Binární operace v množině

Definice 1: Nechť M je libovolná neprázdná množina. **Binární operací** ○ v množině M rozumíme zobrazení z množiny kartézského součinu M x M do množiny M.

- Jestliže v binární operaci je vzoru $[x,y] \in$ M x M přiřazen obraz $z \in$ M, píšeme:
  1. $x \circ y = z$; prvek $z \in$ M se nazývá **výsledek operace** ○.
  2. ○: M x M → M.

Poznámka 1. Zápisu $[[x,y], z] \in \circ$, odpovídá zápis $x \circ y = z$

Příklad 1. a) Zápisu $[[1,2], 3] \in +$, odpovídá $1 + 2 = 3$
b) Zápisu $[[2,3], 6] \in \cdot$, odpovídá $2 \cdot 3 = 6$

Poznámka 2. <u>Označení binárních operací</u>: +, ·, ○, ⁎, □,..

<u>Příklady binárních operací ve školské matematice</u>:

1) Sčítání (+), odčítání (-), násobení (·), dělení (:),

2) Sjednocení ($\cup$), průnik ($\cap$), rozdíl (-), symetrický rozdíl ($\triangle$) množin,… (pracujeme s nimi v systémech množin).

Určení operace: 1. Operační tabulkou
2. Funkčním předpisem

<u>Vlastnosti binárních operací:</u>

Označení:

- $\mathbb{N}$ - {1, 2, 3, 4, ...} - množina všech přirozených čísel
- $\mathbb{N}_0$ - {0, 1, 2, 3, 4, ...} - množina všech přirozených čísel s nulou (množina všech nezáporných celých čísel)
- $\mathbb{C}$ - {..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...} - množina všech celých čísel
- $\mathbb{Q}$ - množina všech racionálních čísel (zlomky)
- $\mathbb{R}$ - množina všech reálných čísel

Definice 2: Binární operace ○ v množině M, která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici $[x,y] \in M \times M$, se nazývá operace **neomezeně definovaná** v množině M. Značíme **ND**.

Symbolicky: $(\forall\, x, y \in M)(\exists\, z \in M)[\, x \circ y = z]$.

Příklad 2:

- operace sčítání (+)…….v množině ℕ, ℂ, ℚ je **ND**
- operace odčítání (-)……v množině ℕ není **ND**
  v množině ℂ, ℚ, ℝ je **ND**
- operace násobení (·)….. v množině ℕ, ℂ, ℚ je **ND**
- operace dělení (:)……. v množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ není **ND**
  v množině ℚ - {0}, ℝ - {0} je **ND**

Definice 3: Binární operace ○ definovaná na množině M (je ND), se nazývá **komutativní** právě tehdy, když platí:

$$(\forall\, x, y \in M)[\, x \circ y = y \circ x].$$

Značíme **K**.

Příklad 3:

- operace sčítání (+)…….na množině ℕ, ℂ, ℚ je **K**
- operace odčítání (-)……na množině ℂ, ℚ, ℝ není **K**
- operace násobení (·)….. na množině ℕ, ℂ, ℚ je **K**
- operace dělení (:)…….. na množině ℚ - {0}, ℝ - {0} není **K**

Definice 4: Binární operace ○ definovaná na množině M, se nazývá **asociativní** právě tehdy, když platí:

$$(\forall\, x, y, z \in M)[\,(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)].$$

Značíme **A**.

Příklad 4:

- operace sčítání (+)…….na množině ℕ, ℂ, ℚ je **A**
- operace odčítání (-)……na množině ℂ, ℚ, ℝ není **A**
- operace násobení (·)….. na množině ℕ, ℂ, ℚ je **A**
- operace dělení (:)…….. na množině ℚ - {0}, ℝ - {0} není **A**

Definice 5: Nechť v množině M je definována binární operace ○. Existuje-li prvek e ∈ M, pro který platí:

$$(\forall x \in M)[\, x \circ e = e \circ x = x].$$

Pak se prvek e ∈ M nazývá **neutrálním prvkem** množiny M vzhledem k operaci ○.
Značíme **EN**.

Příklad 5:

- operace sčítání (+)…….na množině ℕ nemá vlastnost **EN** (tj. neexistuje neutrální prvek v množině ℕ vzhledem ke sčítání)
- operace sčítání (+)…….na množině $\mathbb{N}_0$, ℂ, ℚ má vlastnost **EN** (tj. existuje neutrální prvek vzhledem ke sčítání $\boldsymbol{e = 0}$, tj. $x + 0 = 0 + x = x$ platí pro každé $x \in M$)
- operace odčítání (-)……v množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ nemá vlastnost **EN** (tj. neexistuje neutrální prvek vzhledem k odčítání)
- operace násobení (·)….. na množině ℕ, ℂ, ℚ má vlastnost **EN** (tj. existuje neutrální prvek vzhledem k násobení $\boldsymbol{e = 1}$, tj. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ platí pro každé $x \in M$)
- operace dělení (:)…….v množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ nemá vlastnost **EN** (tj. neexistuje neutrální prvek vzhledem k dělení)

Poznámka 3. Je-li operace ○ komutativní, pak v zápisu vlastnosti **EN** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti $x \circ e$ nebo $e \circ x$.

