MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Skalární součin vektorů a jeho užití

Bakalářská práce

Brno 2023

Vedoucí práce:
RNDr. Břetislav Fajmon, Ph.D.

Autor práce:
Karolína Imrišová

Bibliografický záznam

Imrišová, Karolína. *Skalární součin vektorů a jeho užití: bakalářská práce*. Brno: Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, 2023.
Vedoucí bakalářské práce RNDr. Břetislav Fajmon, Ph.D.

Anotace

Předmětem bakalářské práce je skalární součin vektorů a jeho užití. Cílem práce je vytvoření uceleného náhledu na danou problematiku, včetně uvedení řešení některých příkladů spolu s grafickým znázorněním. Práce je určena především jako doplňující podklad při studiu lineární algebry pro studenty matematiky.

Práce je rozdělena do šesti kapitol: Kapitola *Vektor* vymezuje základní pojmy, obsahem kapitoly *Skalární součin vektorů* je skalární součin vektorů, velikost vektoru a její vlastnosti, kapitola *Ortogonalita* pojednává o ortogonální projekci vektorů, kapitola *Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory* pak o ortogonální projekci, lineární transformaci, vlastní hodnotě a vlastních vektorech lineárního zobrazení, kapitola *Kvadratické formy* se zabývá vyjádřením kvadratické formy pomocí matic a obsah kapitoly *Grafy kvadratických rovnic* je zaměřen na grafické zobrazení kuželoseček a kvadratických ploch neboli kvadrik.

První čtyři kapitoly svým obsahem rozšiřují učivo příslušného kursu, pátá a šestá kapitola doplňuje učivo nad rámec kursu. Každá kapitola obsahuje příslušné definice a na ně navazující příklady včetně vzorového řešení.

Annotation

The subject of the bachelor thesis is the dot product and its use. The goal of the thesis is to create a comprehensive overview of the issue, including the presentation of solutions to some examples together with a graphic representation. The thesis is primarily intended as supplementary material for the study of linear algebra for students of mathematics.

The work is divided into six chapters: The chapter *Vector* defines the basic concepts, the content of the *Dot product* chapter is the scalar product of vectors, the magnitude of the vector and its properties, the chapter *Orthogonality* discusses the orthogonal projection of vectors, the *Linear mapping between vector spaces* chapter is then about orthogonal projection, linear transformation, eigenvalues and eigenvectors of linear representation. The chapter *Quadratic Forms* deals with the expression of quadratic forms using matrices, and the content of the *Graphs of Quadratic Equations* chapter is focused on the graphical representation of conics and quadratic surfaces, or quadrics.

The content of the first four chapters expands the curriculum of the respective course, the fifth and sixth chapters supplement the curriculum beyond the scope of the course. Each chapter contains relevant definitions and related examples, including a sample solution.

Klíčová slova

Vektor, vektorový prostor, skalární součin vektorů, velikost vektoru, odchylka vektorů, matice, lineární transformace, ortogonalita, ortogonální projekce, Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces, Schwarzova nerovnost, kvadratická forma, kuželosečka, kvadratická plocha.

Keywords

Vector, vector space, dot product, magnitude of a vector, deviation of vectors, matrix, linear transformation, orthogonality, orthogonal projection, Gram-Schmidt Orthogonalization process, Schwarz inequality, quadratic form, conic section, quadratic surface.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Skalární součin vektorů a jeho užití zpracovala s použitím pouze pramenů uvedených v seznamu literatury, dalších informací a zdrojů v souladu s Disciplinárním řádem pro studenty Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity a se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů.

V Brně dne 19. dubna 2023

Karolína Imrišová

Poděkování

Děkuji tímto za pomoc a obětavou vstřícnost vedoucímu práce panu RNDr. Břetislavu Fajmonovi, Ph.D. a také pedagogům Katedry matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity za poskytnutí odborného zázemí.

Zvláštní dík patří mé rodině za dlouhodobou podporu a trpělivost nejenom při sepisování této práce.

OBSAH

ÚVOD

V této bakalářské práci se autorka věnuje tématu „Skalární součin vektorů a jeho užití“ v rámci bakalářského studia na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity.

Téma práce si autorka vybrala z důvodu jejího zájmu o lineární algebru s cílem nejenom hlubšího prohloubení svých znalostí v této oblasti, ale především s cílem vytvoření učební pomůcky s uceleným přehledem teorie v této oblasti doplněným příklady a grafickým znázorněním řešení.

Práce je rozdělena do šesti kapitol. Každá kapitola obsahuje příslušné definice a na ně navazující příklady včetně vzorového řešení. První čtyři kapitoly svým obsahem rozšiřují učivo příslušného kursu, pátá a šestá kapitola doplňuje učivo nad rámec kursu. Autorka tyto kapitoly připojuje, neboť pokládá za vhodné umožnit čtenáři získat hlubší vhled do předkládané teorie.

První kapitola s názvem *Vektor* vymezuje základní pojmy užité v práci, jako jsou vektor, vektorový prostor, báze a dimenze vektorového prostoru, souřadnice vektoru a lineární kombinace vektorů.

Druhá kapitola s názvem *Skalární součin vektorů* je zaměřena na skalární součin vektorů, velikost vektoru a její vlastnosti.

Třetí kapitola s názvem *Ortogonalita* pojednává o ortogonální projekci vektorů, a to i s možností využití Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu, dále Schwarzovou nerovností a odchylkou dvou vektorů.

Čtvrtá kapitola *Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory* je zaměřena na ortogonální projekci, lineární transformaci, vlastní hodnoty a vlastní vektory lineárního zobrazení.

Pátá kapitola *Kvadratické formy* se zabývá vyjádřením kvadratické formy pomocí matic. Tato kapitola je doplněna grafy kvadratických forem.

Konečně šestá kapitola navazuje na předcházející kapitolu, přičemž její obsah je zaměřen na grafické zobrazení kuželoseček a kvadratických ploch neboli kvadrik.

Jak autorka uvedla, cílem práce je vytvoření uceleného náhledu na danou problematiku, včetně uvedení řešení některých příkladů spolu s grafickým znázorněním pro snadnější pochopení problematiky. Práce je určena především jako doplňující podklad při studiu lineární algebry pro studenty matematiky, a to nejenom na pedagogických fakultách.

1 VEKTOR

Vektor je zobecněním pojmu reálné číslo, kdy reálné číslo je určeno svou velikostí, zatímco vektor je určen svou velikostí a směrem.[1] Vektor si lze představit jako orientovanou úsečku, jehož jeden krajní bod je považován za počáteční a druhý za koncový – ten je označen šipkou. Dva vektory o stejné délce, které jsou rovnoběžné a stejně orientované úsečky představují tentýž vektor.[2]

Vektor je prvkem vektorového prostoru.

1.1 Vektorový prostor

Definice 1: Množina $(V,+)$ se nazývá vektorový prostor nad tělesem skalárů $(T,+,\ \cdot)$, kde prvky $\vec{v} \in V$ se nazývají vektory, prvky tělesa T se nazývají skaláry, jestliže splňuje následující vlastnosti:

a) Struktura $(V,+)$ je komutativní grupa, když:

1. uzavřenost operace $+$ na V: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \vec{u} + \vec{v} \in V$,

2. asociativita operace $+$: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,

3. existence neutrálního prvku: $\exists \vec{o} \in V: \vec{u} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{u} \ \ \forall \vec{u} \in V$

$\vec{o}$ … nulový vektor,

4. existence inverzí vzhledem k operaci $+$: $\forall \vec{u} \in V\ \exists(-\vec{u}) \in V: \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$,

5. komutativita operace $+$ na V: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

b) Zobrazení $\cdot$ množiny $T \times V$ do V, tedy násobení skalár krát vektor, splňuje vlastnosti příbuzné vlastnostem operace na monoidu, když:

“1“ uzavřenost součinu skalár krát vektor: $\forall t \in T, \vec{v} \in V: t \cdot \vec{v} \in V$,

“2“ asociativita součinu skalár krát vektor: $\forall s, t \in T, \vec{v} \in V: s \cdot (t \cdot \vec{v}) = (s \cdot t) \cdot \vec{v}$,

“3“ existence neutrálního skaláru vzhledem k násobení skalár krát vektor:

$\exists 1 \ \in T: 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \ \forall \vec{v} \ \in V$.

c) Operace $+$ a operace skalár krát vektor splňují vlastnosti:

“6a“ $\forall s, t \in T, \vec{v} \in V: (s + t) \cdot \vec{v} = s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{v}$,

“6b“ $\forall t \in T, \vec{u}, \vec{v} \in V: t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$.[3]

---

[1] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022, 140 s. Str. 20.
[2] Srov. ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. Bratislava: Marenčin PT, spol. s r.o. 2011. ISBN 978-808-1141-119. Str. 52.
[3] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022, 140 s. Str. 20-21.

Příklad 1: Dokažte, že množina všech polynomů stupně nejvýše 3 nad tělesem R $(R_3[x], +, \cdot)$, kde operace sčítání vektorů je běžnou operací sčítání polynomů a operace násobení vektoru skalárem je běžným násobením polynomu reálným číslem, je vektorovým prostorem.

Řešení:

Např. pro: $\vec{u} = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$
$\vec{v} = x^3 + 4x^2 + 2x - 2$
$\vec{w} = 2x^3 - x^2 + 3x + 3$ platí tyto vlastnosti vektorového prostoru:

1. uzavřenost: $\vec{u} + \vec{v} = 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1$ (výsledkem je opět polynom nejvýše 3. stupně),
2. asociativita: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = 6x^3 + 5x^2 + 6x + 2$,
3. neutrální prvek (polynom) je $\vec{o} = 0$ (přičtením $\vec{o}$ k libovolnému polynomu se daný polynom nezmění),
4. inverzní prvek je opačný vektor: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$,
5. komutativita platí v tomto případě pro jakékoliv dva vektory: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
“1“ uzavřenost množiny $(R_3[x], +, \cdot)$ na násobení reálnými čísly; výsledek násobení polynomu reálným číslem je opět polynom stupně nejvýše 3,
např. $3 \cdot \vec{u} = 9x^3 + 6x^2 + 3x + 3$,
“2“ asociativita: např. $(3 \cdot 2) \cdot \vec{u} = 2 \cdot (3 \cdot \vec{u}) = 18x^3 + 12x^2 + 6x + 6$,
“3“ neutrální prvek je 1, např. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u} = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$,
“6a“ např. $(3 + 2) \cdot \vec{u} = 3 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{u} = 15x^3 + 10x^2 + 5x + 5$,
“6b“ např. $3 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 3 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v} = 12x^3 + 18x^2 + 9x - 3$.[4]

Příklad 2: Dokažte, že množina $(C\langle a, b\rangle, +, \cdot)$ spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ je vektorovým prostorem.

Řešení:

1. Uzavřenost součtu funkcí: $\forall f(x), g(x) \in C\langle a, b\rangle: f(x) + g(x)$ je opět spojitou funkcí.
2. Asociativita součtu funkcí: $\forall f(x), g(x), h(x) \in C\langle a, b\rangle: \big(f(x) + g(x)\big) + h(x) =$
$= f(x) + \big(g(x) + h(x)\big)\ \forall x \in \langle a, b\rangle$.
3. Neutrální prvek $e(x) = 0\ \forall x \in \langle a, b\rangle$, protože $f(x) + e(x) = f(x)\ \forall x \in \langle a, b\rangle$.
4. Inverzní prvek: $\forall f(x) \in C\langle a, b\rangle\ \exists\big(-f(x)\big) \in C\langle a, b\rangle: f(x) + \big(-f(x)\big) = e(x) = 0$.
5. Komutativita: $\forall f(x), g(x) \in C\langle a, b\rangle: f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.
“1“ $\forall s \in R, f(x) \in C\langle a, b\rangle: s \cdot f(x) \in C\langle a, b\rangle$.
“2“ $\forall s, t \in R, f(x) \in C\langle a, b\rangle: (s \cdot t) \cdot f(x) = s \cdot \big(t \cdot f(x)\big)$.
“3“ $\exists 1 \in R: 1 \cdot f(x) = f(x)\ \forall f(x) \in C\langle a, b\rangle$.
“6a“ $\forall s, t \in R, f(x) \in C\langle a, b\rangle: (s + t) \cdot f(x) = s \cdot f(x) + t \cdot f(x)$.
“6b“ $\forall s \in R, f(x), g(x) \in C\langle a, b\rangle: s \cdot (f(x) + g(x)) = s \cdot f(x) + s \cdot g(x)$.[5]

---

[4] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 22-24.
[5] Srov. tamtéž, str. 24-25.

Tento příklad dokazuje, že vektor je nejen zobecněním pojmu reálné číslo, ale také zobecněním pojmu spojitá funkce.

1.2 Báze a dimenze vektorového prostoru, souřadnice vektoru

1.2.1 Lineární kombinace

Definice 2: Vektor $\vec{v} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n}$ je lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou skaláry tělesa *T*.[6]

Posloupnost vektorů $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ je lineárně závislá, pokud některý z vektorů je lineární kombinací těch ostatních vektorů. V opačném případě je posloupnost vektorů $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ lineárně nezávislá.[7]

Příklad 3: Vektor $\overrightarrow{a_1} = (1, -4, 5)$ zapište jako lineární kombinaci vektorů $\overrightarrow{a_2} = (2, 1, 7)$ a $\overrightarrow{a_3} = (1, 2, 3)$.

<u>Řešení:</u>
$\overrightarrow{a_1} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_2} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_3}$

$1 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 1$
$-4 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2$
$5 = \alpha_1 \cdot 7 + \alpha_2 \cdot 3$

$\alpha_1 = 2$
$\alpha_2 = -3$

$\overrightarrow{a_1} = 2 \cdot \overrightarrow{a_2} - (3 \cdot \overrightarrow{a_3})$

<u>Zkouška:</u>
$\overrightarrow{a_1} = 2 \cdot (2, 1, 7) - \big(3 \cdot (1, 2, 3)\big) = (4, 2, 14) - (3, 6, 9) = (1, -4, 5)$

1.2.2 Báze vektorového prostoru

Definice 3: Skupina vektorů $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ vektorového prostoru $(V, +)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je bází vektorového prostoru $(V, +)$, pokud platí následující podmínky:

a) Tato posloupnost je lineárně nezávislá, tedy žádný z vektorů nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.
b) Každý vektor $\vec{v} \in V$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci, $\vec{v} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n}$, tj. lze uvést, že vektory $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ generují celý

[6] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 13.
[7] Srov. tamtéž, str. 25.

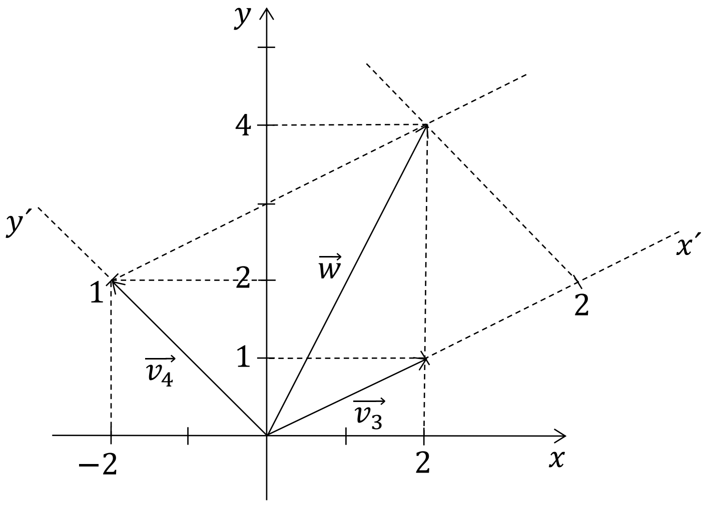
prostor. Skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou nazývány souřadnicemi vektoru vzhledem k bázi $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$.[8]

1.2.3 Dimenze vektorového prostoru

Definice 4: Dimenze vektorového prostoru $(V, +)$ znamená počet vektorů nějaké jeho báze.[9]

Poznámka: Dimenzi lze chápat jako počet parametrů, kterými lze každý vektor daného vektorového prostoru jednoznačně popsat.

Příklad 4: Souřadnice vektoru $\vec{w} = (2, 4)$ zadané ve standardní bázi $\overrightarrow{v_1} = (1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 1)$ vyjádřete v bázi vektorů $\overrightarrow{v_3} = (2, 1)$, $\overrightarrow{v_4} = (-2, 2)$.



Obr. 1: Grafické znázornění řešení příkladu 4

<u>Řešení:</u>

Ve standardní bázi $\overrightarrow{v_1} = (1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 1)$:

$\overrightarrow{v_1} = (1, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 1)$

$\vec{w} = 2 \cdot \overrightarrow{v_1} + 4 \cdot \overrightarrow{v_2}$

V bázi vektorů $\overrightarrow{v_3} = (2, 1)$, $\overrightarrow{v_4} = (-2, 2)$:

$\vec{w} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{v_3} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{v_4}$

$2 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-2)$

$4 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2$

$\alpha_1 = 2$

$\alpha_2 = 1$

[8] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 25.

