Kapitola V.

FOURIEROVY ŘADY

PERIODICKÉ FUNKCE.

U některých funkcí se průběh funkce opakuje. Takové funkce vyjadřují periodické děje, s nimiž se setkáváme v technických úlohách (chvění konstrukcí, ustálený pohyb pístu parního stroje, ustálené točivé pohyby, střídavé elektrické proudy a pod.). Definujeme je takto :

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná pro všechna reálná x. Existuje-li takové kladné číslo p, že pro každé x platí

$$f(x + p) = f(x) ,$$

pravíme, že funkce $f(x)$ je periodická s periodou p.

Poznámka. Je-li p perioda funkce $f(x)$, pak každý celočíselný násobek $k.p$ je také periodou funkce $f(x)$. Nejmenší kladnou periodu T nazveme základní, též primitivní perioda.

Pro průběh celé periodické funkce stačí tedy znát její průběh v jednom a to kterémkoli intervalu délky T.

Připomeňme si nejjednodušší periodické funkce a to funkce goniometrické $\sin x$ a $\cos x$ s periodou 2π :

$$\sin(x + k.2\pi) = \sin x , \quad \cos(x + k.2\pi) = \cos x$$

Převedení periodické funkce s periodou T na periodické funkce s periodou 2π.

Platí: Funkci $f(x)$, definovanou pro všechna x a mající základní periodu T, lze transformací

$$x = \frac{T}{2\pi}.u \tag{117}$$

převést na funkci periodickou $F(u)$ s periodou 2π.

Tedy: platí-li $f(x+T) = f(x)$, pak po transformaci $f(x) = f(\frac{T}{2\pi}u) = F(u)$ má platit $F(u+2\pi) = F(u)$.

Toto tvrzení si ověříme, když rovnost $F(u) = f(\frac{T}{2\pi}u)$ zapíšeme pro argument $u+2\pi$:

$$F(u+2\pi) = f\left[\frac{T}{2\pi}(u+2\pi)\right] = f(u\frac{T}{2\pi} + T) = f(x+T) = f(x) = F(u)$$

Při vyšetřování periodických funkcí můžeme se tedy omezit na funkce s periodou 2π, neboť na takové funkce lze transformovat funkce s jinou periodou.

TRIGONOMETRICKÁ ŘADA.

Rozvoj funkce v potenční řadu byl nejjednodušším vyjádřením dané funkce nekonečnou řadou. Dalším důležitým případem rozvoje v nekonečnou řadu je rozvoj do tzv. trigonometrické řady, jejíž členy budou obsahovat periodické funkce $\sin nx$, $\cos nx$. Trigonometrické řady odvozujeme pro periodické funkce.

K tvaru obecného členu trigonometrické řady přicházíme z obecné funkce sinové

$$f(x) = A.\sin(\omega t + \varphi) ,$$

vyjadřující jednoduché harmonické kmitání. Viz I.díl, str. 79.

Ukazuje se, že složitější kmitání lze vyjádřit jako součet nekonečné řady jednoduchých harmonických kmitů. Obecný člen této řady má tvar

$$u_n = A_n.\sin(n.\omega t + \varphi_n) ,$$

což lze rozepsat

$$u_n = A_n.(\sin n\omega t.\cos\varphi_n + \cos n\omega t.\sin\varphi_n)$$

a uvést na tvar $\quad u_n = a_n . \cos n . \omega t + b_n . \sin n . \omega t$

A to je již tvar n-tého členu tzv. trigonometrické řady, v níž pro formální zjednodušení klademe $u_o = \frac{1}{2} . a_o$ a kterou pro $T = 2\pi$, a tedy $\omega = 1$, zapisujeme :

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k . \cos kx + b_k . \sin kx) \quad \text{čili}$$

$$\frac{a_o}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots\ldots + a_k \cos kx + b_k \sin kx + \ldots$$

Uvažujeme-li součet jen pro k=1 až k=n, obdržíme tzv. trigonom. polynom

$$P_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Jestliže trigonometrická řada je stejnoměrně konvergentní, pak její součet je spojitou periodickou funkcí $f(x)$ o periodě 2π. Zapisujeme

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Pro její koeficienty a_o, a_k, b_k se odvozuje :

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \;, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) . \cos kx\, dx \;, \; k=1,2,3,\ldots \qquad (118)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) . \sin kx\, dx \;, \; k=1,2,3,\ldots \qquad (119)$$

Trigonometrická řada s takovými koeficienty se nazývá Fourierova řada funkce $f(x)$. Koeficienty (118),(119) se nazývají Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$.

