P2

Písemná práce z Aritmetiky 1 - zkouška (max. 25 bodů)

1. Rozhodněte, který ze vztahů $=$, $\neq$, $\subset$ platí vždy pro množiny L, P, jestliže je dáno:

$$\begin{aligned} L &= [(A \cup B) - (B - A)] - (C - A), \\ P &= [A \cup (B \cap C)] \cap (A \cup B). \end{aligned}$$

Jaké podmínky musí splňovat množiny A, B, C, aby platilo $L = P$? Situaci znázorněte množinovými diagramy.

2. V množině $M = \{1, 2\}$ je definována binární relace $R_2 = \{[1, 1], [2, 2]\}$. Dokažte, že relace R_2 je relací ekvivalence na množině M a zapište výčtem prvků rozklad T množiny M, který ekvivalence R_2 určuje. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je relace R_2 uspořádání v množině M. Pokud ano, určte přestně jeho typ.

3. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, 1\}$, $B = \{1, 2, c, 3\}$.

a) Zapište výčtem prvků jednu binární relaci R_1 z množiny A do množiny B, která není zobrazením.

b) Určete přesně typ zobrazení $R_2 = \{[c, 1]\}$ z množiny A do množiny B a rozhodněte, zda je prosté.

c) Zapište výčtem prvků jedno vzájemně jednoznačné zobrazení R_3 množiny A na množinu B.

4. Zjistěte a <u>zdůvodněte</u>, které z vlastností K, EN, ZR má operace $\circ = \{[x, y, z] \in \mathbb{Q}^3 : z = 2x + y + 1\}$, tj. $z = x \circ y = 2x + y + 1$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

5. Jsou dány množiny $A = \{x, y\}$, $B = \{a, x, z\}$. Určete $|A| + |B|$ a $|A| \cdot |B|$.

6. Dokažte, že pro každá tři celá čísla $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ platí:

$$(-\mathbf{C}) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) + (-\mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Využijte této reprezentace celých čísel: $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{c}, \mathbf{d}]$, $\mathbf{C} = [\mathbf{e}, \mathbf{f}]$.

7. Dokažte, že rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ nemá řešení pro celá čísla $\mathbf{A} = [\mathbf{0}, \mathbf{3}]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{4}, \mathbf{3}]$.

8. Vysvětlete tyto pojmy:

a) binární relace R je v množině M antisymetrická,
b) relace zobrazení R z množiny A do množiny B,
c) množiny A, B jsou ekvivalentní,
d) operace $\circ$ je v množině M asociativní,
e) komutativní pologrupa $(M, \circ)$,
f) operace $*$ je distributivní vzhledem k operaci $\circ$,
g) ordinální číslo dobře uspořádané množiny $[M]$.