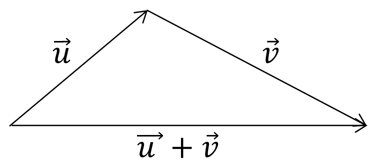
[9] Srov. tamtéž, str. 25.

$\overrightarrow{w} = 2 \cdot \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_4}$, a tedy $(\overrightarrow{w})_{\propto} = (2, 1)$. Vektor $\overrightarrow{w}$ se nezměnil, pouze jsou jeho souřadnice vyjádřeny v jiné bázi.

Příklad 5: Graficky znázorněte a dokažte vlastnosti množiny volných vektorů v rovině.

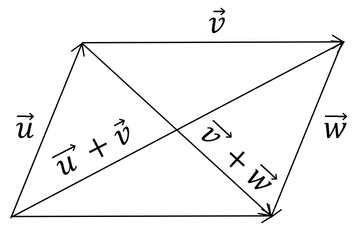
Řešení:
a) Struktura $(V, +)$ je komutativní grupa, když:

1. uzavřenost operace $+$ na V: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \vec{u} + \vec{v} \in V$,



Obr. 2: Grafické znázornění součtu vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$

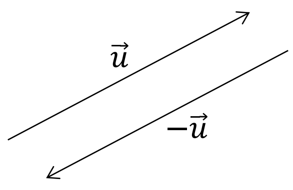
2. asociativita operace $+$: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,



Obr. 3: Grafické znázornění součtu vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

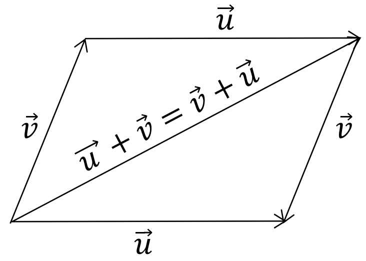
3. existence neutrálního prvku: $\exists \vec{o} \in V: \vec{u} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{u} \;\; \forall \vec{u} \in V$,

4. existence inverzí vzhledem k operaci $+$: $\forall \vec{u} \in V \; \exists (-\vec{u}) \in V: \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$,



Obr. 4: Grafické znázornění součtu vektorů $\vec{u}$, $-\vec{u}$

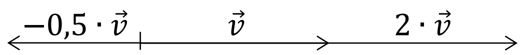
5. komutativita operace + na V: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.



Obr. 5: Grafické znázornění součtu $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

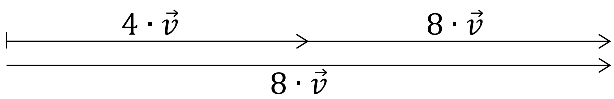
b) Zobrazení $\cdot$ množiny $T \times V$ do V, tedy násobení skalár krát vektor, splňuje vlastnosti příbuzné vlastnostem operace na monoidu, když:

"1" uzavřenost součinu skalár krát vektor: $\forall t \in T, \vec{v} \in V: t \cdot \vec{v} \in V$,



Obr. 6: Grafické znázornění uzavřenosti součinu skalár krát vektor

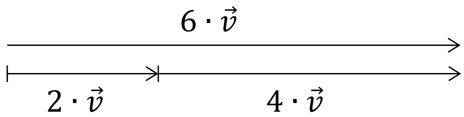
"2" asociativita součinu skalár krát vektor: $\forall s, t \in T, \vec{v} \in V: s \cdot (t \cdot \vec{v}) = (s \cdot t) \cdot \vec{v}$,
např. $2 \cdot (4 \cdot \vec{v}) = (2 \cdot 4) \cdot \vec{v}$,



Obr. 7: Grafické znázornění asociativity součinu skalár krát vektor

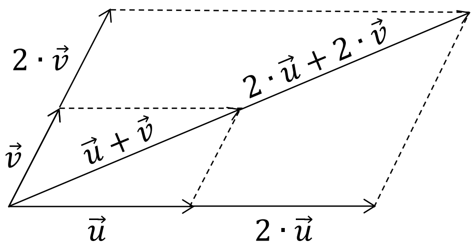
"3" existence neutrálního skaláru vzhledem k násobení skalár krát vektor:
$\exists 1 \in T: 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \;\; \forall \vec{v} \in V$.

c) Operace + a operace skalár krát vektor splňuje vlastnosti:
"6a" $\forall s, t \in T, \vec{v} \in V: (s + t) \cdot \vec{v} = s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{v}$,
např. $(2 + 4) \cdot \vec{v} = 2 \cdot \vec{v} + 4 \cdot \vec{v}$,



Obr. 8: Grafické znázornění $(2 + 4) \cdot \vec{v} = 2 \cdot \vec{v} + 4 \cdot \vec{v}$

“6b“ $\forall t \in T, \vec{u}, \vec{v} \in V: t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$,
např. $2 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$.

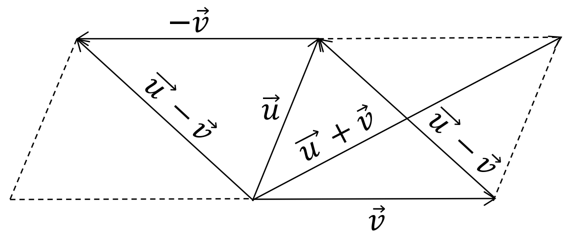


Obr. 9: Grafické znázornění $2 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$

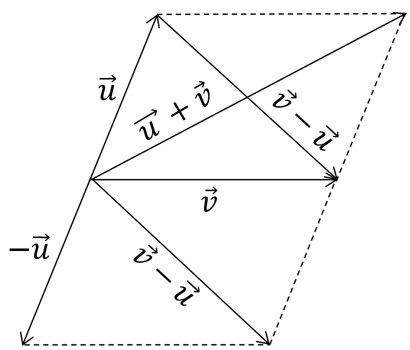
Lze tedy dovodit, že všech deset vlastností[10] požadovaných v definici vektorového prostoru jsou takové vlastnosti, které lze u volných vektorů v rovině předpokládat a s nimiž se běžně pracuje. Z příkladu 2 lze dovodit, že deset daných vlastností platí i pro množinu funkcí spojitých na intervalu, tj. definice vektorového prostoru umožňuje chápat vektory jako obecnější objekty.

Příklad 6: Vyjádřete úhlopříčky rovnoběžníku pomocí vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ v prostoru volných vektorů v rovině (ad příklad 5).

<u>Řešení:</u>



Obr. 10: Grafické znázornění úhlopříček čtyřúhelníku (alternativa 1)



Obr. 11: Grafické znázornění úhlopříček čtyřúhelníku (alternativa 2)

[10] Vlastnosti označené **1.**, **2.**, **3.**, **4.**, **5.**, **“1“**, **“2“**, **“3“**, **“6a“**, **“6b“** v kapitole 1.1, definice 1.

2 SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ

Tato kapitola se zabývá zobrazením typu skalární součin vektorů, tedy zobrazení $V^2 \rightarrow R$, které přiřazuje dvěma vektorům skalár a splňuje určité vlastnosti.[11]

Definice 5: Skalární součin vektorů na vektorovém prostoru nad tělesem T je symetrická bilineární pozitivně definitní forma na V.

Vysvětlení jednotlivých pojmů:
a) symetrická: $skal(\vec{u},\vec{v}) = skal(\vec{v},\vec{u})$;
b) bilineární = lineární v každé z daných dvou složek,

$$skal(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \vec{w}) = \alpha \cdot skal(\vec{u},\vec{w}) + \beta \cdot skal(\vec{v},\vec{w}),$$
$$skal(\vec{u}, \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}) = \alpha \cdot skal(\vec{u},\vec{v}) + \beta \cdot skal(\vec{u},\vec{w});$$

c) pozitivně definitní: $skal(\vec{u},\vec{u}) > 0$, pokud $\vec{u} \neq \vec{o}$;
d) forma na V: zobrazení $V \times V \rightarrow R$, které přiřazuje dvojici vektorů reálné číslo $skal(\vec{u},\vec{v}) = r \in R$.[12]

Příklad 7: Uveďte obecný vzorec skalárního součinu vektorů v aritmetickém vektorovém prostoru R^n a příklad skalárního součinu na prostoru trojic reálných čísel.

Řešení:
V tomto prostoru je definován skalární součin nejčastěji podle vzorce

$$\boxed{skal(\vec{u},\vec{v}) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n.} \tag{1}$$

Na vektorovém prostoru $(R^3, +)$ lze definovat skalární součin vztahem:
$skal(\vec{u},\vec{v}) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$.[13]

Příklad 8: Uveďte příklad skalárního součinu na prostoru reálných spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$.

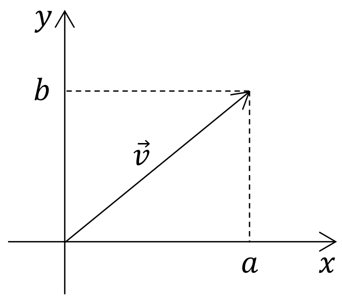
Řešení:
Na vektorovém prostoru $V = C\langle a, b\rangle$ nad tělesem skalárů R lze definovat skalární součin vztahem: $skal\big(f(x), g(x)\big) = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$.
Takto definovaný operátor je symetrickou formou na $C\langle a, b\rangle$ a splňuje vlastnost linearity v každé ze složek, např.
$\int_a^b (\alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)) \cdot g(x)\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f_1(x) \cdot g(x)\, dx + \beta \cdot \int_a^b f_2(x) \cdot g(x)\, dx,$

[11] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 92.
[12] Srov. tamtéž, str. 92-93.
[13] Srov. tamtéž, str. 93.

Pozitivní definitnost operátoru je také splněna, protože
$skal(f(x), f(x)) = \int_a^b f^2(x)\,dx > 0$, pro spojitou funkci $f(x) \neq 0$.[14]

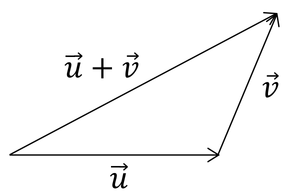
2.1 Velikost vektoru

Definice 6: Velikost neboli norma vektoru je odmocnina ze skalárního součinu vektoru se sebou samotným: $\|\vec{v}\| = \sqrt{skal(\vec{v}, \vec{v})}$.[15]
Poznámka: Velikost vektoru vychází z Pythagorovy věty a je dána vztahem $\sqrt{a^2 + b^2}$, který je znázorněn v Obr. 12.
Tedy pro vektor $\vec{v} = (a, b)$ v aritmetickém vektorovém prostoru R^2 se skalárním součinem $skal(\vec{v}, \vec{v}) = a \cdot a + b \cdot b$ platí $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Obr. 12: Grafické znázornění velikosti vektoru $\vec{v}$ v prostoru R^2.

Vlastnosti velikosti vektoru:
1. Pozitivní definitnost: $\|\vec{v}\| > 0$ pro $\vec{v} \neq 0$, $\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = 0$.
2. Homogenita: $\|\alpha \cdot \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$, kde α je libovolná konstanta z tělesa skalárů.
3. Trojúhelníková nerovnost: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.[16]
   Součet velikostí dvou stran trojúhelníku musí být větší nebo roven velikosti třetí strany.



Obr. 13: Grafické znázornění výchozí situace pro trojúhelníkovou nerovnost v prostoru R^2.

4. Vzorec pro odchylku vektorů na množině volných vektorů v rovině (příklad 5) vychází z kosinové věty:

---

[14] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 93.
[15] Srov. tamtéž, str. 96.
[16] Srov. tamtéž, str. 97-98.

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot cos(\varphi)$,
$skal((\vec{u} - \vec{v}), (\vec{u} - \vec{v})) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot cos(\varphi)$,
$skal(\vec{u}, \vec{u}) + skal(\vec{v}, \vec{v}) - 2 \cdot skal(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot cos(\varphi)$.

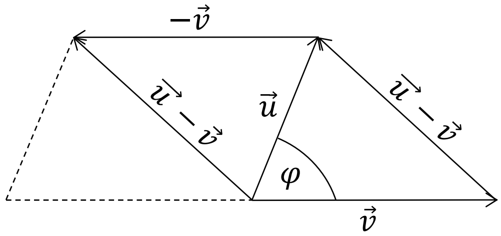
A proto

$$\boxed{skal(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot cos(\varphi)} \quad (2)$$

Odtud dostaneme

$$\boxed{cos(\varphi) = \frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}} \quad (3)$$

První řádek celého odvození je kosinovou větou na množině volných vektorů, další úpravy plynou z vlastností velikosti vektoru a skalárního součinu vektorů. Vzorec (2) platí nejen ve vektorovém prostoru R^n, ale také ve všech ostatních vektorových prostorech se skalárním součinem, což vyplývá ze Schwarzovy nerovnosti.[17]



Obr. 14: Grafické znázornění kosinové věty

5. Pro $\vec{u} \neq \vec{o}$ lze vektor $\vec{u}$ normovat, neboli prodloužit či zkrátit, na vektor velikosti 1 pomocí $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$.[18]

6. Schwarzova nerovnost bude pro obecné prostory se skalárním součinem dokázána v následující kapitole o ortogonalitě.

[17] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 99.
[18] Srov. tamtéž, str. 98.

3 ORTOGONALITA

Tato kapitola pojednává o ortogonalitě vektorů, ortogonální projekci, Gram-Schmidtově ortogonalizačním procesu, Schwarzově nerovnosti a jejich užití.

3.1 Ortogonální projekce a Schwarzova nerovnost

Definice 7: Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou ortogonální, pokud platí $skal(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Na rozdíl od ortogonality vektorů se kolmost definuje na R^n pro vektory $\vec{u}, \vec{v}$, které jsou nenulové. Ortogonální vektory mohou být oba (nebo jeden) nulové.[19]

Definice 8: Množiny A, B jsou ortogonální, když $\forall \vec{u} \in A, \vec{v} \in B$: vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou ortogonální.[20]

Definice 9: Báze W vektorového prostoru se nazývá ortogonální, jestliže každé její dva různé vektory jsou ortogonální; nazývá se ortonormální, je-li ortogonální a navíc $\|\vec{x}\| = 1$, pro každé $\vec{x} \in W$.[21]

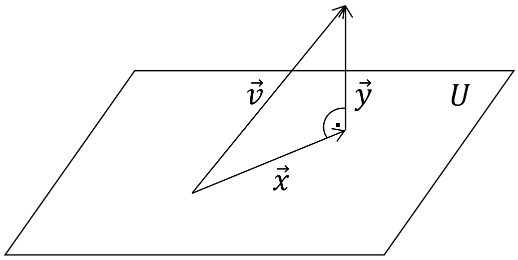
Definice 10: Pokud U je vektorovým podprostorem Eukleidovského prostoru V, pak ortogonální doplněk $U^\perp$ podprostoru U v prostoru V se definuje jako množina všech vektorů ortogonálních k U: $U^\perp = \{\vec{x} \in V : skal(\vec{x}, \vec{u}) = 0 \quad \forall \vec{u} \in U\}$.

Ortogonální doplněk $U^\perp$ je vektorový podprostor, který má tyto vlastnosti:
1) $V = U + U^\perp$ (tzv. přímý součet, tj. $U \cap U^\perp = \{\vec{o}\}, \dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$),
2) $(U^\perp)^\perp = U$,
3) $(U + S)^\perp = U^\perp \cap S^\perp$,
4) $(U \cap S)^\perp = U^\perp + S^\perp$.[22]

Definice 11: Ortogonální projekce nenulového vektoru $\vec{v}$ do podprostoru U je vektor $\vec{x}$ takový, že: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{v}$, kde $\vec{x} \in U, \vec{y} \in U^\perp$.[23]

---

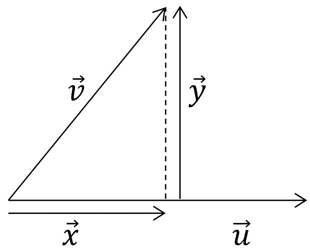
[19] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 102.
[20] Srov. tamtéž, str. 104.
[21] ČERNÝ, Ilja. *Kuželosečky a kvadriky* [online]. Třetí upravené a doplněné vydání. Praha: Universita Karlova, 2012. Str. 12.
[22] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 104.
[23] Srov. tamtéž, str. 107.



