K a p i t o l a IV.

N E K O N E Č N É Ř A D Y

Připomeňme si nejprve základní pojmy p o s l o u p n o s t i , důležité pro teorii nekonečných řad.

Posloupnost $\{f(n)\}$ tvoří množina hodnot funkce $f(n)$,přiřazených přirozeným číslům $n = 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots$ Tzv. členy posloupnosti a_n tedy jsou :

$$a_1 = f(1) , a_2 = f(2) , a_3 = f(3) , \ldots\ldots\ldots a_n = f(n) , \ldots\ldots$$

Posloupnost je tedy funkce definovaná v množině přirozených čísel,Nejčastěji bývá dána rovností pro n-tý člen : $a_n = f(n)$.

Zapisujeme : $\{a_n\} = a_1 , a_2 , a_3 , \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1}, a_n , a_{n+1} , \ldots\ldots$

nebo $\{f(n)\} = f(1),f(2),f(3), \ldots\ldots\ldots\ldots f(n-1),f(n),f(n+1),\ldots\ldots$

Například:

(a) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n} , \frac{1}{n+1} , \ldots\ldots$

(b) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2} , \frac{2}{3}, \frac{3}{4} , \frac{4}{5} , \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n-1}{n} , \frac{n}{n+1} , \frac{n+1}{n+2}, \ldots\ldots$

(c) $\{(-1)^{n+1}\} = +1 ,-1, +1 ,-1, \ldots\ldots\ldots\ldots (-1)^n ,(-1)^{n+1}, (-1)^{n+2} , \ldots\ldots$

(d) $\left\{(-1)^n.\frac{1}{n}\right\} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} , \ldots\ldots(-1)^{n-1}.\frac{1}{n-1} , (-1)^n.\frac{1}{n},(-1)^{n+1}.\frac{1}{n+1}$

(e) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16}, \ldots\ldots\ldots\ldots(\frac{1}{2})^{n-1} ,(\frac{1}{2})^n ,(\frac{1}{2})^{n+1}, \ldots\ldots$

(f) $\left\{-(\frac{1}{2})^n\right\} = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8} , \ldots\ldots\ldots\ldots-(\frac{1}{2})^{n-1},-(\frac{1}{2})^n, -(\frac{1}{2})^{n+1},\ldots\ldots$

(g) $\left\{(-\frac{1}{2})^n\right\} = -\frac{1}{2} , \frac{1}{4} , -\frac{1}{8} , \ldots\ldots\ldots\ldots (-\frac{1}{2})^{n-1},(-\frac{1}{2})^n, (-\frac{1}{2})^{n+1},\ldots\ldots$

(h) $\{4+3(n-1)\} = 4 , 7 , 10, 13 , \ldots\ldots \quad 4+3(n-2), 4+3(n-1), 4+3n$

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá o m e z e n á , jestliže existuje číslo M té vlastnosti,že nerovnost

$$|a_n| \leqq M \quad \text{čili} \quad -M \leqq a_n \leqq M \qquad (100)$$

je splněno pro každé přirozené číslo n.

Posloupnosti (a),(b),(c), ... (g) jsou omezené.

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá n u l o v á , jestliže k libovolnému (malému) a kladnému číslu ε přísluší číslo n_o té vlastnosti,že pro každé $n > n_o$ je splněno

$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{čili} \quad -\varepsilon < a_n < \varepsilon \qquad (101)$$

Musí tedy od určitého indexu počínaje být všechny členy v absolutní hodnotě menší než jakkoli malé číslo kladné ε .

Posloupnosti (a),(d),(e),(f),(g), jsou nulové.Vypočtěte v těchto případech číslo n_o a určete od kterého n je při zvoleném ε splněna nerovnost. (101).

Například pro posloupnost (g) má platit

$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| < \varepsilon$$

$$\text{čili} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$$

Logaritmováním $\quad -n.\log 2 < \log \varepsilon \quad /.(-1)$ a vypočteme n :

$$n > -\frac{\log \varepsilon}{\log 2} \quad ; \text{ položme } n_o = -\frac{\log \varepsilon}{\log 2}$$

pro $\varepsilon = 10^{-1}$ je $n_0 \doteq 3{,}322$, nerovnost (101) je splněna pro každé $n \geqq 4$,
pro $\varepsilon = 10^{-3}$ je $n_0 \doteq 9{,}966$, nerovnost (101) je splněna pro každé $n \geqq 10$,
pro $\varepsilon = 10^{-6}$ je $n_0 \doteq 19{,}93$, nerovnost (101) je splněna pro každé $n \geqq 20$.
Dalším zmenšováním kladného čísla ε se zvětšuje příslušné n_0 a existuje vždy index n, od něhož počínaje je vždy splněna nerovnost (101). S rostoucím n zůstává $|a_n|$ menší než jakkoli malé kladné číslo a tedy a_n se blíží nule.

Posloupnost $\{a_n\}$ má limitu L, když posloupnost $\{L - a_n\}$ je nulová, tj. když k libovolnému malému a kladnému číslu ε přísluší číslo n_0 té vlastnosti, že pro každé $n > n_0$ je splněno

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{čili} \qquad L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \qquad (101^a)$$

Zapisujeme $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ nebo jen $\lim a_n = L$

Posloupnost, která má vlastní limitu L pro $n \to \infty$, se nazývá **k o n v e r g e n t n í**. Každá nulová posloupnost je konvergentní. Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá **d i v e r g e n t n í**.
Konvergenci posloupnosti zjišťujeme výpočtem její limity, což provádíme jako limitu funkce $f(n)$ v nevlastním bodě. Viz I. díl, str. 97 a 98.
Máme-li dokázat, že určité číslo L je limitou dané posloupnosti, musíme se o správnosti přesvědčit splněním nerovnosti (101^a) obdobně jako u nulové posloupnosti.
U posloupností (a), (d), (e), (f), (g) je limita $L = 0$, u posloupnosti (b) je $L = 1$, posloupnost (h) je divergentní.
O posloupnosti (c) pravíme, že **osciluje** (nemá ani vlastní, ani nevlastní limitu).
Velmi často se setkáváme s posloupností geometrickou $\{a_1 . q^{n-1}\}$:

$$a_1,\ a_1.q,\ a_1.q^2,\ a_1.q^3, \ldots\ldots\ a_1.q^{n-1}, \ldots\ldots ; q \text{ je kvocient}$$

Pro $|q| < 1$ je tato posloupnost nulová a proto konvergentní.
Pro geometrickou posloupnost se určuje součet prvních n členů vzorcem:

$$s_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (102)$$

O členech posloupnosti jsme dosud předpokládali, že jsou to reálná čísla. Takové posloupnosti nazýváme posloupnosti reálných čísel.
Definují se i posloupnosti komplexních čísel.
Členy posloupnosti mohou být i funkce (posloupnosti funkcí), což zapisujeme:

$$\{f_n(x)\} = f_1(x),\ f_2(x), \ldots\ldots\ f_n(x), \ldots\ldots$$

Například

$$\{x^n\} = x,\ x^2,\ x^3, \ldots\ldots\ x^n, \ldots\ldots$$

$$\{\sin nx\} = \sin x,\ \sin 2x, \ldots\ldots\ \sin nx, \ldots$$

Dosadíme-li za x číslo **a**, které patří definičnímu oboru všech funkcí $f_n(x)$, obdržíme jistou posloupnost reálných čísel. Pravíme, že daná posloupnost funkcí v čísle **a** konverguje nebo diverguje, když konverguje nebo diverguje příslušná posloupnost reálných čísel.
Je zřejmé, že posloupnost funkcí může konvergovat v jistém intervalu, který se nazývá oborem konvergence dané posloupnosti funkcí.

NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ ŘADY.

Je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel, pak symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots\ldots,$$

se nazývá nekonečná číselná řada.

Z posloupností reálných čísel na straně 188 lze sestavit nekonečné řady; např.:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots\ldots$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots\ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots\ldots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + (-1)^n . \frac{1}{n} + \ldots\ldots$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[4 + 3(n-1)\right] = 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots\ldots + \left[4 + 3(n-1)\right] + \ldots\ldots$

Označíme-li symbolem s_n součet prvních n členů nekonečné řady, pak čísla

$$s_1 = a_1 \,, \; s_2 = a_1 + a_2 \,, \; s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \,, \; \ldots\ldots ; \; s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

jsou tzv. částečné součty nekonečné řady a tvoří posloupnost $\{s_n\}$, nazvanou posloupnost částečných součtů nekonečné řady.

Existuje-li vlastní limita této posloupnosti, čili je-li posloupnost částečných součtů konvergentní, pravíme, že i daná nekonečná řada je konvergentní.
Existuje-li $\lim s_n$ a je-li rovna číslu S, pak toto číslo nazýváme součtem nekonečné řady.

Řada, která není konvergentní, se nazývá divergentní.
Zjišťování konvergence nekonečné řady patří v teorii řad k základním úlohám.

I. Zjištění konvergence řady přímým výpočtem jejího součtu S.

n-tý částečný součet se dá určit jen u několika málo typů nekonečných řad.
Součet nekonečné řady geometrické:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1} = a + a.q + a.q^2 + a.q^3 + \ldots\ldots\ldots + a.q^{n-1} + \ldots\ldots$$

$$s_n = a_n . \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{q-1} . q^n - \frac{a}{q-1} \qquad \text{viz (102)}$$

Předpokládejme, že $|q| < 1$; pak $\lim s_n = S = \frac{a}{1-q}$ (103)

Nekonečná geometrická řada o kvocientu $|q| < 1$ je vždy konvergentní. Její součet S se určuje přímo uvedeným vzorcem (103). Pro $|q| \geq 1$ geom. řada diverguje.

239. cvičení. Ověřte konvergenci dané nekonečné řady vypočtením jejího součtu :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-2n}$, [$q = \frac{1}{100}$, konv.; $S = \frac{100}{99}$]

b) $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \ldots\ldots\ldots$, [$q = -\frac{3}{4}$, konv.; $S = \frac{4}{7}$]

c) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots\ldots\ldots$, [$q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, konv.; $S = 2 - \sqrt{2}$]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{2n}}$, [$q = -\frac{1}{4}$, konv; $S = -\frac{1}{5}$]

240.<u>cvičení.</u> Vypočítati součet nekonečné řady ;

a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^4} + \dots\dots\dots\dots$,(součet dvou konverg.řad); [$S = \frac{14}{15}$]

b) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{16} + \frac{2}{27} - \frac{1}{64} + \dots$,(rozdíl dvou konverg.řad); [$S = \frac{8}{3}$]

c) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \frac{3}{5^6} + \dots$ (součet tří konverg.řad); [$S = \frac{19}{62}$]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$, ($a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$), [$S = \frac{3}{2}$]

Užitím součtu nekonečné řady geometrické lze sčítat řadu tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$, jestliže posloupnost $\{a_n\}$ je aritmetická a posloupnost $\{b_n\}$ je geometrická o kvocientu $|q| < 1$.

/184/.<u>příklad.</u> Určiti součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

Řada je uvedeného typu,neboť ji lze zapsat: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot \frac{1}{2^n}$

V tomto případě jest : $a_n = 2n-1$; $b_n = \frac{1}{2^n}$, $q = \frac{1}{2}$

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{8} + 7 \cdot \frac{1}{16} + \dots\dots\dots\dots$$

Předpokládáme,že daná řada konverguje.
Rovnici vyjadřující hledaný součet násobíme kvocientem příslušné řady geometrické a vzniklou rovnici odečteme od původní :

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \dots\dots \\ \frac{S}{2} &= \qquad\; \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \dots\dots \quad /\cdot(-1) \end{aligned}\right\} +$$

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \dots\dots$$

čili $$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\dots\right)$$

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} ; \quad \underline{S = 3}$$

Daná řada je konvergentní .

241.<u>cvičení.</u> Vypočtěte součet řady :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$, [$S = \frac{9}{4}$] ; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a+n}{2^n}$, [$S = 2(a+1)$] ,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log 2^n}{2^n}$, [$S = \log 4$] ; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot (\log 2)^{n-1}$,[$S = \frac{1}{(1-\log 2)^2}$]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (\sin\alpha)^{n-1}}{3^n}$, ($a_n = n$, $b_n = \frac{(\sin\alpha)^{n-1}}{3^n}$) , [$S = \frac{3}{(3-\sin\alpha)^2}$]

242. [illegible] součet některých nekonečných řad,když jejich n-tý člen je algebraický [illegible] výrazů na n závislých nebo se dá na takový součet upravit.

/185/.**příklad.** **Užitím** součtu S vyšetřiti konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n.(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$

$$a_n = \ln \frac{n.(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} = \ln n + \ln(2n+1) - \ln(n+1) - \ln(2n-1)$$

Pro $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$ vytvoříme členy řady $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots$

Po sečtení obdržíme s_n vyjádřené algebraickým součtem o malém počtu členů. Vypočteme $\lim s_n = S$.

$$\left.\begin{array}{lllllll}
n=1 & a_1 = 0 & + \cancel{\ln 3} & - \cancel{\ln 2} & - 0 \\
n=2 & a_2 = \cancel{\ln 2} & + \cancel{\ln 5} & - \cancel{\ln 3} & - \cancel{\ln 3} \\
n=3 & a_3 = \cancel{\ln 3} & + \cancel{\ln 7} & - \cancel{\ln 4} & - \cancel{\ln 5} \\
n=4 & a_4 = \cancel{\ln 4} & + \cancel{\ln 9} & - \cancel{\ln 5} & - \cancel{\ln 7} \\
n=5 & a_5 = \cancel{\ln 5} & + \underbrace{\ln 11 - \ln 6}_{} & & - \cancel{\ln 9} \\
 & & & & \\
 & a_{n-1} = \ln(\cancel{n-1}) & + \ln(\cancel{2n-1}) & - \cancel{\ln n} & - \ln(\cancel{2n-3}) \\
 & a_n = \cancel{\ln n} & + \underbrace{\ln(2n+1) - \ln(n+1)}_{} & & - \ln(\cancel{2n-1})
\end{array}\right\} +$$

$$s_n = \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln \frac{2n+1}{n+1}$$

$$\lim s_n = \lim \left(\ln \frac{2n+1}{n+1} \right) = \ln \left(\lim \frac{2n+1}{n+1} \right) = \ln 2 = S$$

Daná řada je **konvergentní.**

242.cvičení. Užitím součtu S vyšetřiti konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2.\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, **(odstraňte odmocniny z jmenovatele)**

[$S = 1 - \sqrt{2}$; konverg.]   [$S = \lim \sqrt{n} = +\infty$, řada diverg.]

