$$

$$s = \int v(t)dt = \int v\mathrm{d}t = \boxed{s_0 + vt}$$



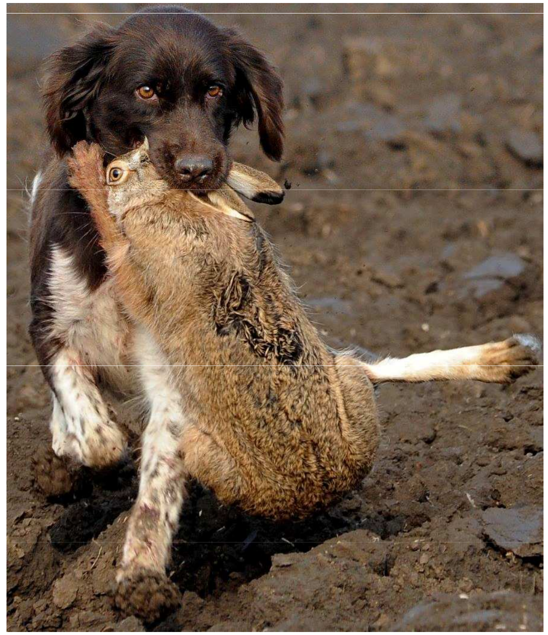
Příklady přímočarého rovnoměrného pohybu

Přímočarý rovnoměrný pohyb se uplatňuje např. při **jízdě vozidel konstantní rychlostí** na rovné cestě.
Konstantní hodnotu rychlosti mají **světlo** a **zvuk**.

Příklad

Při honu uvidí honící pes ve křoví 20 metrů před sebou zajíce. Zajíc začne utíkat a pes ho ve stejnou chvíli začne pronásledovat. Zajíc běží rychlostí 39 $km.h^{-1}$ a pes 45 $km.h^{-1}$. Za jak dlouho dohoní pes zajíce?

$s_0 = 20$ m
$v_z = 39\ km.h^{-1} = 10{,}83\ m.s^{-1}$
$v_p = 45\ km.h^{-1} = 12{,}5\ m.s^{-1}$
$t = ?$



$s_z = s_0 + v_z.t$
$s_p = v_p.t$
$s_z = s_p$
$s_0 = v_p.t - v_z.t = (v_p - v_z).t$
$t = s_0/(v_p - v_z) = 20/1{,}67 = \underline{12\ s}$

Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

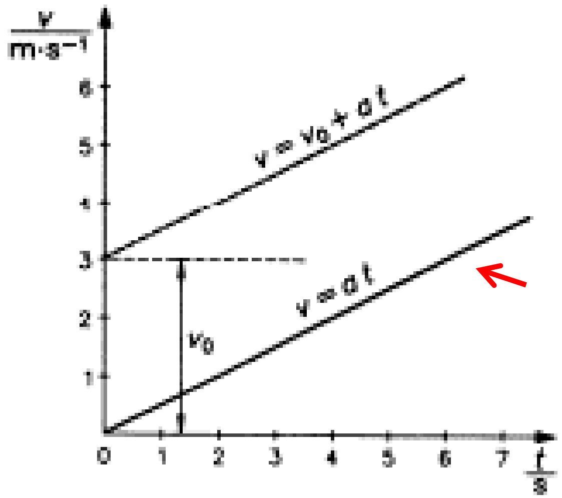
Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb je pohyb po přímce se stálým zrychlením. Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb je zvláštním případem nerovnoměrného přímočarého pohybu, kdy zrychlení je konstantní ve velikosti i směru. Trajektorií je přímka nebo část přímky. Velikost rychlosti se mění přímo úměrně s časem. Směr rychlosti se nemění.

Má-li **zrychlení** stejnou orientaci (hodnotu znaménka) jako směr pohybu tělesa, pak se rychlost tělesa zvyšuje a jedná se o **zrychlený pohyb**. Má-li zrychlení opačnou orientaci (hodnotu znaménka) než směr pohybu tělesa, pak se rychlost tělesa snižuje a jedná se o **pohyb zpomalený**.

Rychlost rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu:

$$v = \int a(t)\mathrm{d}t = \int a\mathrm{d}t = \boxed{v_0 + at}$$

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} a\mathrm{d}t = at_2 - at_1 = a\Delta t$$

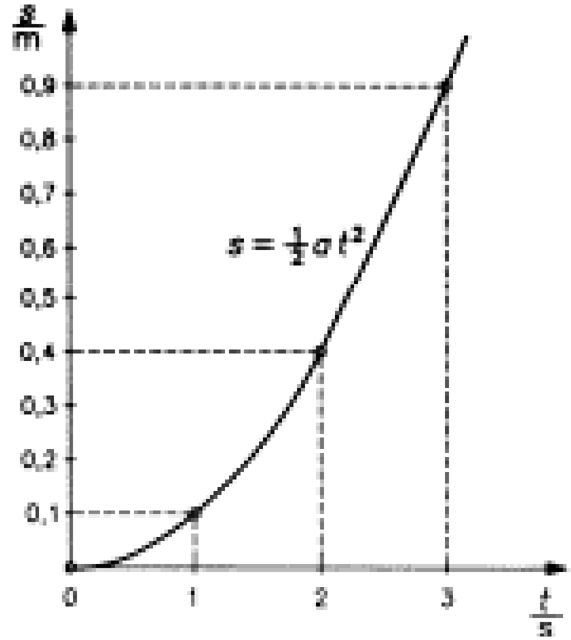


a…směrnice přímky

Dráha rovnoměrného přímočarého pohybu:

$$s = \int v(t)dt = \int (v_0 + at)\mathrm{d}t = \boxed{s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + at)\mathrm{d}t = v_0\,(t_2 - t_1) + \frac{a}{2}(t_2 - t_1)^2$$



Příklady přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu

Přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb se uplatňuje např. při **rozjíždění, zastavování, zrychlování a brzdění vozidel** na rovné cestě.

Pohyb po nakloněné rovině (jízda do kopce a z kopce) je rovnoměrně zrychlený s konstantním zrychlením, které závisí pouze na úhlu sklonu nakloněné roviny (svahu).

Zvláštním druhem přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu je **volný pád**.

Příklad

Vlak se rozjíždí z klidu se zrychlením 0,3 m.s^{-2} po dobu 30 s. Po určitou dobu se pohyboval konstantní rychlostí a poté se brzděním jeho rychlost zmenšovala se stálým zpožděním 0,4 m.s^{-2}. až do zastavení. Určete dobu po kterou se vlak pohyboval rovnoměrně a trvání celé cesty, urazil-li vlak celkovou vzdálenost 4 km.

$t_1 = 30$ s
$a_1 = 0{,}3$ m.s^{-2}
$a_3 = 0{,}4$ m.s^{-2}
$s = 4$ km $= 4000$ m
$t_2 = ?$
$t = ?$

$v_1 = a_1.t_1 = 0{,}3 \,.\, 30 = 9$ m.s^{-1}
$s_1 = ½.a_1.t_1^2 = ½ \,.\, 0{,}3 \,.\, 30^2 = 135$ m

$t_3 = v_1/a_3 = 9/0.4 = 22{,}5$ s
$s_3 = ½.a_3.t_3^2 = ½ \,.\, 0{,}4 \,.\, 22{,}5^2 = 101$ m

$s_2 = s - s_2 - s_3 = 4000 – 135 – 101 = \underline{3764 \text{ m}}$
$t_2 = s_2/v_1 = 3764/9 = 418$ s
$t = t_1 + t_2 + t_3 = 30 + 418 + 22{,}5 = 470{,}5$ s $= \underline{7{,}85 \text{ min}}$

Příklad

Strojvedoucí rychlíku, který se pohyboval rychlostí 108 km.h^{-1} spatřil ve vzdálenosti 180 m před sebou nákladní vlak pohybující se stejným směrem rychlostí 32,4 km.h^{-1}. Strojvedoucí začal brzdit a vlak zpomalil se zpomalením 1,2 ms^{-2}. Zjistěte, zda se vlaky srazí.

s_0 = 180 m
v_1 = 108 km.h^{-1} = 30 m.s^{-1}
v_2 = 32,4 km.h^{-1} = 9 m.s^{-1}
a = 1,2 m.s^{-1}

Rýchlik $s_1 = v_1 t - \frac{1}{2} a t^2$

Nákladný $s_2 = s_0 + v_2 t$

$s_1 = s_2$

$$v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 = s_0 + v_2 t$$

$$v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 - s_0 - v_2 t = 0$$

$$\frac{1}{2} a t^2 + (v_2 - v_1).t + s_0 = 0$$

$$\frac{1}{2} 1{,}2.t^2 + (9 - 30).t + 180 = 0$$

$$0{,}6.t^2 - 21t + 180 = 0 \,/ : 3$$

$$0{,}2.t^2 - 7t + 60 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{0{,}4} \quad \Rightarrow t_1 = \frac{8}{0{,}4} = 20s, \in \varnothing$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{6}{0{,}4} = 15s$$

Vlaky se srazí v čase 15 s od zahájení brzdění ve vzdálenosti 315 m.

$$s = v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 = 30.15 - \frac{1}{2}.1{,}2.15^2 = 450 - 135 = 315m$$

$$s = 315m$$

Nerovnoměrný přímočarý pohyb

Nerovnoměrný přímočarý pohyb je pohyb, u kterého **směr rychlosti zůstává stejný** (trajektorií je přímka nebo část přímky), ale **velikost rychlosti se mění**. Jestliže se velikost rychlosti mění s časem přímo úměrně, pak se jedná o pohyb rovnoměrně zrychlený, jestliže závislost rychlosti na čase je jiná než lineární, pak se jedná o „čistý“ nerovnoměrný pohyb. **Zrychlení** takového pohybu **se mění**.

Dráha nerovnoměrného přímočarého pohybu:

$$s = f(t)$$

(dráha s je funkcí času t jinou než lineární nebo kvadratickou)

Rychlost nerovnoměrného přímočarého pohybu:

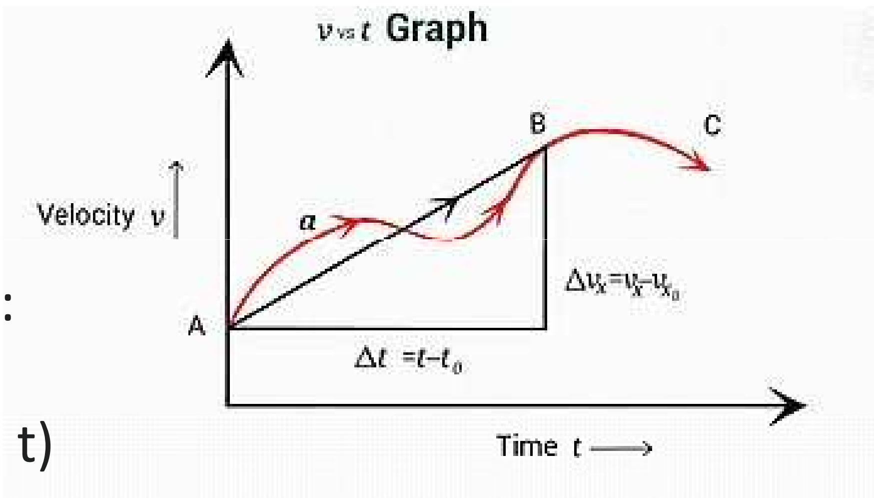
$$v = ds/dt$$

(rychlost v je první derivací dráhy s podle času t)

Zrychlení nerovnoměrného přímočarého pohybu:

$$a = d^2s / dt^2$$

(zrychlení a je druhou derivací dráhy s podle času t)



Pohyb po kružnici

Pohyb po kružnici je pohyb (hmotného bodu), jehož trajektorií je kružnice. Je nejjednodušším příkladem křivočarého pohybu.

Dráha pohybu po kružnici

Rozlišuje se obvodová dráha a úhlová dráha.