Obr. 15: Ortogonální projekce nenulového vektoru $\vec{v}$ do podprostoru U

Příklad 9: Najděte ortogonální projekci vektoru $\vec{v} = (1, 3, 2)$ do směru vektoru $\vec{u} = (1, -2, 3)$ (do podprostoru $L(\vec{u})$).[24]

<u>Obecné řešení:</u>



Obr. 16: Ortogonální projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$

$$\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$$
$$\vec{x} = k \cdot \vec{u}$$

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} + \vec{y} \quad /\cdot \vec{u}$$
$$skal(\vec{v}, \vec{u}) = k \cdot skal(\vec{u}, \vec{u}) + 0$$
$$k = \frac{skal(\vec{v}, \vec{u})}{skal(\vec{u}, \vec{u})}$$

Tímto způsobem lze vyjádřit vzorec pro projekci vektoru do směru jiného vektoru.

$$\boxed{proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{skal(\vec{v}, \vec{u})}{skal(\vec{u}, \vec{u})} \cdot \vec{u}.} \tag{4}$$

<u>Konkrétní řešení:</u>

$$\vec{x} := proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = k \cdot \vec{u} = \frac{skal(\vec{v}, \vec{u})}{skal(\vec{u}, \vec{u})} \cdot \vec{u} = \frac{1}{14} \cdot (1, -2, 3) = \left(\frac{1}{14}, -\frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right)$$

[24] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 138.

Schwarzova nerovnost

Pro vektory v aritmetickém vektorovém prostoru (s definicí skalárního součinu z příkladu 7) platí Schwarzova nerovnost ze vztahu (2). Rovnost v tomto vztahu nastává pro $\varphi = 0$, což je právě tehdy, když jsou vektory $\vec{u}, \vec{v}$ lineárně závislé.

$$\boxed{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \geq |skal(\vec{u}, \vec{v})|} \tag{5}$$

Výše uvedený vzorec platí pro jakýkoli vektorový prostor se skalárním součinem.[25]

Důkaz:

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \left(skal(\vec{v}, \vec{u})\right)^2 \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

V aritmetickém vektorovém prostoru platí:

$(u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2) \cdot (v_1^2 + v_2^2)$

$u_1^2 v_1^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2 + u_2^2 v_2^2 \leq u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2$

$0 \leq u_2^2 v_1^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2 + u_1^2 v_2^2$

$0 \leq (u_2 v_1 - u_1 v_2)^2$ … platí (důkaz nyní plyne obrácením úvah z předchozího odvození)

Důkaz obecně:

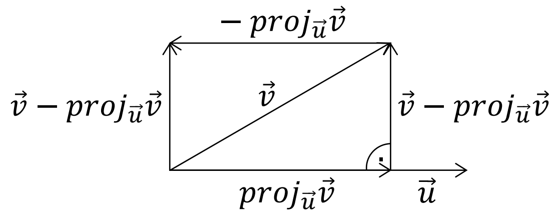
a) $\vec{u} = \vec{o}$ … tvrzení platí:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = 0$

b) $\vec{u} \neq \vec{o}$

$\vec{v} \neq \vec{o}$



Obr. 17: Důkaz Schwarzovy nerovnosti

$\forall \vec{v} \in V$:

$\|\vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v}\|^2 \geq 0$

$skal(\vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v}, \vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v}) \geq 0$

Využití vzorce (4) $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{skal(\vec{v},\vec{u})}{skal(\vec{u},\vec{u})} \cdot \vec{u}$.

[25] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 99.

$$skal\left(\vec{v} - \frac{skal(\vec{v},\vec{u})}{skal(\vec{u},\vec{u})} \cdot \vec{u}, \vec{v} - \frac{skal(\vec{v},\vec{u})}{skal(\vec{u},\vec{u})} \cdot \vec{u}\right) \geq 0$$

$$\|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot skal\left(\vec{v}, \frac{skal(\vec{v},\vec{u})}{skal(\vec{u},\vec{u})} \cdot \vec{u}\right) + \|\vec{u}\|^2 \cdot \frac{\left(skal(\vec{u},\vec{v})\right)^2}{\left(skal(\vec{u},\vec{u})\right)^2} \geq 0 \quad / \cdot \|\vec{u}\|^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \left(skal(\vec{u},\vec{v})\right)^2 + \left(skal(\vec{u},\vec{v})\right)^2 \geq 0$$

$$\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \left(skal(\vec{u},\vec{v})\right)^2 \geq 0$$

$$\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \geq \left(skal(\vec{u},\vec{v})\right)^2$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \geq skal(\vec{u},\vec{v})$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{o}$, tedy když vektor $\vec{v}$ je rovnoběžný s vektorem $\vec{u}$.

3.2 Ortogonální projekce doplněná o Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta 1: Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces: nechť $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}$ jsou vektory eukleidovského prostoru, pak existují po dvou ortogonální vektory

$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_k}$, pro které platí $L(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k}) = L(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_k})$.[26]

Příklad 10: Pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu nalezněte bázi podprostoru $U = L(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$:

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$[27]

Řešení:

Nejprve zjistíme, zda jsou vektory $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ a $\overrightarrow{u_3}$ lineárně nezávislé. V tomto případě je podmínka splněna. Pokračujeme algoritmem Gramova-Schmidtova procesu:

$$\overrightarrow{e_1} := \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

První hledaný vektor položíme rovný prvnímu z vektorů zadané báze.

Dále klademe $\overrightarrow{e_2} := p_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{u_2}$. Hledáme vektor $\overrightarrow{e_2}$ jako lineární kombinaci vektorů $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{u_2}$. Ke zjištění souřadnic vektoru $\overrightarrow{e_2}$ je nutné vypočítat konstantu p_1, využijeme ortogonality $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$: $skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = 0$.

[26] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 102.
[27] Srov. tamtéž, str. 103.

$\overrightarrow{e_2} = p_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{u_2} \quad / \cdot \overrightarrow{e_1}$
$skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = p_1 \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + skal(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{e_1})$
$0 = p_1 \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + skal(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{e_1})$
$p_1 \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) = -\, skal(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{e_1})$

$$p_1 = \frac{-\, skal(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{e_1})}{skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})}$$

$$p_1 = -\frac{3}{3} = -1$$

$\overrightarrow{e_2} = p_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{u_2}$

$$\overrightarrow{e_2} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Následně klademe $\overrightarrow{e_3} := p_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + p_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{u_3}$. Hledaný vektor $\overrightarrow{e_3}$ vyjadřujeme jako lineární kombinaci vektorů $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{u_3}$.

Ke zjištění souřadnic vektoru $\overrightarrow{e_3}$ potřebujeme vypočítat konstanty p_1 a p_2, opět využijeme ortogonality vektorů $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$: $skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) = 0$, $skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = 0$.

$\overrightarrow{e_3} = p_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + p_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{u_3} \quad / \cdot \overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3} = p_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + p_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{u_3} \quad / \cdot \overrightarrow{e_2}$

$skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) = p_1 \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + p_2 \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_3})$
$skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = p_1 \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + p_2 \cdot skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) + skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u_3})$.

S využitím ortogonality tedy platí:
$0 = p_1 \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + p_2 \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_3})$
$0 = p_1 \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + p_2 \cdot skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) + skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u_3})$

$0 = 3 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1$
$0 = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 - 1$

$$p_1 = -\frac{1}{3}$$

$p_2 = 1$

$$\overrightarrow{e_3} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

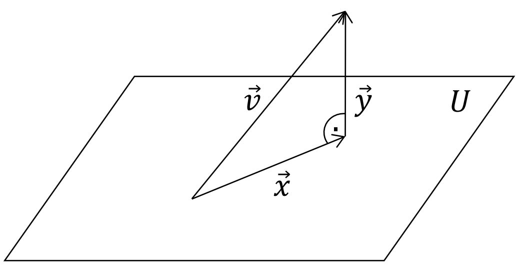
Odpověď:
$L(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ je dimenze 3 a jeho ortogonální báze je např.:

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Pokud by byl vektor $\overrightarrow{u_3}$ lineárně závislý na vektorech $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, tak Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces nalezne $\overrightarrow{e_3} = 0$, a ten se do báze nebere, i když je ortogonální k $\overrightarrow{e_1}$ i k $\overrightarrow{e_2}$.[28]

Příklad 11: Najděte ortogonální projekci vektoru $\vec{v} = (1, 3, 2)$ do roviny $U = \{[x, y, z]: x - y + 2z = 0\}$.

Řešení:
Způsob 1:
Zvolíme si dva lineárně nezávislé vektory $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in U$, které vytváří bázi U, např. $\overrightarrow{u_1} = (1, 3, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (-4, 2, 3)$.



Obr. 18: Ortogonální projekce vektoru $\vec{v}$ do roviny U (1. způsob)

$\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$
$\vec{x} = k_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{u_2}$,
dostáváme tedy vyjádření $\vec{v} = k_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \vec{y}$. Jestliže tento vztah vynásobíme po řadě vektory báze podprostoru U, získáme dvě rovnice:

[28] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 103-104.

$\vec{v} = k_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \vec{y} \quad / \cdot \overrightarrow{u_1}$
$\vec{v} = k_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \vec{y} \quad / \cdot \overrightarrow{u_2}$

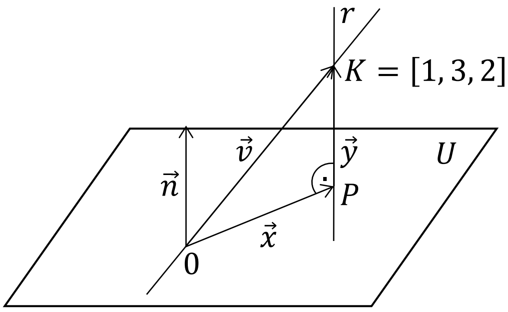
$skal(\vec{v}, \overrightarrow{u_1}) = k_1 \cdot skal(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}) + k_2 \cdot skal(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) + skal(\vec{y}, \overrightarrow{u_1})$
$skal(\vec{v}, \overrightarrow{u_2}) = k_1 \cdot skal(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) + k_2 \cdot skal(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2}) + skal(\vec{y}, \overrightarrow{u_2})$.
V těchto rovnicích je využito skutečnosti, že vektory $\vec{y}, \overrightarrow{u_1}$ jsou ortogonální, i vektory $\vec{y}, \overrightarrow{u_2}$ jsou ortogonální. Tedy platí $skal(\vec{y}, \overrightarrow{u_1}) = 0$, a také $skal(\vec{y}, \overrightarrow{u_2}) = 0$. Po dosazení do tohoto systému platí:

$12 = k_1 \cdot 11 + k_2 \cdot 5 + 0$
$8 = k_1 \cdot 5 + k_2 \cdot 29 + 0$

$$k_1 = \frac{22}{21}$$
$$k_2 = \frac{2}{21}$$

$\vec{x} = k_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{u_2}$
$\vec{x} = \frac{22}{21} \cdot (1, 3, 1) + \frac{2}{21} \cdot (-4, 2, 3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Způsob 2:
Pomocí analytické geometrie v aritmetickém vektorovém prostoru $(R^3, +, \cdot)$



Obr. 19: Ortogonální projekce vektoru $\vec{v}$ do roviny U (2. způsob)

$\vec{n} = (1, -1, 2)$ … normálový vektor
$\vec{v} = (1, 3, 2)$, pak
$K = [1, 3, 2]$

$\vec{y} = c \cdot (1, -1, 2) = c \cdot \vec{n}$

$r \perp U$: $\quad x = 1 + c \cdot 1$
$\qquad\qquad y = 3 + c \cdot (-1)$
$\qquad\qquad z = 2 + c \cdot 2$

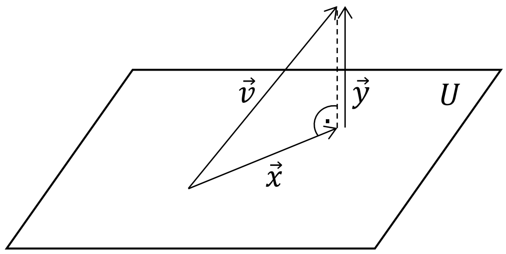
$P \in U$: $\quad x - y + 2z = 0$

$1 + c - (3 - c) + 2 \cdot (2 + 2c) = 0$

$c = -\frac{1}{3}$

$$P = \left[\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right] \rightarrow \vec{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Způsob 3:
Tento způsob je podobný způsobu prvnímu, jen navíc s využitím Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu.



Obr. 20: Ortogonální projekce vektoru $\vec{v}$ do roviny U (3. způsob)

Jsou dány dva lineárně nezávislé vektory $\overrightarrow{u_1} = (1, 3, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (-4, 2, 3)$, $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in U$, které vytváří bázi U. Cílem je najít vektory $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, aby platilo:

$L(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = L(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, kde $skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = 0$

$\overrightarrow{e_1} := \overrightarrow{u_1} = (1, 3, 1)$

$\overrightarrow{e_2} := \overrightarrow{e_1} + k \cdot \overrightarrow{u_2} \quad / \cdot \overrightarrow{e_1}$

$skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + k \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_2})$

$0 = skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + k \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_2})$

$$k = -\frac{skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})}{skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_2})}$$

$$k = -\frac{11}{5}$$

$$\overrightarrow{e_2} = (1, 3, 1) + \left(-\frac{11}{5}\right) \cdot (-4, 2, 3)$$

$\overrightarrow{e_2} = \left(\frac{49}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{28}{5}\right)$ … vektor kolmý na $\overrightarrow{u_1}$

Zde končí využití Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Byly vypočítány ortogonální vektory $\overrightarrow{e_1}$ a $\overrightarrow{e_2}$, které se vloží do báze a provede se projekce vektoru $\vec{v}$ do podprostoru jimi generovaného. Následující výpočet je stejný jako ve způsobu 1.

$\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$

$\vec{x} = k_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{e_2}$

$$\vec{v} = k_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \vec{y} \quad / \cdot \overrightarrow{e_1}$$
$$\vec{v} = k_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \vec{y} \quad / \cdot \overrightarrow{e_2}$$

$$skal(\vec{v}, \overrightarrow{e_1}) = k_1 \cdot skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + k_2 \cdot 0 + 0,$$
$$skal(\vec{v}, \overrightarrow{e_2}) = 0 + k_2 \cdot skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) + 0.$$

Způsob 3 lze použít namísto způsobu 1, protože jsme získali systém dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. S využitím ortogonality vektorů $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ je každá neznámá samostatně v jiné rovnici:

$$k_1 = \frac{skal(\vec{v}, \overrightarrow{e_1})}{skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})}$$
$$k_2 = \frac{skal(\vec{v}, \overrightarrow{e_2})}{skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2})}$$

$$\vec{x} = proj_{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}}(\vec{v}) = \frac{skal(\vec{v}, \overrightarrow{e_1})}{skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})} \cdot \overrightarrow{e_1} + \frac{skal(\vec{v}, \overrightarrow{e_2})}{skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2})} \cdot \overrightarrow{e_2}$$

Vzorec projekce vektoru $\vec{v}$ do roviny určené ortogonálními vektory $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$

$$\boxed{proj_{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}}(\vec{v}) = \frac{skal(\vec{v}, \overrightarrow{e_1})}{skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})} \cdot \overrightarrow{e_1} + \frac{skal(\vec{v}, \overrightarrow{e_2})}{skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2})} \cdot \overrightarrow{e_2}} \tag{6}$$

$$\vec{x} = \frac{12}{11} \cdot (1, 3, 1) + \frac{-\frac{28}{5}}{\frac{3234}{25}} \cdot \left(\frac{49}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{28}{5}\right)$$
$$\vec{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

3.3 Odchylka dvou vektorů

Při výpočtu odchylky dvou vektorů v jakémkoli prostoru se skalárním součinem se využívá výraz ze Schwarzovy nerovnosti $\frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$, který nabývá hodnot v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Protože tento interval je definičním oborem funkce $arccos(x)$, tedy $cos(\varphi) = \frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$. Pro hodnotu zlomku z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ přiřadí funkce $arccos(x)$ úhel φ interval $\langle 0, \pi \rangle$ jednoznačně, tj. na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ existuje právě jedno φ splňující daný vztah.[29]

[29] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 100.

Příklad 12: Určete velikost odchylky vektorů $\vec{u} = (1, 3), \vec{v} = (2, -3)$.

Řešení:

$$cos(\varphi) = \frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

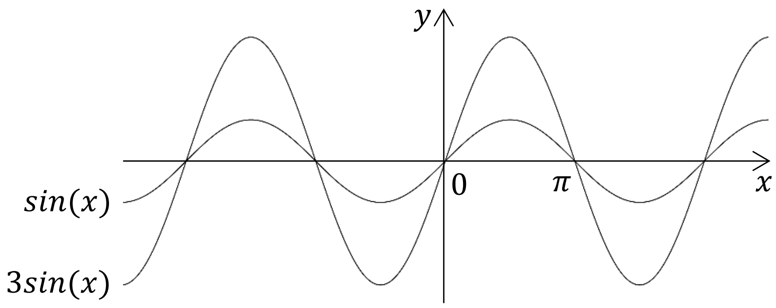
$$\varphi = arccos\left(\frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}}\right)$$

$$\varphi = 127° \, 52'$$

Příklad 13: Ve vektorovém prostoru $(C\langle a, b\rangle, +, \ \cdot\ )$ v intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, \pi\rangle$ určete velikost odchylky funkce a) $sin\,(x)$ a $3sin\,(x)$, b) $sin\,(x)$ a $sin\,(3x)$.