Definice 6: Nechť v množině M je definována binární operace ○ a nechť e je neutrální prvek množiny M vzhledem k operaci ○. Prvek $\bar{a}$ ∈ M nazýváme **inverzním prvkem** k prvku a ∈ M v operaci ○ v množině M právě tehdy, když platí:

$$\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = e.$$

Jestliže $(\forall a \in M)(\exists \bar{a} \in M)[\, \bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = e]$, řekneme, že ke každému prvku množiny M existuje prvek inverzní vzhledem k operaci ○. Značíme **EI**.

Příklad 6:

- operace sčítání (+)…….na množině $\mathbb{N}_0$ <u>nemá vlastnost</u> **EI**
- operace sčítání (+)…….na množině $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ <u>má vlastnost</u> **EI** (tj. <u>existuje inverzní prvek</u> ke každému prvku z dané množiny vzhledem ke sčítání tak, aby platilo $\bar{a} + a = a + \bar{a} = 0$. Inverzní prvek k prvku a vzhledem ke sčítání se nazývá **prvek opačný** a značíme jej
$\bar{\boldsymbol{a}} = -\boldsymbol{a}$)
- operace odčítání (**-**)……v množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ <u>nemá vlastnost</u> **EI** (neboť nemá vlastnost **EN**)
- operace násobení (·)….. na množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ <u>nemá vlastnost</u> **EI**
- operace násobení (·)….. na množině $\mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$ <u>má vlastnost</u> **EI** (tj. <u>existuje inverzní prvek</u> ke každému prvku z dané množiny vzhledem k násobení tak, aby platilo
$\bar{a} \cdot a = a \cdot \bar{a} = 1$. Inverzní prvek k prvku a vzhledem k násobení se nazývá **prvek převrácený** a značíme jej $\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}} = a^{-1}$.
- operace dělení (**:**)…….v množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ <u>nemá vlastnost</u> **EI** (neboť nemá vlastnost **EN**)

Poznámka 4. Je-li operace ○ komutativní, pak v zápisu vlastnosti **EI** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti $\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a}$.

Definice 7: Nechť v množině M je definována binární operace ○. Existuje-li prvek $g \in$ M, pro který platí:

$$(\forall x \in M)[\, x \circ g = g \circ x = g].$$

Pak se prvek $g \in$ M nazývá **agresivním** prvkem množiny M vzhledem k operaci ○.
Značíme **AG**.

Příklad 7:

- operace sčítání (+)…….na množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ ne<u>má vlastnost</u> **AG** (tj. <u>neexistuje agresivní prvek</u> vzhledem ke sčítání)
- operace násobení (·)….. na množině $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ <u>má vlastnost</u> **AG** (tj. <u>existuje agresivní prvek</u> vzhledem k násobení $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$)

Poznámka 5. Je-li operace ○ komutativní, pak v zápisu vlastnosti **AG** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti $x \circ g$ nebo $g \circ x$.

Definice 8: Říkáme, že binární operace ○ definovaná na množině M má vlastnost **řešitelnost základních rovnic** právě tehdy, když platí:

$$(\forall\, a, b \in \mathrm{M})(\exists\, x, y \in \mathrm{M})[\, a \circ x = b \wedge y \circ a = b].$$

Značíme **ZR**.

Poznámka 5. Je-li operace ○ komutativní, pak v zápisu vlastnosti **ZR** lze vynechat jedna z výrokových forem $a \circ x = b$ nebo $y \circ a = b$.

Příklad 8:

- operace sčítání (+)…….na množině ℕ, <u>nemá vlastnost</u> **ZR** (tj. rovnice $a + x = b$ <u>není pro všechny prvky množiny ℕ řešitelná</u>)
- operace sčítání (+)…….na množině ℂ, ℚ, ℝ <u>má vlastnost</u> **ZR** (tj. rovnice $a + x = b$ <u>je pro všechny prvky uvažovaných množin řešitelná</u>: $x = b - a$)
- operace násobení (·)….. na množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ <u>nemá vlastnost</u> **ZR** (tj. rovnice $a \cdot x = b$ <u>není pro všechny prvky uvažovaných množin řešitelná</u>)
- operace násobení (·)….. na množině ℚ - {0}, ℝ - {0} <u>má vlastnost</u> **ZR** (tj. rovnice $a \cdot x = b$ <u>je pro všechny prvky uvažovaných množin řešitelná</u>: $x = \frac{b}{a}$)