Obvodová dráha *s* je vzdálenost, kterou urazí hmotný bod během pohybu po obvodu kružnice.

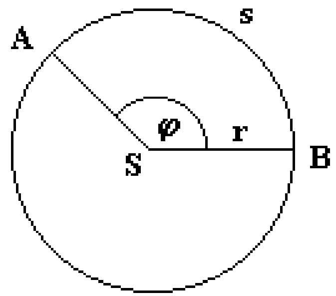
Úhlová dráha φ je úhel, který za čas *t* spojnice středu dráhy a pohybujícího se hmotného bodu (průvodič) během pohybu.

$$\varphi = \int \omega dt$$

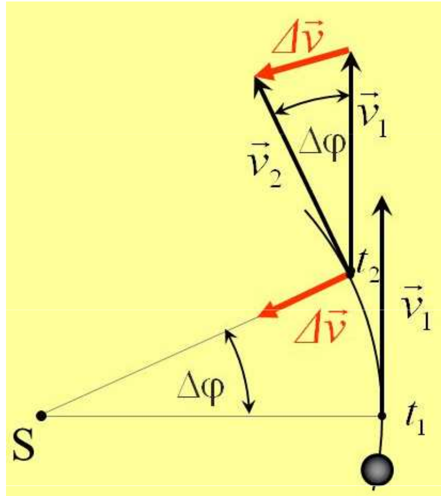
Konstantní *r* představuje poloměr trajektorie, ω je úhlová rychlost. Při pohybu se s časem mění pouze úhel φ, poloměr dráhy je konstantní.

Mezi úhlovou dráhou a obvodovou dráhou je vztah (*r* je poloměr kružnice):

$$\varphi = \frac{s}{r}$$



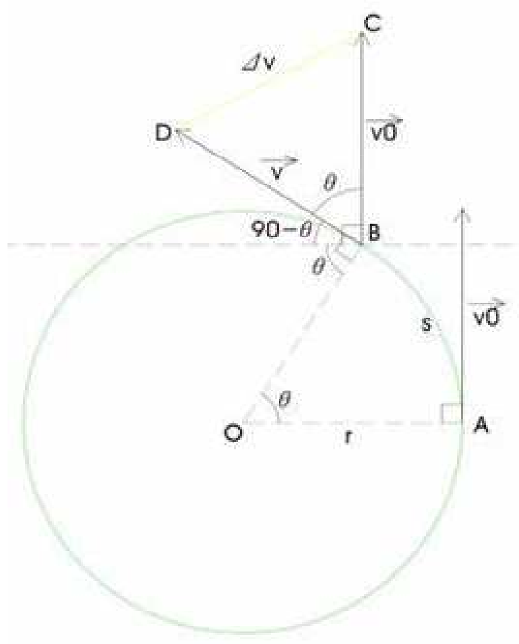
Rychlost pohybu po kružnici



Podobně jako u dráhy se rozlišuje **obvodová rychlost** a **úhlová rychlost**. Kromě toho lze počítat **okamžitou** nebo **průměrnou rychlost**. <u>Vektor obvodové rychlosti má směr tečny ke kružnici.</u>

Okamžitá úhlová rychlost se rovná první derivaci úhlové dráhy φ podle času *t*.

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad \omega = \int \alpha \, dt$$



Průměrná úhlová rychlost se rovná podílu celkové úhlové dráhy

φ a celkového času *t*.

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Okamžitá obvodová rychlost se rovná první derivaci dráhy *s* podle času *t*.

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

Průměrná obvodová rychlost se rovná podílu celkové dráhy *s* a celkového času *t*.

$$v = \frac{s}{t}$$

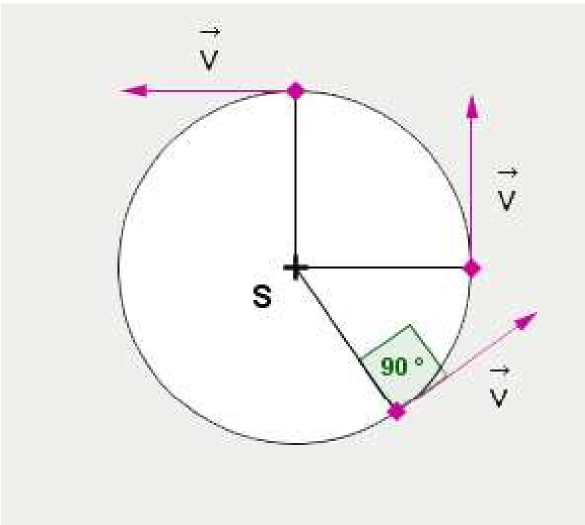
Vztah mezi **úhlovou rychlostí** a **obvodovou rychlostí**

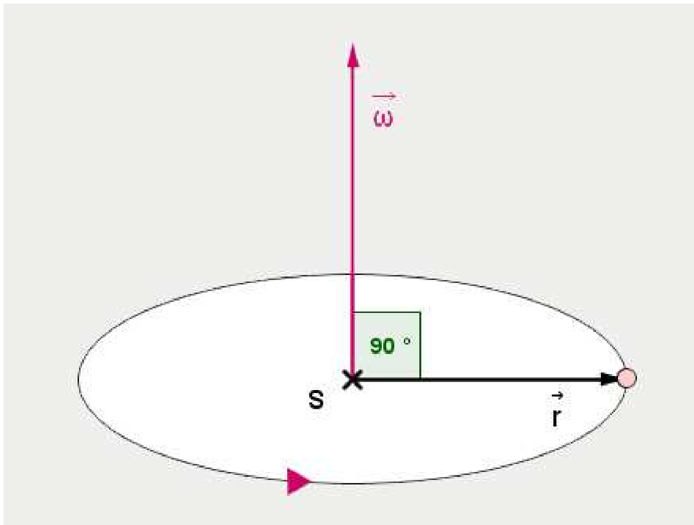
$$\omega = \frac{v}{r} \qquad \text{nebo} \qquad [\omega] = s^{-1}$$

V nerotující souřadné soustavě klidové vůči středu dané kružnice, je spojena s úhlovou rychlostí vektorovým vztahem

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

r je poloměr zatáčky, resp. poloměr oskulační kružnice trajektorie v daném bodě.





Zrychlení pohybu po kružnici

Při pohybu po kružnici se neustále mění směr vektoru rychlosti a může se měnit i velikost rychlosti. <u>Změnu směru</u> vyjadřuje **dostředivé zrychlení**, jehož směr je do středu kružnice. Protože <u>směr dostředivého zrychlení je neustále kolmý na směr rychlosti</u>, označuje se také jako ***normálové zrychlení*** (*normálová složka zrychlení*). <u>Změnu velikosti rychlosti</u> popisuje ***tečné zrychlení*** (*tečná složka zrychlení*).

Změnu úhlové rychlosti vyjadřuje veličina **úhlové zrychlení**.

$$\Delta v \doteq \Delta \varphi \cdot v$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi \cdot v}{\Delta t} = v \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$a = v \cdot \omega$$

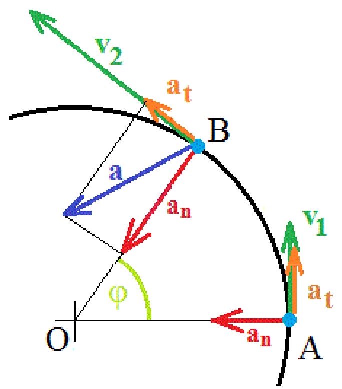
$$\boxed{a = v \cdot \omega = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}}$$

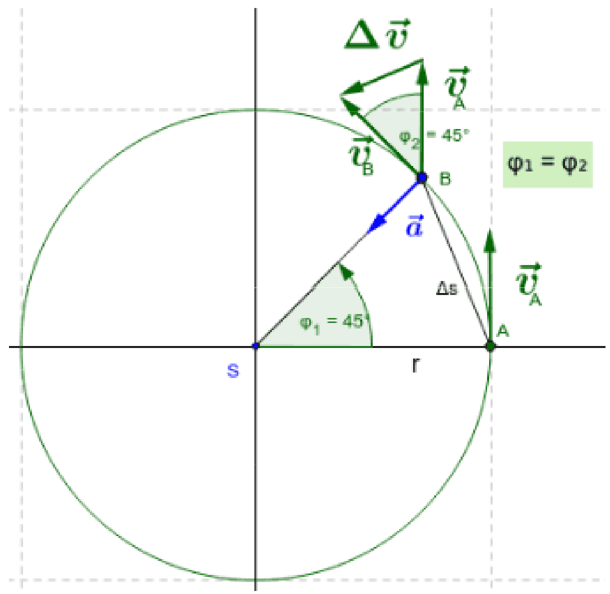
Dostředivé zrychlení $a_d = \omega^2 r$

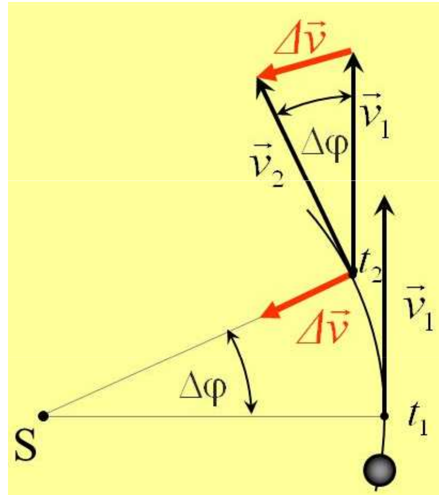
kde ω je úhlová rychlost a r je poloměr kružnice, nebo

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

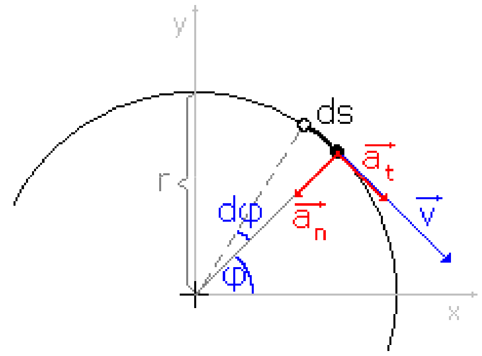
kde v je obvodová rychlost.







Tečné zrychlení a_t se rovná první derivaci obvodové rychlosti **v** podle času *t* nebo druhé derivaci obvodové dráhy *s* podle času *t*.