Řešení:

a)



Obr. 21: Grafické znázornění funkcí $sin\,(x)$ a $3sin\,(x)$

$$\int_0^\pi sin(x) \cdot 3sin(x)\, dx =$$

$$= \int_0^\pi sin(x) \cdot 3sin(x)\, dx = 3 \cdot \int_0^\pi sin(x) \cdot sin(x)\, dx = 3 \cdot \int_0^\pi sin(x)^2\, dx =$$

$$= 3 \cdot \int_0^\pi \frac{1 - cos\,(2x)}{2} dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi 1 - cos(2x)\, dx = \frac{3}{2} \cdot \int_0^\pi 1 - cos(2x)\, dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int_0^\pi 1\, dx - \int_0^\pi cos(2x)\, dx = \left(\frac{3}{2} \cdot \left(x - \frac{sin(2x)}{2}\right)\right)\Bigg|_0^\pi = \left(\frac{3}{2}x - \frac{3\,sin(2x)}{2}\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{3}{2}\pi - \frac{3\,sin(2\pi)}{4} - \left(\frac{3}{2} \cdot 0 - \frac{3\,sin(2 \cdot 0)}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\|sin(x)\| = \sqrt{\int_0^\pi (sin(x))^2\, dx} = \sqrt{\int_0^\pi \frac{1 - cos(2x)}{2}\, dx} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi 1 - cos(2x)\, dx} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{sin(2x)}{2}\right)\right)\Bigg|_0^\pi} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x - \frac{sin(2x)}{4}\right)\Bigg|_0^\pi} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\pi - \frac{sin(2\pi)}{4} - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{sin(2 \cdot 0)}{4}\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$\|3sin(x)\| = \sqrt{\int_0^\pi (3sin(x))^2\, dx} = \sqrt{\int_0^\pi 9(sin(x))^{\,2} dx} = \sqrt{9 \cdot \int_0^\pi (sin(x))^{\,2} dx} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot \int_0^\pi \frac{1 - cos(2x)}{2}\, dx} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \int_0^\pi 1 - cos(2x)\, dx} = \sqrt{\left(\frac{9}{2} \cdot \left(x - \frac{sin(2x)}{2}\right)\right)\Bigg|_0^\pi} =$$

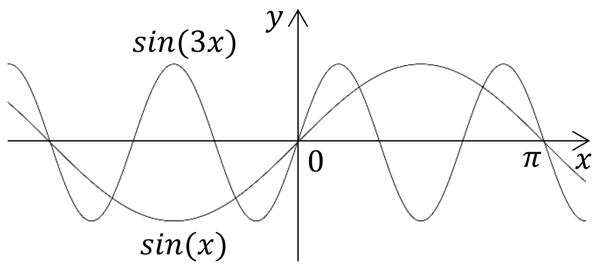
$$= \sqrt{\left(\frac{9}{2}x - \frac{9\,sin(2x)}{4}\right)\Bigg|_0^\pi} = \sqrt{\frac{9}{2}\pi - \frac{9sin(2\pi)}{4} - \left(\frac{9}{2} \cdot 0 - \frac{9sin(2 \cdot 0)}{4}\right)} = \sqrt{\frac{9\pi}{2}} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$cos(\varphi) = \frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$\varphi = arccos\left(\frac{\int_0^\pi sin(x) \cdot 3sin(x)dx}{\|sin(x)\| \cdot \|3\,sin(x)\|}\right) = arccos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}}\right) = arccos(1)$, odtud

$\varphi = 0$

b)



Obr. 22: Grafické znázornění funkcí $sin(x)$ a $sin(3x)$

$$\int_0^\pi sin(x) \cdot sin(3x)\, dx = \int_0^\pi sin(x) \cdot (sin(x) \cdot cos(2x) + sin(2x) \cdot cos(x))dx =$$

$$= \int_0^\pi sin(x) \cdot \big(sin(x) \cdot \big(cos^2(x) - sin^2(x)\big) + (2 \cdot sin(x) \cdot cos\,(x)) \cdot cos(x)\big)dx =$$

$$= \int_0^\pi sin(x) \cdot (sin(x) \cdot cos^2(x) - sin^3(x) + 2 \cdot sin(x) \cdot cos^2(x))dx =$$

$$= \int_0^\pi sin^2(x) \cdot cos^2(x) - sin^4(x) + 2 \cdot sin^2(x) \cdot cos^2(x)dx =$$

$$= \int_0^\pi 3 \cdot sin^2(x) \cdot cos^2(x) - sin^4(x)dx =$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1 - cos(4x)}{2}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(1 - 2 \cdot cos(2x) + \frac{1 - cos(4x)}{2}\right) dx =$$

$$= \int_0^\pi \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \cdot cos(4x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot cos(2x) - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot cos(4x)\, dx =$$
$$= \int_0^\pi \frac{3}{8} - \frac{3 \cdot cos(4x)}{8} - \frac{1}{4} + \frac{cos(2x)}{2} - \frac{1}{8} + \frac{cos(4x)}{8} dx =$$
$$= \int_0^\pi \frac{3 \cdot cos(4x)}{8} + \frac{cos(2x)}{2} + \frac{cos(4x)}{8} dx = \int_0^\pi \left(-\frac{cos(4x)}{4}\right) + \frac{cos(2x)}{2} dx =$$
$$= \left(-\frac{sin(4x)}{16} + \frac{sin(2x)}{4}\right)\Bigg|\begin{matrix}\pi \\ 0\end{matrix} = -\frac{sin(4\pi)}{16} + \frac{sin(2\pi)}{4} - \left(-\frac{sin(4 \cdot 0)}{16} + \frac{sin(2 \cdot 0)}{4}\right) = 0$$

Jelikož čitatel ve vzorci $cos(\varphi) = \frac{skal(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ je roven nule, odchylka $\varphi = arccos(0) = \frac{\pi}{2} = 90°$.

4 LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ MEZI VEKTOROVÝMI PROSTORY

Definice 12: Nechť jsou $(V, +, \cdot)$, $(V', +, \cdot)$ vektorové prostory nad stejným číselným tělesem $(T, +, \cdot)$, pak lineární zobrazení $\varphi = V \to V'$ je takové zobrazení, pro které platí vlastnosti:

a) podmínka zachování grupové operace: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,

b) podmínka zachování výsledku součinu (skalár krát vektor):
$\forall \vec{u} \in V, \alpha \in T: \varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$.

Poznámka: Obě podmínky lze spojit v jednu:
$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha, \beta \in T: \varphi(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v})$.[30]

Lineární zobrazení lze zadat třemi způsoby $\varphi: R^3 \to R^2$:

1) Pomocí předpisu (vzorce) mezi souřadnicemi: $\vec{v} \in V \ \varphi(\vec{v}) \in V'$

Např. $\varphi(\vec{v}) = \varphi\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + v_3 \\ v_1 - v_2 - v_3 \end{pmatrix}$

2) Pomocí matice A typu m/n: $\varphi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$

Např. $\varphi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

3) Pomocí obrazů bázových vektorů $\varphi(\overrightarrow{e_1}), \varphi(\overrightarrow{e_2}), \dots, \varphi(\overrightarrow{e_n})$

Např. $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

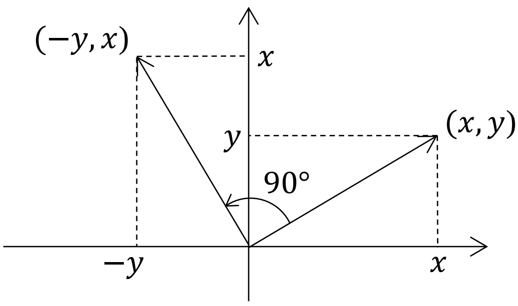
$\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Obrazy základní báze jsou sloupce matice A.[31]

[30] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 70-71.
[31] Srov. tamtéž, str. 71.

Příklad 14: Nechť $\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ je taková transformace, při které se každý bod otočí o $90°$ proti směru hodinových ručiček kolem počátku. Dokažte, že φ je lineární zobrazení.

Řešení:



Obr. 23: Grafické znázornění transformace

Z obrázku lze vyčíst, že se body (x, y) přetransformovaly na body $(-y, x)$, tedy

$\binom{x}{y} \rightarrow \binom{-y}{x}$

$\binom{1}{0} \rightarrow \binom{0}{1}$

$\binom{0}{1} \rightarrow \binom{-1}{0}$

$\varphi\binom{x}{y} = \binom{-y}{x} = x\binom{0}{1} + y\binom{-1}{0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\binom{x}{y}$

φ je tedy maticová transformace a je lineární. [32]

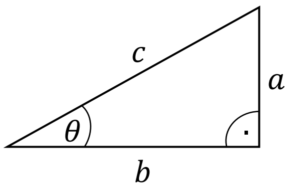
Příklad 15: Ukažte, že rotace kolem počátku o úhel θ definuje lineární transformaci $R^2 \rightarrow R^2$ a najděte její standardní matici.[33]

Řešení:

Vycházíme ze základních pojmů pravoúhlého trojúhelníku a goniometrických funkcí.

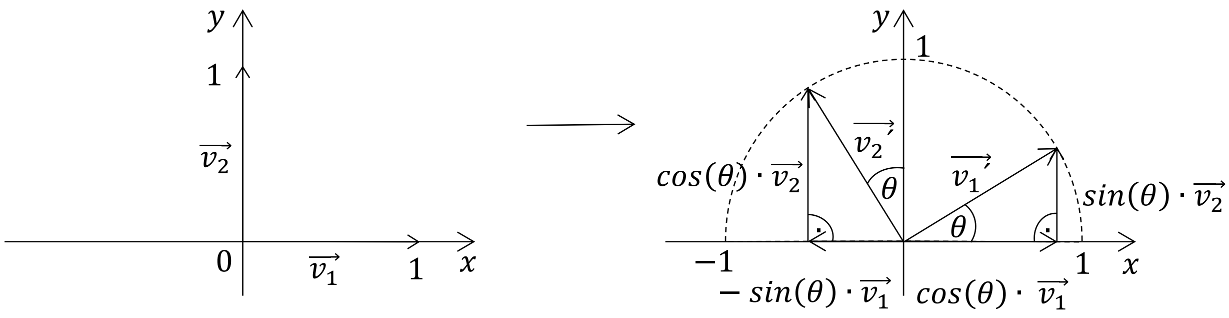
$sin(\theta) = \frac{a}{c}$

$cos(\theta) = \frac{b}{c}$



Obr. 24: Pravoúhlý trojúhelník

[32] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 74.
[33] Srov. tamtéž, str. 75.



Obr. 25: Grafické znázornění lineární transformace

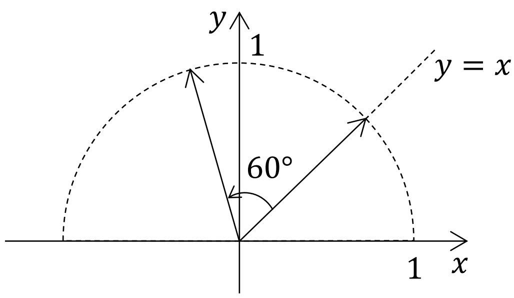
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}cos(\theta)\\sin(\theta)\end{pmatrix}$ … vyplývá z obrázku

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-sin(\theta)\\cos(\theta)\end{pmatrix}$ … vyplývá z obrázku

$$A = \begin{pmatrix}cos(\theta) & -sin(\theta)\\sin(\theta) & cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Příklad 16: Nalezněte maticové vyjádření a) otočení grafu $y = x$ se středem v počátku o úhel $60°$, b) osové souměrnosti v rovině vzhledem k ose $y = x$, c) složení zobrazení a) a b).[34]

Řešení:



Obr. 26: Otočení grafu $y = x$ se středem v počátku o úhel 60º

a)

$$A = \begin{pmatrix}cos(\theta) & -sin(\theta)\\sin(\theta) & cos(\theta)\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}\cos(60°) & -sin(60°)\\sin(60°) & cos(60°)\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

[34] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 75.

b)

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

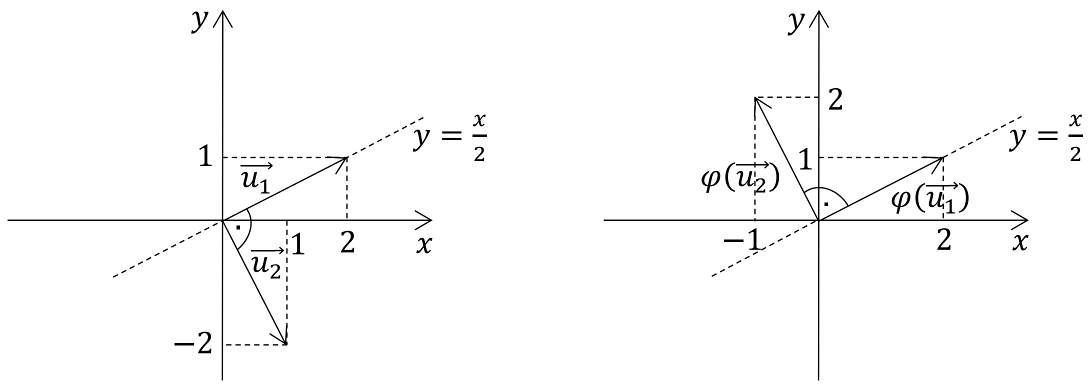
c) Matice zobrazení, která vznikne složením zobrazení a) a b):

$$\vec{v} \to B \cdot A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & 0 \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\\ 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0 \cdot \frac{1}{2}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

Příklad 17: Nalezněte maticové vyjádření osové souměrnosti v rovině s osou $y = \frac{x}{2}$.[35]

Řešení:



Obr. 27: Osová souměrnost v rovině s osou $y = \frac{x}{2}$

$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$2a + b = 2$

$2c + d = 1$

[35] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 135.

$\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$a - 2b = -1$

$c - 2d = 2$

Dostaneme čtyři rovnice o čtyřech neznámých, jejichž výsledky jsou:

$a = \frac{3}{5}, b = \frac{4}{5}, c = \frac{4}{5}, d = -\frac{3}{5}$

$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$

Jakýkoli vektor $\vec{v}$ se zobrazí na vektor $A \cdot \vec{v}$.

Příklad 18: Najděte ortogonální projekci vektoru $\vec{v} = (1, 3, 2)$ do směru vektoru $\vec{u} = (1, -1, 2)$ (do podprostoru $L(\vec{u})$).

Řešení:

Projekce je lineárním zobrazením $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$. Ze vzorce (4) vyplývá:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{skal(\vec{v}, \vec{u})}{skal(\vec{u}, \vec{u})} \cdot \vec{u} = \frac{v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{skal(\vec{v}, \vec{u})}{skal(\vec{u}, \vec{u})} \cdot \vec{u} = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}} \qquad (7)$$

Projekce R^3 do směru jednotkového vektoru $\vec{u}$ má matici $\vec{u} \cdot \vec{u}^{\mathrm{T}}$, což je součin vektorů typu 3/1 a 1/3, tedy výsledkem tohoto součinu bude matice typu 3/3. Srovnáním součinu skalárního zlomku s vektorem na prvním řádku a součinu skaláru s maticí a vektorem na druhém řádku odvození lze prokázat rovnost, tedy se jedná jen o jinou formu zápisu.

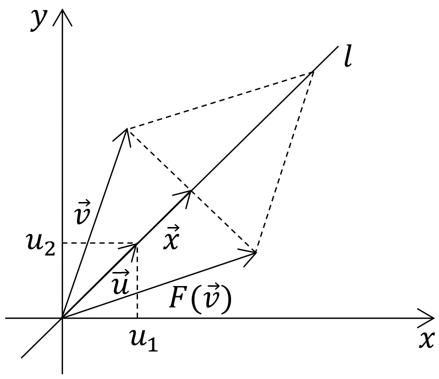
Pokud by byl tedy vektor $\vec{u}$ jednotkový, člen $\frac{1}{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$ ve vzorci se bude rovnat číslu 1 a v matici zobrazení $\vec{u} \cdot \vec{u}^{\mathrm{T}}$ nebude uveden.

Příklad 19: Nechť l je přímka procházející počátkem v R^2, dále P lineární transformace, která promítá vektor $\vec{v}$ na přímku l a nakonec $F(\vec{v})$ transformace, která zobrazí vektor $\vec{v}$ na vektor $F(\vec{v})$ osově souměrný vzhledem k ose souměrnosti *l*.[36]

a) Nalezněte matici lineárního zobrazení projekce $\vec{v}$ do směru $\vec{u}$ přímky *l*.

Řešení:
Použijeme vzorce (4) a (7) v dimenzi 3, převedeme je do dimenze 2 a získáme:

$$P(\vec{v}) = \vec{x} = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \cdot \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & u_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$



Obr. 28: Lineární zobrazení projekce $\vec{v}$ do směru $\vec{u}$ přímky *l*.

b) Nalezněte matici osové souměrnosti vzhledem k ose procházející počátkem, jehož směrový vektor je $\vec{u}$.

