MA0001 Základy matematiky
Podklady k cvičení 5

Břetislav Fajmon, Lukáš Másilko a další

23. října 2023

Cvičení 5.1. Procvičte si praktické užití věty 11 a najděte podíl a nezáporný zbytek při dělení a) čísla 30 číslem 7; b) čísla -25 číslem 6.

(Věta 11) Pro čísla $a \in N$, $b \in Z$ existuje dvojice celých čísel q, r takových, že $0 \leq r < a$, a platí

$$b = a \cdot q + r.$$

Cvičení 5.2. Procvičte si praktické užití věty 13: podle procesu popsaného ve větě 13 nalezněte největšího společného dělitele čísel 208 a 364. Nalezněte tohoto dělitele také druhým způsobem, a sice rozkladem čísel na součin prvočísel.

(Věta 13) Přeznačme si čísla a, b tak, aby $b \geq a$. Proveďme nyní následující posloupnost dělení se zbytkem (podle věty 11):

$$\begin{array}{rlll}
b : a = q_0, \text{ zbytek je } r_0, & \text{tedy máme vztah} & (v) & b = a \cdot q_0 + r_0; \\
a : r_0 = q_1, \text{ zbytek je } r_1, & \text{tedy máme vztah} & (iv) & a = r_0 \cdot q_1 + r_1; \\
r_0 : r_1 = q_2, \text{ zbytek je } r_2, & \text{tedy máme vztah} & (iii) & r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2; \\
 & & \vdots & \\
r_{n-2} : r_{n-1} = q_n, \text{ zbytek je } r_n, & \text{tedy máme vztah} & (ii) & r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n; \\
r_{n-1} : r_n = q_{n+1}, \text{ zbytek je } 0, & \text{tedy máme vztah} & (i) & r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1};
\end{array}$$

Pak poslední nenulový zbytek r_n v této posloupnosti dělení je roven největšímu společnému děliteli čísel a, b.

Cvičení 5.3. Procvičte si praktické užití věty 14 a převeďte zlomky $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ a $\frac{3}{7}$ na čísla s desetinným rozvojem.

(Věta 14) Každé racionální číslo má desetinný rozvoj buď konečný, nebo periodický.

Cvičení 5.4. U všech následujících pojmů se pokuste o dokončení definice pomocí symbolického zápisu bez českých slov, a všechny tyto definice se pokuste negovat. Všimněte si, že na rozdíl od přednášky se pojmy definují pouze pro přirozená čísla – cílem je procvičit symbolický zápis definic, které studenti dobře znají ze střední školy.

a) pro přirozená čísla a, b definujeme: b je **násobek čísla** a, jestliže ...

b) pro přirozená čísla a, b definujeme: a je **dělitel čísla** b, jestliže ...

c) pro přirozená čísla a, b, d definujeme: d je **společný dělitel čísel** a**,** b, jestliže ...

d) pro přirozená čísla a, b, D definujeme: D je **největší společný dělitel čísel** a**,** b, jestliže ...

e) pro přirozená čísla a, b, n definujeme: n je **společný násobek čísel** a**,** b, jestliže ...

f) pro přirozená čísla a, b, n definujeme: m je **nejmenší společný násobek čísel** a**,** b, jestliže ...

g) pro přirozené číslo $p > 1$ definujeme: p je **prvočíslo**, jestliže ...

h) pro přirozená čísla a, b definujeme: a, b jsou **nesoudělná čísla** jestliže ...

Cvičení 5.5. Naučte se na prověrku důkaz věty 11.

Cvičení 5.6. Naučte se na prověrku důkaz věty 12.

(Věta 12) Pro celá čísla a, b, c platí:

$$\begin{aligned} &\text{a) } a|b \wedge a|c \quad \Rightarrow \quad a|(b+c); \\ &\text{b) } a|b \wedge a|c \quad \Rightarrow \quad a|(b-c) \end{aligned}$$

(tedy pokud a dělí dvě celá čísla, dělí i jejich součet, a dělí také jejich rozdíl).

Cvičení 5.7. Naučte se na prověrku důkaz věty 14.