$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \text{nebo} \quad a_t = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_t = r \cdot \varepsilon$$

Celkové zrychlení a se rovná vektorovému součtu dostředivého (normálového) a tečného zrychlení, velikost se vypočte podle vzorce

$$a = \sqrt{a_d^2 + a_t^2}$$

Úhlové zrychlení ε se rovná první derivaci úhlové rychlosti *t* nebo druhé derivaci úhlové dráhy *φ* podle času *t*:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \quad \text{nebo} \quad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}t^2} \qquad \varepsilon = a_t / r$$

Perioda a frekvence

Perioda vyjadřuje dobu, za kterou hmotný bod opíše kružnici právě jednou.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{nebo} \quad T = \frac{2\pi r}{v}$$

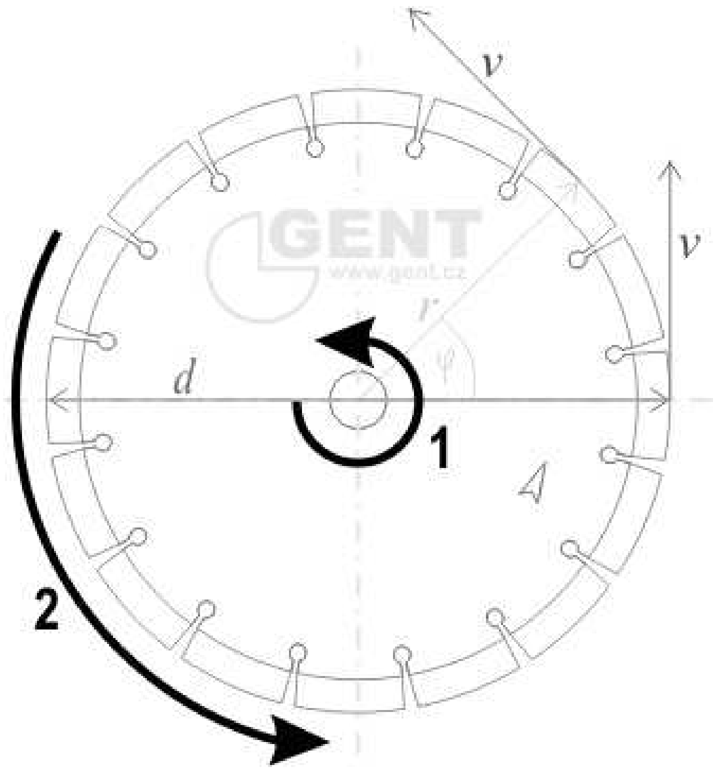
Frekvence určuje počet kružnic, které hmotný bod urazí za jednotku času.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \boxed{\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f} \qquad \text{nebo} \quad f = \frac{v}{2\pi r}$$

$[f] = s^{-1}$ nebo Hz

Rovnoměrný pohyb po kružnici

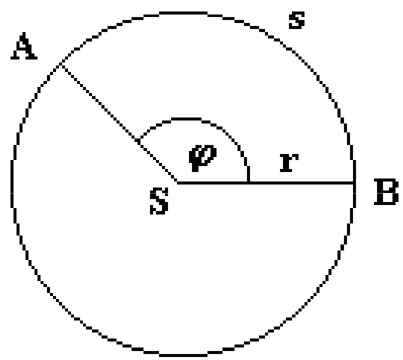
Hmotný bod koná rovnoměrný pohyb po kružnici, jestliže ve stejných a libovolně malých časových intervalech opíše jeho průvodič stejné úhlové dráhy.



Rovnoměrný pohyb po kružnici

Rovnoměrný pohyb po kružnici je pohyb, při kterém je <u>trajektorie kružnice a velikost rychlosti konstantní, ale neustále se mění směr vektoru rychlosti</u>. Jedná se o speciální případ obecného pohybu po kružnici

Dráha při rovnoměrném pohybu po kružnici



Obvodová dráha *s* je vzdálenost (délka oblouku kružnice), kterou urazí hmotný bod během pohybu po obvodu kružnice.

$$s = v \cdot t$$

kde *v* je obvodová rychlost, *t* je čas.

Úhlová dráha *φ* je úhel, který urazí průvodič tělesa během pohybu.

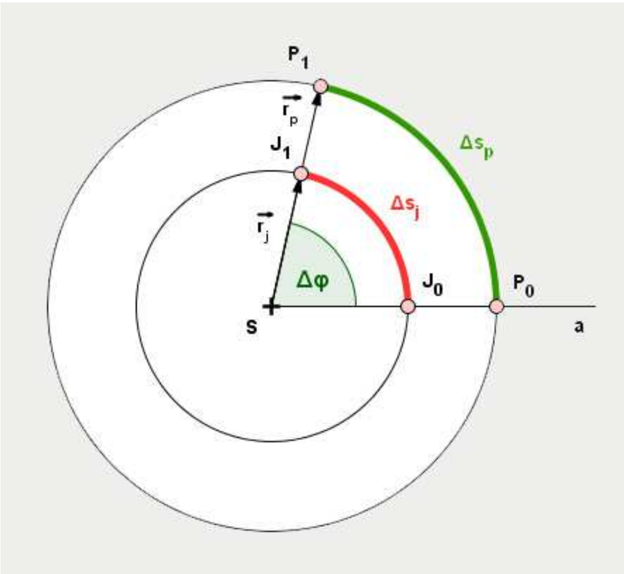
$$\varphi = \omega \cdot t \qquad \varphi = \omega t + \varphi_0$$

kde *ω* je úhlová rychlost, *t* je čas, φ_0 je počáteční úhlová dráha.

Mezi úhlovou dráhou a obvodovou dráhou je vztah

$$\varphi = s / r$$

kde *r* je poloměr kružnice.



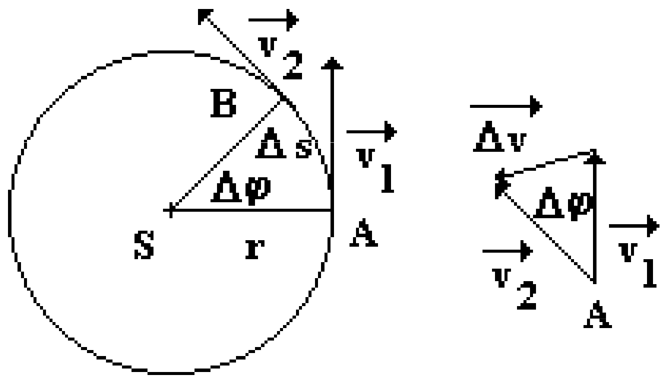
Rychlost při rovnoměrném pohybu po kružnici

Obvodová rychlost *v* je rychlost pohybu po obvodu kružnice

v = konst.

$v = s/t$

kde *s* je obvodová dráha, *t* je čas



Úhlová rychlost *ω* je rychlost průvodiče tělesa

ω = konst.

$\omega = \varphi/t$

kde *φ* je úhlová dráha, *t* je čas

$$\boxed{\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f}$$

Vztah mezi úhlovou rychlostí a obvodovou rychlostí: $\omega = v/r$, kde *r* je poloměr kružnice.

Zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici

Při rovnoměrném pohybu po kružnici se nemění velikost rychlosti, ale neustále se mění směr rychlosti. Tuto změnu v čase vyjadřuje **dostředivé zrychlení** a_d, jehož směr je do středu kružnice. Jiné zrychlení u rovnoměrného pohybu po kružnici není (tečné zrychlení je nulové).

$a_d = v^2 / r$ nebo $a_d = \omega^2 \,.\, R$

kde *v* je obvodová rychlost, *ω* je úhlová rychlost, *r* je poloměr kružnice

Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici

Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici je pohyb, při kterém je trajektorie kružnice, velikost rychlosti se mění s konstantním tečným zrychlením (**a_t**), ale neustále se mění směr vektoru rychlosti s normálovým zrychlením (**a_n**).

Úhlová dráha φ

$$\varphi = \omega_0 . t + \frac{1}{2} \alpha . t^2 + \varphi_0 \qquad \varphi = \frac{s}{r}$$

φ_0 je úhlová dráha rychlost v počátečním čase t_0, ω_0 je počáteční úhlová rychlost v čase t a α je úhlové zrychlení.

Okamžitá úhlová rychlost ω

$$\omega = \alpha . t + \omega_0 \qquad \omega = \frac{v}{r} \qquad \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Úhlové zrychlení α je konstantní.

$a_t = r \, . \, \alpha$

α = konst. = $a_t \, / \, r$

$$a_d = \omega^2 r$$

Příklad

Kolo auta má poloměr 37,5 cm. Kolik otáček vykoná za sekundu, jede-li auto rychlostí 54 $km.h^{-1}$?

$r = 37{,}5\ cm = 0{,}375\ m$
$v = 54\ km.h^{-1} = 15\ m.s^{-1}$
$t = 1\ s$
$n = ?$

1) $n = \omega/2.\pi = v\ /2.\pi.r = 15/2.\pi.0{,}375 = \underline{6{,}4\ s^{-1}}$
2) $n = v.t\ /\ 2.\pi.r = 15.1/2.\pi.0{,}375 = \underline{6{,}4\ s^{-1}}$

Příklad

Kolo na hřídeli se začíná roztáčet z klidu a dosáhne za dobu 20 s 200 otáček za minutu. Jaké je jeho úhlové zrychlení za předpokladu, že je během roztáčení stálé? Kolikrát se kolo za tuto dobu otočí?

$t = 20\ s$
$n = 200\ min^{-1} = 3{,}33\ s^{-1} = f$ (frekvence)

$\omega = 2.\pi.f = 21\ rad.s^{-1}$
$\varepsilon = \omega/t = 2.\pi.f/t = 2.\pi.\ 3{,}33\ /20 = \underline{1{,}05\ rad.s^{-2}}$
$\varphi = ½.\ \varepsilon.t^2 = ½.\ 1{,}05.20^2 = \underline{201\ rad}$

Relativní pohyb

Pro složené pohyby platí **princip superpozice** (princip nezávislosti pohybů):

Koná-li hmotný bod současně dva nebo víc pohybů, je jeho výsledná poloha taková, jako kdyby konal tyto pohyby po sobě, a to v libovolném pořadí.

Složený rovinný pohyb bodu je pohyb bodu v rovině složený ze dvou nebo více současných rovinných pohybů. Rovinný pohyb je zpravidla složen z **unášivého pohybu** a **relativního pohybu**. Složením těchto dvou pohybů dostaneme výsledný pohyb tělesa s rychlostí $\mathbf{v}_t$, která je vektorovým součtem unášivé a relativní rychlosti.

V přírodě i v technické praxi dochází ke skládání pohybů těles mnohem častěji než k pohybům jednoduchým. Např.

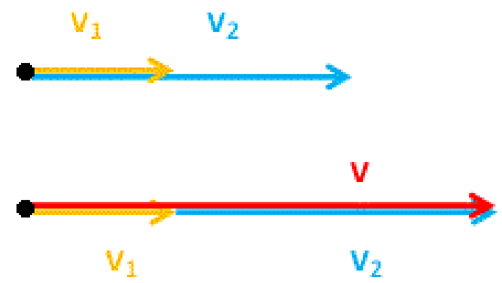
Součásti různých strojů se pohybují dílčími pohyby a stroj jako celek vykonává pohyb složený (kola automobilu rotují a současně se pohybují translačně).

Zeměkoule rotuje kolem své vlastní osy a současně obíhá kolem Slunce.

1. skládání dvou rychlostí působících ve stejném směru

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

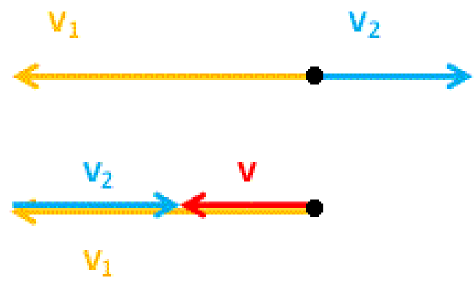
$$v = v_1 + v_2$$



2. skládání dvou rychlostí působících v opačném směru

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

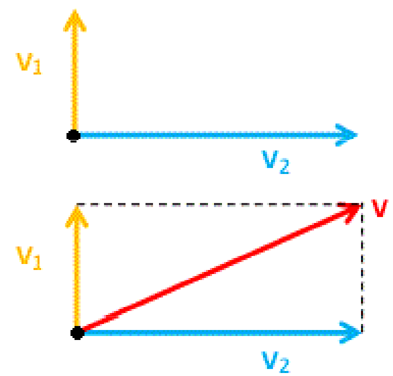
$$v = v_1 - v_2$$



3. skládání dvou rychlostí působících kolmo na sebe

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

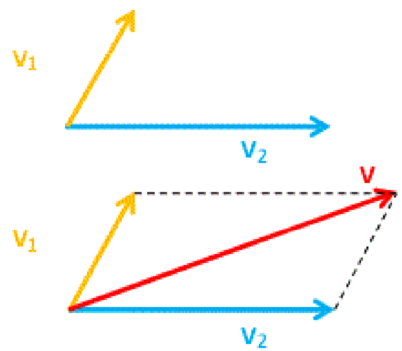
$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