Určení Fourierových koeficientů nám usnadňuje tato skutečnost :

je-li $f(x)$ funkce l i c h á, jsou	je-li $f(x)$ funkce s u d á, jsou
$a_k = 0$	$b_k = 0$

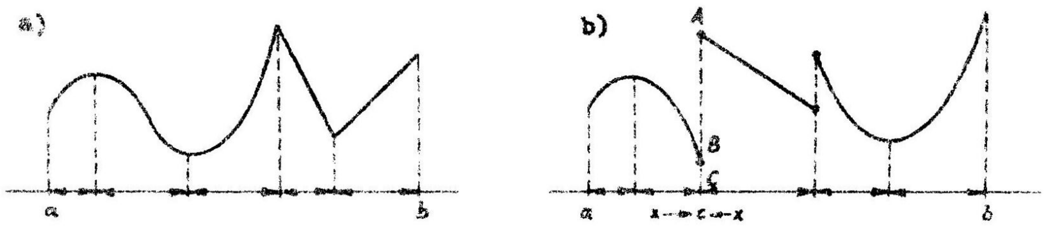
Fourierovu řadu zapisujeme obvykle jako součet dvou řad, „ řady kosinové " a „ řady sinové " :

$$f(x) = \frac{1}{2} a_o + (a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots\ldots + a_k \cos kx + \ldots\ldots) +$$
$$+ (b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots\ldots + b_k \sin kx + \ldots\ldots)$$

Lichá funkce $f(x)$ se rozvine jen v řadu sinovou, sudá funkce v řadu kosinovou.

DIRICHLETOVY PODMÍNKY pro rozvoj funkce ve Fourierovu řadu :

1) Funkce $f(x)$ je v intervalu $\langle a,b \rangle$ ohraničená.
2) Interval $\langle a,b \rangle$ možno rozdělit na konečný počet intervalů, v nichž je funkce $f(x)$ spojitá a monotónní.



Obr. 62

(To znamená, že buď je funkce $f(x)$ v celém intervalu spojitá nebo má v intervalu a,b konečný počet bodů nespojitosti 1. druhu.)

3) V každém bodě nespojitosti existují konečné jednostranné limity .
např. v obr. 62^b :

$$\lim_{x \to c-} f(x) = BC = f(c-0) \quad , \quad \lim_{x \to c+} f(x) = AC = f(c+0) \quad \text{apod.}$$

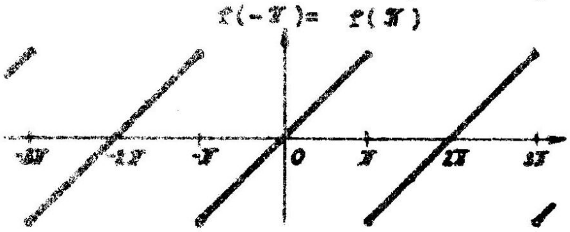
<u>DIRICHLETOVA VĚTA</u> pro součet Fourierovy řady :

Splňuje-li funkce $f(x)$ Dirichletovy podmínky, pak její Fourierova řada konver - guje v každém bodě x k hodnotě

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot\left[f(x+0) + f(x-0) \right]$$

To znamená: <u>v bodě nespojitosti</u> je $S(x)$ rovno aritmetickému průměru jedno - stranných limit v tom bodě,
<u>v bodě spojitosti</u> je $S(x) = f(x)$.