Řešení:

$$F(\vec{v}) = \left[\frac{2}{u_1^2 + u_2^2} \cdot \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & u_2^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -u_1^2 - u_2^2 & 0 \\ 0 & -u_1^2 - u_2^2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \cdot \begin{pmatrix} 2u_1^2 - u_1^2 - u_2^2 & 2u_1u_2 - 0 \\ 2u_1u_2 - 0 & 2u_2^2 - u_1^2 - u_2^2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \cdot \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 & 2u_1u_2 \\ 2u_1u_2 & u_2^2 - u_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

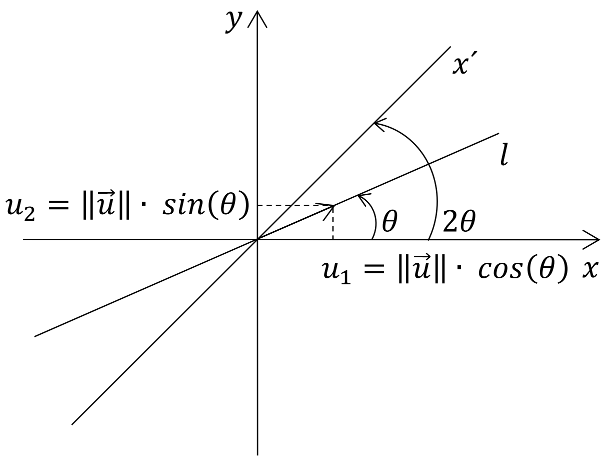
Ve výše uvedeném odvození jsme vyjádřili vektor $F(\vec{v})$ jako $2\vec{x} - \vec{v}$, viz Obr. 28 a využili toho, že matici projekce $\vec{x}$ do směru vektoru $\vec{u}$ známe z příkladu a), tuto projekci $\vec{x}$ vynásobíme dvěma a dostaneme vektor $2\vec{x}$, pak odečítáme jen vektor $\vec{v}$, a zde namísto matice

[36] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 224.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ lze psát matici $\frac{1}{u_1^2+u_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -u_1^2 - u_2^2 & 0 \\ 0 & -u_1^2 - u_2^2 \end{pmatrix}$; tímto způsobem lze při součtu vektorů $2\vec{x}$ a $-\vec{v}$ prvky na diagonále částečně odečíst.

c) Nalezněte matici $F(\vec{v})$, pokud úhel θ je mezi kladnou osou x a přímkou l.

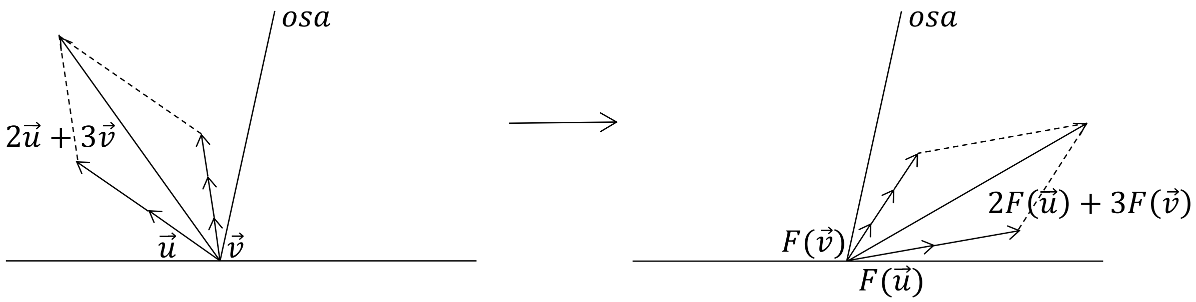
<u>Řešení:</u>
Totéž jako b) výše, pouze do odvození b) dosadíme $u_1 = \|\vec{u}\| \cdot cos(\theta)$; $u_2 = \|\vec{u}\| \cdot sin(\theta)$. Dostaneme $F(\vec{v}) = \begin{pmatrix} cos(2\theta) & sin(2\theta) \\ sin(2\theta) & -cos(2\theta) \end{pmatrix}$, odkud lze dovodit, že osová souměrnost v rovině vzhledem k ose procházející počátkem závisí pouze na úhlu θ mezi kladným směrem osy x a osou souměrnosti.



Obr. 29: Nalezení matice $F(\vec{v})$

d) Nakreslete graf, ve kterém dokážete, že $F(\vec{v})$ je lineární.[37]

<u>Řešení:</u>



Obr. 30: Grafický důkaz linearity $F(\vec{v})$

[37] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 224.

Ad příklad 10: Najděte ortogonální projekci vektoru $\vec{v} = (1, 3, 2)$ do roviny $U = \{[x, y, z]: x - y + 2z = 0\}$.

Řešení:

Způsob 4:

Tento způsob je přepisem způsobu 3 s využitím maticové reprezentace lineárního zobrazení projekce: nejprve ortogonalizujeme bázi prostoru U (Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem):

$\overrightarrow{e_1} = (1, 3, 1)$

$\overrightarrow{e_2} = \left(\frac{49}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{28}{5}\right)$

Projekce $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ do $L\left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{49}{5}\\-\frac{7}{5}\\-\frac{28}{5}\end{pmatrix}\right)$

$$\vec{v} \to \frac{skal(\vec{v}, \overrightarrow{e_1})}{skal(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})} \cdot \overrightarrow{e_1} + \frac{skal(\vec{v}, \overrightarrow{e_2})}{skal(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2})} \cdot \overrightarrow{e_2} =$$

$$= \frac{1}{e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2} \cdot \begin{pmatrix} e_{11}^2 & e_{11}e_{12} & e_{11}e_{13} \\ e_{12}e_{11} & e_{12}^2 & e_{12}e_{13} \\ e_{13}e_{11} & e_{12}e_{13} & e_{13}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} e_{21}^2 & e_{21}e_{22} & e_{21}e_{23} \\ e_{21}e_{22} & e_{22}^2 & e_{22}e_{23} \\ e_{21}e_{23} & e_{22}e_{23} & e_{23}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\frac{1}{e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2} \cdot \begin{pmatrix} e_{11}^2 & e_{11}e_{12} & e_{11}e_{13} \\ e_{12}e_{11} & e_{12}^2 & e_{12}e_{13} \\ e_{13}e_{11} & e_{12}e_{13} & e_{13}^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \begin{pmatrix} e_{21}^2 & e_{21}e_{22} & e_{21}e_{23} \\ e_{21}e_{22} & e_{22}^2 & e_{22}e_{23} \\ e_{21}e_{23} & e_{22}e_{23} & e_{23}^2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \frac{25}{3234} \cdot \begin{pmatrix} \frac{98}{25} & -\frac{343}{25} & -\frac{1372}{25} \\ -\frac{343}{25} & \frac{49}{25} & \frac{196}{25} \\ -\frac{1372}{49} & \frac{196}{25} & \frac{784}{25} \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Projekce R^3 do roviny procházející počátkem s ortonormálními bázemi $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ má matici $\left(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1}^T + \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2}^T\right)$, což je matice typu 3/3. Ortonormální vektory jsou takové vektory, jejichž velikost je rovna 1. V případě ortonormálních vektorů tedy činitele $\frac{1}{e_{11}^2+e_{12}^2+e_{13}^2}$ a $\frac{1}{e_{21}^2+e_{22}^2+e_{23}^2}$ ve vzorcích jsou rovny jedné, takže výsledná matice zobrazení je skutečně pouze $\left(\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1}^T + \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2}^T\right)$.

Definice 13: Ortogonální matice je reálná čtvercová matice, jejíž inverzní matice je současně maticí transponovanou. Řádky (sloupce) této matice jsou ortogonální a současně jednotkové (ortonormální).[38]

Věta 2: Sloupce matice Q typu $m \times n$ tvoří ortonormální množinu právě tehdy, když $Q^T Q = I_n$.

Důkaz:

$$(Q^T Q)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i \neq j \\ 1 & \text{pokud } i = j \end{cases}$$

Nechť $\overrightarrow{q_i}$ označuje i-tý sloupec matice Q (tedy i i-tý řádek Q^T). Protože (i, j) zápis $Q^T Q$ je výsledkem součinu i-tého řádku Q^T a j-tého sloupce Q, z toho vyplývá, že $(Q^T Q)_{ij} = \overrightarrow{q_i} \cdot \overrightarrow{q_j}$ (vycházíme z definice součinu matic).

Nyní sloupce Q tvoří ortonormální množinu tehdy, pokud:

$$\overrightarrow{q_i} \cdot \overrightarrow{q_j} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i \neq j \\ 1 & \text{pokud } i = j \end{cases}.$$

Podle rovnice $(Q^T Q)_{ij} = \overrightarrow{q_i} \cdot \overrightarrow{q_j}$ tedy platí:

$$(Q^T Q)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i \neq j \\ 1 & \text{pokud } i = j \end{cases},$$

čímž je věta dokázána.[39]

Definice 14: Matice Q typu $n \times n$ jejíž sloupce tvoří ortonormální množinu se nazývá matice ortogonální.[40]

Definice 15: Ortogonální zobrazení je takové lineární zobrazení, jehož matice je ortogonální.

Věta 3: Čtvercová matice Q je ortogonální právě tehdy, když $Q^{-1} = Q^T$.

Důkaz:

Podle věty 2 je matice Q ortogonální právě tehdy, když $Q^T Q = I_n$. To platí, pokud k ní existuje matice inverzní a $Q^{-1} = Q^T$.[41]

---

[38] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 374.

[39] Srov. tamtéž, str. 374.

[40] Srov. tamtéž, str. 374.

[41] Srov. tamtéž, str. 374.

Věta 4: Jestliže Q je ortogonální matice, tak platí: a) pro každé $\vec{x}$ patřící do R^n platí $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ (ortogonální zobrazení zachovává velikost vektorů), b) pro každé $\vec{x}, \vec{y}$ patřící do R^n platí $skal(Q\vec{x}, Q\vec{y}) = skal(\vec{x}, \vec{y})$ (ortogonální zobrazení zachovává výsledek skalárního součinu).

Věta 5: Nechť Q je ortogonální matice typu $n \times n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

a) Q je ortogonální,
b) $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$, $\vec{x} \in R^n$, tj. ortogonální zobrazení zachovává velikost vektoru.
c) $skal(Q\vec{x}, Q\vec{y}) = skal(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$, tj. ortogonální zobrazení zachovává výsledek skalárního součinu vektorů.

Důkaz:
Dokážeme řetězec implikací a) ⇒ c) ⇒ b) ⇒ a):
a) ⇒ c)
Jestliže Q je ortogonální matice, tak platí $Q^T Q = I$ (viz věta 4); odtud plyne, že
$skal(Q\vec{x}, Q\vec{y}) = (Q\vec{x})^T \cdot Q\vec{y} = \vec{x}^T Q^T Q\vec{y} = \vec{x}^T I\vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = skal(\vec{x}, \vec{y})$.

c) ⇒ b)
Pokud $x = y$, dostaneme ze skutečnosti c), tj. z faktu $skal(Q\vec{x}, Q\vec{x}) = skal(\vec{x}, \vec{x})$, že platí
$\|Q\vec{x}\| = \sqrt{skal(Q\vec{x}, Q\vec{x})} = \sqrt{skal(\vec{x}, \vec{x})} = \|\vec{x}\|$.

b) ⇒ a)
Implikaci b) ⇒ a) dokážeme ve dvou krocích, nejprve dokážeme b) ⇒ c), a poté c) ⇒ a).

Vycházíme ze vztahu $skal(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4} \cdot \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \frac{1}{4} \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$, který nyní dokážeme:

$$skal(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4} \cdot \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \frac{1}{4} \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (\|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot skal(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2) - \frac{1}{4} \cdot (\|\vec{x}\|^2 - 2 \cdot skal(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (\|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot skal(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot skal(\vec{x}, \vec{y}) - \|\vec{y}\|^2) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot skal(\vec{x}, \vec{y}) + 2 \cdot skal(\vec{x}, \vec{y})\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \left(skal(\vec{x}, \vec{y}) + skal(\vec{x}, \vec{y})\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(skal(\vec{x}, \vec{y}) + skal(\vec{x}, \vec{y})\right) = \frac{1}{2} \cdot (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_2) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot (x_1 y_1 + x_2 y_2)\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = skal(\vec{x}, \vec{y})$$

$$skal(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4} \cdot \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \frac{1}{4} \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \frac{1}{4} \cdot (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (\|Q \cdot (\vec{x} + \vec{y})\|^2 - \|Q \cdot (\vec{x} - \vec{y})\|^2) = \frac{1}{4} \cdot (\|Q\vec{x} + Q\vec{y}\|^2 - \|Q\vec{x} - Q\vec{y}\|^2) =$$
$= skal(Q\vec{x}, Q\vec{y})$, pro všechna $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$, což dokazuje b) ⇒ c).

Nyní dokážeme c) ⇒ a), protože jsme právě dokázali b) ⇒ c). Můžeme využít platnost b) i c). Předpokládáme, že vztah b) platí a $\vec{q_i}$ označuje i-tý sloupec Q. Pokud $\vec{e_i}$ je i-tý standardní bázový vektor, pak platí $\vec{q_i} = Q\vec{e_i}$. Tudíž

$$\vec{q_i} \cdot \vec{q_j} = Q\vec{e_i} \cdot Q\vec{e_j} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i \neq j \\ 1 & \text{pokud } i = j \end{cases}.$$

Sloupce Q tedy tvoří ortonormální množinu, takže Q je ortogonální matice, tedy platí a). Důkaz je hotov, dané tři výroky jsou ekvivalentní. [42]

Příklad 20: Nechť Q je ortogonální matice typu 2×2 a nechť $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou vektory v R^2. Je-li θ úhel mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$, dokažte, že úhel mezi $Q\vec{x}$ a $Q\vec{y}$ je také θ.[43]

Řešení:

$$cos(\vec{x},\vec{y}) = \frac{skal(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{skal(Q\vec{x},Q\vec{y})}{\|Q\vec{x}\| \cdot \|Q\vec{y}\|} = cos(Q\vec{x},Q\vec{y})$$

Příklad 21: Dokažte, že ortogonální matice typu 2×2 má vždy tvar

a) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, kde $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ je jednotkový vektor, b) $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$, kde $0 \leq \theta < 2\pi$.[44]

Řešení:

a)

Matice je ortogonální právě tehdy, když platí $Q^T Q = I_n$.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & a \\ a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

Dokázáno v příkladu 15.

Definice 16: Lineární transformace φ vektorového prostoru V rozumíme lineární zobrazení $\varphi: V \to V$. Toto zobrazení lze tedy reprezentovat čtvercovou maticí A.[45]

Definice 17: Vlastní vektor lineární transformace $\varphi: V \to V$ je takový nenulový vektor $\vec{v}$, který se zobrazí na svůj vlastní násobek, tj. $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.

Číslo λ se nazývá vlastní hodnota (číslo) náležející k vektoru $\vec{v}$ vzhledem k zobrazení φ.[46]

---

[42] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 375.
[43] Srov. tamtéž, str. 377.
[44] Srov. tamtéž, str. 377.
[45] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 87.
[46] Srov. tamtéž, str. 109.

Věta 6: Pokud A je reálná symetrická matice, pak vlastní hodnoty matice A jsou reálné a navzájem různé.[47]

Příklad 22: Nalezněte vlastní hodnoty a vlastní vektory lineárního zobrazení zadané maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, v bázi $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.[48]

Řešení:

Nalezení vlastních vektorů a hodnot čtvercové matice A zadávající lineární transformaci vektorového prostoru V:

$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot E \cdot \vec{v}$

$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} = \vec{o}.$

V prvním kroku nalezneme všechny vlastní hodnoty matice A.

Charakteristická rovnice matice A:

$$\lambda E - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda - (-4) & 0 \\ 4 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom matice A

$$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda - (-4) & 0 \\ 4 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 23\lambda - 60 =$$

$$= (\lambda + 4) \cdot (\lambda + 3) \cdot (\lambda - 5)$$

má kořeny $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 5$, což jsou vlastní hodnoty matice A.

Ve druhém kroku nalezneme vlastní vektory příslušné k vlastním hodnotám matice A.

$\lambda_1 = -4$

$$(A - (-4) \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} -4 - 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 - (-4) & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 - 1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$v_{11} = 0, v_{12} = t, v_{13} = 0, t \in R$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[47] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 401.

[48] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 111.

Vlastní vektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -3$

$$(A - (-3) \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} -3-1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3-(-4) & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -3-1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$v_{21} = t,\ v_{22} = 0,\ v_{23} = t,\ t \in R$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektor $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ znormalizujeme a získáme $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 5$

$$(A - 4 \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} 5-1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5-(-4) & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5-1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$v_{31} = -t,\ v_{32} = 0,\ v_{33} = t,\ t \in R$

$$t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektor $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ znormalizujeme a získáme $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.[49]

[49] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 111-112.