Součet některých nekonečných řad, jejichž n-tý člen lze rozložit na parciální zlomky.

Často jsou to řady typu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)}$; k je celé, kladné číslo

/186/.příklad. Vypočítati součet S nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

$$a_n = \frac{1}{n.(n+2)} = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \quad \text{čili}$$

$$2a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \;;$$

$$\left.\begin{array}{lll}
n=1 & 2a_1 = 1 & - \cancel{\frac{1}{3}} \\
n=2 & 2a_2 = \frac{1}{2} & - \cancel{\frac{1}{4}} \\
n=3 & 2a_3 = \cancel{\frac{1}{3}} & - \cancel{\frac{1}{5}} \\
n=4 & 2a_4 = \cancel{\frac{1}{4}} & - \cancel{\frac{1}{6}} \\
n=5 & 2a_5 = \cancel{\frac{1}{5}} & - \cancel{\frac{1}{7}} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
 & 2a_{n-2} = \cancel{\frac{1}{n-2}} & - \cancel{\frac{1}{n}} \\
 & 2a_{n-1} = \cancel{\frac{1}{n-1}} & - \frac{1}{n+1} \\
 & 2a_n = \cancel{\frac{1}{n}} & - \frac{1}{n+2}
\end{array}\right\} + \Longrightarrow 2.s_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$s_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\lim s_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}.(0 + 0)$$

$$S = \frac{3}{4}$$

Daná řada je konvergentní.

V obecném případě : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+k)} = \frac{1}{k} . \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$

-40. cvičení. Užitím součtu S vyšetřiti konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$, [$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $S = \lim s_n = 1$; řada je konverg.]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+3)}$, [$s_n = \frac{1}{3}\left(1+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$, $S = \frac{11}{18}$; konverg.]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1).(n+4)}$, [$n_s = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right)$, $S = \frac{13}{36}$; konv.]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$, [$s_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right)$, $S = \frac{23}{90}$; konv.]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, [$s_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1} \right)$, $S = \frac{1}{3}$; konvergentní]

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$, [$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$, $S = \frac{1}{2}$; konvergentní]

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$, [$s_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$, $S = \frac{1}{4}$; konvergentní]

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, [$s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$; konvergentní]

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ [$s_n = \frac{1}{8}\left\{ 1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right\}$, $S = \frac{1}{8}$; konvergentní]

P o d m í n k y   k o n v e r g e n c e   nekonečných řad.

Má-li řada konvergovat, musí $\lim a_n = 0$ (podmínka n u t n á). To znamená, že je-li $\lim a_n = 0$, lze říci, že řada může konvergovat. Je-li $\lim a_n \neq 0$, řada diverguje.

Pro další úvahy je důležitá tzv. h a r m o n i c k á   ř a d a.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots\ldots ,}$$

u níž $\lim \frac{1}{n} = 0$, avšak o řadě se dokazuje, že je divergentní.

Existuje i podmínka nutná a postačující ke konvergenci nekonečné řady (Bolzano-Cauchyův konvergenční princip), které se užívá k odvození konvergenčních vět (kriterií) a kterou lze někdy vyšetřit konvergenci nekonečné řady, když selhávají jednodušší prostředky.

II. KRITERIA KONVERGENCE NEKONEČNÝCH ŘAD. (Podmínky p o s t a č u j í c í)

Užijeme několika základních kriterií pro konvergenci nekonečných řad s k l a d n ý m i   č l e n y.

1. K r i t e r i u m   s r o v n á v a c í.

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s k l a d n ý m i   č l e n y a nechť od určitého indexu počínaje jest $a_n \leqq b_n$. (Řada $\sum b_n$ je majorantou k řadě $\sum a_n$, řada $\sum a_n$ je minorantou k řadě $\sum b_n$.) Pak platí:

a) Je-li řada $\sum b_n$ <u>konvergentní</u>, je také řada $\sum a_n$ <u>konvergentní</u>.

(Konverguje-li řada s většími členy, konverguje i řada s menšími členy.)

b) Je-li řada $\sum a_n$ <u>divergentní</u>, je také řada $\sum b_n$ <u>divergentní</u>.

(Diverguje-li řada s menšími členy, diverguje i řada s většími členy.)

<u>Poznámka:</u> K zjištění konvergence nebo divergence řady tímto kriteriem, musíme užít pomocné řady, o níž víme, že je konvergentní nebo divergentní.

/187/.<u>příklad</u>. Vyšetřiti konvergenci nebo divergenci řady :

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots, \quad a_n = \frac{1}{n^2}$$

Vyšetřujme konvergenci :

Pomocná konvergentní řada :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots, \quad b_n = \frac{1}{(n-1)n}$$

Ukážeme, že platí $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n-1)n}$ čili, že zvolená řada je majorantou .

Platí pro každé n : $n^2 > (n-1).n$

a tedy $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n}$ pro $n \geqq 2$ (jak bylo dokázati)

Daná řada (s menšími členy) je konvergentní.

Konvergují také řady: $\sum \frac{1}{(n+k)^2}$, kde <u>k</u> je celé číslo.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{pro } p \geqq 2$$

Je-li $p > 2$, jest $n^p > n^2$ a tedy $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n^2}$

Poněvadž řada $\sum \frac{1}{n^2}$ (s většími členy) je konvergentní, konverguje

i řada $\sum \frac{1}{n^p}$ (s menšími členy) pro $p > 2$.

Konvergentní jsou také řady $\sum \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \geqq 2$, <u>k</u> celé číslo.

N ě k t e r é ř a d y pro srovnávání řad :

R_1: $\sum_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1}$ [illegible]trická řada o $|q| < 1$ (konverg.)
$|q| \geqq 1$ (diverg.)

R_2: $\sum_{n=1}^{\infty}$ [illegible] $+ \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$ (konverg.)

R_3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$, $p > 1$, (konverg.)
$p \leqq 1$, (diverg.)

a pro p=1 (řada harmonická):

R_4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, (diverg.)

Též konvergenční [illegible] řady, jež vzniknou, když do n-tého členu za n dosadíme [illegible] čísla.

Vyšetření konvergence nek.řady srovnáním s geometrickou řadou.

/188/. příklad. Dokázati konvergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \ldots\ldots + \frac{1}{n.2^n} + \ldots\ldots$

Pro $n > 1$ platí : $2^n < n.2^n$ čili $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{n.2^n}$

Geom.konverg.řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je majorantou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$, která je tedy také konvergentní.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} = \sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{4} + \sin \frac{1}{8} + \ldots\ldots + \sin \frac{1}{2^n} + \ldots$

Ze vztahu $\alpha > \sin \alpha$, $\alpha > 0$, plyne $\frac{1}{2^n} > \sin \frac{1}{2^n}$

Geom.konverg.řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je majorantou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n}$, která je také konvergentní.

244.cvičení. Dokázati konvergenci řad : a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.5^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.3^{n-1}}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2.2n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1).2^{2n-1}}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2}{3^n}$

Vyšetření konvergence řady srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$, příp. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1).n}$. Viz příklad čís./186 /.

245.cvičení. Dokázati konvergenci řady : a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$, d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n-3}$.

Vyšetření konvergence řady srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, případně $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$, příp. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$.

/189/.příklad. Vyšetřiti konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+3}$

Pro každé n platí : $\frac{n^2}{n^4+3} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$

Konverg.řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je majorantou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+3}$, která je tedy také konvergentní.

/190/.příklad. Vyšetřiti konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$

Platí: $n^2-4n+5 > (n-2)^2$ a tedy $\frac{1}{n^2-4n+5} < \frac{1}{(n-2)^2}$, $n > 2$

Konvergentní řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$ je majorantou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$, která je tedy také konvergentní.

24400 P13

246. <u>cvičení</u>. Dokažte konvergenci řad :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$, [majorantní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$] ,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+2}$, [majorantní řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; [majorantní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$]

<u>Vyšetření divergence srovnáním s harmonickou řadou</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, případně $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, příp. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$.

/191/. <u>příklad.</u> Dokažte divergenci řady :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \dots\dots + \frac{1}{\log(n+1)} + \dots\dots$

Pro každé n platí : $n+1 > \log(n+1)$ a tedy $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\log(n+1)}$

Divergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ je minorantou k dané řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ která je tedy také divergentní.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} = \frac{1}{\sqrt{1.3}} + \frac{1}{\sqrt{2.4}} + \frac{1}{\sqrt{3.5}} + \dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \dots\dots$

Platí: $(n+2)(n+2) > n(n+2)$, $\sqrt{(n+2)(n+2)} > \sqrt{n(n+2)}$, $n+2 > \sqrt{n(n+2)}$

$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$

Divergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ je minorantou k dané řadě, která je také divergent.

247. <u>cvičení.</u> Dokažte divergenci řady :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$, g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$, [$n > \log n > \sqrt[n]{\log n}$]

2. <u>Kriterium podílové (d'Alembertovo).</u>

Vyslovíme přímo tzv. <u>limitní podílové kriterium</u> :

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Existuje-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$,

pak daná řada konverguje , je-li $L < 1$,

diverguje , je-li $L > 1$,

Je-li $L = 1$, nelze tímto kriteriem o konvergenci řady rozhodnout .

/192/.příklad. Vyšetřiti konvergenci řady :

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots\ldots$$

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim \frac{1}{2}.\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} . 1 < 1$$

Daná řada je konvergentní.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots\ldots\ldots$$

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1^p = 1$$

O konvergenci **dané** řady nelze tímto **kriteriem** rozhodnout.
Podílové kriterium selhává u dalších základních nekonečných řad :

$$\sum \frac{1}{n} , \quad \sum \frac{1}{n(n+1)} , \quad \sum \frac{1}{n^2} \quad \text{a jiných .}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{n!}{(n+1).n!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

Daná řada je konvergentní.

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{a^n}{n} + \ldots,$$ kde a je konstanta, $a > 0$

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} = \lim \frac{n.a}{n+1} = a.\lim \frac{n}{n+1} = a.1 = a$$

Daná řada konverguje pro $a < 1$, diverguje pro $a > 1$,

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} n.\mathrm{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} = \mathrm{tg} \frac{\pi}{4} + 2.\mathrm{tg} \frac{\pi}{8} + 3.\mathrm{tg} \frac{\pi}{16} + \ldots + n.\mathrm{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} + \ldots\ldots$$

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1).\mathrm{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \cdot \mathrm{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim \frac{\mathrm{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{2.\mathrm{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}}{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.\frac{1-0}{1}.1$$

$L = \frac{1}{2}$. Daná řada je konvergentní. [Při úpravě užito : $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2.\mathrm{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$]

248.cvičení. Vyšetřiti, zda daná řada konverguje nebo diverguje :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$, [konverg.] b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$, [konverg.], c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$, [konverg.]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$, [diverg.] e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$, [divergentní]

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n.3^n}}$, [konverg.]

V příkladech dalšího cvičení užijte při úpravě vztahu : $k! = k.(k-1)!$

Například : $(n+1)! = (n+1).\ n!$

$(2n+2)! = (2n+2).(2n+1)! = 2.(n+1).(2n+1).(2n)!$

249.cvičení. Vyšetřiti, zda daná řada konverguje nebo diverguje :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$, [konverg.], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$, [konverg. pro každé a.]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$, [konverg.], d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$, [divergentní],

e) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$, [konverg.], f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$, [konvergentní],

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, [konverg.] h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n.2n!}{(2n)!}$, [konvergentní],

250.cvičení. Vyšetřiti, zda daná řada konverguje nebo diverguje :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, [konverguje], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, [diverguje]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.n!}{n^n}$, [konverguje], d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2.\sin\frac{\pi}{2^n}$, [konverguje]

3. K r i t e r i u m o d m o c n i n o v é (C a u c h y o v o).

Opět vyslovíme přímo tzv. l i m i t n í odmocninové kriterium :

Nechť $\sum a_n$ je řada s k l a d n ý m i členy. Existuje-li $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$,

pak daná řada k o n v e r g u j e , je-li $L < 1$,

d i v e r g u j e , je-li $L > 1$.

Je-li $L = 1$, nelze tímto kriteriem o konvergenci řady rozhodnout.

Odmocninového kriteria užíváme, když člen a_n je n-tou mocninou výrazu závislého na n nebo takovou mocninu obsahuje jako činitele.

/193/. příklad. Vyšetřiti konvergenci řady :

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots\dots + \frac{1}{n^n} + \dots\dots$$

$L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{n} = 0$. Daná řada je konvergentní.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\operatorname{arctg}^n n} = \frac{a}{\operatorname{arctg} 1} + \frac{a^2}{\operatorname{arctg}^2 2} + \dots\dots + \frac{a^n}{\operatorname{arctg}^n n} + \dots\dots$$

$$L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a}{\operatorname{arctg} n} = a.\lim \frac{1}{\operatorname{arctg} n} = a . \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{\frac{\pi}{2}}$$

Je-li $a < \frac{\pi}{2}$, daná řada konverguje, je-li $a > \frac{\pi}{2}$, daná řada diverguje.

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)} = \frac{3}{2.3} + \frac{3^2}{2^2.5} + \frac{3^3}{2^3.7} + \dots\dots + \frac{3^n}{2^n(2n+1)} + \dots\dots$$

Člen a_n není v tomto případě n-tou mocninou výrazu závislého na n, ale obsahuje takovou mocninu jako činitele. Zapíšeme jej takto :

$$\frac{3^n}{2^n(2n+1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n . \frac{1}{2n+1}$$

$$L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{3}{2} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \lim (2n+1)^{-\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \cdot M$$

$M = \lim (2n+1)^{-\frac{1}{n}}$. Vypočteme jako limitu funkce :

$$\ln M = \lim \left\{ -\frac{1}{x} \cdot \ln (2x+1) \right\} = -\lim \frac{\ln(2x+1)}{x} = -\lim \frac{\frac{2}{2x+1}}{1} = -0 = 0$$

$M = 1$; $L = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$. Daná řada diverguje.

251.cvičení. Vyšetřiti konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$, [konverg.], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+\frac{1}{n})^n}$, [konvergentní]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot a^n$, [divergentní], d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^n (n+1)}$, [konvergentní]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$, [konverg.] f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot (1+\frac{1}{n})^{n^2}$, [konverg.]

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$, [konverg.], h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$, [$L = \frac{1}{e}$, konverg.]

k) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot \sin^n \frac{2}{n}$, [diverg.] m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$, [konvergentní]

Užijte tohoto kriteria k vyšetření konvergence v příkladech cvičení 248abc.