/221/. <u>příklad</u>. Určiti Fourierův rozvoj periodické funkce s periodou 2π, která je v základním intervalu periodicity $(-\pi, \pi\rangle$ takto definována :
$f(x) = x$ pro $-\pi < x \leq \pi$
$f(-\pi) = f(\pi)$



Obr.63

Funkce splňuje Dirichletovy podmínky :
1) V intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ je ohraničená.
2) V celém intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ je spojitá a rostoucí.
3) Krajní body intervalu jsou body nespojitosti 1.druhu.

Výpočet Fourierových koeficientů dané řady :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Daná funkce je lichá, koeficienty a_k jsou pro každé k rovny nule. Ověříme si to:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x.\cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{x}{k}.\sin kx + \frac{1}{k^2}.\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left\{\frac{\pi}{k}.\sin k\pi + \frac{1}{k^2}.\cos k\pi - \left[\frac{-\pi}{k}.\sin(-k\pi) + \frac{1}{k^2}.\cos(-k\pi)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left\{ 0 + \frac{1}{k^2}.\cos k\pi + 0 - \frac{1}{k^2}.\cos k\pi \right\} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} x.\sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left[-\frac{x}{k}.\cos kx + \frac{1}{k^2}.\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left\{-\frac{\pi}{k}.\cos k\pi + \frac{1}{k^2}.\sin k\pi - \left[-\frac{-\pi}{k}.\cos(-k\pi) + \frac{1}{k^2}.\sin(-k\pi)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{2\pi}{k}.\cos k\pi\right) = -\frac{2}{k}.(-1)^k$$

$b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $b_3 = \frac{2}{3}$, $b_4 = -\frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{2}{5}$, ...

Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x$ v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$:

$$x = 2.\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}.\sin 3x - \frac{1}{2}.\sin 4x + \frac{2}{5}.\sin 5x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 2.\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}.\sin 3x - \frac{1}{4}.\sin 4x + \frac{1}{5}.\sin 5x + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

Podle Dirichletovy věty je pro každé x z intervalu $(-\pi, \pi\rangle$ součet řady roven příslušné funkční hodnotě. Například pro $x = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{\pi}{6} = 2.\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}.\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}.\sin\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{5}.\sin\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}.\sin\pi + \frac{1}{7}.\sin\frac{7}{6}\pi + \ldots.\right)$$

Po úpravě obdržíme :

$$\pi = 6 - 3\sqrt{3} + 4 - \frac{3}{2}.\sqrt{3} + \frac{6}{5} - 0 - \frac{6}{7} + \frac{3}{4}.\sqrt{3} - \frac{4}{3} + \frac{6}{5}.\sqrt{3} + \dots\dots\dots$$

Přicházíme k nekonečné číselné řadě pro π, které k výpočtu čísla π neuži - jeme. Museli bychom sečíst velmi mnoho členů, abychom se dopustili malé chyby. Např. sečtením sedmi členů obdržíme 2,5485.... Řada tedy velmi pomalu konverguje k hodnotě 3,14159.... .

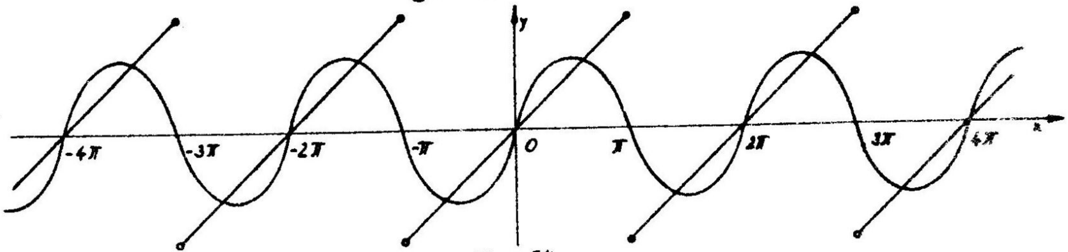
V bodech nespojitosti $-\pi, \pi$ jest součet roven aritmetickému průměru jednostranných limit v těchto bodech.