Věta 7 – Spektrální věta:
Pokud A je reálná matice tvaru $n \times n$, pak A je symetrická pouze tehdy, pokud je ortogonálně diagonalizovatelná,[50] tj. existuje diagonální matice D, pro kterou by platilo $H^T \cdot A \cdot H = D$, kdy $H^T = H^{-1}$.

Definice 18: Diagonální matice je čtvercová matice, která má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále. Regulární matice je čtvercová matice, jejíž determinant je různý od nuly.[51]

Příklad 23: Nalezněte ortogonální matici H (tj. ortonormální bázi) a diagonální matici D pro zobrazení zadané maticí a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.[52]

<u>Řešení:</u>
a)
Charakteristická rovnice matice A:
$\lambda E - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$

Charakteristický polynom matice A
$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4) \cdot (\lambda - 4) - 1 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 =$
$= (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 5)$
má kořeny $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 5$, což jsou vlastní hodnoty matice A.

Diagonální matice má tvar $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Vlastní vektory náležící vlastní hodnotě $\lambda_1 = 3$ jsou řešením homogenní soustavy rovnic s maticí
$\begin{pmatrix} \lambda_1 - 4 & -1 \\ -1 & \lambda_1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Její řešení mají tvar $(a, -a)$ pro $a \in R$, zvolíme vlastní vektor, který má délku 1, např. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Vlastní vektory náležící vlastní hodnotě $\lambda_2 = 5$ jsou řešením homogenní soustavy rovnic s maticí
$\begin{pmatrix} \lambda_2 - 4 & -1 \\ -1 & \lambda_2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Její řešení mají tvar (a, a) pro $a \in R$, zvolíme vlastní vektor, který má délku 1, např. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

---
50 Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 403.
51 Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 113.
52 Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 407.

Ortogonální matice má tvar $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

b)

$$\lambda E - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \cdot \lambda - \left(-\sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right)\right) = \lambda^2 - \lambda - 2 =$$

$$= (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 2)$$

Vlastní hodnoty matice A jsou $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 2$.

Diagonální matice má tvar $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vlastní vektory náležící vlastní hodnotě $\lambda_1 = -1$ jsou řešením homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor $\overrightarrow{s_1} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Vlastní vektory náležící vlastní hodnotě $\lambda_2 = 2$ jsou řešením homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor $\overrightarrow{s_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Ortogonální matice má tvar $H = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

c)

$$\lambda E - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 2\lambda + 40 =$$

$$= (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 4) \cdot (\lambda - 5)$$

Vlastní hodnoty matice A jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$.

Diagonální matice má tvar $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - 5 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - 1 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektor $\overrightarrow{s_1} = (1, 0, 0)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - 5 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektor $\overrightarrow{s_2} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_3 - 5 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 - 1 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektor $\overrightarrow{s_3} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ad příklad 22: Najděte diagonální reprezentaci D lineární transformace $\varphi: R^3 \to R^3$ zadané symetrickou maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.[53]

Vlastní hodnoty matice A jsou $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 5$.

Diagonální matice má tvar $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Vlastní vektory příslušné k vlastním hodnotám matice A jsou

$\lambda_1 = -4 \qquad \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

[53] Srov. FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022. Str. 113.

$$\lambda_2 = -3 \qquad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = 4 \qquad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$H^{-1} = H^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$D = H^T \cdot A \cdot H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{5\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5 KVADRATICKÉ FORMY

Vyjádření formy $ax^2 + by^2 + cxy$ se nazývá kvadratická forma v proměnných x a y. Také $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ je kvadratická forma v proměnných x, y a z. Slovně můžeme vyjádřit kvadratickou formu jako součet členů, z nichž každý člen je stupně dva, tedy $5x^2 - 3y^2 + 2xy$ je kvadratická forma, naopak $x^2 + y^2 + x$ kvadratická forma není.

Kvadratické formy lze vyjádřit pomocí matic:

$$ax^2 + by^2 + cxy = (x, y)\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = (x, y, z)\begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obě vyjádření mají formu $\vec{x}^T A\vec{x}$, kde matice A je symetrická. Z této skutečnosti můžeme formulovat následující definici.[54]

Definice 19: Kvadratická forma v n proměnných je funkce $f: R^n \to R$ tvaru $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$, kde A je čtvercová matice $n \times n$ a $\vec{x}$ je v R^n, $\vec{x}$ je sloucový vektor proměnných a $\vec{x}^T$ je řádkový vektor proměnných. Matice A tedy určuje formu f.[55]

Příklad 24: Nalezněte kvadratickou formu matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>Řešení:</u>

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 - 3x_2, -3x_1 + 5x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2$$

Všimněme si, že prvky vedlejší diagonály matice A $a_{12} = a_{21} = -3$ se zkombinují tak, aby vznikl koeficient -6 u x_1x_2. Tato skutečnost platí obecně, proto kvadratickou formu můžeme vyjádřit v n proměnných takto:

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_iy_j$$

(pokud $i \neq j$, koeficient u součinu x_iy_j je $2a_{ij}$).[56]

---

[54] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 408-409.
[55] Srov. tamtéž, str. 409.
[56] Srov. tamtéž, str. 409.

Příklad 25: Nalezněte symetrickou matici A kvadratické formy $x_1^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 6x_2x_3$.[57]

Řešení:

$$x_1^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 6x_2x_3 = 1x_1^2 + 0x_2^2 - 1x_3^2 + 8x_1x_2 + 0x_1x_3 - 6x_2x_3 =$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

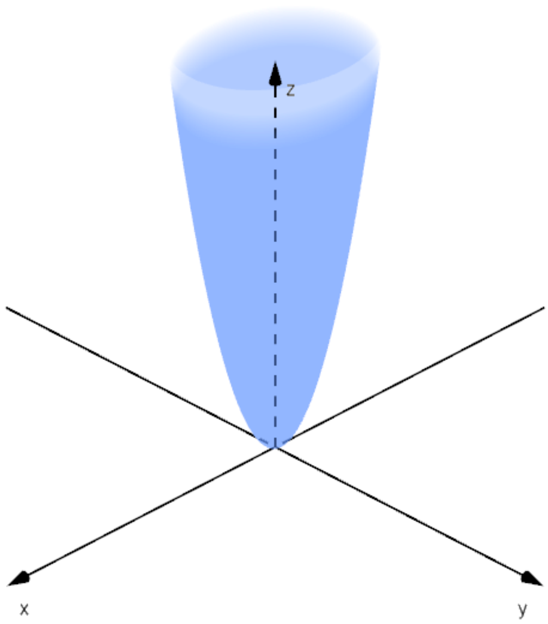
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Grafy kvadratických forem

V případě kvadratických forem ve tvaru $f(x, y)$ se dvěma proměnnými lze jejich graf znázornit v prostoru R^3.

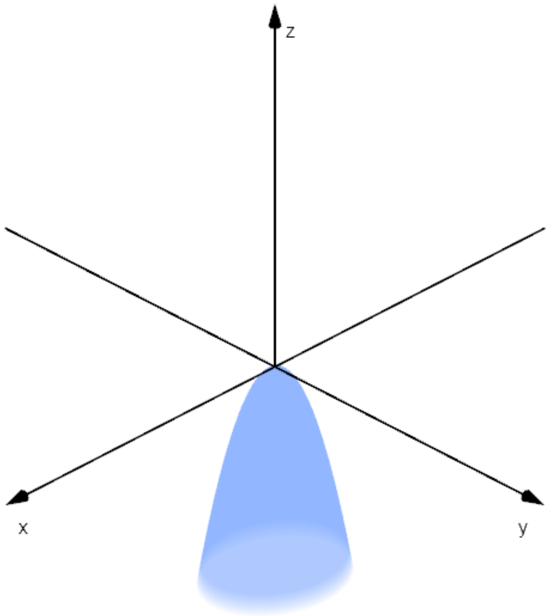
$$z = f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$



Obr. 31: Graf kvadratické formy $z = 2x^2 + 3y^2$

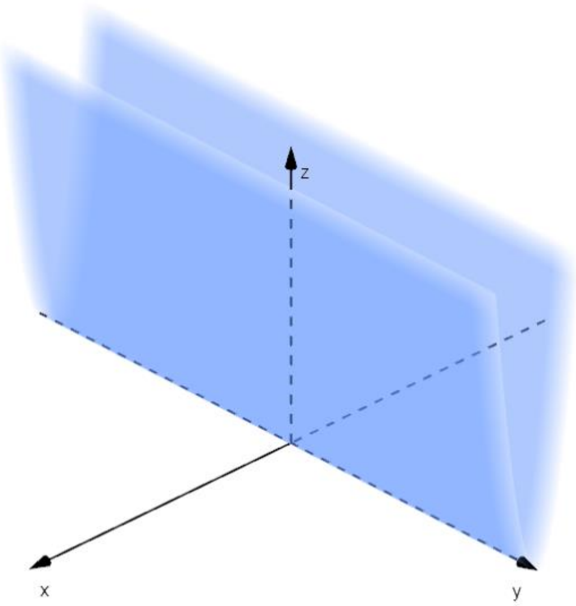
[57] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 409.

$z = -2x^2 - 3y^2$



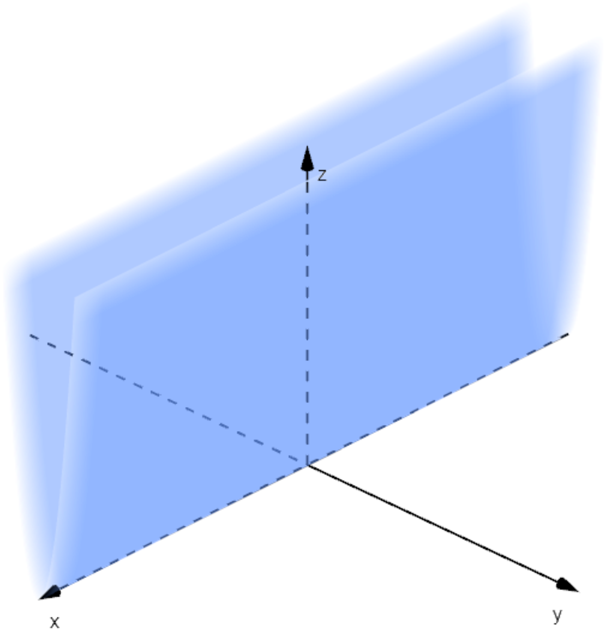
Obr. 32: Graf kvadratické formy $z = -2x^2 - 3y^2$

$z = 2x^2$



Obr. 33: Graf kvadratické formy $z = 2x^2$

$z = 3y^2$



Obr. 34: Graf kvadratické formy $z = 3y^2$

Tento typ kvadratických forem má pouze prvky na hlavní diagonále matice, například
$z(x,y) = 2x^2 + 3y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Matice kvadratických forem je symetrická matice, která může být diagonalizovatelná. Z tohoto faktu vyplývá, že vhodnou úpravou můžeme eliminovat prvky na vedlejší diagonále.

Nechť $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ je kvadratická forma v n proměnných, kde A je čtvercová matice typu $n \times n$. Podle Spektrální věty (věta 7) existuje ortogonální matice Q, která diagonalizuje matici A, tedy $Q^T A Q = D$, kde D je diagonální matice zobrazující vlastní čísla matice A.

Když zavedeme transformaci souřadnic $\vec{x} = Q\vec{y}$, neboli ekvivalentně $\vec{y} = Q^{-1}\vec{x} = Q^T\vec{x}$, dostaneme $\vec{x}^T A \vec{x} = (Q\vec{y})^T A (Q\vec{y}) = \vec{y}^T Q^T A Q \vec{y} = \vec{y}^T D \vec{y}$, což je kvadratická forma s prvky pouze na hlavní diagonále, protože D je matice diagonální. Pokud jsou $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastními hodnotami matice A, pak matici D můžeme zvolit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pokud $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$, pak s ohledem na nové proměnné zapíšeme kvadratickou formu
$\vec{y}^T D \vec{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

Tento proces se nazývá diagonalizace kvadratického tvaru a je obsahem tzv. tvrzení o hlavních osách.[58]

Příklad 26: Diagonalizujte kvadratickou formu a) $2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$,
b) $x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.[59]

Řešení:

a)

Nejprve nalezneme symetrickou matici A kvadratické formy $2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$.

$2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Nyní nalezneme vlastní hodnoty a vektory matice A.

$\lambda E - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 5) - 4 =$

$= \lambda^2 + 5\lambda + 2\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 6)$

Vlastní hodnoty matice A jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$.

$\lambda_1 = 1$

$(A - 1 \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{matrix} 1 - 2 & 2 \\ 2 & 1 - 5 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{matrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$

$v_{11} = 2t, v_{12} = t, t \in R$

$t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vlastní vektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 6$

$(A - 6 \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{matrix} 6 - 2 & 2 \\ 2 & 6 - 5 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$

$v_{21} = -\frac{1}{2}t, v_{22} = t, t \in R$

[58] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 411.
[59] Srov. tamtéž, str. 423.

$t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Vlastní vektor $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Ortogonální matice má tvar $H = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Inverzní matice k matici ortogonální má tvar $H^T = H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Diagonální matici vypočítáme podle vztahu $D = H^T \cdot A \cdot H$.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(y_1, y_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 + 6y_2^2$$

b)

$$x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda E - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3 - \lambda = (x - 2) \cdot (x^2 - 1)$$

Vlastní hodnoty matice A jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$.

$\lambda_1 = 2$

$$(A - 2 \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} 2-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$v_{11} = -t, v_{12} = t, v_{13} = t, t \in R$

$$t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -1$

$$(A - (-1) \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} -1-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1-1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$v_{21} = -t, v_{22} = -2t, v_{23} = t, t \in R$

$$t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektor $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 1$

$$(A - 1 \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$v_{31} = t, v_{32} = 0, v_{33} = t, t \in R$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektor $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$H^T = H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$D = H^T \cdot A \cdot H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(y_1, y_2, y_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$$

Definice 20: Kvadratická forma $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ je klasifikována jako jedno z následujících:

1. pozitivně definitní, pokud $f(\vec{x}) > 0$ pro všechna $\vec{x} \neq 0$,
2. pozitivně semidefinitní, pokud $f(\vec{x}) \geq 0$ pro všechna $\vec{x}$,
3. negativně definitní, pokud $f(\vec{x}) < 0$ pro všechna $\vec{x} \neq 0$,
4. negativně semidefinitní, pokud $f(\vec{x}) \leq 0$ pro všechna $\vec{x}$,
5. indefinitní, pokud $f(\vec{x})$ nabývá kladných i záporných hodnot.[60]

[60] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 412.

Symetrická matice A se nazývá pozitivně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně definitní, negativně semidefinitní nebo indefinitní, pokud má příbuzná kvadratická forma $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$ odpovídající vlastnosti.[61]

Věta 8: Nechť A je čtvercová matice, pak kvadratická forma $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$ je

a) pozitivně definitní, pokud jsou všechna vlastní čísla matice A kladná,
b) pozitivně semidefinitní, pokud jsou všechna vlastní čísla matice A nezáporná,
c) negativně definitní, pokud jsou všechna vlastní čísla matice A záporná,
d) negativně semidefinitní, pokud jsou všechna vlastní čísla matice A nekladná,
e) indefinitní, pokud má matice A kladná a záporná vlastní čísla.[62]

Příklad 27: Určete, zda je kvadratická forma a) $-2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$, b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ pozitivně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně definitní, negativně semidefinitní nebo indefinitní.[63]

Řešení:

a)

$$-2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Nalezneme vlastní hodnoty matice A.

$$\lambda E - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 3) \cdot (\lambda + 1)$$

Vlastní hodnoty matice A jsou $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$.

Jelikož jsou obě hodnoty matice A záporné, je kvadratická forma negativně definitní.

b)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

---

[61] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 413.
[62] Srov. tamtéž, str. 413.
[63] Srov. tamtéž, str. 424.

Nalezneme vlastní hodnoty matice A.

$$\lambda E - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2)$$

Vlastní hodnoty matice A jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Jelikož jsou všechny tři hodnoty matice A nezáporné, je kvadratická forma pozitivně semidefinitní.

Věta 9: Nechť $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ je kvadratická forma spjatá se čtvercovou maticí A. Nechť vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Pak platí následující body pro $\|x\| = 1$:

a) $\lambda_1 \geq f(\vec{x}) \geq \lambda_n$,
b) maximální hodnota $f(\vec{x})$ je λ_1. Tato skutečnost platí, pokud $\vec{x}$ je jednotkový vlastní vektor odpovídající λ_1,
c) minimální hodnota $f(\vec{x})$ je λ_n. Tato skutečnost platí, pokud $\vec{x}$ je jednotkový vlastní vektor odpovídající λ_n.[64]

Tato kapitola využívá vlastní čísla a vlastní vektory, aby byla nalezena báze, ve které kvadratická forma přechází do diagonálního tvaru, protože matice kvadratické formy je reálná symetrická, a všechna její vlastní čísla jsou navzájem různá. Z toho vyplývá, že z diagonálního tvaru lze klasifikovat kvadratické formy, viz definice 20 a věta 8.