4. K r i t e r i u m   i n t e g r á l n í (Cauchy - Maclaurinovo).

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy $a_n = f(n)$, přičemž funkce $f(x) \geq 0$ je spojitá a nerostoucí pro $x > \alpha \geq 0$. Pak řada $\sum f(n)$ má týž konvergenční charakter jako nevlastní integrál

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Při užití se zřejmě předpokládá, že výpočet integrálu $\int f(x)\, dx$ nebude činit zvláštních potíží.

/194/.příklad. Integrálním kriteriem vyšetřiti konvergenci řady :

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n.(n+1)} + \dots\dots$$

Funkce $\frac{1}{x.(x+1)}$ je spojitá a nerostoucí pro $x > 1$. Určujeme proto konvergenci nebo divergenci nevlastního integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x.(x+1)} = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \Big| \ln x - \ln(x+1) \Big|_1^t = \lim_{t \to \infty} \Big| \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^t =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left\{ \ln \frac{t}{t+1} - \ln \frac{1}{2} \right\} = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2$$

Vyšetřovaný nevlastní integrál konverguje a tedy konverguje i daná řada. Konvergence dané řady byla vyšetřována užitím součtu S. Viz cvič. 243[a].

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \ldots$

Funkce $\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$ je spojitá a nerostoucí pro $x > 0$.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{4}\int_1^{\infty} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{4}.\lim_{t\to\infty} \int_1^t z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{4}.\lim_{t\to\infty} \Big|2.\sqrt{z}\Big|_1^t =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} (\sqrt{t} - 1) = +\infty$$

Nevlastní integrál diverguje, proto diverguje i daná řada.

252. cvičení. Integrálním kriteriem rozhodněte o konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, [konvergentní], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, [konvergentní]

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, [konvergentní], d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$, [divergentní]

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2-1}$, [konvergentní], f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$, [konvergentní]

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$, [divergentní], h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1).\sqrt{n}}$, [konvergentní]

k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\ln^3 n}$, [konvergentní], m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1).\ln^2(n+1)}$, [konvergen.]

V následujícím cvičení volte vhodné kriterium k vyšetření konvergence řady.

253. cvičení. Vyšetřiti konvergenci dané řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$, [konvergentní], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$, [divergentní]

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\ln^3 n}$, [konvergentní] d) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}^n \frac{1}{n}$, [konvergentní]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n.n!}$, [konvergentní], f) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4-9}$, [konvergentní]

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$, [konvergentní], h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$, [divergentní]

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{n^n}$, [divergentní] m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1).\ln(n+1)}$, [divergentní]

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$, [konverg.] o) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$, [konvergentní]

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, [divergentní], q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$, [konvergentní]

Ř a d y s k l a d n ý m i i z á p o r n ý m i č l e n y.

Číselná řada může obsahovat záporné členy. Jsou-li její členy s t ř í d a v ě kladné a záporné, nazývá se řada a l t e r n u j í c í.

Má-li řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots$$

některé členy záporné, pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

má všechny členy kladné. Platí :

Jestliže konverguje řada s absolutními hodnotami, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak konverguje i řada bez absolutních hodnot, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V takovém případě o řadě $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ pravíme, že k o n v e r g u j e a b s o l u t n ě.

/195/. Příklad. Vyšetřiti konvergaci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots$

Daná řada konverguje, a to absolutně, poněvadž konverguje příslušná řada z absolutních hodnot, tj. řada

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n} = \frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\cos n\alpha}{2^n} + \ldots$, kde α je libovolné číslo.

Vyšetřujeme konvergenci řady z absolutních hodnot, tj. řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$:

Platí $|\cos n\alpha| \leq 1$ a tedy také $\frac{|\cos n\alpha|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$

Konvergentní geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je majorantou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$, která je tedy také konvergentní.

Daná řada konverguje absolutně.

Alternující řada může někdy konvergovat, i když příslušná řada z absolutních hodnot diverguje. Pak pravíme, že taková řada konverguje r e l a t i v n ě (neabsolutně) Viz následující příklad.

Pro konvergenci alternující řady se užívá tzv. kriteria L e i b n i z o v a:

Alternující řada $\sum a_n$ konverguje, je-li splněno :

1) od určitého indexu pro každé n platí $|a_{n+1}| \leq |a_n|$

2) $\lim |a_n| = 0$

/196/.příklad. Vyšetřiti konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots + (-1) \cdot \frac{1}{n} + \ldots\ldots$

1.podmínka : $|a_{n+1}| \leqq |a_n|$ tj. $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ je splněna pro každé n ,

2.podmínka : $\lim |a_n| = 0$ tj. $\lim \frac{1}{n} = 0$ je splněna.

Daná řada konverguje.Ale poněvadž řada z absolutních hodnot,tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonická řada) je divergentní,konverguje daná řada relativně.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n+3}{2n} = \frac{5}{2} - \frac{7}{4} + \frac{9}{6} - \ldots\ldots\ldots$

1.podmínka : $|a_{n+1}| < |a_n|$ tj. $\frac{2(n+1)+3}{2(n+1)} < \frac{2n+3}{2n}$ je splněna,neboť

po úpravě jest $4n^2 + 10n < 4n^2 + 10n + 6$

2.podmínka : $\lim |a_n| = \lim \frac{2n+3}{2n} = 1 \neq 0$ není splněna.

K vyšetření konvergence nelze užít Leibnizova kriteria.

Užíváme-li pro řady s kladnými i zápornými členy přímo kriteria podílového,příp. odmocninového,zapisujeme :

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{, příp. } \quad L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$$

254.cvičení. Vyšetřiti konvergenci absolutní,relativní,příp. divergenci řad :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n(n+1)}$, [konverg.abs.]; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^3}$, [konverg.absol.]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$,[konv.abs.]; d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}$,[konverg.relat.]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$, [diverguje] ; f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$,[konverg.relat.]

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n}$, [konv.absol.] ; h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, [konv. rel.]

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$, [konverg.absol.]; m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n!}$, [konverg.absolutně]

V ý z n a m   z b y t k u   ř a d y   pro numerické výpočty.

Jen v málo případech dovedeme vypočítat součet řady. Nahrazujeme jej součtem prvních n členů (při vhodném n) čili n-tým částečným součtem.Tím provádíme přibližný výpočet součtu řady. Chyba,které se přitom dopustíme,je vyjádřena zbytkem řady po n-tém členu :

$$R_n = S - s_n$$
$$= a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots\ldots\ldots + a_{n+k} + \ldots\ldots\ldots$$

(Výpočet chyby má zřejmě smysl jen u konvergentních řad.)

Poněvadž zbytek řady je opět součtem jisté nekonečné řady, určujeme jej odhadem. Pravíme, že provádíme odhad zbytku čili odhad chyby.

<u>Odhad chyby</u> je nejjednodušší <u>pro alternující řady</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, u nichž od určitého n počínaje jest

$$|a_{n+1}| \geq |a_{n+2}| \geq |a_{n+3}| \geq \dots\dots\dots \geq |a_{n+k}| \geq \dots\dots\dots > 0$$

Pro zbytek R_n takových řad pak platí :

1) $R_n \leq |a_{n+1}|$

2) znaménko zbytku se rovná znaménku prvního vynechaného členu a_{n+1} čili $\operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} a_{n+1}$

/197/.<u>příklad.</u> Je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$.

Určiti a) odhad chyby, sečteme-li šest členů řady ,

b) počet členů řady, aby chyba byla menší než 10^{-6}.

Ad a):
$$s_6 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{91}{144} \doteq 0{,}63194$$
$$|R_6| \leq |a_7| \; ; \; a_7 = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} \doteq 0{,}00019$$
$$|R_6| \leq 0{,}00019 < 0{,}0002$$

Sečtením šesti členů dané řady se dopustíme chyby menší než 0,0002 .
Součet řady zapíšeme : $S \doteq 0{,}63194 \pm 0{,}0002$

Ad b)
$$|R_n| \leq a_{n+1}$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!}$$

Hledáme nejmenší přirozené číslo n, jež splňuje nerovnost

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{1000000}$$
$$(n+1)! > 1\,000\,000$$
$$10! > 1\,000\,000$$
$$n + 1 = 10$$
$$n = 9$$

n určíme zkusmo :
$8! = 40\,320$
$9! = 362\,880$
$10! = 3\,628\,800$
$3\,628\,800 > 1\,000\,000$

Nutno sčítat prvních 9 členů, aby chyba byla menší než 10^{-6}.

255.<u>cvičení</u>.Pro danou řadu určiti: 1) odhad chyby, sečteme-li <u>k</u> členů ,
2) počet členů, aby chyba byla menší než dané číslo ε .

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$, 1) $k = 8$, 2) $\varepsilon = 10^{-3}$, [1) $|R_8| \leq \frac{1}{9}$, 2) $n \geq 999$]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}$, 1) $k = 102$, 2) $\varepsilon = 10^{-2}$, [1) $|R_{102}| \leq \frac{1}{205}$, 2) $n \geq 49$]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{2^{n-1}}$, 1) $k = 9$, 2) $\varepsilon = 10^{-3}$, [1) $|R_9| \leq \frac{5}{256}$ 2) $n \geq 14$]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2 \cdot 2^n}$, 1) $k = 5$, 2) $\varepsilon = 10^{-4}$, [1) $|R_5| \leq \frac{1}{2304}$, 2) $n \geq 7$]

Některé další základní metody pro výpočet nebo odhad zbytku řady :

A) Odhadem součtu řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ pro zbytek R_n užitím pomocné geom. řady.

/198/. příklad. Pro jaké n určíme $S = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ s chybou menší než 10^{-8} ?

Hledáme nejmenší n , pro které jest $R_n < 10^{-8}$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots\dots\dots$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + \dots\dots \right] < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \underbrace{\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right]}_{\text{geom. řada}}$$

$$R_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$R_n < \frac{1}{n \cdot n!}$. Hledáme nejmenší přirozené číslo n , pro něž platí

$$\frac{1}{n \cdot n!} < 10^{-8}$$

čili $\qquad n \cdot n! > 100\ 000\ 000$

Zkusmo vyšetříme, že $\qquad n = 11$

Vypočtaním s_{11} se dopustíme chyby menší než 10^{-8}.

Tento postup vyjádříme obecně následující větou v odstavci B)

256. cvičení. Pro jaký počet členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ určíme její součet s chybou menší než 10^{-5} ? [n = 5]

B) Větou: Vytvoříme-li k dané řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pomocnou geom. řadu tak, aby pro všechna $n > N$ platilo $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leqq q < 1$,

pak zbytek dané řady splňuje nerovnost (104)

$$\left| R_n \right| \leqq \frac{q}{1-q} \cdot \left| a_n \right|$$

/199/. příklad. Určiti odhad chyby u řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^n}$, omezíme-li se jen na sčítání n členů.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{2^{n+1}} : \frac{2n}{2^n} = \frac{n+1}{2n} = q < 1 \quad \text{pro } n > 1$$

$$\left| R_n \right| \leqq \frac{2n}{2^n} \cdot \frac{\frac{n+1}{2n}}{1 - \frac{n+1}{2n}} = \dots\dots\dots = \frac{2n(n+1)}{2^n(n-1)}$$

257. cvičení. Určiti odhad chyby daných řad, omezíme-li se jen na sčítání n členů :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n-1}}$, $\left[R_n \leqq \frac{n(n+1)}{(3n-1) \cdot 4^{n-1}} \right]$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$

$$\left[R_n \leqq \frac{1}{2^n \left[2(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \right]} \right]$$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n$, $\left[R_n \leqq \frac{1}{2^n n! (2n+1)} \right]$

C) Větou : Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ je konvergentní řada s kladnými členy, přičemž $f(x)$ je spojitá, kladná a nerostoucí funkce pro $x > 1$. Pak

$$|R_n| \leqq \int_n^{\infty} f(x)\, dx$$

/200/. příklad. Určiti odhad chyby řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$, omezíme-li se jen na sčítání n členů.

Funkce $\frac{1}{x^{\alpha}}$ je pro $x > 1$ spojitá, kladná a nerostoucí.

$$|R_n| \leqq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx$$

$$\int_n^{\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{t \to \infty} \int_n^{t} x^{-\alpha} dx = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_n^t = -\frac{1}{\alpha-1} \cdot \lim \left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha-1} \cdot \left(-\frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{(\alpha-1) \cdot n^{\alpha-1}}$$

$$R_n \leqq \frac{1}{(\alpha-1) \cdot n^{\alpha-1}}$$

258. cvičení. Určiti odhad chyby daných řad, omezíme-li se jen na sčítání n členů :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$, $\left[R_n \leqq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{n}{2} \right]$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$, $\left[R_n \leqq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \right]$

F U N K Č N Í Ř A D Y.

Členy funkčních řad jsou funkce(vytvořené podle určitého předpisu).Definujeme:
Je-li $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_n(x)$, ... posloupnost reálných funkcí, definovaných v intervalu D, pak funkční řadou nazýváme symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots\ldots + f_n(x) + \ldots\ldots$$

Pro x = a, kde a je reálné číslo náležející intervalu D,přejde funkční řada v číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = f_1(a) + f_2(a) + f_3(a) + \ldots\ldots + f_n(a) + \ldots\ldots$$

Příklady funkčních řad :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.n^2x^{n-1} = 1 - 4x + 9x^2 - 16x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots$$

Funkční řady mohou pro některá x konvergovat a pro některá divergovat. Množina všech reálných čísel x z intervalu D,pro něž příslušné číselné řady konvergují,tvoří tzv. k o n v e r g e n č n í o b o r funkční řady.Určíme jej tak,že z podmínky konvergence,kterou získáme užitím některého kriteria (podílového nebo odmocninového) obdržíme nerovnost pro x.Její řešení je hledaným konvergenčním oborem. Pokud se v ní nevyskytuje x, je konv.oborem celá osa.Viz /2ol./ příkl.

/201/.příklad. Určiti konvergenční obor řady :

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots$$

Daná řada je geometrická o kvocientu q = x.Taková řada konverguje právě když $|q| < 1$ čili když $|x| < 1$

a tedy pro $-1 < x < 1$

Interval (-1, 1)tvoří obor konvergence dané řady.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.n.x^{n-1} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Vyšetřujme absolutní konvergenci :

$$L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{(n+1).x^n}{n.x^{n-1}}\right| = \lim \frac{n+1}{n} . |x| = |x|.\lim\frac{n+1}{n} = |x|.1 = |x|$$

(V limitním přechodu považujeme x za konstantu.)

