Racionální čísla

Motivace. Známe obor integrity všech celých čísel a známe tedy všechny jeho vlastnosti a pravidla pro počítání s celými čísly. Problémem ale je, že v oboru celých čísel nelze neomezeně dělit. Problém s dělením vyřešíme zavedením racionálních čísel. Obor racionálních čísel musí mít tedy následující vlastnosti:

1. Musí v něm platit všechna početní pravidla a vlastnosti operací jako v oboru celých čísel.
2. Musí být zajištěno neomezené dělení každých dvou racionálních čísel (kromě dělení nulou).
3. Celá čísla musí být součástí (podmnožinou) racionálních čísel. Matematicky říkáme, že obor integrity celých čísel lze izomorfně vnořit do tělesa racionálních čísel.

Konstrukce. Při konstrukci tělesa racionálních čísel postupujeme takto:

Vyjdeme z kartézského součinu $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} - \{0\}$, na kterém definujeme pro každé dvě dvojice $[a, b], [c, d] \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} - \{0\}$ relaci $\sim$ vztahem:

$$[a, b] \sim [c, d] = a \cdot d = b \cdot c.$$

Tato relace je ekvivalence (je reflexivní, symetrická a tranzitivní), existuje tedy rozklad tohoto kartézského součinu $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} - \{0\}$ na třídy.

Definice. Třídy rozkladu kartézského součinu $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} - \{0\}$ určeného ekvivalencí $\sim$ se nazývají racionální čísla. Racionální čísla jsou tedy třídy navzájem ekvivalentních uspořádaných dvojic celých čísel.

Poznámka. V dalším budeme kartézský součin $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} - \{0\}$ označovat M a nazývat množina všech zlomků. Protože se racionální čísla běžně vyjadřují pomocí zlomků, budeme uspořádané dvojice z množiny M zapisovat jako zlomky, tedy místo $[a, b]$ budeme psát $\frac{a}{b}$. Odtud je také zřejmé, proč se v množině M pro druhé složky všech dvojic nepřipouští číslo nula.

Poznámka. Racionální čísla jsou podle této konstrukce třídami rozkladu množiny M určeného ekvivalencí $\sim$**,** tedy třídami navzájem ekvivalentních zlomků. Vnoření $\psi : \boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ oboru integrity $\boldsymbol{Z}$ do tělesa $\boldsymbol{Q}$ je definováno pro každé celé číslo $z \in \boldsymbol{C}$ předpisem $\psi(z) = \frac{z}{1}$.

Poznámka. Analogicky jako u celých čísel budeme rozlišovat jeden konkrétní zlomek od racionálního čísla. Tučným označením $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ budeme označovat stav, kdy tento zlomek bude reprezentovat racionální číslo, zatímco běžným způsobem $\frac{a}{b}$ budeme označovat tento jeden konkrétní zlomek. Platí tedy např. $\boldsymbol{\frac{3}{4}} = \{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{-21}{-28}, \ldots\}$. Poznamenejme, že v dalším textu budeme pro zjednodušení označovat racionální čísla velkými tučnými písmeny, např. ***A, B,*** .... Při důkazech tvrzení budeme využívat reprezentace $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\frac{a}{b}}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\frac{c}{d}}$, $\boldsymbol{C} = \frac{e}{f}$, ...

Věta. Operace sčítání v množině $\boldsymbol{Q}$ je definována vztahem

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Tato operace je komutativní, asociativní, má neutrální prvek, ke každému racionálnímu číslu existuje právě jedno číslo opačné a jsou řešitelné základní rovnice. Algebraická struktura $(\boldsymbol{Q}, +)$ je tedy komutativní grupa.

Poznámka. V grupě *($\boldsymbol{Q}$, +)* platí analogické vlastnosti a vztahy jako v grupě *($\boldsymbol{C}$, +)*, není tedy nutné je na tomto místě znovu dokazovat. Poznamenejme jen, že neutrálním prvkem je číslo ***0*** reprezentované třídou $\frac{0}{n}$ a opačným racionálním číslem k číslu $\frac{a}{b}$ je číslo $-\frac{a}{b}$, které lze reprezentovat buďto třídou $\frac{-a}{b}$ nebo třídou $\frac{a}{-b}$.

Poznámka. Stejně jako pro celá čísla lze zavést operaci odčítání jako přičtení opačného prvku, tedy $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$. Lze snadno odvodit běžně užívaný vztah pro odčítání zlomků:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

Poznámka. Operace odčítání má v množině všech racionálních čísel tytéž vlastnosti jako v množině celých čísel (tj. není komutativní ani asociativní).