[64] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 414.

6 GRAFY KVADRATICKÝCH ROVNIC

6.1 Obecná kvadratická rovnice se dvěma proměnnými

Obecná kvadratická rovnice se dvěma proměnnými x a y má tvar

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

kde alespoň jedno z a, b nebo c je nenulové. Množiny bodů $[x, y]$, které jsou řešením dané kvadratické rovnice se dvěma proměnnými se nazývají kuželosečky, neboť je lze získat jako řezy na kuželové ploše.[65] Nejhlavnější z řezů kužele jsou elipsy (ve zvláštním případě kružnice), hyperboly a paraboly. Tyto řezy se nazývají nedegenerované kuželosečky.

Průřez kužele může být i bod, přímka nebo dvojice přímek. Tyto řezy se nazývají degenerované a vznikají průnikem kuželové plochy rovinou procházející vrcholem kuželové plochy.[66]

Definice 21: Z koeficientů obecné kvadratické rovnice se dvěma proměnnými x a y sestavme dva determinanty:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Číslo Δ se nazývá diskriminant kuželosečky, δ - diskriminant kvadratických členů.

Věta 10: Použitím Δ a δ můžeme kuželosečky roztřídit podle tabulky 1.[67]

Tabulka 1: Roztřídění kuželoseček podle Δ a δ

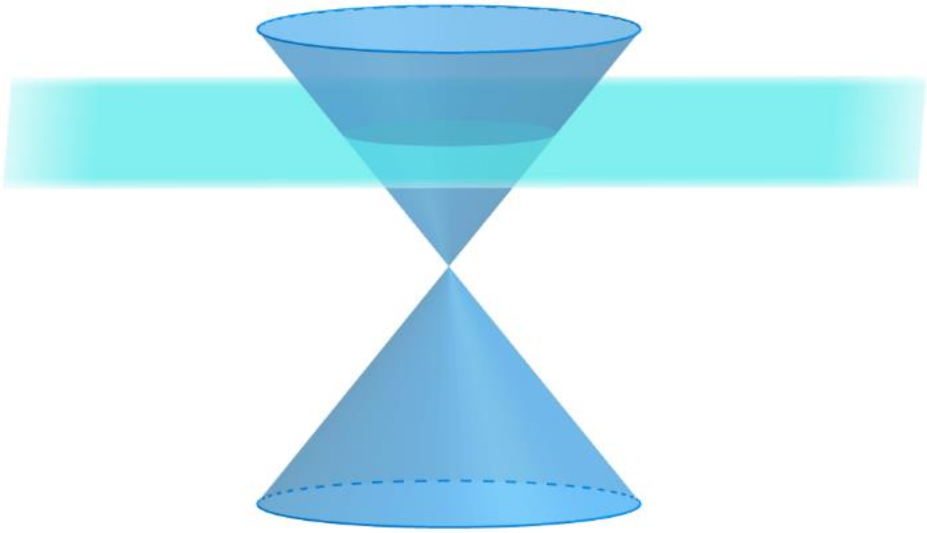
	Regulární kuželosečka ($\Delta \neq 0$)	Singulární kuželosečka ($\Delta = 0$)
$\delta > 0$	Elipsa (reálná nebo imaginární)	Dvě imaginární přímky s reálným průsečíkem
$\delta < 0$	Hyperbola	Dvě různoběžky
$\delta = 0$	Parabola	Dvě rovnoběžky (reálné nebo imaginární, různé nebo splývající)

[65] Srov. PECH, Pavel. *Kuželosečky* [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7040-755-7. Str. 56.

[66] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 415.

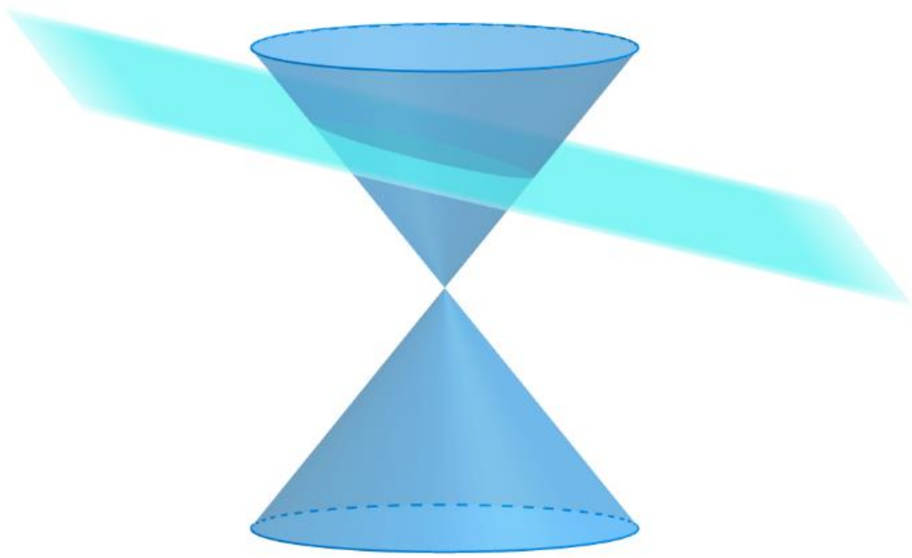
[67] Srov. REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. Třetí, nezměněné vydání. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1973. Str.190.

Kružnice



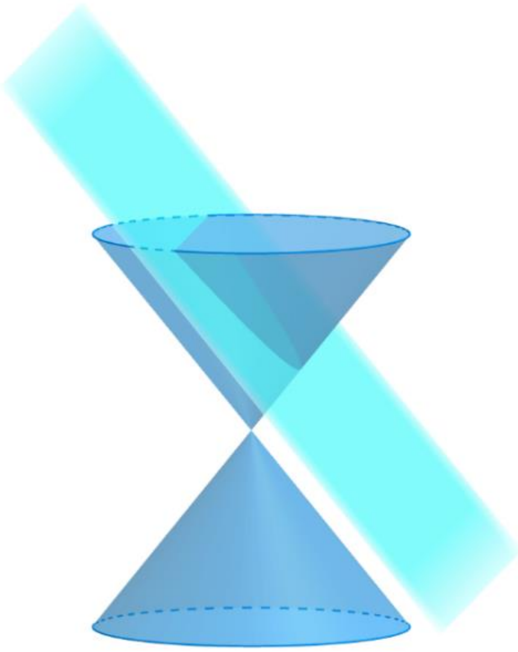
Obr. 35: Kružnice

Elipsa



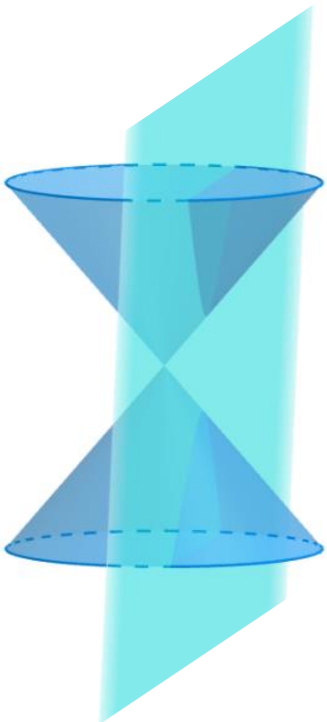
Obr. 36: Elipsa

Parabola



Obr. 37: Parabola

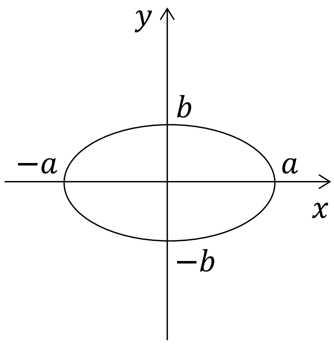
Hyperbola



Obr. 38: Hyperbola

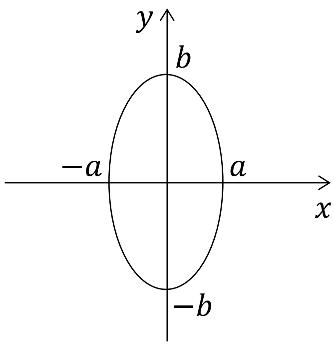
Elipsa nebo kruh mají rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde $a, b > 0$.

$a > b$



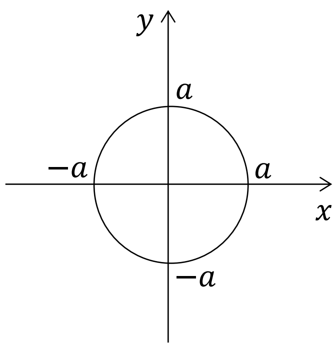
Obr. 39: Elipsa pro $a > b$.

$a < b$



Obr. 40: Elipsa pro $a < b$

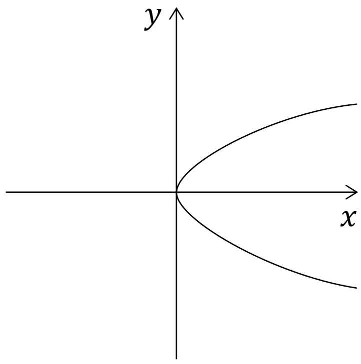
$a = b$



Obr. 41: Kružnice pro $a = b$.

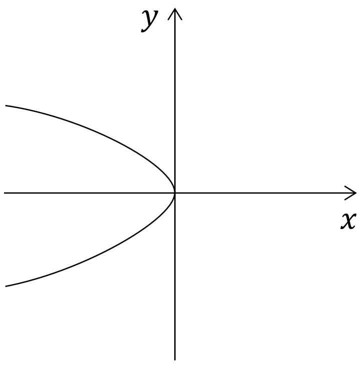
Parabola

$x = ay^2$, pro $a > 0$.



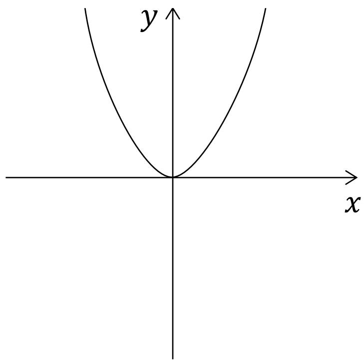
Obr. 42: Parabola $x = ay^2$, pro $a > 0$.

$x = ay^2$, pro $a < 0$



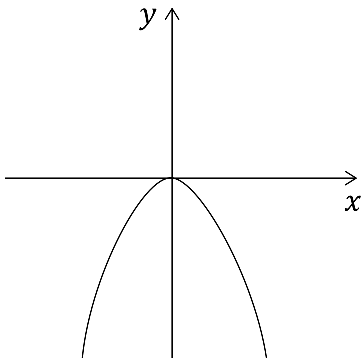
Obr. 43: Parabola $x = ay^2$, pro $a < 0$.

$y = ax^2$, pro $a > 0$.



Obr. 44: Parabola $y = ax^2$, pro $a > 0$.

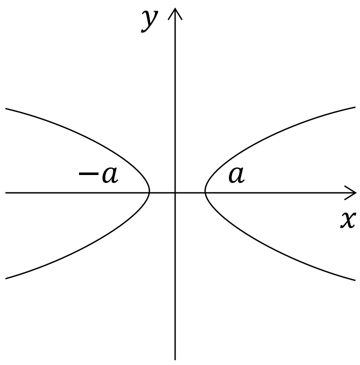
$y = ax^2$, pro $a < 0$



Obr. 45: Parabola $y = ax^2$, pro $a < 0$

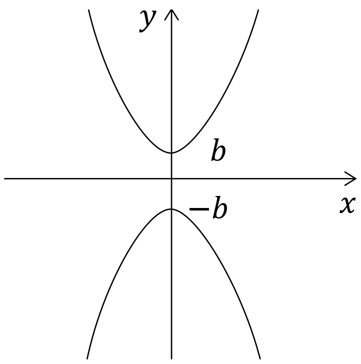
Hyperbola

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$



Obr. 46: Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,\ a, b > 0$



Obr. 47: Hyperbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,\ a, b > 0$

Příklad 28: Určete typ kuželosečky zadané rovnicí a) $x^2 - y^2 - 4 = 0$, b) $x^2 + 5y^2 = 25$ a nakreslete její graf.[68]

Řešení:

a)

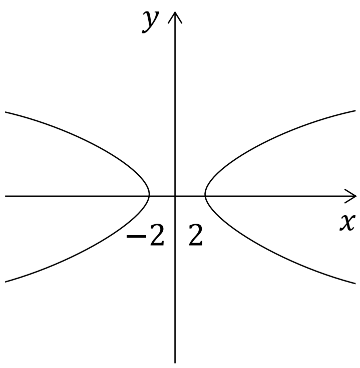
$x^2 - y^2 - 4 = 0$

$x^2 - y^2 = 4 \quad /: 4$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

Řešením kvadratické rovnice je hyperbola.



Obr. 48: Hyperbola $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

b)

$x^2 + 5y^2 = 25$

$x^2 + 5y^2 = 25 \quad /: 25$

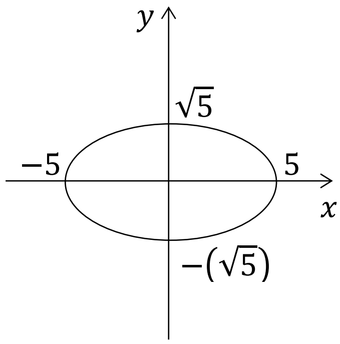
$\frac{x^2}{25} + \frac{5y^2}{25} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1$

[68] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 424.

Řešením kvadratické rovnice je elipsa.



Obr. 49: Elipsa $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$

Příklad 29: Je zadaná kuželosečka a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, b) $2y^2 + 4x + 8y = 0$. Použijte translaci os k uvedení kuželosečky do standardní polohy. Identifikujte typ kuželosečky, zadejte její rovnici v posunutém souřadnicovém systému a nakreslete její graf.[69]

Řešení:

a)

$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

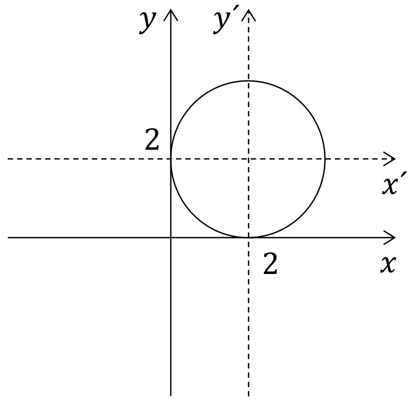
$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

Provedeme substituci $x' = x - 2$, $y' = y - 2$.

$(x')^2 + (y')^2 = 4 \quad /:4$

$$\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{4} = 1$$

Řešením kvadratické rovnice je kružnice.



Obr. 50: Kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.

[69] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 424.

b)

$2y^2 + 4x + 8y = 0$

$4x = -2y^2 - 8y$

$4x = -2 \cdot (y^2 + 4y)$

$4x = -2 \cdot (y^2 + 4y + 4) + 8$

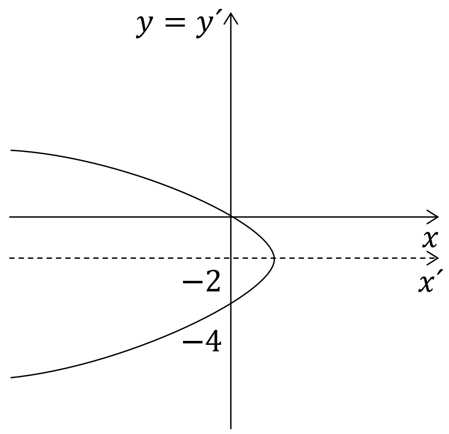
$4x = -2 \cdot (y + 2)^2 + 8$

Provedeme substituci $y' = y + 2$.

$4x = -2 \cdot (y')^2 + 8 \quad /: 4$

$x = -\frac{1}{2} \cdot (y')^2 + 2$

Řešením kvadratické rovnice je parabola.



Obr. 51: Parabola $2y^2 + 4x + 8y = 0$.

Příklad 30: Je zadaná kuželosečka $4x^2 + 10xy + 4y^2 = 9$. Použijte lineární transformaci souřadnic pro uvedení kuželosečky do standardní polohy. Identifikujte typ kuželosečky, zadejte její rovnici a nakreslete její graf.[70]

Řešení:

$4x^2 + 10xy + 4y^2 = 9$

$4x^2 + 10xy + 4y^2 = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

[70] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 424.

Nyní nalezneme vlastní hodnoty a vektory matice A.

$A = \lambda E - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ -5 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ -5 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 9)$

Vlastní hodnoty matice A jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 9$.

