Reálná čísla

Víme, že uspořádání množiny racionálních čísel je husté, tzn. mezi každá dvě různá racionální čísla lze „vložit“ další racionální číslo. Např. mezi čísly $\frac{1}{1000000}$ a $\frac{1}{1000001}$ určitě existuje racionální číslo $\frac{\frac{1}{1000000}+\frac{1}{1000001}}{2}$. Zdá se tedy, že číselná osa je „zcela vyplněná“ obrazy racionálních čísel. To však není pravda, na číselné ose jsou ještě mezery. Např. číslo $\sqrt{2}$, které určitě existuje (délka úhlopříčky ve čtverci o straně 1), není racionální.

Důkaz: Provedeme sporem. Nechť $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá nenulová kladná čísla a platí $D(p, q) = 1$ (jsou nesoudělná). Pak $p = \sqrt{2}\, q \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ je sudé číslo $\Rightarrow p$ je sudé číslo, tedy $p = 2u$. Dosadíme do vztahu $p = \sqrt{2}\, q$. Potom platí $2u = \sqrt{2}\, q \Rightarrow q = \sqrt{2}\, u \Rightarrow q^2 = 2u^2 \Rightarrow q^2$ je sudé číslo $\Rightarrow q$ je sudé číslo, tedy $q = 2v$. Srovnáme-li nyní získané vztahy $p = 2u$, $q = 2v$, dostáváme spor s předpokladem, že čísla p, q jsou nesoudělná. Předpoklad $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ tedy neplatí, číslo $\sqrt{2}$ nelze vyjádřit zlomkem a tedy není racionální.

Existují tedy iracionální čísla. Je jich nekonečně mnoho a jejich desetinný rozvoj je nekonečný a neperiodický. Každá mezera na číselné ose racionálních čísel vyjadřuje jedno číslo iracionální. Platí $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$. Algebraická struktura $(\boldsymbol{R}, +, \cdot)$ je komutativní těleso.

Konstrukce iracionálních čísel:

Cantorův axiom spojitosti:
Průnik do sebe zařazených úseček je neprázdný.

Hledané iracionální číslo postupně aproximujeme na číselné ose zleva a zprava racionálními čísly (tím vytváříme posloupnost do sebe zařazených úseček), přičemž po provedení nekonečně mnoha aproximací obdržíme hodnotu hledaného iracionálního čísla (je třeba uznání aktuálního nekonečna). V praxi po konečně mnoha krocích, až dosáhneme požadované přesnosti, proces ukončíme. Např. $\sqrt{2}$.

$1^2 = 1;$	$2^2 = 4,$	$1 < \sqrt{2} < 2$
$(1{,}4)^2 = 1{,}96;$	$(1{,}5)^2 = 2{,}25\ ,$	$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
$(1{,}41)^2 = 1{,}9881;$	$(1{,}42)^2 = 2{,}0164\ ,$	$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$
$(1{,}414)^2 = 1{,}999396;$	$(1{,}415)^2 = 2{,}002225\ ,$	$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

atd.

Proces postupné aproximace iracionálního čísla lze i programovat. Příkladem může být přibližné určení Eulerova čísla *e*. Víme, že $2 < e < 4$. Eulerovo číslo lze aproximovat pro $n \in \boldsymbol{N}$ pomocí nerovností

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$