Věta. Operace násobení v množině $\boldsymbol{Q}$ je definována vztahem

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Tato operace je v množině $\boldsymbol{Q}$ komutativní, asociativní a má neutrální prvek. Tímto neutrálním prvkem je číslo ***1*** reprezentované třídou zlomků $\frac{a}{a}$. Algebraická struktura *($\boldsymbol{Q}$, ·)* je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem. Operace násobení je distributivní vzhledem k operaci sčítání v množině všech racionálních čísel.

Poznámka. Budeme-li zkoumat i existenci inverzních prvků a řešitelnost základních rovnic vzhledem k operaci násobení v množině $\boldsymbol{Q}$, snadno zjistíme, že jediným prvkem, který neumožňuje platnost těchto vlastností, je číslo *0*. Po jeho odstranění z množiny $\boldsymbol{Q}$ můžeme vyslovit následující větu.

Věta.
(1) Algebraická struktura $(\boldsymbol{Q} - \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa.
(2) Algebraická struktura $(\boldsymbol{Q}, +, \cdot)$ je komutativní těleso.

Poznámka. Inverzním prvkem k racionálnímu číslu $\frac{a}{b}$ je číslo $\frac{b}{a}$. Toto číslo vždy jednoznačně existuje ($b \neq 0$ podle konstrukce racionálních čísel a $a \neq 0$ podle předpokladu z předchozí poznámky), nazývá se převrácené číslo k číslu $\frac{a}{b}$ a označuje $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$. Při označení racionálního čísla $\boldsymbol{A}$ se převrácené číslo kromě zápisu $\boldsymbol{A}^{-1}$ zapisuje též $\frac{1}{A}$. V množině $\boldsymbol{Q} - \{0\}$ jsme nyní připraveni k definici operace dělení.

Definice. Dělení v množině $\boldsymbol{Q} - \{0\}$ je definováno jako násobení převráceným číslem, tj. $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}$ **.** Vyjádřeno pomocí vzorce dostáváme

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Poznámka. Připomeňme, že existence převráceného čísla i operace dělení jsou neomezeně definovány v množině $\boldsymbol{Q} - \{0\}$, tedy že skutečně nemůže dojít k „dělení nulou“. Pro operace dělení a násobení platí rovněž řada vlastností, z nichž uvedeme např.:

Věta. Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{Q}$. Pak platí:
(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$;
(2) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}$;
(3) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$;
(4) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}) \cdot \boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})^{-1}$;
(5) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}^{-1})^{-1} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{B}^{-1}$.

Relace uspořádání v množině racionálních čísel

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} = \frac{a}{b}$ je racionální číslo. Řekneme, že toto číslo je kladné a píšeme $\boldsymbol{A} > 0$, právě když platí a i b jsou buďto obě současně kladná celá čísla nebo obě současně záporná celá čísla. Je-li $a = 0$, pak číslo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$; ve zbývajícím případě (jedno z čísel a, b je kladné celé číslo a jedno záporné) říkáme, že racionální číslo $\boldsymbol{A}$ je záporné a píšeme $\boldsymbol{A} < 0$.

Poznámka. Je zřejmé, že jeden z předchozích případů vždy musí nastat. Každé racionální číslo je tedy buďto kladné nebo záporné nebo je rovno nule. Existuje tedy rozklad množiny všech racionálních čísel na čísla kladná, nulu a čísla záporná.

Definice. Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ jsou racionální čísla. Řekneme, že $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$, právě když platí $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} < 0$. Je-li $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = 0$, pak $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$; ve zbývajícím případě pro $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} > 0$ pak platí $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$.

Poznámka. Je zřejmé, že i v předchozí definici jeden z případů vždy musí nastat. Relace uspořádání všech racionálních čísel je tedy lineární.

Poznámka. Pro relaci uspořádání v množině racionálních čísel a její spojení s operacemi v množině $\boldsymbol{Q}$ platí analogické vztahy jako v množině celých čísel, stejně je definována i absolutní hodnota racionálního čísla. Platí zajímavá vlastnost relace uspořádání racionálních čísel, která v množinách přirozených ani celých čísel platit nemohla.

Definice. Uspořádání v množině racionálních čísel je husté, tzn.

$$\forall x, y \in \mathbf{Q}, x \neq y; \exists z \in \mathbf{Q}: x < z < y .$$

Poznámka. Definice hustého uspořádání říká, že „mezi každá dvě různá racionální čísla lze vložit další racionální číslo“.