$\lambda_1 = -1$

$(A - (-)1 \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{cc|c} -1-4 & -5 & 0 \\ -5 & -1-4 & 0 \end{array}\right) =$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$v_{11} = -t, v_{12} = t, t \in R$

$t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vlastní vektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 9$

$(A - 9 \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{cc|c} 9-4 & -5 & 0 \\ -5 & 9-4 & 0 \end{array}\right) =$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$v_{21} = t, v_{22} = t, t \in R$

$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vlastní vektor $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Ortogonální matice má tvar $H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Inverzní matice k matici ortogonální má tvar $H^T = H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Diagonální matici vypočítáme podle vztahu $D = H^T \cdot A \cdot H$.

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(x', y') \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -(x')^2 + 9(y')^2$$

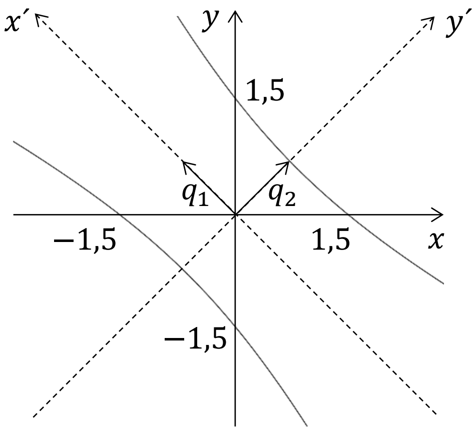
$$-(x')^2 + 9(y')^2 = 9 \quad /: 9$$

$$-\frac{(x')^2}{9} + (y')^2 = 1$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Řešením kvadratické rovnice je hyperbola.



Obr. 52: Hyperbola $4x^2 + 10xy + 4y^2 = 9$.

Příklad 31: Je zadaná kuželosečka $3x^2 - 4xy + 3y^2 - 28\sqrt{2}x + 22\sqrt{2}y + 84 = 0$. Použijte lineární transformaci souřadnic pro uvedení kuželosečky do standardní polohy. Identifikujte typ kuželosečky, zadejte její rovnici a nakreslete její graf.[71]

Řešení:

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 = (x,\ y) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nyní nalezneme vlastní hodnoty a vektory matice A.

$$A = \lambda \mathrm{E} - \mathrm{A} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{p}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{E} - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 5)$$

Vlastní hodnoty matice A jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Vlastní vektory matice A jsou $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Ortogonální matice má tvar $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Inverzní matice k matici ortogonální má tvar $H^T = H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Diagonální matici vypočítáme podle vztahu $D = H^T \cdot A \cdot H$.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x', y') \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5(x')^2 + (y')^2$$

$$Bx = BHx' = (-28\sqrt{2} \quad 22\sqrt{2}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -50x' - 6y'$$

$$5(x')^2 + (y')^2 - 50x' - 6y' + 84 = 0$$

[71] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 424.

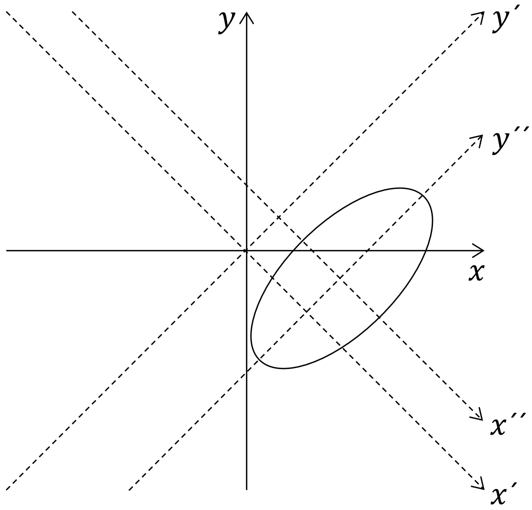
$5(x' - 5)^2 + (y' - 3)^2 = 50 \qquad /:50$

$$\frac{(x' - 5)^2}{10} + \frac{(y' - 3)^2}{50} = 1$$

Provedeme substituci $x'' = x' - 5,\ y'' = y' - 3$

$$\frac{(x'')^2}{10} + \frac{(y'')^2}{50} = 1$$

Řešením kvadratické rovnice je elipsa.



Obr. 53: Elipsa $3x^2 - 4xy + 3y^2 - 28\sqrt{2}x + 22\sqrt{2}y + 84 = 0$.

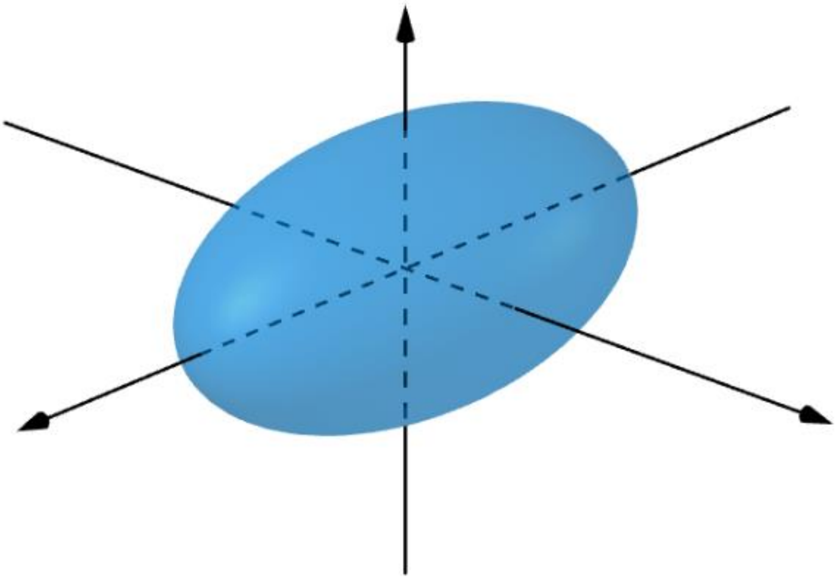
6.2 Obecná kvadratická rovnice se třemi proměnnými

Obecná kvadratická rovnice se třemi proměnnými x, y a z má tvar

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

kde alespoň jedna z konstant a, b, c, d, e, f je nenulová, množiny bodů v prostoru určené těmito rovnicemi se nazývají kvadratické plochy neboli kvadriky.[72]

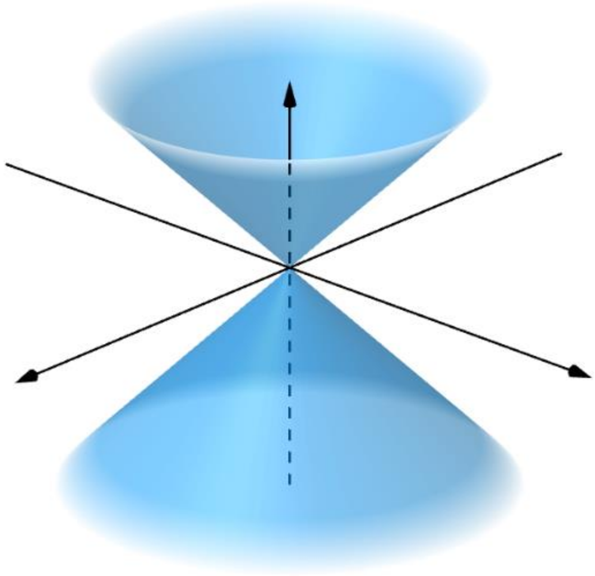
Elipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Obr. 54: Elipsoid

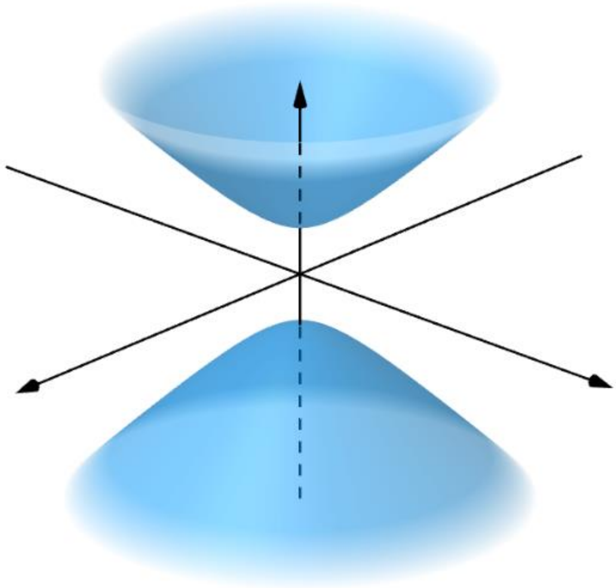
[72] Srov. POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5. Str. 420.

Eliptický kužel: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$



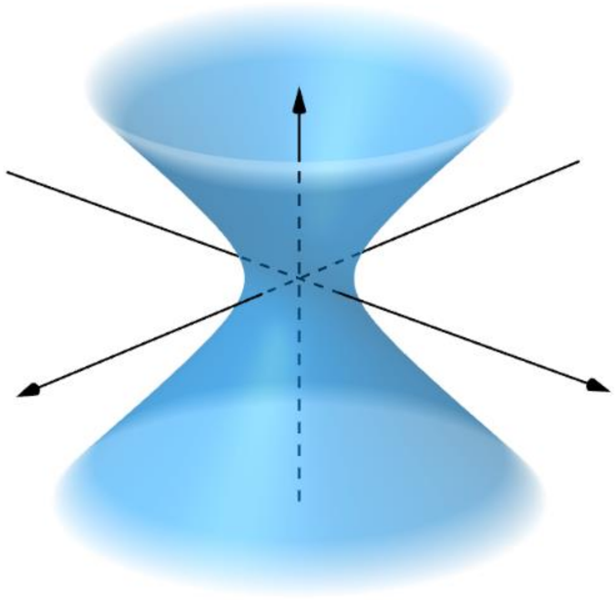
Obr. 55: Eliptický kužel

Hyperboloid dvoudílný: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



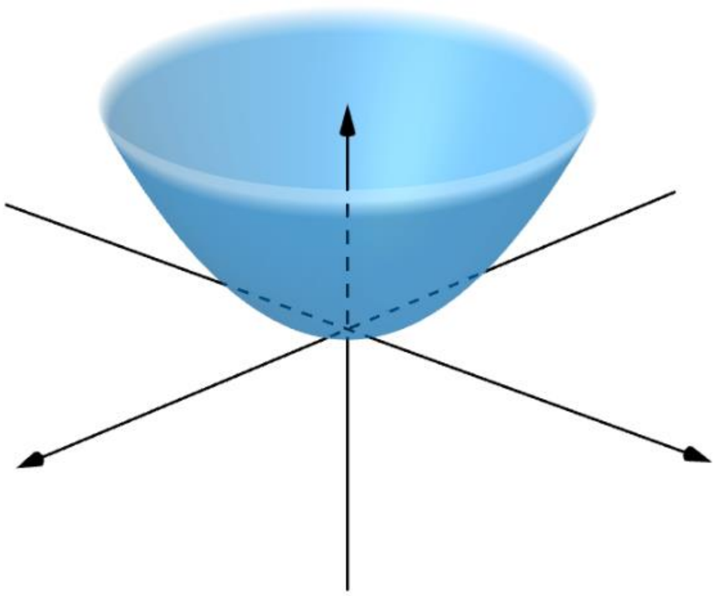
Obr. 56: Hyperboloid dvoudílný

Hyperboloid jednodílný: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



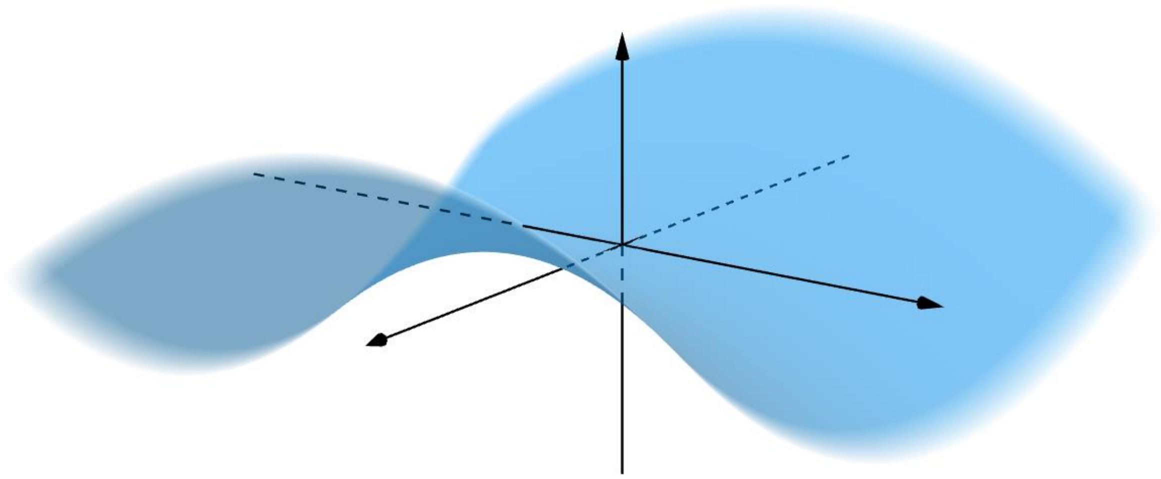
Obr. 57: Hyperboloid jednodílný

Eliptický paraboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$



Obr. 58: Eliptický paraboloid

Hyperbolický paraboloid: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$



Obr. 59: Hyperbolický paraboloid

Při určování typu kvadrik by bylo možné provádět podobné úpravy, jako jsme prováděli v kapitole 6.1 a 6.2 s kuželosečkami, na základě kterých bychom transformaci souřadné soustavy (realizující posunutí a lineární transformaci bodů v prostoru) opět převedli obecnou rovnici kvadriky na některý ze základních tvarů.

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo doplnění a rozšíření vysokoškolské matematiky, konkrétně matematické disciplíny lineární algebry, vytvořením uceleného náhledu na problematiku skalárního součinu vektorů a jeho praktické užití. Forma práce měla splňovat obecné požadavky na učební materiál, který může sloužit jako studijní podpora pro vysokoškolské studenty předmětů algebra a analytická geometrie ne jenom na pedagogických fakultách.

Teoretický přínos své práce autorka vidí především v tom, že se jí podařilo sestavit ucelený náhled na danou problematiku a představit řešení některých příkladů spolu s grafickým znázorněním pro snadnější pochopení učiva. Autorka první čtyři kapitoly své práce, které svým obsahem rozšiřují učivo příslušného kursu, doplnila dalšími dvěma kapitolami, z nichž se pátá kapitola zabývá diagonalizací kvadratických forem a šestá kapitola obsahuje možnost využití teorie vlastních čísel a vlastních vektorů a teorie lineárních zobrazení v analytické geometrii.

Autorka pokládá za vhodné dále studovat analytickou geometrii, aby získala širší vhled do problematiky a mohla tak fundovaněji předávat své znalosti.

Při zpracování práce autorka prošla zdrojovou literaturu, což jí umožnilo v dané problematice pochopit širší souvislosti a naučit se praktickému řešení mnohých příkladů.

Přestože je tato ucelená práce první, kterou autorka při svém studiu sepsala, je přesvědčena, že svojí prací alespoň trochu pomohla pedagogům Katedry matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v jejich náročné a vysoce odborné práci. Stejně tak je přesvědčena, že její práce pomůže studentům při studiu.

SEZNAM OBRÁZKŮ

POUŽITÁ LITERATURA

ČERNÝ, Ilja. *Kuželosečky a kvadriky* [online]. Třetí upravené a doplněné vydání. Praha: Universita Karlova, 2012, 140 s. [cit. 2023-03-19]. Dostupné také z: https://matematika.cuni.cz/cerny-kk.html

FAJMON, Břetislav. *Algebra 2* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2022, 140 s. [cit. 2023-03-19]. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/el/ped/jaro2023/MA0011/um/algebra2-2022.pdf

JUKL, Marek. *Analytická geometrie lineárních útvarů*. 2. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2008. ISBN 9788024421483.

PECH, Pavel. *Kuželosečky* [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004 [cit. 2023-03-19]. ISBN 80-7040-755-7. Dostupné také z: https://old.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Kuzelosecky.pdf

POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. 3rd ed. Australia: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-73544-5.

REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. Třetí, nezměněné vydání. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1973.

ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometria: cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov* [online]. Bratislava: Marenčin PT, spol. s r.o. 2011 [cit. 2023-03-19]. ISBN 978-808-1141-119. Dostupné z: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf

POUŽITÉ SYMBOLY A ZKRATKY

ad	lat. ad formalia	k formální stránce, k
č.		číslo
lat.		latinsky
např.		například
obr.		obrázek
s.		stran, strana
Sb.		sbírka zákonů
srov.		srovnej, porovnej s
str.		strana
tj.		to je, to jest
tzv.		takzvaný
viz		viď, odkaz na konkrétní definici, větu či obrázek

Ostatní zkratky a symboly uvedené v práci jsou standardními zkratkami a symboly užitými v oboru algebra a geometrie.