Daná řada je konvergentní,když $L < 1$, tj.když $|x| < 1$ a tedy opět pro

$$-1 < x < 1$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right| = |x| .\lim \frac{1}{n+1} = |x| .0 = 0$$

Limita $L < 1$ není na x závislá a proto daná řada konverguje pro každé x.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.10^n.x^n = 10x - 10^2.x^2 + 10^3.x^3 - \dots\dots$

$L = \lim \sqrt[n]{10^n.x^n} = 10.\,|x|$; $10.\,|x| < 1$ čili $-\frac{1}{10} < x < \frac{1}{10}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\left(\frac{x}{x+2}\right)^n = \frac{x}{x+2} - \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+2}\right)^3 - \dots\dots$

Užijeme opět odmocninového kriteria :

$$L = \lim \sqrt[n]{\left|\left(\frac{x}{x+2}\right)^n\right|} = \lim \left|\frac{x}{x+2}\right| = \left|\frac{x}{x+2}\right|$$

Podmínka konvergence : $\left|\frac{x}{x+2}\right| < 1$ čili $|x| < |x+2|$

Řešení této nerovnosti dává obor konvergence dané funkční řady :

$x > -1$ čili interval $(-1, +\infty)$.

259.<u>cvičení</u>. Určiti obor konvergence dané funkční řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $[\langle -1, 1)]$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $[\langle -1, 1\rangle]$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1).\frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)}$, $[(-1, 1)]$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1).\frac{1}{2n-1}.x^{2-1}$, $[(-1, 1)]$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$, $[(-\frac{4}{3}, 4)]$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n.2^n}$, $[)(-2, 2)]$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, $[\langle -1, 1)]$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.x^n}{\sqrt{(3n-2).2^n}}$, $[\langle -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})]$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$, $[(0, +\infty)]$; m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$, $[\langle 0, +\infty)]$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$, $[(\frac{1}{e}, e)]$; o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n}$, [pro každé x]

p) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n.\mathrm{tg}\,\frac{x}{2^n}$, $[(-2, 2)]$; q) $\sum_{n=1}^{\infty} n.\sqrt[3]{\sin^n x}$, [pro každé x kromě $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$]

V některých případech užíváme při vyšetření konvergenčného oboru srovnání s jinou konvergentní řadou, která je majorantou k dané řadě. Přitom u řad, jichž n-tý člen obsahuje funkci sinus nebo kosinus, vycházíme ze vztahů :

$|\sin x| \leqq 1$ nebo $|\cos x| \leqq 1$ nebo $|\sin x| \leqq |x|$,

jež platí pro každé x.

/202/<u>příklad</u>. Určiti obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$

Danou řadu nutno považovat za alternující a proto budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Pro každé x platí :

$$|\sin x| \leqq 1$$
$$|\sin^n x| \leqq 1$$
$$\frac{|\sin^n x|}{n^2} \leqq \frac{1}{n^2}$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je majorantou k řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin^n x|}{n^2}$, která tedy konverguje pro každé x.Také daná alternující řada konverguje pro každé x a to absolutně.

260.cvičení. Určiti obor konvergence řady :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^n x$, [pro každé x kromě $x=k\pi$], b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{x}{n}$, [pro každé x]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, [pro každé x] , d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$, [$x > 0$]

Součet funkční řady.

Také u funkčních řad zavádíme pojmy : n-tý částečný součet $s_n(x)$, součet řady $S(x)$ a zbytek $R_n(x)$ po n-tém členu :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \overbrace{\underbrace{f_1(x) + f_2(x) + \dots\dots + f_n(x)}_{s_n(x)} + \underbrace{f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots\dots}_{R_n(x)}}^{S(x)}$$

O součtu řady mluvíme zřejmě u řad konvergentních.Součtem řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je funkce $S(x)$,k níž řada konverguje a jejímž definičním oborem je konvergenční obor dané řady.Pro určité $x=a$ z tohoto oboru obdržíme součet příslušné číselné konvergentní řady

$$S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$$

Známe-li částečný součet $s_n(x)$,můžeme určit $S(x)$ jako limitu :

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

a zapisujeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ jako součet řady .

Pravíme,že funkce $S(x)$ je řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definována.

Z rovnosti $S(x) = s_n(x) + R_n(x)$ čili $R_n(x) = S(x) - s_n(x)$

plyne pro zbytek konv.řady : $\lim R_n(x) = 0$

Pro geometrické konverg.funkční řady určujeme součet podle vzorce $S = \frac{a_1}{1-q}$,

např.pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots$

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, což platí jen pro x z oboru konvergence,tj. $x \in (-1,1)$.

Součet $s_n(x)$ dovedeme určit jen pro některé typy funkčních řad,obdobně jako u číselných řad.

/203/.příklad. Určiti součet funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+nx)(1+nx-x)}$

Řadu lze zapsat $x^2 . \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)(1+nx-x)}$, pak $s_n(x) = x^2 . s_n'(x)$,

kde $s_n'(x)$ je částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)(1+nx-x)}$, jejíž n-tý člen rozložíme na parciální zlomky :

$$f_n(x) = \frac{n}{1+nx} - \frac{n-1}{1+nx-x}$$

$$\left.\begin{aligned}
f_1(x) &= \cancel{\frac{1}{1+x}} - 0\\
f_2(x) &= \cancel{\frac{2}{1+2x}} - \cancel{\frac{1}{1+x}}\\
f_3(x) &= \cancel{\frac{3}{1+3x}} - \cancel{\frac{2}{1+2x}}\\
&\vdots\\
f_{n-1}(x) &= \cancel{\frac{n-1}{1+(n-1)x}} - \cancel{\frac{n-2}{1+nx-2x}}\\
f_n(x) &= \frac{n}{1+nx} - \cancel{\frac{n-1}{1+(n-1)x}}
\end{aligned}\right\} +$$

$$s_n'(x) = \frac{n}{1+nx} \quad ; \quad s_n(x) = x^2 \cdot \frac{n}{1+nx} = \frac{nx^2}{1+nx}$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{n} + x} = x$$

$$R_n(x) = S(x) - s_n(x) = x - \frac{nx^2}{1+nx} = \frac{x}{1+nx} \;, \quad \lim R_n(x) = 0$$

20. Cvičení. Vypočtěte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[2n+1]{x} - \sqrt[2n-1]{x} \right)$; [$S(x) = 1-x$ pre $x > 0$;
$S(x) = -1-x$ pre $x < 0$]

S t e j n o m ě r n á k o n v e r g e n c e funkčních řad.

Součet $s_n(x)$ konečného počtu spojitých funkcí je vždy funkcí spojitou. Není tomu tak vždy u součtu nekonečně mnoha spojitých funkcí. Vyšetření, za jakých podmínek je součet řady $S(x)$ opět funkcí spojitou, souvisí se zavedením pojmu tzv. stejnoměrné konvergence funkční řady. Definujeme :

Funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje v jistém intervalu D s t e j n o m ě r n ě k funkci $S(x)$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové N, na x nezávislé, že pro všechna $n > N$ je splněno

$$\left| S(x) - s_n(x) \right| < \varepsilon$$

Ať tedy zvolíme jakkoli malé kladné číslo ε, lze určit index n, od něhož počínaje platí o každé funkci $s_n(x)$:

$$S(x) - \varepsilon < s_n(x) < S(x) + \varepsilon$$

pro každé x z intervalu D.

Tento zjev přibližujeme grafickým znázorněním, v němž grafy funkcí $s_n(x)$, od určitého n počínaje, blíží se tak grafu funkce $S(x)$, že stále leží v pásu ohraničeném grafy funkcí $S(x) - \varepsilon$, $S(x) + \varepsilon$, ať zvolíme ε jakkoli malé.

Poněvadž vyšetření stejnoměrné konvergence užitím definice bývá obvykle obtížné, užíváme k tomu tzv. **W e i e r s t r a s s o v a k r i t e r i a** :

Funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je v intervalu D stejnoměrně konvergentní, existuje-li k ní tzv. majorantní konvergentní číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, splňující nerovnost

$$\left| f_n(x) \right| \leq a_n$$

pro každé n a pro každé x z intervalu D.

Majorantní řadu se podaří někdy určit z tvaru n-tého členu dané funkční řady.

/204/.**příklad.** Prokázati stejnoměrnou konvergenci řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots\dots\dots$

Volíme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a vyšetřujeme, může-li být majorantou k

dané funkční řadě, t.j. $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2}$

Pro každé x platí : $|\sin nx| \leqq 1 \quad /. \frac{1}{n^2}$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2}$$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2}$$

Číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je majorantou k dané funkční řadě. Poněvadž tato řada je konvergentní, je daná funkční řada stejnoměrně konvergentní, a to pro každé x.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}} = \frac{\cos x}{e^x} + \frac{\cos 2x}{e^{2x}} + \frac{\cos 3x}{e^{3x}} + \dots\dots\dots\dots$

Volíme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{an}}$ pro $a > 0$. Má-li být majorantou k dané řadě, musí platit

$$\left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| \leqq \frac{1}{e^{an}}$$

Je-li $x \geqq a > 0$, pak $e^x \geqq e^a$ a také $e^{nx} \geqq e^{an}$; a tedy $\frac{1}{e^{nx}} \leqq \frac{1}{e^{na}}$

Pro každé x platí : $|\cos nx| \leqq 1$

předešlá nerovnost $\left|\frac{1}{e^{nx}}\right| \leqq \frac{1}{e^{na}}$ znásobením obou nerovností

$$\left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| \leqq \frac{1}{e^{na}}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{na}}$ je majorantou k dané řadě. Užitím podílového kriteria si potvrdíme, že je konvergentní :

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(\frac{1}{e^{(n+1)a}} : \frac{1}{e^{na}} \right) = \lim \frac{e^{na}}{e^{na} \cdot e^a} = \frac{1}{e^a} < 1$$

Majorantní řada je konvergentní a proto daná funkční řada je stejnoměrně konvergentní, a to v intervalu $(a, +\infty)$, kde $a > 0$.

262.cvičení. Vyšetřte stejnoměrnou konvergenci dané řady. V každém případě zdůvodněte udanou majorantní řadu a prokažte její konvergenci :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, [Major. řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konverg.; daná řada je stejnoměrně konvergentní pro každé x.]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$, [Major. řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ je konverg.; daná řada je stejnoměrně konverg. pro každé x.]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2}$; [Major. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n^2}$ je konverg.; daná řada je stejnoměrně konverg. pro každé x .]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, [Major. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, $k > 1$ je konverg.; daná řada je stejnoměrně konverg. v intervalu $\langle k, +\infty)$]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} \cdot \sqrt{1+(2n-1)x}}$, [Major. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ je konverg.; daná řada je stejnoměrně konverg. pro $x \geq 0$.]

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot e^{n^2 x^2}}$, [Major. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konverg.; daná řada je stejnoměrně konverg. pro každé x.]

g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot e^{nx^2} \cdot \ln^2 n}$ [Major. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ je konverg.; daná řada je stejnoměrně konverg. pro každé x.]

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$, [Major. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konverg.; daná řada je stejnoměrně konverg. pro každé x.]

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$, [Major. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k^n}$, $k > 1$, je konverg.; daná řada je stejnoměrně konverg. v interv. $\langle k, +\infty)$]

m) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$, [Major. řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^k}$, $k > 1$ je konverg.; daná řada je stejnom. konverg. v interv. $\langle k, +\infty)$]

U některé funkční řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ můžeme určit n-tý člen $a_n = \varphi(n)$ její majoranty jako lokální maximum funkce $f_n(x)$, existuje-li v oboru konvergence dané řady. Maximum $\varphi(n)$ však musí splňovat podmínky pro užití Weiertrassova kriteria.

/205/. **příklad.** Dokázati stejnoměrnou konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Nejprve určíme x, jež vede k lok. maximu funkce $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$

$y' = \frac{2n^3 - 2x^2}{(x^2+n^3)^2 + 4x^2}$; z rovnice $2n^3 - 2x^2 = 0$ obdržíme: $x = \pm n\sqrt{n}$

Lok. maximum nastane pro $x = n\sqrt{n}$; $y_{max} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \varphi(n) = a_n$

Je zřejmě splněno $\left| \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| \leq \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{n^2}$, ale vzhledem k nerovnosti $|\operatorname{arctg} x| \leq |x|$ lze zapsat

$$\left| \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = n^{-\frac{3}{2}}$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ je majorantou dané funkční řady a o její konvergenci se můžeme přesvědčit integrálním kriteriem :

$$\int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim \left[-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right]_1^t = -2 \cdot \lim \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 \right\} = 2$$

Majoranta je konvergentní řadou a proto daná funkční řada je v intervalu $(-\infty, +\infty)$ stejnoměrně konvergentní .

263.__cvičení.__ Dokázati stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ v [illegible]

[Major. řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 e^2}$ je konvergentní.]

__Vlastnosti stejnoměrně konvergentních řad.__

Nechť funkce $f_n(x)$ jsou spojité v intervalu D a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ [illegible] stejnoměrně konvergentní. Pak platí :

1) Součet této řady $S(x)$ je také funkcí spojitou v intervalu D,

2) Danou řadu možno integrovat člen po členu v libovolném intervalu [illegible]

Vzniklá řada $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$, kde $F_n = \int f_n(x)\,dx$, má součet $\sigma(x)$, [illegible]

$$\sigma(x) = \int S(x)\,dx$$

To umožňuje někdy vypočítat součet řady, která vznikne integrováním [illegible] o známém součtu.

3) Danou řadu __můžeme derivovat__ člen po členu __jen za předpokladu__, že [illegible] jsou spojité v intervalu D a že obě řady $\sum f_n(x) = S(x)$ a $\sum f_n'$ [illegible] jsou stejnoměrně konvergentní. Přitom jest

$$S'(x) = \sigma(x)$$

To umožňuje někdy určit součet dané řady $\sum f_n(x)$, známe-li součet [illegible] $\sum f_n'(x)$.

264. __cvičení__. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2}$ je stejnoměrně konvergentní v inter[illegible]

Určiti součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$, která vznikne její integr[illegible]

[$\sigma(x) = \frac{1}{4}.\ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}$.[illegible]]

265.__cvičení.__ Dokázati, že řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a^n.\cos nx$ lze integrovat člen po členu [illegible] $0 < a < 1$.

266.__cvičení.__ Určiti funkční řadu, která vznikne integrováním člen po členu [illegible]

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x+1)^n$, [$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^{n+1}}{2(n+1)}$], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$, [$\sum_{n=1}^{\infty}$ [illegible]]

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\sin 2nx}{n^2+1}\right)$, [$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n(n^2+1)}$], d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{x}{n}$, [$\sum_{n=1}^{\infty}$ [illegible]]

267.__cvičení.__ Vyšetřiti, zda je možné derivovati člen po členu řadu :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, [Lze.], b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, [Nelze.], c) $\sum_{n=1}^{\infty}$ [illegible]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, [Lze.]