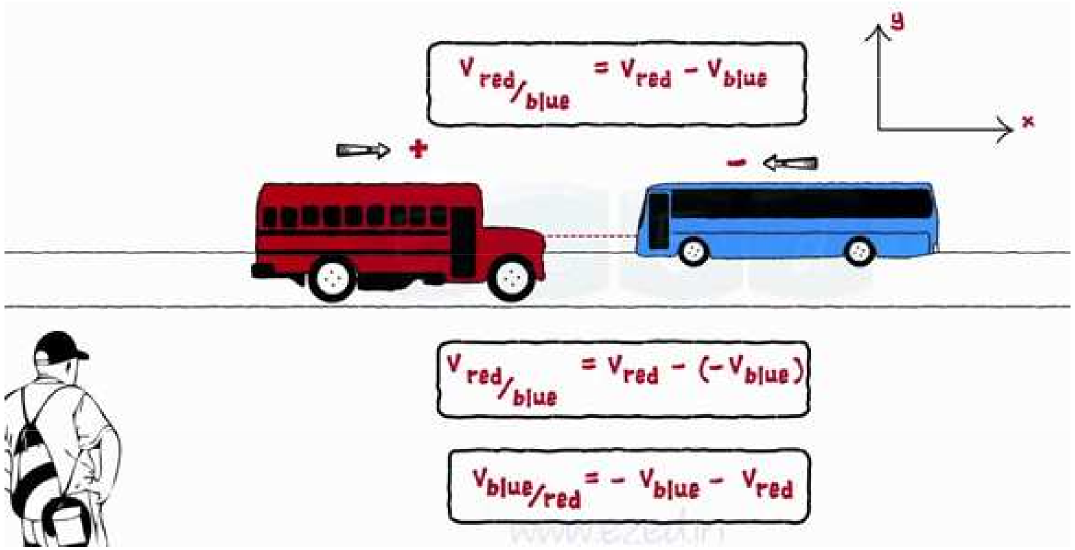
4. skládání dvou rychlostí působících v obecném směru

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

$$v^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 - 2\, v_1\, v_2 \cos \alpha$$



Při skládání pohybů je třeba zohlednit zvolenou vztažnou soustavu



Příklad

Vagonem rychle jedoucího rychlíku ($\boldsymbol{v}_r$) pomalu prochází průvodčí rychlostí $\boldsymbol{v}_p$ ve směru jízdy vlaku. Vzhledem k vagonu se průvodčí pohybuje pomalu rychlostí $\boldsymbol{v}_p$. Vzhledem k Zemi se průvodčí pohybuje rychle rychlostí $\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_p$. Pokud by šel průvodčí proti směru jízdy vlaku, pohyboval by se vůči Zemi rychlostí $\boldsymbol{v}_r - \boldsymbol{v}_p$.

Příklad

Parník A vyplul z přístavu na sever rychlostí 30 km.h^{-1} a zároveň vyplul parník B na východ rychlostí 40 km.h^{-1}. Jak rychle roste vzájemná vzdálenost obou parníků?

$v_A = 30$ km.h^{-1}

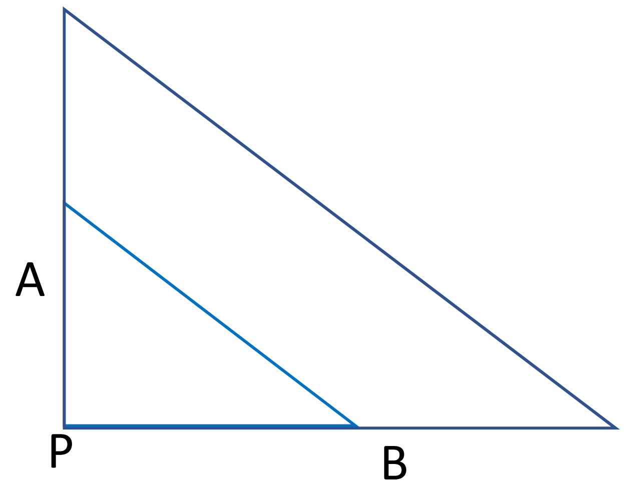
$v_B = 40$ km.h^{-1}

$ds/dt = ?$

$s^2 = s_A^2 + s_B^2 = v_A^2 . t^2 + v_B^2 . t^2 = (v_A^2 + v_B^2) . t^2$

$s = \sqrt{(v_A^2 + v_B^2)} \, . \, t$

$ds/dt = \sqrt{(v_A^2 + v_B^2)} = \sqrt{(40^2 + 30^2)} = \underline{50 \text{ km.h}^{-1}}$



Příklad

Jeřáb zvedá břemeno rovnoměrným přímočarým pohybem do výšky 6,5 m a současně popojede vodorovným směrem do vzdálenosti 4,2 m. Určete dráhu břemene a úhel, který svírá jeho trajektorie s vodorovným směrem.

$y = 6{,}5$ m

$x = 4{,}2$ m

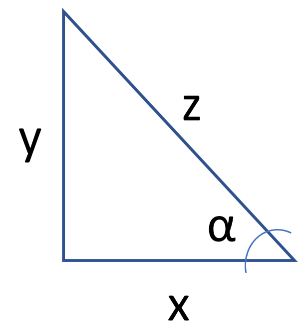
$z = ?$

$\alpha = ?$

$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 6{,}5^2} = \underline{7{,}7 \text{ m}}$

$tg(\alpha) = y/x = 1{,}55$

$\alpha = arctg(1{,}55) = \underline{57°}$



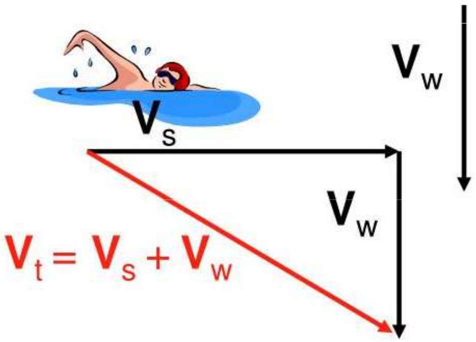
Příklad

Plavec, jehož rychlost vzhledem na vodu je 0,85 ms^{-1} plave v řece, v níž voda teče rychlostí 0,40 ms^{-1}. Určete čas, za který dopluje z místa A do B, vzdáleného 90 m, pokud plave:

a) po proudu

b) proti proudu

c) tak, že výsledná rychlost je kolmá na rychlost proudu.



v_1 = 0,85 $m.s^{-1}$, v_2 = 0,40 $m.s^{-1}$, s = 90 m

a) po prúde :

$$v = v_1 + v_2$$

$$v = 0{,}85ms^{-1} + 0{,}40ms^{-1} = 1{,}25ms^{-1}$$

$$t_1 = \frac{s}{v} = \frac{90m}{1{,}25ms^{-1}} = 72s$$

---

b) proti prúdu :

$$v = v_1 - v_2$$

$$v = 0{,}85ms^{-1} - 0{,}40ms^{-1} = 0{,}45ms^{-1}$$

$$t_2 = \frac{s}{v} = \frac{90m}{0{,}45ms^{-1}} = 200s$$

---

c) kolmo na prúd :

$$v = \sqrt{0{,}85^2 - 0{,}4^2} = \sqrt{0{,}5625} = 0{,}75$$

$$v = 0{,}75m.s^{-1} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{90m}{0{,}75m.s^{-1}} = 120s$$

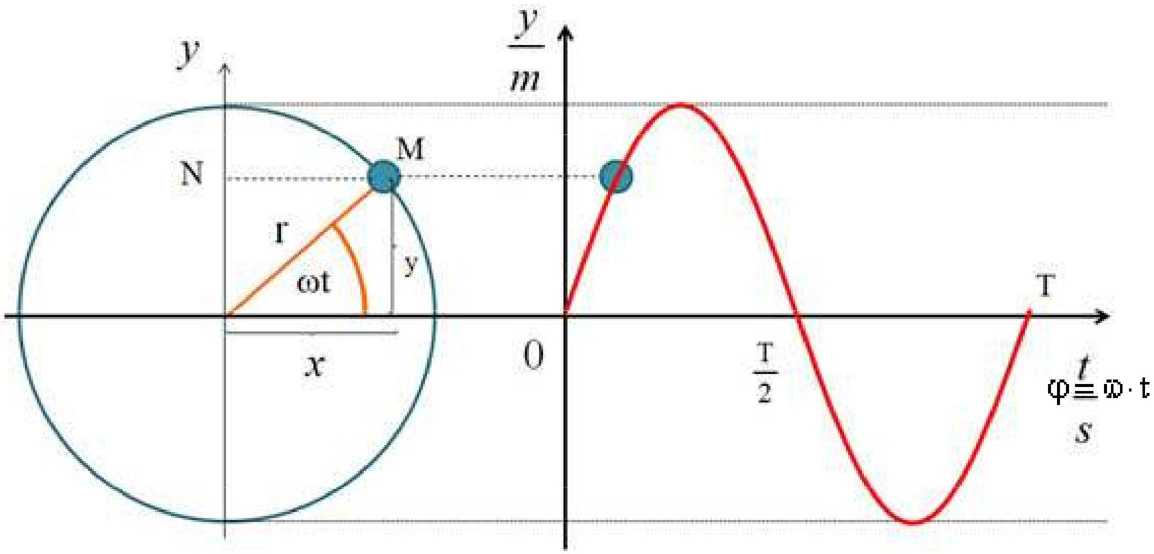
Harmonický pohyb

Harmonický pohyb je periodický pohyb, při kterém těleso pravidelně přechází z jedné krajní polohy přes rovnovážnou polohu do druhé krajní polohy, přičemž časový průběh výchylky y(*t*) z rovnovážné polohy je vyjádřen vztahem

$$y(t) = A.\sin(\omega.t + \varphi_0)$$

kde A je amplituda výchylky,
ω je úhlová frekvence
$\varphi(t) = \omega.t + \varphi_0$ je fáze
φ_0 je počáteční fáze harmonicky proměnné veličiny.

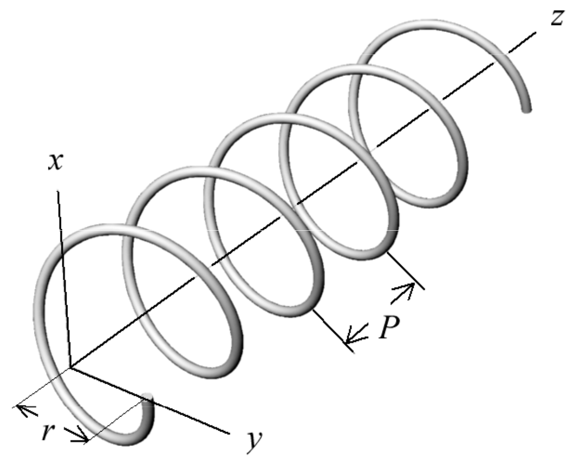
$$\boxed{\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = 2\cdot\pi\cdot f}$$



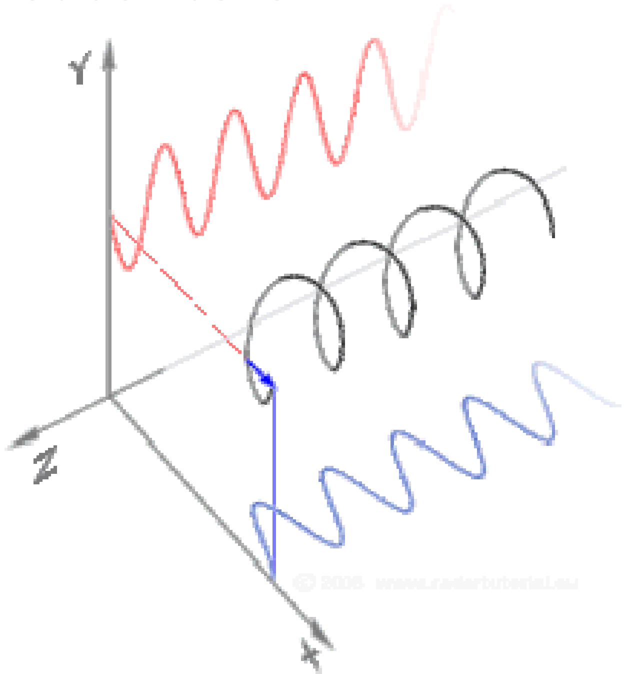
Při harmonickém pohybu <u>je zrychlení úměrné výchylce z rovnovážné polohy (y = 0) a má směr proti směru výchylky</u>. Největší výchylka je pro sinus rovno jedné, tj. y = A, a nazývá se amplituda (rozkmit). Převratná hodnota doby kmitu (T) se nazývá **kmitočet**.

