**IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)**

*Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.*

## KONSTRUKCE OBORU INTEGRITY CELÝCH ČÍSEL ($\mathbb{Z}$, +, . )

Na kartézském součinu $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ definujeme binární relaci $\sim$ (tzv.„ekvivalenci uspořádaných dvojic přirozených čísel“):

$$[a,b] \sim [c,d] \quad \Leftrightarrow \quad a + d = b + c$$

Tato relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní na množině $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ (dokažte).
Je tedy relací ekvivalence na $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ a vytváří rozklad množiny $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ na třídy navzájem ekvivalentních dvojic přirozených čísel.

Rozklad množiny $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ vytvořený relací $\sim$ nazýváme **množinou všech celých čísel**, ozn. $\mathbb{Z}$.
Třídy rozkladu nazýváme **celá čísla**.

*Poznámka:*
Celá čísla, tj. třídy rozkladu $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$, budeme označovat velkými tiskacími písmeny A, B, ..., nebo pomocí kterékoli dvojice, která do této třídy patří:

Např. $\mathbf{A} = \left[1\overset{\bullet}{,}2\right] = \{[0,1], [1,2], [2,3], \ldots , [10,11], \ldots\} = \left[0\overset{\bullet}{,}1\right] = \ldots$
Můžeme též psát $[1,2] \in \mathbf{A}$

**Sčítání a násobení celých čísel:**

Nechť celá čísla **A, B** jsou reprezentována uspořádanými dvojicemi [a,b], [c,d], tj.
$\mathbf{A} = \left[a\overset{\bullet}{,}b\right]$ a $\mathbf{B} = \left[c\overset{\bullet}{,}d\right]$. Pak

**- součet celých čísel A, B** definujeme: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[a\overset{\bullet}{,}b\right] + \left[c\overset{\bullet}{,}d\right] = \left[a+c\overset{\bullet}{,}b+d\right]$

**- součin celých čísel A, B** definujeme: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left[a\overset{\bullet}{,}b\right] \cdot \left[c\overset{\bullet}{,}d\right] = \left[ac+bd\overset{\bullet}{,}ad+bc\right]$

Součet ani součin celých čísel nezávisí na volbě reprezentantů.

Algebraická struktura ($\mathbb{Z}$, +, ·) **je obor integrity s jednotkovým prvkem**.

**Vlastnosti ($\mathbb{Z}$, + , · )** :
+ : ND, A, K, ZR, EN, EI
· : ND, A, K, EN
· D +
neexistují vlastní dělitelé nulového prvku

**Nulový prvek** (neutrální prvek vzhledem ke sčítání): $\mathbf{O} = \left[x\overset{\bullet}{,}x\right] = \left[0\overset{\bullet}{,}0\right] = \{[0,0], [1,1], [2,2], \ldots\}$

**Jednotkový prvek** (neutrální prvek vzhledem k násobení): $\mathbf{J} = \left[x+1\overset{\bullet}{,}x\right] = \left[1\overset{\bullet}{,}0\right] = \{[1,0], [2,1], [3,2], \ldots\}$

**Opačné číslo** k celému číslu $\mathbf{A} = \left[a\overset{\bullet}{,}b\right]$: **- A** $= \left[b\overset{\bullet}{,}a\right]$

**Rozdíl A – B** dvou celých čísel **A, B** je celé číslo **X**, pro které platí **A = B + X**.
Je-li $\mathbf{A} = \left[a\overset{\bullet}{,}b\right]$, $\mathbf{B} = \left[c\overset{\bullet}{,}d\right]$, je $\mathbf{X} = \left[a+d\overset{\bullet}{,}b+c\right]$.

**IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)**
*Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.*

# USPOŘÁDÁNÍ V MNOŽINĚ VŠECH CELÝCH ČÍSEL

### Kladná a záporná celá čísla

*Definice*: Celé číslo A = $[a \dot{,} b]$ nazveme
a) **kladným** celým číslem, právě když $a > b$,
b) **záporným** celým číslem, právě když $a < b$.

Označíme: $\mathbb{Z}^+$ - množinu všech kladných celých čísel
$\mathbb{Z}^-$ - množinu všech záporných celých čísel

**Věta 1**.
Pro každé celé číslo **A** nastane právě jedna ze tří možností:
**A** je - kladné, tj. $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^+$
- záporné, tj. $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^-$
- nulové, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{O} = [0\dot{,}0]$.

**Důkaz**:
Tvrzení plyne z vlastnosti uspořádání přirozených čísel: Pro každá dvě přirozená čísla a, b nastane právě jedna ze tří možností: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Množiny $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$, $\{O\}$ tedy vytvářejí rozklad množiny $\mathbb{Z}$.

**Věta 2**.
a) Součet libovolných dvou kladných celých čísel je kladné celé číslo.
b) Součin libovolných dvou kladných celých čísel je kladné celé číslo.

**Věta 3**.
a) Je-li **A** kladné celé číslo, pak číslo opačné (**-A**) je záporné celé číslo.
b) Je-li **A** záporné celé číslo, pak číslo opačné (**-A**) je kladné celé číslo.

Pomocí vět 1. – 3. lze dokázat další vlastnosti kladných a záporných celých čísel.

## Přirozené uspořádání množiny všech celých čísel – porovnávání celých čísel

*Definice:* Pro libovolná celá čísla A, B platí: $A > B \Leftrightarrow A - B \in \mathbf{C}^+$ .

Tato relace je AS, T, SO, AR, tzn. je lineárním ostrým uspořádáním na množině **C.**
(důkaz viz učebnice s. 179)