268.__cvičení.__ Určiti funkční řadu, která vznikne derivováním člen po členu [illegible]

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x-2)^n$, [$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n n (x-2)^{n-1}$], b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$, [$\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{nx}$]

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} n^2x$, [$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^4x^2}$]

P O T E N Č N Í Ř A D Y .

Nejdůležitějšími funkčními řadami jsou tzv. potenční (mocninné) řady :

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n.x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots\dots$ (potenční řada se středem v bodě 0 čili se středem v počátku.)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n.(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$ (potenční řada se středem v bodě a)

Potenční řadu druhého typu lze převést na první typ substitucí $t = x - a$. Nejčastěji se setkáme s potenční řadou se středem v počátku. Reálná čísla c_n jsou koeficienty potenční řady.

O b o r k o n v e r g e n c e mocninné řady lze určit jako u funkční řady (viz příklady /201/^{abcd} a cvičení 259 ^{abcfgh}),ale s výhodou se užívá tzv. P o l o m ě r u konvergence R,který vyšetříme jen z koeficientů jako limitu posloupnosti,o níž platí :

$$R = \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{nebo} \quad R = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} ,$$

jestliže uvedené limity existují.Existují-li obě,musejí být sobě rovny.

Je-li R poloměr konvergence řady $\sum c_n.(x-a)^n$, pak otevřený interval

$(a-R , a+R)$

nazveme interval konvergence dané řady.V krajních bodech tohoto intervalu může potenční řada konvergovat nebo divergovat,což vyšetřujeme zvlášť jako konvergenci příslušné číselné řady pro $x = a-R$, $x = a+R$.

Tzv. obor konvergence tvoří pak jeden z intervalů :

$(a-R , a+R)$, $(a-R , a+R\rangle$, $\langle a-R , a+R)$, $\langle a-R , a+R\rangle$.

Je-li $R = 0$, pak řada konverguje jen pro $x = a$. Vede-li výpočet poloměru R k nevlastní limitě $+\infty$, konverguje řada pro každé x , tj.v intervalu $(-\infty , +\infty)$.

/206/.**příklad.** Určiti obor konvergence dané potenční řady a vyšetřiti její konvergenční charakter v krajních bodech intervalu :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}.x^n = \frac{x}{2} + \frac{2!}{3^2}x^2 + \frac{2!}{4^3}.x^3 + \dots\dots$

n-tý koeficient dané řady $c_n = \frac{n!}{(n+1)^n}$

$R = \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim \left[\frac{n!}{(n+1)^n} : \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \right] = \lim \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$

Obor konvergence dané řady : $(-e , e)$.

O konvergenčním charakteru řady pro $x=e$ rozhodneme v tomto případě užitím tzv. R a a b e o v a k r i t e r i a pro číselné řady :

Platí-li od určitého n počínaje

$$n.\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > k , \text{ kde } k > 1,$$

pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ k o n v e r g u j e .

Sami se tímto kriteriem přesvědčte, že daná řada konverguje pro $x = e$, a tedy i pro $x = -e$.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n.x^n}{\sqrt{n}} = \frac{10x}{1} + \frac{10^2x^2}{\sqrt{2}} + \frac{10^3x^3}{\sqrt{3}} + \dots\dots\dots$$

n-tý koeficient dané řady $c_n = \frac{10^n}{\sqrt{n}}$. Počítejme R oběma způsoby:

$$R = \lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\left[\frac{10^n}{\sqrt{n}} : \frac{10.10^n}{\sqrt{n+1}}\right] = \lim \frac{1}{10}.\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{10}.1 = \frac{1}{10}$$

$$R = \lim\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim\frac{1}{\frac{10}{\sqrt[2n]{n}}} = \frac{1}{10}\lim (n)^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{10}.1 = \frac{1}{10}$$

Obor konvergence dané řady: $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$,

pro $x = -\frac{1}{10}$ obdržíme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.\frac{1}{\sqrt{n}}$, která je konvergentní,

pro $x = \frac{1}{10}$ obdržíme číselnou řadu, která je divergentní.

c) $$\sum_{n=0}^{\infty} (x-4)^n.\frac{3^n}{n+1} = 1 + \frac{3}{2}.(x-4) + \frac{9}{3}.(x-4)^2 + \dots\dots$$

Je to potenční řada o středu v bodě 4, $(a=4)$; $c_n = \frac{3^n}{n+1}$

$$R = \lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\left[\frac{3^n}{n+1} : \frac{3.3^n}{n+2}\right] = \frac{1}{3}.\lim\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{3}.1 = \frac{1}{3}$$

Interval konvergence má hranice: $a - R = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$, $a + R = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$

Obor konvergence dané řady: $(\frac{11}{3}, \frac{13}{3})$,

pro $x = \frac{11}{3}$ obdržíme číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} (-1).\frac{1}{n+1}$, která je konverg.

pro $x = \frac{13}{3}$ obdržíme číselnou řadu, která je divergentní.

269. cvičení. Určiti obor konvergence dané potenční řady a vyšetřiti její konvergenční charakter v krajních bodech intervalu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{x^n}{n}$, [$(-1,1)$; pro $x = -1$ diverguje, pro $x = 1$ konverguje]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, [$(-1,1)$; pro $x = \pm 1$ konverguje]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2.x^n$, [$(-1,1)$; pro $x = \pm 1$ diverguje]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n.3^{n-1}}$, [$(-3, 3)$; pro $x = -3$ konverguje, pro $x = 3$ diverguje]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}.x^{n-1}}{(2n-1)^2.\sqrt{3^{n-1}}}$, [$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; pro $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ konverguje]

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}.x^{n+1}$, [$(-1, 1)$; pro $x = -1$ konverguje, pro $x = 1$ diverguje]

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (n.x)^n$, [konverguje jen pro $x=0$]

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2}.x^n$, $[(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$; pro $x = \pm\frac{1}{e}$ diverguje $]$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!x^n$, $[$ konverguje jen pro $x = 0$ $]$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$, $[(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$; pro $x = -\frac{1}{e}$ konverguje, pro $x = \frac{1}{e}$ diverguje $]$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $[$konverguje pro každé x $]$

270.<u>cvičení</u>. Určiti obor konvergence daných potenčních řad se středem různým od počátku :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{n.5^n}$, $[R = 5$, $(3,13)$; pro $x=3$ konverguje, pro $x=13$ diverguje $]$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n.4^{n-1}}$, $[R = 4$, $(-5,3)$; pro $x = -5$ konverg. pro $x = 3$ diverg. $]$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^{2n}}$, $[R = +\infty$; řada konverguje pro každé x $]$

U potenčních řad následujícího cvičení určujte obor konvergence jako u řad funkčních. (viz cvičení 259^d).

271.<u>cvičení</u>. Určiti obor konvergence řady :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x-2)^{2n}$, $[(1 , 3)$;v krajních bodech není řada ani konver., ani diverg. $]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{4n+1}}{n!}$, $[R = +\infty$, řada konverguje pro každé x $]$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}.\sqrt{n}} . x^{2n-3}$, $[(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$; pro $x = \pm\sqrt{5}$ řada konverguje $]$

<u>V l a s t n o s t i   p o t e n č n í c h   ř a d.</u>

Nechť potenční řada $\sum c_n.x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pak platí :

1) Řada $\sum c_n x^n$ definuje v intervalu $(-R,R)$ spojitou funkci $S(x)$, která je součtem řady, což zapisujeme $S(x) = \sum c_n x^n$.

2) Potenční řada konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$ v každém uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ ležícím v intervalu $(-R,R)$.

3) Potenční řada může být derivována nebo integrována člen po členu libovolněkrát v každém uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ ležícím v intervalu $(-R,R)$. Řady vzniklé derivováním a integrováním dané potenční řady mají s ní společný poloměr konvergence.

4) Je-li $\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)'$, (součet řady po derivaci), pak $\sigma(x) = S'(x)$,

je-li $\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n x^n dx$, (součet řady po integraci), pak $\sigma(x) = \int S(x)dx + C$,

C určíme dosazením $x=0$ do poslední rovnosti.

/207/ příklad. Určiti obor konvergence a součet řady :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots.$

Obor konvergence : $(-1,1)$, pro $x = -1$ řada konverg., pro $x=1$ diverguje .

Daná řada vznikla integrováním řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-x}$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} ; \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int x^{n-1} dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C$$

Konstantu C určíme po dosazení $x = 0$ do rovnice : $\sigma(x) = -\ln(1-x) + C$

$$0 = -0 + C$$
$$C = 0$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = 1 + 2.x + 3.x^2 + \ldots\ldots.$

Obor konvergence : $(-1,1)$; pro $x = \pm 1$ řada diverguje .

Daná řada vznikla derivováním řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots = \frac{x}{1-x}$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} ; \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

272. cvičení. Určiti obor konvergence a součet řady :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; [$(-1,1)$; pro $x = \pm 1$ řada konverguje; $\sigma(x) = \operatorname{arctg} x$]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$; [$(-1,1)$; pro $x = \pm 1$ řada konverg.; $\sigma(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln \frac{1+x}{1-x}$]

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1).x^{2n}$, [$(-1,1)$ pro $x = \pm 1$ řada diverguje; $\sigma(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$]

Ř A D A   T A Y L O R O V A   a   M A C L A U R I N O V A

jsou potenční řady, které pro užití řad mají největší význam.
Dosud jsme se snažili aspoň u některých funkčních řad určiti funkci $S(x)$, která byla součtem té řady a která byla tou řadou definována. Nyní obráceně budeme za jistých předpokladů vyjadřovat danou funkci $f(x)$ nekonečnou potenční řadou. Mluvíme tak o rozvoji funkce $f(x)$ v nekonečnou potenční řadu. Platí:
Má-li funkce $f(x)$ v jistém intervalu $(a-m\,,\ a+m)$, $m>0$, derivace všech řádů, lze pro každé x z tohoto intervalu zapsat
tzv. <u>T a y l o r o v u   ř a d u   funkce $f(x)$</u> čili <u>Taylorův rozvoj funkce $f(x)$</u>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \ldots\ldots \qquad (105)$$

(rozvoj v okolí bodu <u>a</u>, prostě rozvoj v bodě <u>a</u>)
nebo pro $a=0$
tzv. <u>M a c l a u r i n o v u   řadu funkce $f(x)$</u> čili <u>Maclaurinův rozvoj funkce $f(x)$</u>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^3 + \ldots\ldots \qquad (106)$$

(rozvoj v okolí bodu 0, prostě rozvoj v bodě 0)
Vlastnosti Taylorovy(Maclaurinovy) řady se ztotožňují s vlastnostmi potenčních řad.
Rovnost pro součet funkční řady $\quad S(x) = s_n(x) + R_n(x)$
má u Taylorovy(Maclaurinovy)řady tvar $\quad f(x) = s_n(x) + R_n(x)$.
Nutná a postačující podmínka, aby Taylorova (Maclaurinova) řada v okolí bodu <u>a</u> (v okolí bodu 0) byla konvergentní a aby její součet byl roven funkci $f(x)$, jest

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (107)$$

Omezíme-li se na výpočet součtu prvních $(n+1)$ členů Taylorova(Maclaurinova) rozvoje t.j. až po člen s derivací n-tého řádu, pak příslušná chyba je vyjádřena <u>zbytkem</u> $R_n(x)$, který je nejjednodušeji vyjádřen <u>v Lagrangeově tvaru</u>:
u Taylorovy řady

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\ , \text{ kde } \ \xi = a + \vartheta\cdot(x-a)\ , \quad \vartheta\in(0,\,1)$$

u Maclaurinovy řady

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\ , \text{ kde } \ \xi = \vartheta\cdot x\ , \quad \vartheta\in(0,\,1)$$

Přes tento jednoduchý tvar zbytku bývá výpočet limity (107) někdy obtížný. Proto konvergenci Taylorovy (Maclaurinovy) řady k funkci $f(x)$ zjišťujeme raději postačující podmínkou, která praví:
Existuje-li takové číslo K, že pro všechna x z jistého okolí bodu <u>a</u> (bodu 0) a pro všechna n je splněno

$$|f^{(n)}(x)| \leq K,$$

pak v okolí bodu a (bodu 0) existuje Taylorův (Maclaurinův) rozvoj funkce $f(x)$.
Taylorův (Maclaurinův) <u>rozvoj elementárních funkcí</u> provádíme podle předpisu(105) nebo (106), k čemuž vytvořujeme postupně derivace funkce a vypočítáváme jejich hodnoty v bodě <u>a</u> nebo v bodě 0.
/208/.<u>příklad</u>. Maclaurinův rozvoj funkce $\cos x$:
Vytvořujeme postupně vyšší derivace dané funkce a vypočítáváme jejich hodnoty v bodě 0:

$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$f''(x)=-\cos x$	$f^{(3)}(x)=\sin x$	$f^{(4)}(x)=\cos x$	....
$f(0)=1$	$f'(0)=0$	$f''(0)=-1$	$f^{(3)}(0)=0$	$f^{(4)}(0)=1$	

Po dosazení do (106) obdržíme :

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}.x + \frac{-1}{2!}.x^2 + \frac{0}{3!}.x^3 + \frac{1}{4!}.x^4 + \frac{0}{5!}.x^5 + \frac{-1}{6!}.x^6 + \frac{0}{7!}.x^7 + \frac{1}{8!}.x^8 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{(2n)!}.x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots \qquad (108)$$

Obor konvergence: pro každé x (zjistíme jako u potenčních řad)

Vzniklá řada skutečně podle uvedeného kriteria konverguje k funkci $\cos x$, neboť pro derivaci kteréhokoli řádu platí

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqq 1 \qquad \text{pro všechna } x \text{ .}$$

Rozvoj funkce $\sin x$ provedeme stejným způsobem nebo výhodněji integrováním řady pro $\cos x$:

$$\sin x = x - \frac{1}{2!}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4!}.\frac{x^5}{5} - \frac{1}{6!}.\frac{x^7}{7} + \frac{1}{8!}.\frac{x^9}{9} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . \frac{1}{(2n-1)!}.x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots \qquad (109)$$

Obor konvergence : pro každé x

273.cvičení. Ověřte si následující rozvoje funkcí :

a) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ Obor konvergence: /pro každé x / (110)

b) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots + (-1)^n.x^n + \ldots$ / $(-1, 1)$ / (111)

c) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6}.x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.x^4 + \ldots\ldots$ / $\langle -1, 1 \rangle$ / (112)

d) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}.x + \frac{1.3}{2.4}.x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}.x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.x^4 + \ldots$ / $(-1, 1)$ / (113)

e) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}.\frac{1}{n}.x^n + \ldots$ / $(-1, 1\rangle$ / (114)

Rozvoje (111) , (112) , (113) jsou zvláštním případem tzv. binomické řady :

$$(1 \pm x)^r + 1 \pm \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 \pm \binom{r}{3}x^3 + \ldots + (\pm 1)^n.\binom{r}{n}x^n + \ldots \quad / \langle -1, 1 \rangle \text{ pro } r > 0,\ (-1, 1) \text{ pro } r < 0 / \qquad (115)$$

Exponent r je reálné číslo. Je-li r přirozené číslo, má řada $(r+1)$ členů.