Pohyb po šroubovici

Šroubovice odpovídá pohybu bodu, který se zároveň pohybuje rovnoměrně podél oné osy a zároveň ji rovnoměrně obíhá po kružnici. Úsek odpovídající jednomu oběhu kolem kružnice se přitom nazývá závit a vzdálenost jeho koncových bodů se nazývá výška závitu. Šroubovici lze popsat třemi parametry: **poloměrem** zmíněné kružnice, **výškou závitu** a tím, zda se jedná o **šroubovici pravotočivou, nebo levotočivou**. Zmíněný poloměr je zároveň poloměrem rotační válcové plochy, v které celá šroubovice leží.



r = poloměr
P = výška závitu



Šroubovice poloměru *a* a sklon *b*/*a* (nebo výška závitu 2.π.*b*):

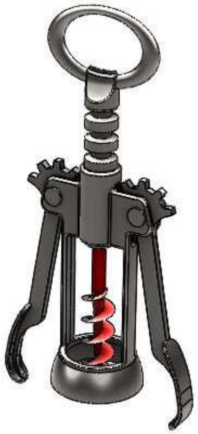
$$x(t) = a\cos(t),$$
$$y(t) = a\sin(t),$$
$$z(t) = bt.$$

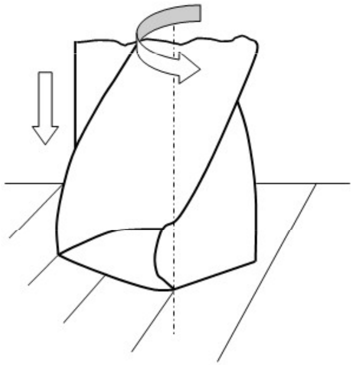
Znaménko konstanty *b* ovlivňuje pravotočivost (+) nebo levotočivost (-) šroubovice.

Délka závitu: $2.\pi.\sqrt{a^2 + b^2}$

Příklad

Šroubový pohyb je složen z rotačního a translačního pohybu, a to jak např. u točitého schodiště, šroubu nebo vrtáku, apod. Trajektorií hmotného bodu je **šroubovice** (helix).

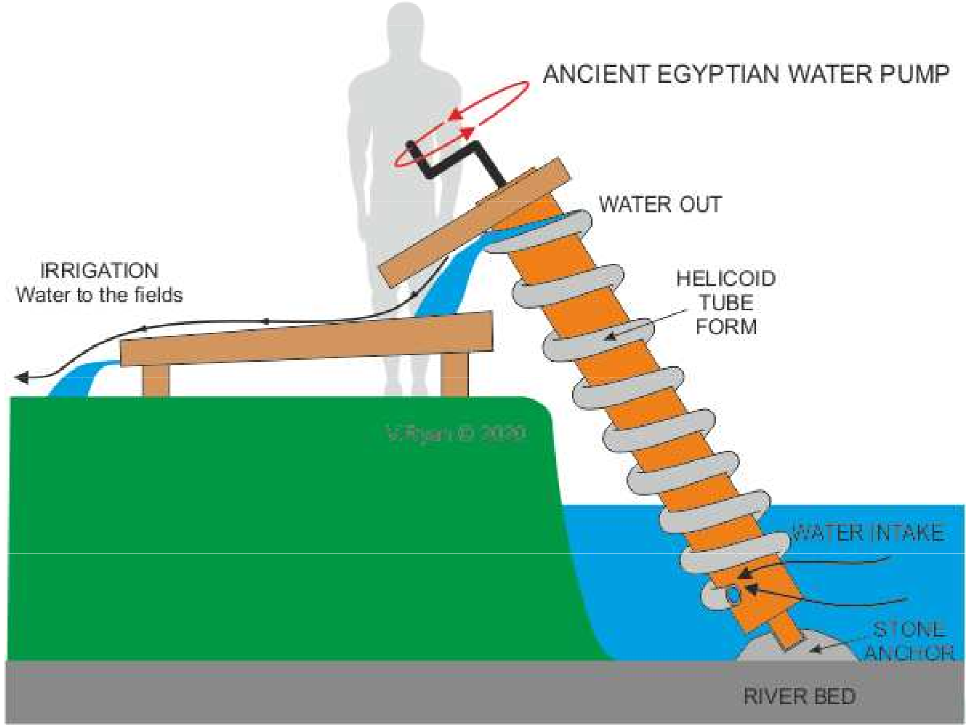




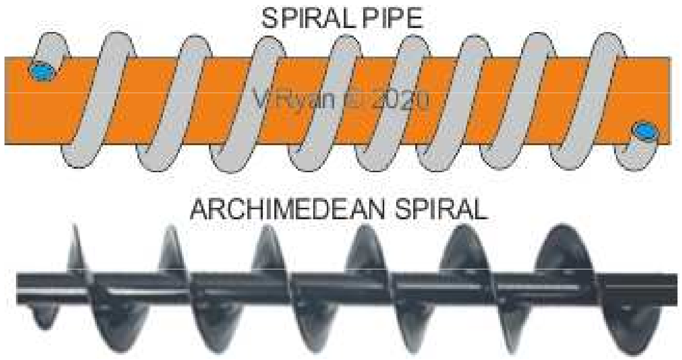
Moraea tortilis

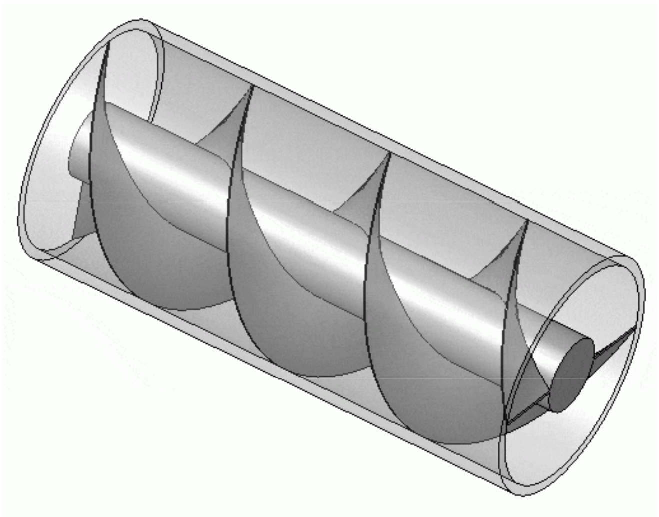
Albuca Spiralis

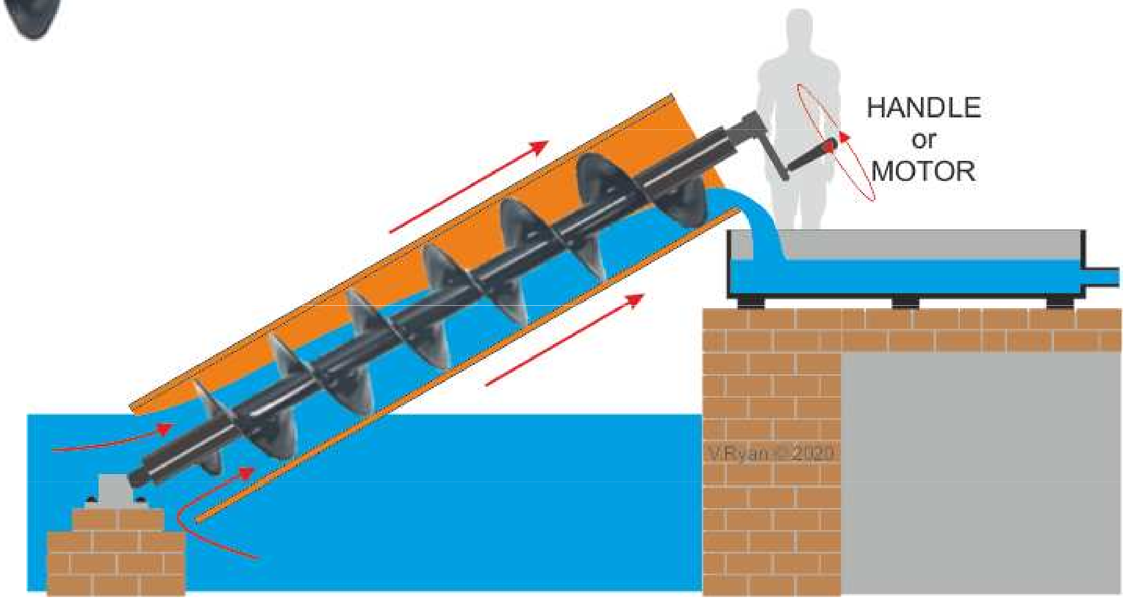
Transport vody s využitím šroubovitého pohybu byl využíván už ve starověku.



Zařízení založené na Archimedově spirále lze využít i k transportu práškovitých a zrnitých materiálů.