Tzv. binomické koeficienty: $\binom{r}{1} = r$, $\binom{r}{2} = \frac{r.(r-1)}{1.\ 2}$, $\binom{r}{3} = \frac{r.(r-1).(r-2)}{1.\ 2\ .\ 3}$, ...

Například :

$$(1 \pm x)^{\frac{1}{3}} = 1 \pm \binom{\frac{1}{3}}{1}x + \binom{\frac{1}{3}}{2}x^2 \pm \binom{\frac{1}{3}}{3}x^3 + \ldots \qquad \binom{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3},\ \binom{\frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{-2}{3}}{1.\ 2} = \frac{-1}{9},\ \binom{\frac{1}{3}}{3} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{-2}{3}.\frac{-5}{3}}{1.\ 2.\ 3} = \frac{5}{81}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{3}.x - \frac{1}{9}.x^2 \pm \frac{5}{81}x^3 + \ldots$$

Obor konvergence : $\langle -1 , 1 \rangle$

$$(1 \pm x)^{-\frac{1}{3}} = 1 \pm \binom{-\frac{1}{3}}{1}x + \binom{-\frac{1}{3}}{2}x^2 \pm \binom{-\frac{1}{3}}{3}x^3 + \ldots \qquad \binom{-\frac{1}{3}}{1} = \frac{-1}{3},\ \binom{-\frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{-1}{3}.\frac{-4}{3}}{1.\ 2} = \frac{2}{9},\ \binom{-\frac{1}{3}}{3} = \frac{\frac{-1}{3}.\frac{-4}{3}.\frac{-7}{3}}{1.\ 2.\ 3} = \frac{-14}{81}$$

$$= 1 \mp \frac{1}{3}.x + \frac{2}{9}.x^2 \mp \frac{14}{81}x^3 + \ldots$$

Obor konvergence : $(-1 , 1)$

V následujícím případě provedeme předem úpravu :

$$(a \pm x)^r = a^r(1 \pm \frac{x}{r})^r = a^r.\left[1 \pm \binom{r}{1}.\frac{x}{a} + \binom{r}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \binom{r}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \ldots\right] \quad / \langle -a, a \rangle \text{ pro } r > 0,\ (-a, a) \text{ pro } r < 0 /$$

Rozvojů (110) - (113) užijeme k vytvoření rozvojů funkcí

$$e^{ax^m},\ \frac{1}{1+ax^m},\ \sqrt{1+ax^m},\ \frac{1}{\sqrt{1+ax^m}},$$

kde m je přirozené číslo , když v těchto rozvojích píšeme ax^m místo x.

274.cvičení. Určiti Maclaurinův rozvoj funkce užitím rozvojů (110) - (114). Ověřte si uvedené výsledky :

a) $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}.x^2 - \frac{1}{3!}.x^3 + \dots\dots\dots;$ [do (110) dosadíme (-x) za x]

b) $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dots + \frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots;$ [do (110) dosadíme 2x za x]

c) $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^{n+1}.\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} + \dots;$ [do (110) dosadíme $-x^2$ za x /pro každé x /]

d) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots;$ [do (111).dosadíme -x za x /$-1 \leq x < 1$ /]

e) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)};$ [do (111) dosadíme x^2 za x]

f) $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots - \frac{1}{n}x^n - \dots;$ [do (114) dosadíme -x za x /$-1 < x < 1$ /]

g) $\sqrt{1-x^3} = 1 - \frac{1}{2.1!}x^3 - \frac{1}{2^2.2!}x^6 - \frac{1.3}{2^3.3!}x^9 - \dots;$ [do(112) dosadíme $-x^3$ za x /$-1 < x < 1$ /]

h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}.x^2 + \frac{1.3}{2.4}.x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.x^6 + \dots;$ [do (113) dosadíme $-x^2$ za x /$-1 \leq x \leq 1$ /]

k) $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = 1 + \frac{1}{2}.x^3 + \frac{1.3}{2.4}x^6 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.x^9 + \dots;$ [do(113) dosadíme $-x^3$ za x]

m) $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 1 - \frac{1}{2}.x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 - \frac{1.3.5}{2.4.6}.x^{12} + \dots;$ [do(113) dosadíme x^4 za x]

Někdy před rozvojem funkce je třeba ji upravit na vhodný tvar.

/209/.příklad. Provésti rozvoj funkce $\frac{1}{3-2x}$.

Úprava funkce na tvar(111) : $\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{2}{3}x}$

Užijeme rozvoje (111) pro funkci $\frac{1}{1+x}$, kam za x dosadíme $-\frac{2}{3}x$:

$$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3}.\left[1 - (-\tfrac{2}{3}x) + (-\tfrac{2}{3}x)^2 - (-\tfrac{2}{3}x)^3 + \dots\dots\dots\right]$$
$$= \frac{1}{3}.\left[1 + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{9}x^2 + \tfrac{8}{27}x^3 + \dots\right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}x + \frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{81}x^3 + \dots$$

275.cvičení. Užitím rozvojů (108), (109) proveďte rozvoje funkcí :

a) $\sin\frac{x}{2}$; [do (109) dosaďte $\frac{x}{2}$ za x: $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 3!} + \dots\dots + (-1)^{n+1}.\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}.(2n-1)!}$]

b) $\cos 2x$; [do(108) dosaďte 2x za x: $1 - \frac{2^2}{2!}.x^2 + \frac{2^4}{4!}.x^4 - \frac{2^6}{6!}.x^6 + \dots$]

c) $\cos\sqrt{x}$; [do(108) dosaďte $\sqrt{x}$ za x: $1 - \frac{1}{2!}.x + \frac{1}{4!}.x^2 - \frac{1}{6!}.x^3 + \frac{1}{8!}.x^4 - \dots$]

d) $\sin x^2$, [do(109) dosaďte x^2 za x: $x^2 - \frac{1}{3!}.x^6 + \frac{1}{5!}.x^{10} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}$]

V některých případech hledáme rozvoj dané funkce ze známého rozvoje její derivace nebo jejího integrálu.Příklady :

Poněvadž $\int\frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|$, obdržíme rozvoj funkce $\ln|1+x|$ integrováním rozvoje funkce $\frac{1}{1+x}$. Viz rozvoje (111), (114).

Poněvadž $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x$, obdržíme rozvoj funkce arcsinx integrováním rozvoje funkce $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Viz cvičení 274[h] ;

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \dots\dots, \quad /-1 \leq x \leq 1 / \qquad (115^a)$$

276. ~~cvičení~~. Rozvoj funkce arctg x ; $\left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \; / -1 \leq x \leq 1 / \right]$

Rozvoj funkcí tvaru $x.f(x)$ nebo $\frac{f(x)}{x}$ provedeme násobením nebo dělením známého rozvoje funkce $f(x)$ číslem $x \neq 0$.

$$x.\cos x = x.\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots \right] = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \ldots \text{/pro každé x/}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}.\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots \right] = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \text{/pro } x \neq 0 \text{/}$$

277. cvičení. Určiti několik členů rozvoje funkcí :

a) $x.\cos 2x$; $\left[x - \frac{2^2}{2!}.x^3 + \frac{2^4}{4!}.x^5 - \ldots \right.$, /pro každé x/ $\left. \right]$

b) $(1+x).e^x$; $\left[1 + 2x + \frac{3}{2!}.x^2 + \frac{4}{3!}.x^3 + \ldots \right.$, /pro každé x/ $\left. \right]$

c) $\frac{x}{2-x}$; $\left[x.\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}.x + \frac{1}{2^2}.x^2 + \frac{1}{2^3}.x^3 + \ldots, \; /-2 \leq x \leq 2/ \right]$

d) $\frac{e^x - 1}{x}$; $\left[1 + \frac{1}{2!}.x + \frac{1}{3!}.x^2 + \frac{1}{4!}.x^3 + \ldots \right.$,/pro každé x/ $\left. \right]$

e) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $\left[(1+x).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots \; /-1 < x < 1/ \right]$

Rozvoj funkcí tvaru $f(x) \pm g(x)$ určíme sčítáním, příp. odčítáním řad, vzniklých rozvojem funkcí $f(x)$, $g(x)$.

Platí
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.x^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n).x^n$$

Výsledná řada má poloměr konvergence rovný nejmenšímu z čísel R_1, R_2, kde R_1 je poloměr konvergence 1. řady,

278. cvičení. Určiti Maclaurinův rozvoj funkce :

a) $e^x + \sin x$; $\left[1 + 2x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{2}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \ldots \right.$,/pro každé x/ $\left. \right]$

b) $\sinh x$; $\left[\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \right]$; c) $\cosh x$, $\left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \right]$

d) $\frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{2x^3}$, $x \neq 0$; $\left[1 + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + \ldots + \frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!} + \ldots \right.$,/pro každé x/ $\left. \right]$

e) $\ln \frac{1+x}{1-x}$; $\left[\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{1}{2n-1}.x^{2n-1} + \ldots), \; /-1 \leq x \leq 1/ \right]$

Rozvoj funkcí tvaru $f(x).g(x)$ určíme z rozvojů jednotlivých funkcí $f(x), g(x)$ násobením dvou příslušných řad.

Součinem dvou mocninných řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n.x^n$ je opět mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n.x^n$, o jejichž koeficientech c_n platí :

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Pro poloměr konvergence platí stejný vztah jako u součtu řad.

Koeficienty můžeme určovat postupně podle schemat :

$$\begin{array}{c}
a_0 \\ \downarrow \\ b_0 \\ \hline c_0 = a_0 b_0
\end{array}
\quad \vdots \quad
\begin{array}{cc}
a_0 & a_1 \\ \downarrow & \downarrow \\ b_1 & b_0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0}
\end{array}
\quad \vdots \quad
\begin{array}{ccc}
a_0 & a_1 & a_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}
\end{array}
\quad \vdots \quad
\begin{array}{cccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_3 & b_1 & b_1 & b_0 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0}
\end{array}$$

/210/.<u>příklad.</u> Určiti několik členů Maclaurinova rozvoje funkce $e^x . \sin x$.

Rozvoje jednotlivých funkcí :

$$\begin{array}{lcccccccc}
e^x & = 1 + x + & \frac{1}{2!}x^2 & + \frac{1}{3!}x^3 & + \frac{1}{4!}x^4 & + \frac{1}{5!}x^5 & + \frac{1}{6!}x^6 & + \frac{1}{7!}x^7 & + \dots\dots\dots \\
\sin x = & x & & - \frac{1}{3!}x^3 & & + \frac{1}{5!}x^5 & & - \frac{1}{7!}x^7 & + \dots\dots\dots \\ \hline
\end{array}$$

$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{6},\ a_4 = \frac{1}{24}, \dots;\ b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = -\frac{1}{6},\ b_4 = 0, .$

$$\begin{array}{c}
1 \\ 0 \\ \hline c_0 = 0
\end{array}
\ \vdots\
\begin{array}{cc}
1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{c_1 = 1+0 = 1}
\end{array}
\ \vdots\
\begin{array}{ccc}
1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{c_2 = 0+1+0 = 1}
\end{array}
\ \vdots\
\begin{array}{cccc}
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{c_3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}}
\end{array}
\ \vdots\
\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{5}{c}{c_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{6}{c}{c_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{30}}
\end{array}
\ \vdots\
\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} \\ 0 & \frac{1}{120} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{7}{c}{c_6 = \frac{1}{120} - \frac{1}{36} + \frac{1}{120} = -\frac{1}{90}}
\end{array}$$

$$e^x . \sin x = 0 + 1.x + 1.x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 0.x^4 - \frac{1}{30}.x^5 - \frac{1}{90}.x^6 + \dots\dots$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{90}x^6 + \dots\dots$$

<u>Poznámka:</u> Několik prvních členů rozvoje součinu dvou funkcí můžeme získat také násobením polynomů, přičemž dbáme, abychom násobením získali všechny mocniny, jež mají být ve výsledku.

279.<u>cvičení.</u> Určiti Maclaurinův rozvoj funkce :

a) $\ln(1-x) . \ln(1+x)$; $\left[- x^2 - \frac{5}{12}.x^4 - \frac{47}{180}.x^6 - \dots ,\ /-1 < x < 1/ \right]$

b) $(\arcsin x)^2$; $\left[x^2 + \frac{1}{3}.x^4 + \frac{8}{45}.x^6 + \dots\dots ,\ /-1 < x < 1/ \right]$

UŽITÍ POTENČNÍCH ŘAD.

Potenčních řad užijeme k řešení určitých úloh pro takové funkce, pro něž nelze tyto úlohy řešit dosud známými metodami, složenými z konečného počtu operací. Pro tyto úlohy najdeme řešení přibližné, přičemž bude možno počítat s předem požadovanou přesností.

Za tím účelem rozvineme danou funkci v Taylorovu nebo Maclaurinovu řadu za předpokladu, že funkce splňuje podmínky k rozvoji. Při výpočtu se omezíme na vhodný počet členů vzniklé funkční řady, která pro jisté x vede k řadě číselné. Chybu, které se přitom dopustíme, určíme odhadem zbytku řady. Viz str. 202 - 205.
V praxi často určujeme numericky postupně jen ty členy, které mají vliv na požadovaná desetinná místa. Počítáme-li např. přesně na k desetinných míst, vytvoříme ještě člen, který má aspoň $(k+1)$ nul za desetinnou čárkou.
Někdy provádíme transformaci dané řady v jinou řadu, která rychleji konverguje a která tedy dovoluje vzít pro požadovanou přesnost menší počet členů.

I. PŘIBLIŽNÝ VÝPOČET HODNOT FUNKCÍ.

Hodnoty goniometrických funkcí. Při výpočtu hodnot goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$ si uvědomíme, že x značí velikost úhlu v míře obloukové. Vyjadřuje-li α velikost úhlu v míře stupňové, užijeme transformační rovnice

$$\frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180} \quad \text{čili} \quad x = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha$$

/211/. příklad. Vypočítati

a) $\cos 5^\circ$ na 5 desetinných míst

Užijeme Maclaurinova rozvoje $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 - \ldots\ldots$

$$x = \frac{\pi}{180}\cdot 5 = \frac{\pi}{36}$$

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} = 1 - \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 - \ldots\ldots$$

$$\doteq 1 - 0{,}0038077 + 0{,}0000024 \doteq \underline{0{,}9961947}$$

b) $\sin 49^\circ$ na 4 desetinná místa

Řadu pro $\sin 49^\circ$ získáme výhodněji Taylorovým rozvojem pro $a = 45^\circ$

Velikosti v míře obloukové :

$$x = \frac{\pi}{180}\cdot 49 \;,\quad a = \frac{\pi}{180}\cdot 45 = \frac{\pi}{4}\;,\quad x - a = \frac{\pi}{180}(49-45) = \frac{\pi}{45}$$

$$\sin a = \cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \sin a + \frac{\cos a}{1!}(x-a) - \frac{\sin a}{2!}(x-a)^2 - \frac{\cos a}{3!}(x-a)^3 + \frac{\sin a}{4!}(x-a)^4 + \ldots$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1 + \frac{\pi}{45} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{45}\right)^2 - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{45}\right)^3 + \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\pi}{45}\right)^4 + \ldots\right)$$

$$\doteq 0{,}7071068\cdot(1 + 0{,}0698131 - 0{,}0024369 - 0{,}0000567)$$

$$\doteq \underline{0{,}754709}$$

280. cvičení. Vypočtěte s udanou přesností :
a) $\sin 1^\circ$ s přesn. 0,0001, [0,0175] ; b) $\cos 10^\circ$ s přesn. 0,0001, [0,9848]

c) sin 18 s přesn. 0,001 , [0,309], d) sin 36° s přesn. 0,0001, [0,5878]

Hodnoty iracionálních funkcí (vyšší odmocniny) určujeme přibližně užitím binomické řady (115). Pro $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{m}$ určujeme hodnoty odmocnin. Číslo, které je odmocněncem, nahradíme součtem nebo rozdílem dvou čísel, z nichž první je m-tou mocninou přirozeného čísla.

/212/. příklad. Vypočtěte na 6 desetinných míst $\sqrt[4]{83}$.

$$83 = 81 + 2 = 3^4 + 2 = 3^4.(1 + \frac{2}{81})$$

$$\sqrt[4]{83} = 3.\sqrt[4]{1 + \frac{2}{81}} = 3.(1 + \frac{2}{81})^{\frac{1}{4}}$$

$$= 3.\left[1 + \binom{\frac{1}{4}}{1}.\frac{2}{81} + \binom{\frac{1}{4}}{2}.(\frac{2}{81})^2 + \binom{\frac{1}{4}}{3}.(\frac{2}{81})^3 + \binom{\frac{1}{4}}{4}.(\frac{2}{81})^4 + \ldots\right]$$

$$\doteq 3.\left[1 + \frac{1}{162} - \frac{1}{162.108} + \frac{7}{162.108.486} - \frac{7}{162.108.486.54}\right]$$

$$\doteq 3.\left[1 + 0{,}0061728 - 0{,}0000572 + 0{,}0000008\right] \doteq \underline{3{,}0183492}$$

/213/. příklad. Vypočtěte na 5 desetinných míst $\sqrt[3]{121}$.

$$\sqrt[3]{121} = \sqrt[3]{125 - 4}$$

$$= 5.(1 - \frac{4}{125})^{\frac{1}{3}} = 5.\left[1 - \binom{\frac{1}{3}}{1}.0{,}032 + \binom{\frac{1}{3}}{2}.0{,}032^2 - \binom{\frac{1}{3}}{3}.0{,}032^3 + \binom{\frac{1}{3}}{4}.0{,}032^4 + .\right]$$

$$\doteq 5.\left[1 - 0{,}0106667 - 0{,}0001138 - 0{,}0000020\right] \doteq \underline{4{,}946088}$$

281. cvičení. Vypočtěte

a) $\sqrt[5]{245}$ na 3 des. místa, [3,004], b) $\sqrt[7]{129}$ na 4 des. místa, [2,0022]

282. cvičení. Napište binomickou řadu pro $\sqrt[3]{0{,}997}$ $\sqrt[3]{70}$, $\sqrt[5]{40}$, při výpočtu se omezte na dva členy řady a odhadněte, která des. místa jsou určena přesně. [0,999 ; 4,125 ; 2,1]

Hodnoty exponenciální funkce e^x určujeme podle rozvoje (110) :

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}.x + \frac{1}{2!}.x^2 + \frac{1}{3!}.x^3 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}.x^n + \ldots\ldots \quad \text{(pro každé } x\text{)}$$

Pro x=1 dospějeme k řadě pro iracionální číslo e :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \ldots\ldots$$

$$\doteq 2 + 0{,}5 + 0{,}166667 + 0{,}041667 + 0{,}008333 + 0{,}001389 + 0{,}000198 + 0{,}000025$$

$\doteq$ $\underline{2{,}718}279$. Pro zajištění 4. des. místa by bylo třeba vyvinout ještě člen.

Pro $x = \frac{1}{3}$ obdržíme řadu $\sqrt[3]{e}$:

$$\sqrt[3]{e} = 1 + 1.\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{1}{9} + \frac{1}{6}.\frac{1}{27} + \frac{1}{24}.\frac{1}{81} + \ldots\ldots$$

$$\doteq 1 + 0{,}3333333 + 0{,}0555555 + 0{,}0061728 + 0{,}0005144 = \underline{1{,}3}95578$$

283. cvičení. Vypočtěte

a) e^2 s přesn. 0,001, [7,389], b) $\frac{1}{e}$ s přesn. 0,0001 , [0,3679] ,

c) $\sqrt{e}$ s přesn. 0,001 , [1,649] , d) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ s přesn. 0,0001 , [0,7788]

Hodnoty logaritmické funkce, pokud jde o přirozené logaritmy, určujeme užitím následujícího rozvoje, poněvadž příslušná řada konverguje rychleji než u rozvoje (114).

Tedy: $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2.(x + \frac{1}{3}.x^3 + \frac{1}{5}.x^5 + \ldots\ldots + \frac{1}{2n-1}.x^{2n-1} + \ldots\ldots)$

Hledáme-li ln a, a>0 , vypočteme z rovnice $\frac{1+x}{1-x} = a$ neznámou x, kterou dosadíme do rozvoje.

/214/.příklad. Vypočítati ln 2 na 3 desetinná místa.

$$\frac{1+x}{1-x} = 2 \text{ , z čehož } x = \frac{1}{3}$$

$$\ln 2 = 2.\left(x + \frac{1}{3}.x^3 + \frac{1}{5}.x^5 + \dots\dots\dots \right) \text{ pro } x = \frac{1}{3}$$

$$= 2.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}.\frac{1}{3^7} + \dots\dots\dots \right)$$

$$\doteq 2.(0{,}33333333 + 0{,}01234568 + 0{,}00082304) = \underline{0{,}693}0041$$

284.<u>cvičení.</u> Vypočtěte $\ln 3$ s přesností 0,0001 , [1,0986]

<u>Výpočet čísla π</u> možno určit buď z rozvoje funkce arcsin x , neboť $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

nebo z rozvoje funkce arctg x , neboť $\text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$.

Podle (115^a):

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152} + \dots\dots\dots ,$$

Podle cvič.276 :

$$\text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\dots\dots$$

V obou případech konvergují řady velmi pomalu,takže při výpočtu např.jen na dvě desetinná místa bylo by třeba sečíst větší počet členů.

Vycházíme-li z rozvoje pro arctg x,vidíme,že příslušná řada konverguje tím rychleji,čím menší je x.

Volme s výhodou $x = \frac{1}{5}$ a označme $\varphi = \text{arctg}\, \frac{1}{5}$, z čehož $\text{tg}\, \varphi = \frac{1}{5}$ / 1 /

Vytvořme: $$\text{tg}\, 2\varphi = \frac{2.\text{tg}\varphi}{1 - \text{tg}^2\varphi} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

$$\text{tg}\, 4\varphi = \frac{2.\text{tg}2\varphi}{1 - \text{tg}^2 2\varphi} = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} \doteq 1 = \text{tg}\, \frac{\pi}{4}$$

Poněvadž $\text{tg}\, 4\varphi \doteq \text{tg}\, \frac{\pi}{4}$, je $4\varphi \doteq \frac{\pi}{4}$. Příslušný rozdíl označíme

$$\psi = 4\varphi - \frac{\pi}{4} \text{ , z čehož } \frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi \qquad / 2 /$$

$$\text{tg}\, \psi = \text{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\text{tg}4\varphi - 1}{1 + \text{tg}4\varphi} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

$$\psi = \text{arctg}\, \frac{1}{239} \qquad / 3 /$$

Z rovnosti / 2 / a po dosazení z / 1 / a / 3 / obdržíme :

$$\frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi = 4.\text{arctg}\, \frac{1}{5} - \text{arctg}\, \frac{1}{239}$$

Podle cvič.276 rozvineme $\text{arctg}\, \frac{1}{5}$ a $\text{arctg}\, \frac{1}{239}$:

$$\frac{\pi}{4} = 4.\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}.\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}.\frac{1}{5^7} + \dots\dots \right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}.\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{239^5} - \dots\dots \right]$$

$$\doteq 4.\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{375} + \frac{1}{15625} - \frac{1}{546875} \right] - \left[\frac{1}{239} - \dots\dots\dots\dots\dots\dots \right]$$

$$\doteq 4.\left[0{,}2 - 0{,}0026667 + 0{,}000064 - 0{,}0000018 \right] - \left[0{,}0041841 - \dots\dots\dots\dots \right]$$

Počítáme-li π na 5 des.míst,nemají na tato místa vliv další členy obou řad.

$$\frac{\pi}{4} \doteq 0{,}7853979$$

$$\pi \doteq \underline{3{,}1415916}$$

II. INTEGRACE UŽITÍM POTENČNÍCH ŘAD.

Jsou funkce, k nimž nedovedeme elementárními metodami vyšetřiti primitivní funkce čili jež nedovedeme integrovat užitím známých integračních metod. Takové funkce rozvineme v potenční řadu a integrujeme člen po členu v příslušném konvergenčním intervalu.

/215/. příklad. Vypočítati integrál $\int \frac{e^x}{x}\,dx$

Rozvoj funkce $\frac{e^x}{x}$:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}\cdot x^n + \ldots\ldots \quad /\cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2!}\cdot x + \frac{1}{3!}\cdot x^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}\cdot x^{n-1} + \ldots$$

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}\cdot x^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}\cdot x^{n-1} + \ldots\right) dx$$

$$= \ln|x| + x + \frac{1}{2.2!}\cdot x^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n.n!}\cdot x^n + \ldots + C$$

Počítáme-li užitím potenční řady určitý integrál funkce neintegrovatelné elementárními metodami, musejí integrační meze ležet v konvergenčním intervalu příslušné potenční řady.

/216/. příklad. Vypočtěte $\int_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x}dx$, přičemž sečtěte šest členů příslušné řady.

Užijeme primitivní funkce vypočtené v předešlém příkladě.

$$\int_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x}\,dx \doteq \left[\ln|x| + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{18}\cdot x^3 + \frac{1}{96}\cdot x^4 + \frac{1}{600}\cdot x^5 \right]_{0,1}^{1}$$

$$\doteq 0 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} - \left\{ -\ln 10 + \frac{1}{10} + \frac{1}{400} + \frac{1}{18000} + \ldots \right\}$$

	1	0,1
	0,25	0,002 500
	0,055 556	0,000 055
	0,010 416	0,000 001
	0,001 666	0,000 000 016
	1,317 638	0,102 556 016
−	0,102 556	
	1,215 082	+
ln10	2,302 69	
	3,517 77	

285. cvičení. Vypočtěte integrály :

a) $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\left[C + x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots \right]$

b) $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$, $\left[C + \ln|x| - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^4}{4.4!} - \ldots + (-1)^n\cdot \frac{x^{2n}}{2n.(2n)!} + \ldots\ldots \right]$

c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{x^2}\,dx$, $\quad \left[\, C - \frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2.3!} + \dots + \frac{x^n}{n(n+1)!} + \dots \,\right]$

286. <u>cvičení.</u> Danou funkci vyjádřiti řadou.

a) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$, $\quad \left[\, x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} + \dots + (-1)^{n+1}. \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!} + \dots \,\right]$

b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$, $\quad \left[\, x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \dots + (-1)^{n+1}. \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \dots \,\right]$

c) $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$, $\quad \left[\, x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1}. \frac{x^n}{n^2} + \dots \,\right]$

d) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^9}\,dt$, $\quad \left[\, x + \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{19}}{19} + \dots + \frac{x^{9n-8}}{9n-8} + \dots \,\right]$

e) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$, $\quad \left[\, x + \frac{1}{2}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\,.\,\frac{x^9}{9} + \dots + \frac{1.3.\dots.(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}.\frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots \,\right]$

287. <u>cvičení.</u> Vypočítati dané určité integrály :

a) $\displaystyle\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$ s přesn. 0,001 , [32,831]

b) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^4}\,dx$ s přesn. 0,001 , [0,494]

c) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ na 3 des. místa, [0,497]

d) $\displaystyle\int_0^{0,25} e^{-x^2}dx$ na 4 des. místa, [0,2448]

e) $\displaystyle\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ na 4 des. místa, [0,7635]

f) $\displaystyle\int_1^{1,5} \frac{1}{x}.\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\,dx$ na 4 des. místa, [0,1211]

g) $\displaystyle\int_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{4}\,dx$ na 3 des. místa , [0,500]

h) $\displaystyle\int_0^{0,125} \sqrt[3]{x}.\cos^2 x\,dx$ na 3 des. místa, [0,047]

INTEGRACE DIF. ROVNIC pomocí řad.

Nelze-li řešení diferenciální rovnice určit pomocí elementárních funkcí konečným počtem operací, hledáme přibližné řešení diferenciální rovnice užitím potenčních řad.

VÝPOČET PARTIKULÁRNÍHO ŘEŠENÍ.

V aplikacích určujeme nejčastěji partikulární řešení vyhovující počátečním podmínkám. U rovnic k-tého řádu

$F(x,y,y',y'',y^{(3)},\ldots\ldots\ldots y^{(k)}) = 0$ jsou počáteční

podmínky dány hodnotami $y, y', y'', y^{(3)}, \ldots y^{(k-1)}$ pro určité $x=x_0$.