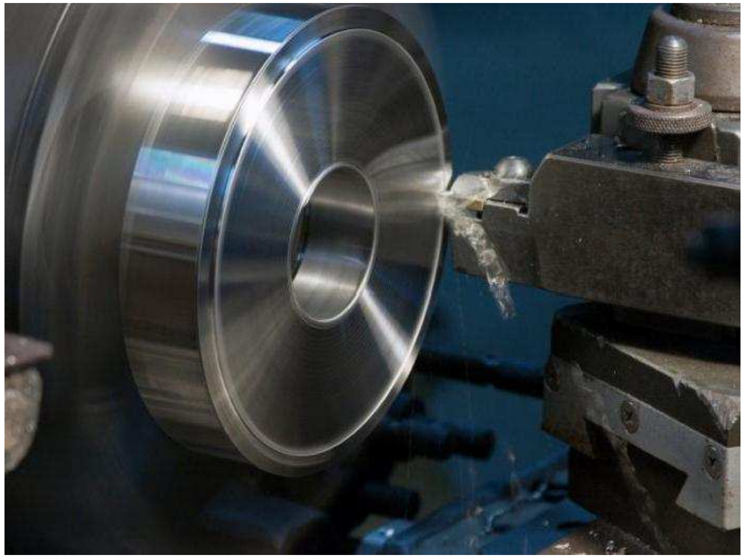


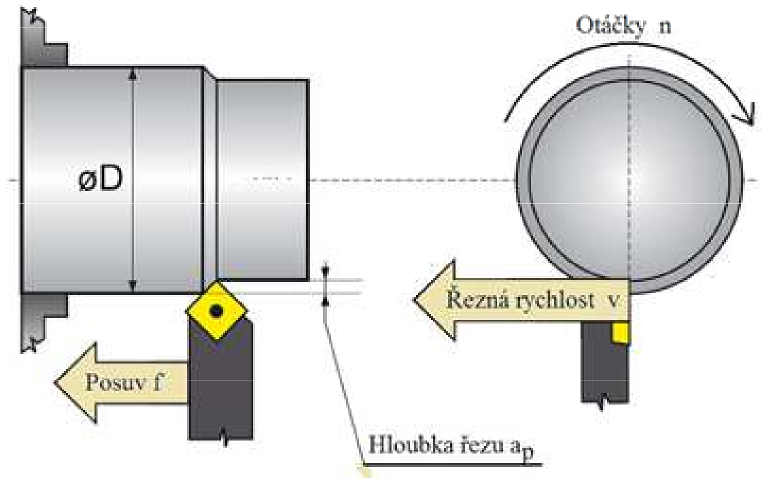


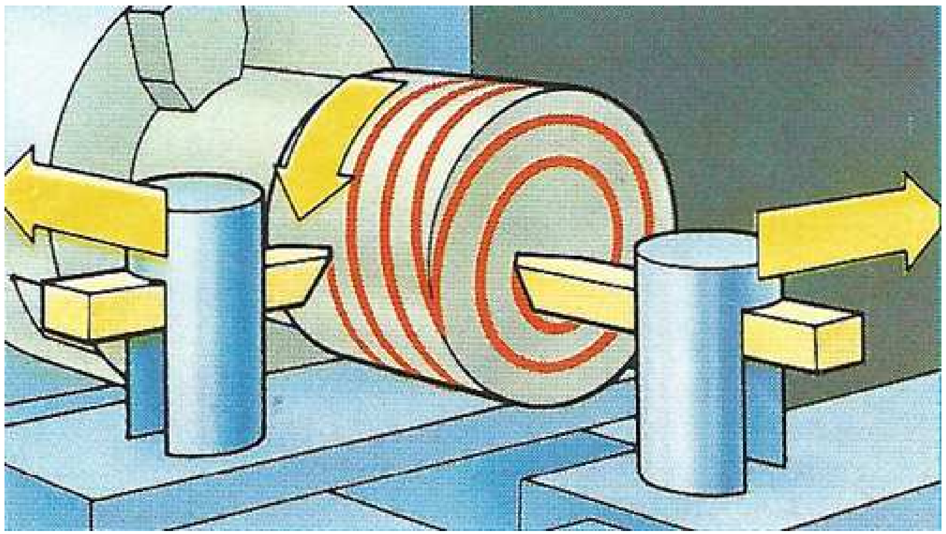


Obrábění soustruhem

Hlavním řezným pohybem při soustružení je rotace obrobku kolem své osy s obvodovou (tak zvanou řeznou) rychlostí ***v***. Vedlejšími pohyby jsou posuvy, které vykonává nástroj. Podélný posuv posouvá nástroj ve směru osy otáčení obrobku. Výsledná trajektorie břitu vůči obrobku je šroubovice. Příčný posuv se děje kolmo k ose otáčení obrobku.







Pohyb po cykloidě

Pohyb jedoucího kola se vzhledem k zemi je složen z rotačního a translačního pohybu.

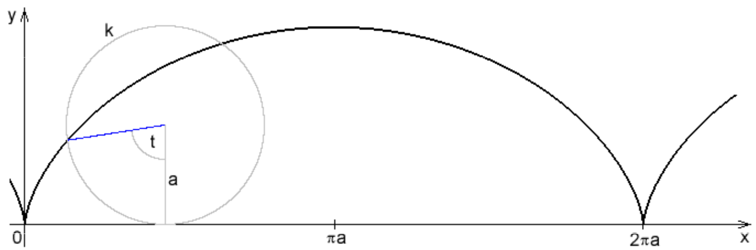
Bod ležící na obvodu kružnice opisuje při jejím valení (kutálení) po přímce prostou (obecnou, obyčejnou) **cykloidu**. Cykloida má tvar donekonečna se opakujících oblouků.

Prostou cykloidu lze vyjádřit parametricky:

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

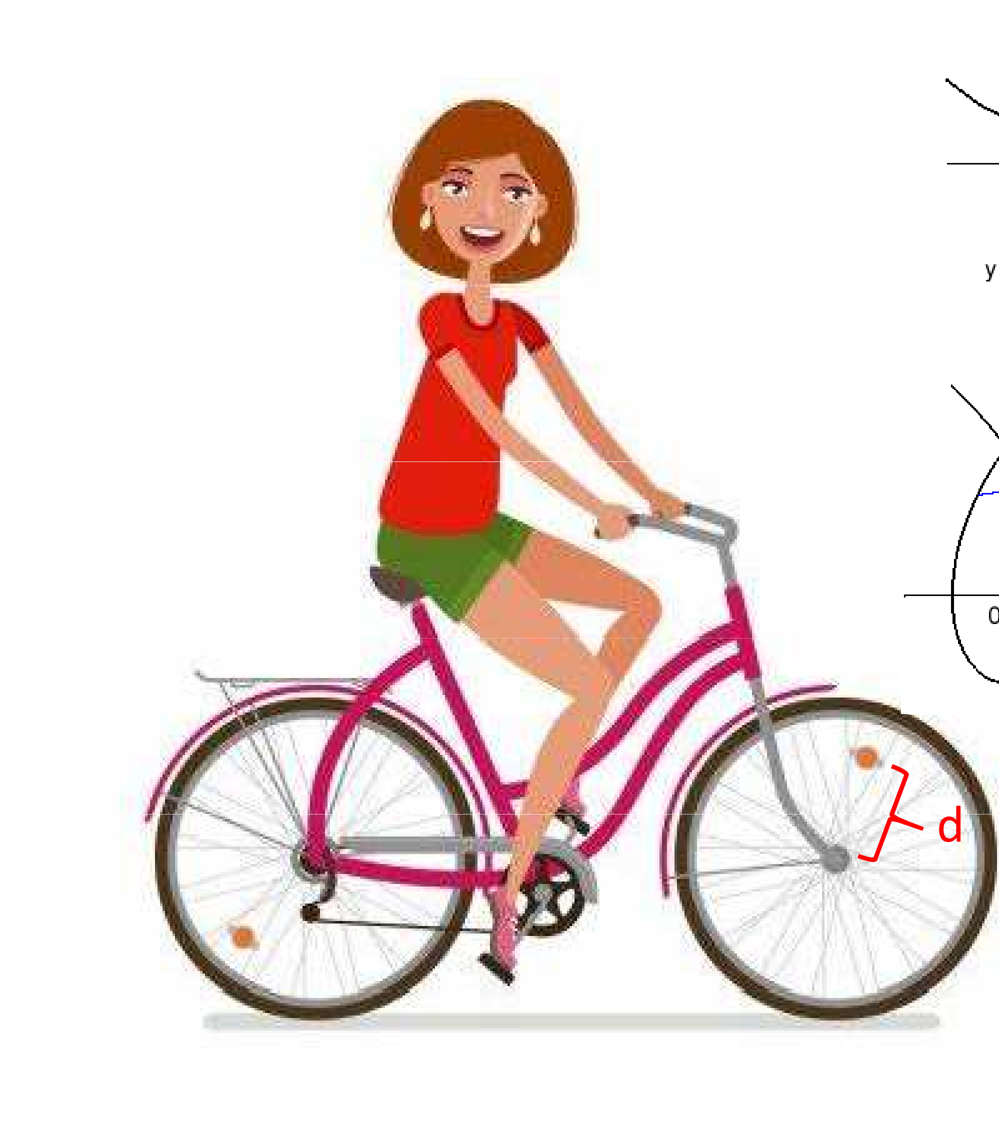
kde *a* je poloměr kružnice a parametr *t* je úhel otočení kutálející se kružnice. Perioda cykloidy je 2.π.*a*, délka oblouku je 8*a*.

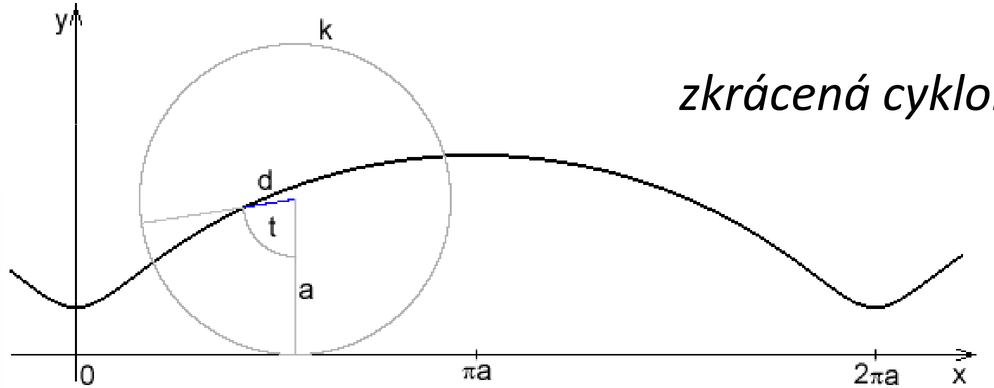


Pokud bod pevně spojený s kutálející se kružnicí neleží na obvodu této kružnice, ale jeho vzdálenost od středu kružnice o poloměru a je *d*, pak pro *d* < *a* získáme cykloidu zkrácenou a pro *d* > *a* cykloidu prodlouženou.

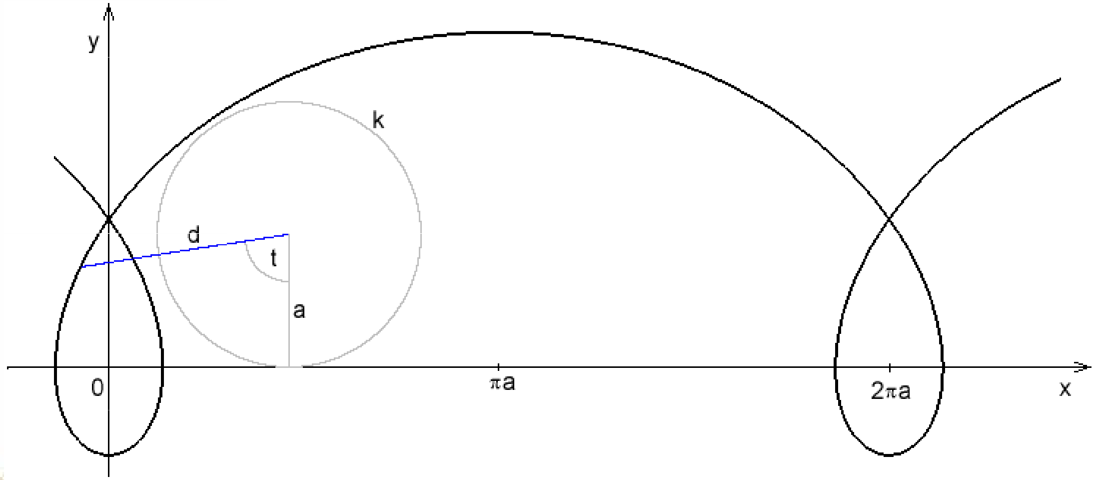
Parametrické rovnice zkrácené, resp. prodloužené cykloidy lze zapsat ve tvaru

$$x = at - d\sin t$$
$$y = a - d\cos t$$





zkrácená cykloida



prodloužená cykloida

Pohyby v tíhovém poli Země

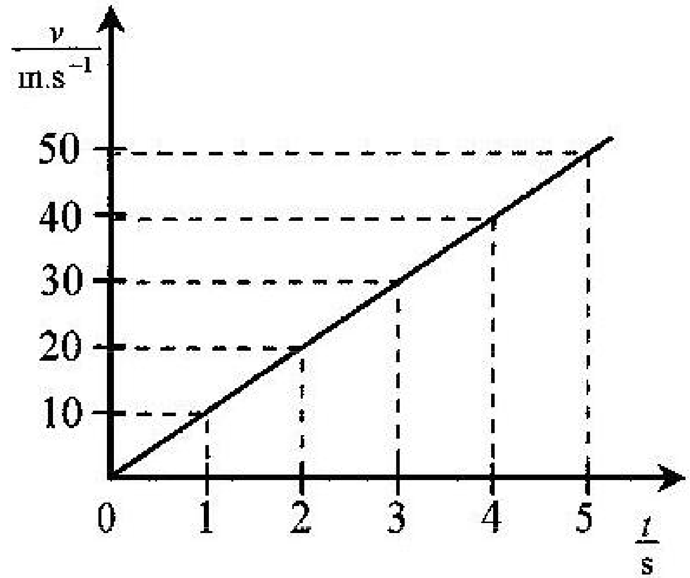
Pohyby v tíhovém poli (vrhy) uvažujeme pouze za předpokladu:

- že jejich trajektorie jsou vzhledem k rozměrům Země velmi malé
- tíhové pole můžeme považovat za homogenní
- na pohybující se tělesa působí jen tíhová síla F_G
- zanedbáme odporové síly

Tíhové zrychlení (**g**) je vektor směřující vždy svisle dolů. Jeho velikost je g = 9,80665 $m.s^{-2}$ (v praxi se používá hodnota 10 $m.s^{-2}$)

Volný pád (pohyb rovnoměrně zrychlený svisle dolů)

Volný pád je rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením **g** a s nulovou počáteční rychlostí, přičemž vektor rychlosti **v** směřuje svisle dolů.