Počáteční podmínky pro rovnice I.řádu se zapisují : $y(x_0) = a$,

počáteční podmínky pro rovnice II.řádu se zapisují: $y(x_0) = a$, $y'(x_0) = b$

a podobně u rovnic vyšších řádů.

1. Řešení diferenciální rovnice ve tvaru Taylorovy (Maclaurinovy) řady :

$$y = y(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}\cdot y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\cdot y''(x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (116)$$

Postup výpočtu sestává v podstatě z těchto kroků :

a) Do dané rovnice k-tého řádu dosadíme dané počáteční podmínky a vypočteme $y^{(k)}(x_0)$, tj. hodnotu k-té derivace v bodě x_0.

b) Rovnici postupně derivujeme a po každé derivaci dosadíme $x=x_0$ a dosud známé vyšší derivace v tomto bodě (po příp.úpravě na explic.tvar). Ze vzniklé rovnice vypočteme vždy hodnotu derivace o řád vyšší v bodě x_0.

/217/.příklad. Určiti řešení rovnice $y'' = x^2 y$ při počátečních podmínkách :
$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

a) Dosadíme do dané rovnice $y''(0) = 0.1$, z čehož $y''(0) = 0$

b) Danou rovnici postupně derivujeme :

Postupná derivace	Dosazení	Výpočet vyšší derivace
$y^{(3)} = 2x.y + x^2.y'$	$y^{(3)} = 2.0.1 + 0^2.1$	$y^{(3)}(0) = 0$
$y^{(4)} = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y''$ $= 2y + 4xy' + x^2y''$	$y^{(4)} = 2.1 + 0 + 0$	$y^{(4)}(0) = 2$
$y^{(5)} = 2y' + 4y' + 4xy'' + 2xy'' + x^2y^{(3)}$ $= 6y' + 6xy'' + x^2y^{(3)}$	$y^{(5)} = 6.1 + 0 + 0$	$y^{(5)}(0) = 6$
$y^{(6)} = 12y'' + 8xy^{(3)} + x^2y^{(4)}$	$y^{(6)} = 12.0 + 0 + 0$	$y^{(6)}(0) = 0$
$y^{(7)} = 20y^{(3)} + 10xy^{(4)} + x^2y^{(5)}$	$y^{(7)} = 20.0 + 0 + 0$	$y^{(7)}(0) = 0$
$y^{(8)} = 30y^{(4)} + 12xy^{(5)} + x^2y^{(6)}$	$y^{(8)} = 30.2 + 0 + 0$	$y^{(8)}(0) = 60$

c) Dosadíme do (116) $x_0 = 0$ a vypočtené vyšší derivace :

$$y = 1 + \frac{x}{1!}\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}.0 + \frac{x^3}{3!}.0 + \frac{x^4}{4!}.2 + \frac{x^5}{5!}.6 + \frac{x^6}{6!}.0 + \frac{x^7}{7!}.0 + \frac{x^8}{8!}.60 + \ldots\ldots$$

Po úpravě obdržíme partikulární řešení dané rovnice, vyjádřené řadou :

$y = 1 + x + \frac{1}{12}.x^4 + \frac{1}{20}.x^5 + \frac{1}{672}.x^8 + \ldots\ldots\ldots$ v jejím konvergenčním intervalu.

Podle potřebné přesnosti vytvoříme si další členy rozvoje.

2. **Řešení diferenciální rovnice ve tvaru potenční řady :**

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

nebo $\quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (pro $x_0 = 0$)

Postup poznáme na konkretním případě.

/218/.**příklad.** Určiti řešení rovnice $y'' + xy = 0$ při počátečních podmínkách : $x_0 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Užijeme řady :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + \ldots$$

a) Dosadíme do potenční řady z počátečních podmínek a vypočteme koeficient a_0 :

$1 = a_0 + 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots\ldots$ $\qquad\qquad$ $a_0 = 1$

Pak

$y = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots\ldots$

$y' = \quad a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots\ldots$. Po dosazení $x=0$., $y'(0) = 0$:

$0 = \quad a_1 + 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots$, z čehož $a_1 = 0$. Pak

$y' = 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + 8a_8x^7 + \ldots\ldots\ldots$

b) Vytvoříme ty derivace potenční řady, jež se vyskytují v dané rovnici a do rovnice dosadíme za y, y', y''. Přitom výpočet vhodně zapisujeme :

$$+\begin{cases} y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + 56a_8x^6 + \ldots\ldots\ldots \\ xy = \quad x \quad + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + a_5x^6 + \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Výraz $y'' + xy$ upravíme na mnohočlen podle mocnin x :

$$2a_2 + (6a_3+1)x + 12a_4x^2 + (20a_5+a_2)x^3 + (30a_6+a_3)x^4 + (42a_7+a_4)x^5 + (56a_8+a_5)x^6 = 0$$

Z rovnosti mnohočlenů plyne :

$2a_2 = 0$	$6a_3+1 = 0$	$a_4 = 0$	$20a_5 + a_2 = 0$	$30a_6 + a_3 = 0$	$42a_7 + a_4 = 0$	$56a_8 + a_5 = 0$
$a_2 = 0$	$a_3 = -\frac{1}{6}$		$a_5 = 0$	$a_6 = \frac{1}{180}$	$a_7 = 0$	$a_8 = 0$

Hledané partikulární řešení dané rovnice :

$y = 1 + 0.x + 0.x^2 - \frac{1}{6}.x^3 + 0.x^4 + 0.x^5 + \frac{1}{180}.x^6 + 0.x^7 + \ldots\ldots$

$y = 1 - \frac{1}{6}.x^3 + \frac{1}{180}.x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

288.**cvičení.** Určiti partikulární řešení dané rovnice :

a) $y' + y^2 = e^x$, $y(0) = 0$; $\qquad$ [$y = 1 + x + \frac{1}{2}.x^2 + \ldots\ldots$]

b) $y' - y^2 = x(x+1)$, $y(0) = 1$; $\quad$ [$y = 1 + x + \frac{3}{2}.x^2 + \ldots\ldots$]

c) $y' = 1 + x - y^2$, $y(0) = 1$; $\quad$ [$y = 1 + \frac{1}{2}.x^2 - \frac{1}{3}.x^3 + \frac{1}{6}.x^4 - \frac{7}{60}.x^5 + \ldots\ldots$]

d) $y' + xy^2 = 2.\cos x$, $y(0)=1$; $\quad$ [$y = 1 + 2x - \frac{1}{2}.x^2 - \frac{5}{3}.x^3 + \ldots\ldots$]

e) $y'' + a^2y = 0$, $y(0)= 0$, $y'(0) = a$; [$y = ax - \frac{a^3}{3!}.x^3 + \frac{a^5}{5!}.x^5 + \ldots$]

f) $y'' - y.e^x = 0$, $y(0)= 2$, $y'(0) = 1$; [$y = 2 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \ldots$]

g) $y'' + y.\cos x = 0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$. $\left[\, y = 3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{80}x^6 + \frac{1}{2688}x^8 + \dots\dots \right]$

h) $y'' - y.\cos x = x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $\left[\, y = 1 + \frac{1}{2!}.x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}.x^5 + \dots\dots\dots \right]$

k) $y'' - y'.\sin x + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 1$, $\left[\, y = x + \frac{1}{2!}.x^2 + \frac{1}{4!}.x^4 - \frac{1}{5!}.x^5 + \dots\dots \right]$

m) $x.y^{(4)} + 4y^{(3)} - xy - 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = -2$, $y'''(1) = 3!$.

(Užijte Taylorovy řady $y = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots\dots\dots$

nebo potenční řady $y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots\dots\dots\dots$)

$\left[\, y = -1 + (x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 + \dots\dots\dots \right.$ čili $y = -\frac{1}{x}$ pro $|x-1| < 1$ $\left.\right]$

VÝPOČET OBECNÉHO ŘEŠENÍ.

Obecné řešení diferenciální rovnice je vyjádřeno konstantami, a to u diferenciálních rovnic n-tého řádu **n** konstantami.

1. Užíváme-li při výpočtu Maclaurinovy řady, zavedeme obecné konstanty tak, že položíme

$$f(0) = A\ ,\ f'(0) = B\ ,\ f''(0) = C\ ,\ f'''(0) = D\ ,\ \dots\ f^{(n-1)}(0) = M.$$

/219/. příklad. Užitím řad určiti obecné řešení diferenciální rovnice

$$(1-x^2).y'' - x.y' - 2 = 0\ .$$

Dané rovnice je druhého řádu, zavedeme dvě konstanty : $f(0) = A$, $f'(0) = B$.

a) Dosadíme do dané rovnice: $x = 0$, $y = A$, $y' = B$:

$(1-0).y''(0) - 0.B - 2 = 0$, z čehož $y''(0) = 2$

b) Danou rovnici postupně derivujeme :

Postupné derivace	Dosazení	Výpočet vyšší derivace
$-3x.y'' + (1-x^2).y''' - y' = 0$	$y''' - B = 0$	$y''' = B$
$-4y'' - 5x.y''' + (1-x^2).y^{(4)} = 0$	$-6 + y^{(4)} - 2 = 0$	$y^{(4)} = 8$
$-9y''' - 7x.y^{(4)} + (1-x^2).y^{(5)} = 0$	$-9B + y^{(5)} = 0$	$y^{(5)} = 9B$
$-16y^{(4)} - 9xy^{(5)} + (1-x^2)y^{(6)} = 0$	$-128 + y^{(6)} = 0$	$y^{(6)} = 128 = 2.4.16$
		$y^{(7)} = 9.25.B$

Dosadíme do Maclaurinovy řady :

$$y = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}.x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \dots\dots\dots$$

$$y = A + Bx + \frac{2}{2!}.x^2 + \frac{B}{3!}.x^3 + \frac{8}{4!}.x^4 + \frac{9B}{5!}.x^5 + \frac{2.4.16}{6!}.x^6 + \dots\dots$$

$$= A + B.\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{9x^5}{5!} + \frac{9.25}{7!}.x^7 + \dots\dots\dots\right) + 2.\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} + \frac{64x^6}{6!} + \dots\right)$$

V poslední rovnosti se vyskytují rozvoje funkcí $\arcsin x$, $(\arcsin x)^2$.
takže obecné řešení dané rovnice má tvar :

$$y = A + B.\arcsin x + (\arcsin x)^2$$

2. Užíváme-li při výpočtu potenční řady $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\dots$, zavedeme konstanty tak, že u rovnic n-tého řádu považujeme **n** koeficientů za pevné. Položíme tedy :

$$a_0 = A\ ,\ a_1 = B\ ,\ a_2 = C\ ,\ a_3 = D\ ,\ \dots\dots\dots$$

/220/. příklad. Užitím řad určiti obecné řešení rovnice $y'' + x.y' + y = 0$.

Rovnice je druhého řádu a proto zavedeme : $a_0 = A$, $a_1 = B$.

Obecné řešení bude mít tedy tvar:

$$y = A + Bx + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + \dots\dots\dots$$

$$y = \quad B + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + 8a_8x^7 + 9a_9x^8 + \ldots\ldots$$

$$y'' = \quad 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + 56a_8x^6 + 72a_9x^7 + \ldots.$$

Pro dosazení do dané rovnice za y , y' , y'' provedeme úpravu :

$$\left.\begin{array}{lllllllllll} y'' = & 2a_2 & + 6a_3x & + 12a_4x^2 & + 20a_5x^3 & + 30a_6x^4 & + 42a_7x^5 & + 56a_8x^6 & + 72a_9x^7 & + \ldots\ldots\ldots \\ xy' = & & Bx & + 2a_2x^2 & + 3a_3x^3 & + 4a_4x^4 & + 5a_5x^5 & + 6a_6x^5 & + 7a_7x^7 & + \ldots\ldots\ldots \\ y = & A & + Bx & + a_2x^2 & + a_3x^3 & + a_4x^4 & + a_5x^5 & + a_6x^6 & + a_7x^7 & + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} +$$

$$(2a_2+A)+(6a_3+2B)x+(12a_4+3a_2)x^2+(20a_5+4a_3)x^3+(30a_6+5a_4)x^4+(42a_7+6a_5)x^5 +$$
$$+(56a_8+7a_6)x^6+(72a_9+8a_7)x^7 + \ldots.. = 0$$

Z rovnosti mnohočlenů plyne :

$2a_2+A=0$	$6a_3+2B=0$	$12a_4+3a_2=0$	$20a_5+4a_3=0$	$30a_6+5a_4=0$	$42a_7+6a_5=0$	$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$a_2=-\frac{A}{2}$	$a_3=-\frac{1}{3}B$	$a_4=\frac{1}{8}A$	$a_5=\frac{1}{15}B$	$a_6=-\frac{1}{48}A$	$a_7=-\frac{1}{105}B$	

Dosadíme do potenční řady :

$$y = A + Bx - \frac{A}{2}x^2 - \frac{1}{3}Bx^3 + \frac{1}{8}Ax^4 + \frac{1}{15}Bx^5 - \frac{1}{48}Ax^6 - \frac{1}{105}Bx^7 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{čili}$$

$$y = A.\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + \ldots\ldots\ldots\right) + B.\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{105}x^7 + \ldots..\right)$$

289. <u>cvičení.</u> Užitím řad určiti obecné řešení diferenc.rovnice :

a) $y'' + xy = 0$, $\left[y = A.\left(1 - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.5.6}x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right) + \right.$

$\left. + B.\left(x - \frac{1}{3.4}x^4 + \frac{1}{3.4.6.7}x^7 - \frac{1}{3.4.6.7.9.10}x^{10} + \ldots..\right) \right]$

b) $y'' - xy + y = 0$, $\left[y = Bx + A\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1.3}{6!}x^6 - \ldots\ldots\ldots\right) \right]$

c) $y'' + a^3xy = 0$, $\left[y = A.\left(1 - \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{4a^6}{6!}.x^6 - \frac{4.7a^9}{9!}.x^9 + \ldots\ldots\ldots\right) + \right.$

$\left. + \frac{B}{a}.\left(ax - \frac{2a^4}{4!}.x^4 + \frac{2.5a^7}{7!}.x^7 - \ldots\ldots\ldots.\right) \right]$

d) $y'' + a^4x^2y = 0$, $\left[y = A.\left(1 - \frac{1.2}{4!}.a^4x^4 + \frac{1.2.5.6}{8!}.a^8x^8 + \ldots\ldots\right) + \right.$

$\left. + Bx.\left(1 - \frac{2.3}{5!}.a^4x^4 + \frac{2.3.6.7}{9!}.a^8x^8 - \ldots.\right) \right]$