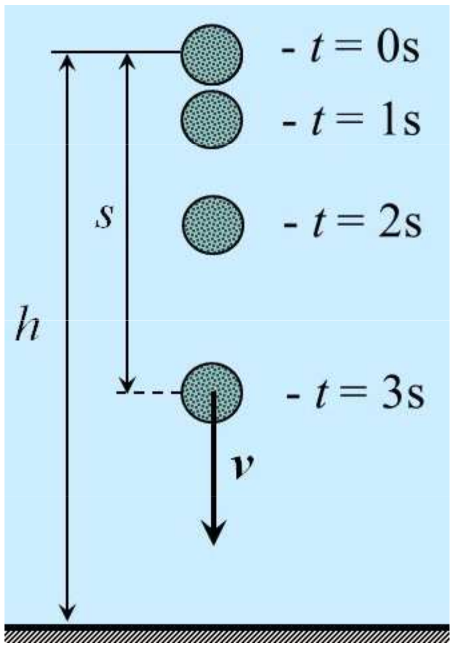


$\mathbf{v} = \mathbf{g} \cdot t$ ... vztah pro rychlost volného pádu

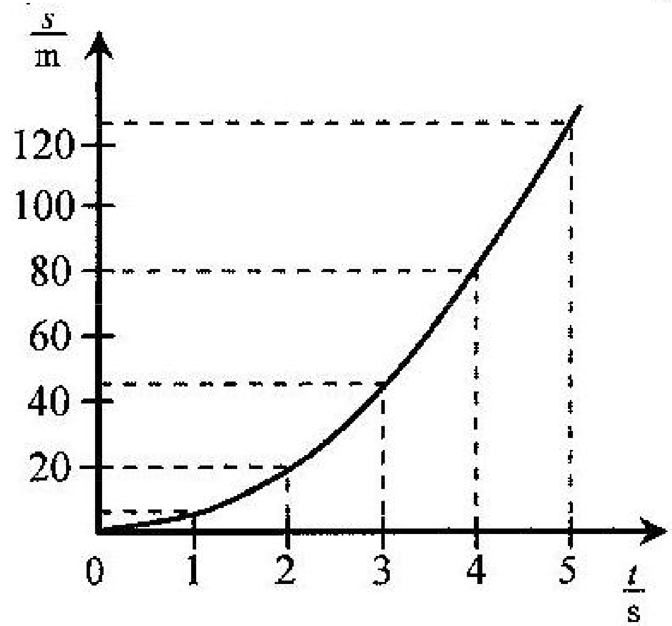
$v = g \cdot t$ ... velikost rychlosti volného pádu

$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$ ... vztah pro dráhu volného pádu

$s = \frac{1}{2} g t^2$ ... velikost dráhy volného pádu

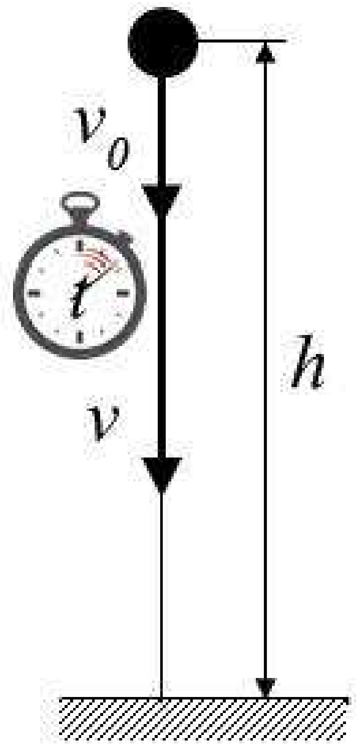


g - tíhové zrychlení
t - čas
d - posunutí



Vrh svislý dolů

Vrh svislý vzhůru je pohyb <u>složený z pohybu rovnoměrného přímočarého směrem dolů a z volného pádu</u>. Jde o pohyb rovnoměrně zrychlený s nenulovou počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$.



$$v = v_0 + gt$$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Pokud je $v_0 = 0$, jedná se o **volný pád**.

$$t_d = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g}$$ čas dopadu

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2hg}$$ velikost rychlosti dopadu

Vrh svislý vzhůru

Vrh svislý vzhůru je pohyb složený z pohybu rovnoměrného přímočarého směrem vzhůru a z volného pádu. Vrh svislý je v první fázi (pohyb nahoru) rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb se záporným zrychlením, jehož velikost se rovná gravitačnímu zrychlení. Rychlost tělesa se v první fázi zmenšuje, až dosáhne nuly, těleso se na okamžik zastaví v největší výšce (největší vzdálenosti) a začne druhá fáze - volný pád.

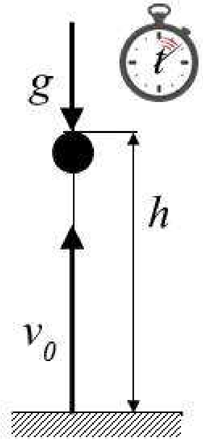
$$v = v_0 - gt$$

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Okamžitá výška svislého vrhu:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

kde h0 je počáteční výška, v0 je počáteční rychlost, g je tíhové zrychlení, t je čas od počátku vrhu.



Největší výška a čas dosažení největší výšky svislého vrhu:

$$h = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \qquad t = \frac{v_0}{g}$$

kde v_0 je počáteční rychlost, g je tíhové zrychlení.

Rychlost dopadu tělesa do původního místa je stejná jako počáteční rychlost.

Příklad

Jak hluboká je propast do které padá kámen 5 s? Jak velkou rychlostí dopadne na dno? Odpor vzduchu zanedbejte.

$t = 5$ s
$g = 9{,}81$ m.s^{-2}
$s = ?$
$v = ?$

$s = ½.g.t^2 = ½.9{,}81.5^2 = \underline{123\ \text{m}}$

$v = g.t = 9{,}81.5 = \underline{49\ \text{m.s}^{-1}}$

Příklad

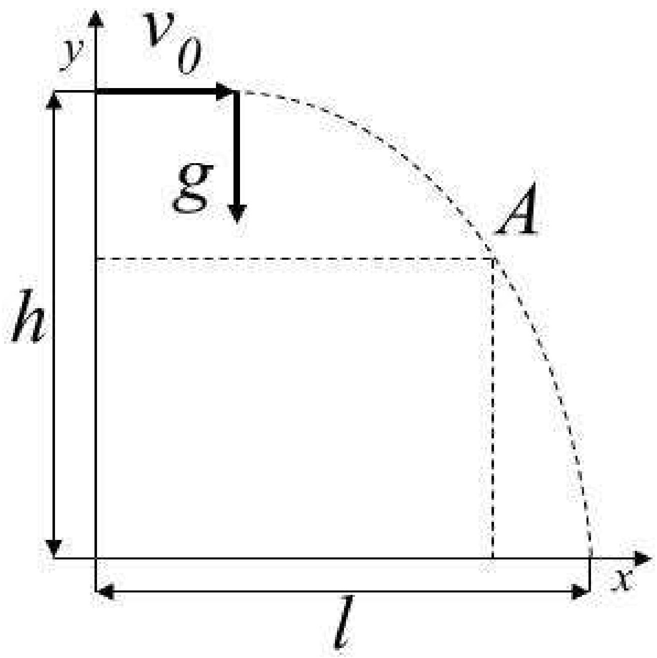
Za jakou dobu se rychlost volně padajícího tělesa zvětší z 10 m.s^{-1} na 30 m.s^{-1}? Jakou dráhu těleso za tuto dobu urazí? Odpor vzduchu zanedbejte.

$v_0 = 10$ m.s^{-1}
$v = 30$ m.s^{-1}
$g = 9{,}81$ m.s^{-2}
$s = ?$
$t = ?$

$v = v_0 + g.t$
$t = (v - v_0)/g = (30 - 10)/9{,}81 = \underline{2\ \text{s}}$
$s = v_0.t + ½.g.t^2 = 2.10 + ½.9{,}81.2^2 = \underline{40\ \text{m}}$

Vrh vodorovný

Vrh vodorovný je pohyb hmotného bodu v tíhovém poli Země, jemuž byla udělena počáteční rychlost tělesa ve vodorovném směru (směr vektoru $\mathbf{v}_0$ je tedy kolmý ke směru tíhového zrychlení **g**). Hmotný bod koná současně dva pohyby: rovnoměrný přímočarý pohyb počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$ ve vodorovném směru a volný pád z výšky *h* ve svislém směru (vodorovný vrh je složený pohyb).



$$x = v_0 \, t$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$ výška vrhu

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$ čas letu

$$l = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$ délka vrhu

$$v = \sqrt{2gh + {v_0}^2}$$ rychlost v okamžiku dopadu

Pokud vrh probíhá ve vakuu a uvažujeme-li pouze homogenní tíhové pole (např. reálný případ vrhů relativně malou rychlostí v malých výškách nad povrchem astronomických těles bez atmosféry), je trajektorií část paraboly s vrcholem v místě hodu.

Příklad

Letadlo shazuje bombu na loď. Letadlo letí ve výšce 320m nad mořem rychlostí 180 $km.h^{-1}$. Loď se pohybuje rychlostí 36 $km.h^{-1}$. V jaké vzdálenosti od lodi musí posádka letadla bombu uvolnit, aby tato trefila loď, pokud se letadlo pohybuje

a) stejným směrem jako loď

b) opačným směrem než loď

Bomba padá za čas

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2.320m}{10m.s^{-2}}} = \sqrt{64.s^2} = 8s$$

$v_1 = 180\ km.h^{-1} = 50\ m.s^{-1}$

$v_2 = 36\ km.h^{-1} = 10\ m.s^{-1}$

$h = 320\ m$

Za čas 8s loď prejde dráhu $s = v_2 .t = 10\ m.s^{-1}.8s = 80m$

Ak by sa loď nehýbala

$$d = v_1\sqrt{\frac{2h}{g}} = 50m.s^{-1}\sqrt{\frac{640m}{10m.s^{-2}}} = 50.8m = 400m$$

a) Letadlo letí stejným směrem jako loď

$x = d - s = 400\ m – 80\ m = 320\ m$ před lodí

b) Letadlo letí opačným směrem než loď

$x = d + s = 400\ m + 80\ m = 480\ m$ před lodí

Vrh šikmý

Vrh šikmý je pohyb tělesa v tíhovém poli, při kterém počáteční rychlost svírá s horizontem **nenulový elevační úhel**. Pohyb se skládá z rovnoměrného přímočarého pohybu touto rychlostí v původním směru (osa x) a z volného pádu (tj. rovnoměrně zrychleného pohybu) ve směru tíhového zrychlení g, (osa y.) Trajektorií je rovinná křivka, ve směru osy z pohyb neprobíhá). Při kladném elevačním úhlu (0° < α < 90°) se jedná o **vrh šikmý vzhůru**, při záporném (−90° < α < 0°) o **vrh šikmý dolů** (při nulovém elevačním úhlu se jedná o vrh vodorovný).

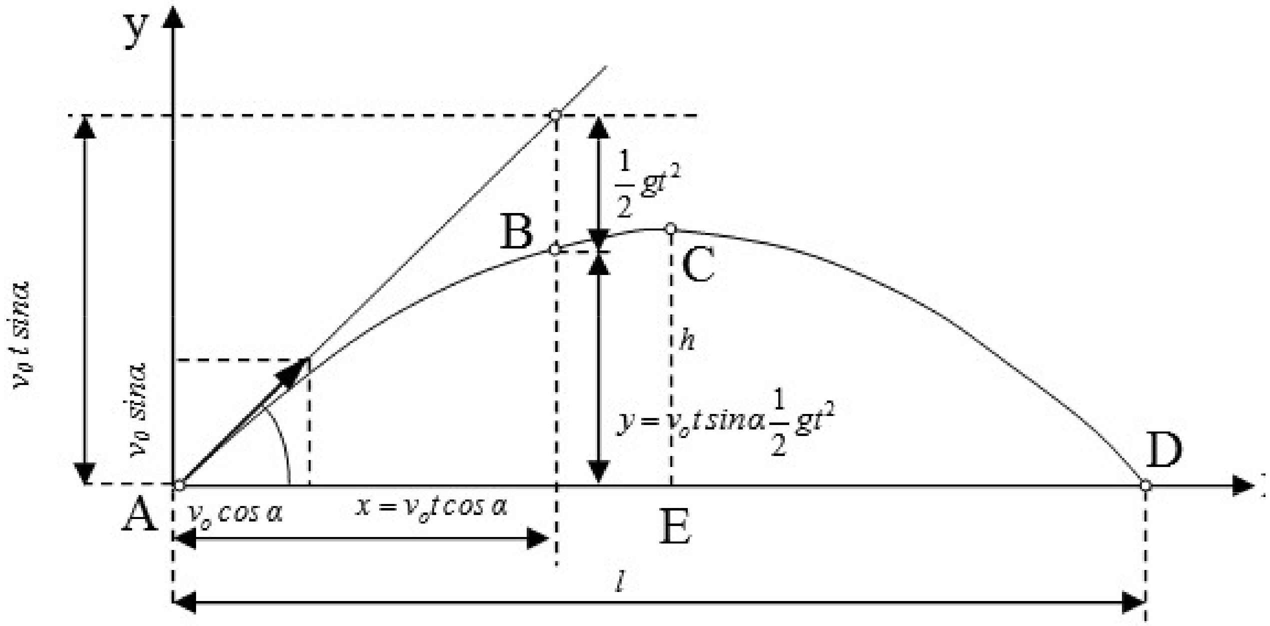
$$x = x_0 + v_0 t \cos\alpha$$

$$y = y_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$l = \frac{v_0^{\,2} \sin 2\alpha}{g}$$ délka vrhu

$$h = \frac{v_0^{\,2} \sin^2\alpha}{2g}$$ max. výška vrhu

$$t_d = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$ čas letu

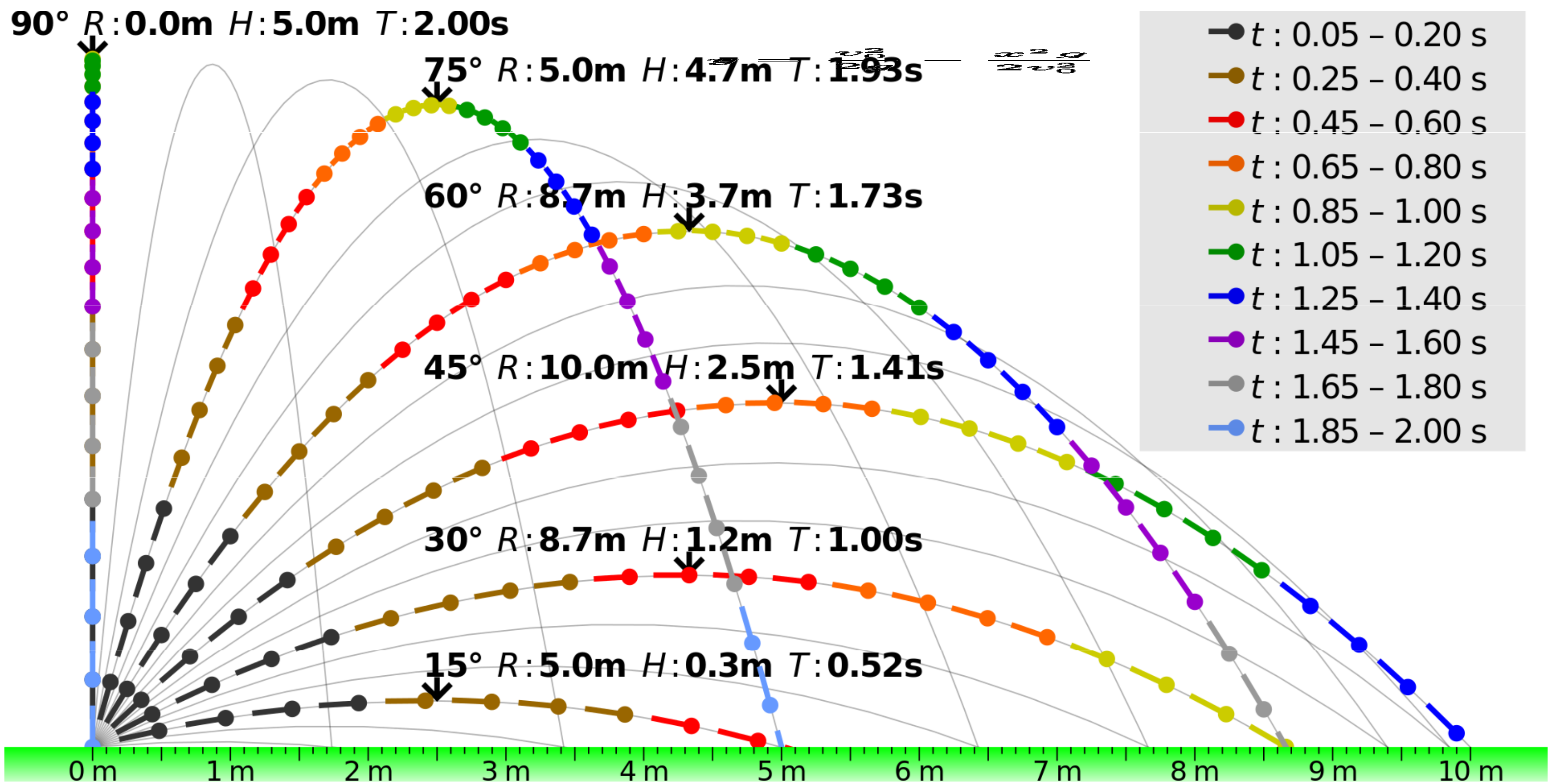


Z rovnic vyplývá, že maximální výšky vrhu lze dosáhnout pod úhlem 90° a největšího dostřelu pod úhlem 45°.

Ochranná parabola

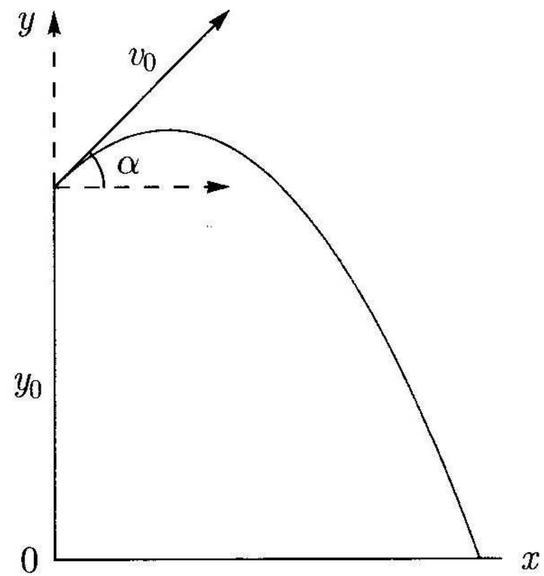
Všechny trajektorie šikmých vrhů stejnou rychlostí $\mathbf{v}_0$ pod různými elevačními úhly α vytváří množinu trajektorií, jejichž obálkou je křivka zvaná **ochranná parabola**. Body za ochrannou parabolou nemohou být při rychlosti vrhu $\mathbf{v}_0$ zasaženy.

Pokud bychom měli protiletadlové dělo v bodě 0 a letadlo by bylo mimo ochrannou parabolu, znamená to, že letadlo je v bezpečí, protože ho tímto dělem již není možné zasáhnout.



Příklad

Tryska vodní fontány se nachází ve výšce 1,5 m nad středem kruhové nádržky a vůči vodorovné rovině je nakloněna o úhel 45°. Voda stříká z trysky rychlostí 3 m.s^{-1}. Jaký poloměr musí mít nádržka, aby zachycovala vodu dopadající z trysky?



h = 1,5 m

v_0 = 3 m.s^{-1}

α = 45°

r = ?

g = 9,81 m.s^{-2}

$r = x = v_0.\cos(\alpha).t$

$h = y = y_0 + v_0.\sin(\alpha).t + ½.g.t^2$

V době dopadu do nádržky:

$y = y_0 + v_0.\sin(\alpha).t + ½.g.t^2 = 0$

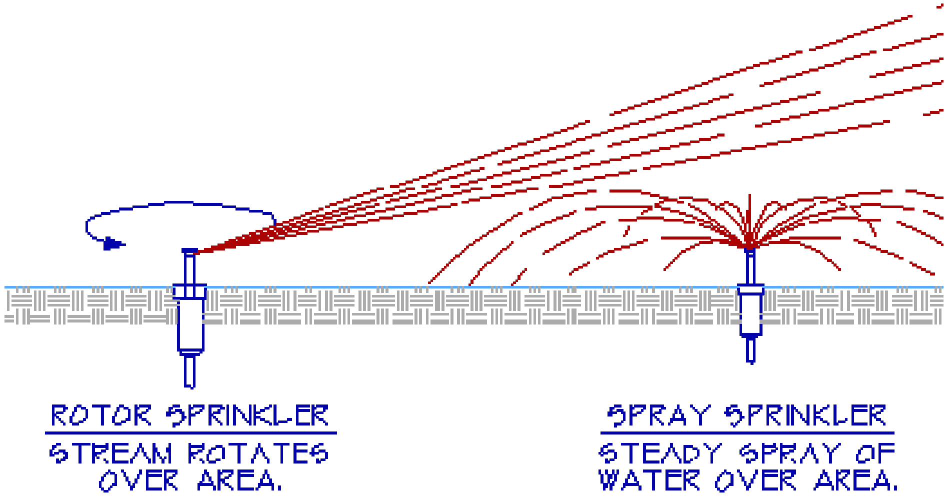
$t = (v_0.\sin(\alpha) + \sqrt{2.g.h + v_0.\sin(\alpha)^2})/g = 0{,}81$ s

(= kladný kořen kvadratické rovnice)

$r = v_0.\cos(\alpha).t = 3.\cos(45°).0{,}81 = \underline{1{,}72\text{ m}}$

Kombinace šikmého vrhu a kruhového pohybu

S kombinací šikmého vrhu a kruhového pohybu se lze setkat např. u rotačních zavlažovačů.



	Poloha telesa v čase t	Maximálne hodnoty
Voľný pád	$v = g.t,\ s = \frac{g.t^2}{2}$	
Zvislý vrh nahor	$v = v_0 - gt, s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$	$t = \frac{v_0}{g} \quad h = \frac{v_0^2}{2g}$
Vodorovný vrh	$x = v_0 t, y = h - \frac{gt^2}{2}$ $v^2 = v_0^2 + (gt)^2$	$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},\ d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$
Šikmý vrh nahor	$x = v_0 t. \cos\alpha$ $y = v_0 t. \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$	$t = \frac{2v_0. \sin\alpha}{g},\ h = \frac{v_0^2 . \sin^2 \alpha}{2g}$ $d = \frac{v_0^2 . \sin 2\alpha}{g}$