$$f(-\pi-0) = \lim_{x \to -\pi-} x = \pi, \quad f(-\pi+0) = \lim_{x \to -\pi+} x = -\pi, \quad S(-\pi) = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$$

$$f(\pi-0) = \lim_{x \to \pi-} x = \pi, \quad f(\pi+0) = \lim_{x \to \pi+} x = -\pi, \quad S(\pi) = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$$

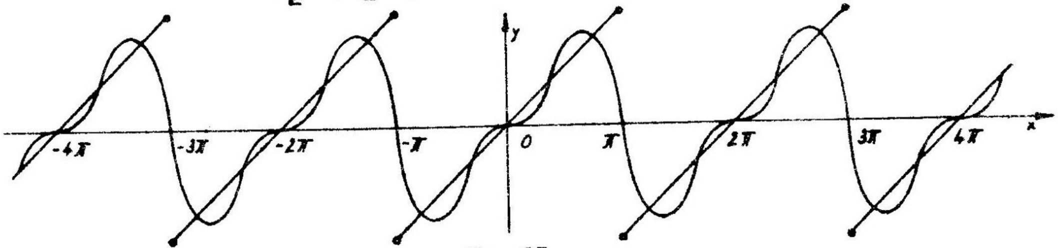
V následujících obrazcích jsou náčrtky grafů náhradních spojitých funkcí : $f_1(x) = s_1(x)$, $f_2(x) = s_2(x)$, $f_3(x) = s_3(x)$, $f_4(x) = s_4(x)$. Pozorujte, jak se přibližují grafu dané funkce .

$s_1(x) \equiv y = 2.\sin x$



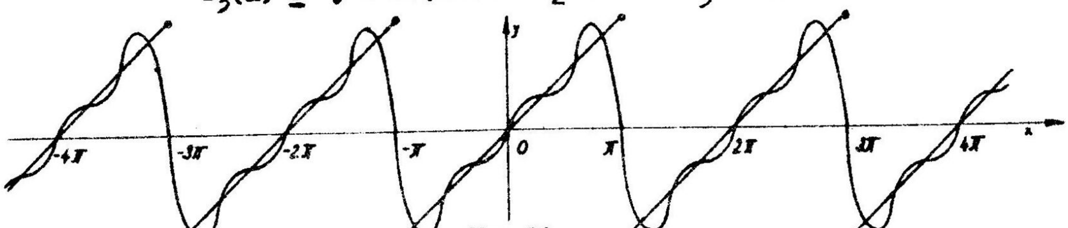
Obr.64

$s_2(x) \equiv y = 2.(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x)$



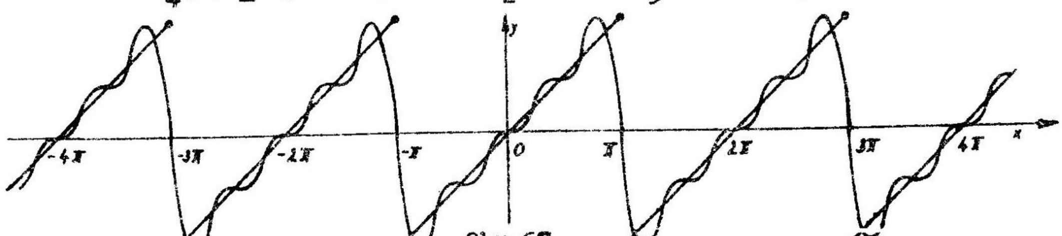
Obr.65

$s_3(x) \equiv y = 2.(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x)$



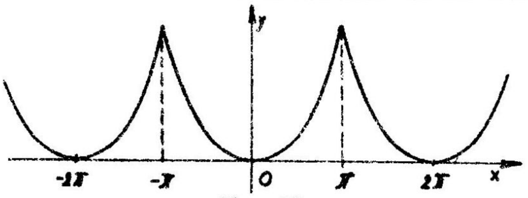
Obr.66

$s_4(x) \equiv y = 2.(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x)$



Obr.67

/222/.příklad. Určiti Fourierův rozvoj periodické funkce s periodou 2π, která v základním intervalu periodicity $(-\pi, \pi>$ je definována :



Obr.68

$$f(x) = \frac{1}{2}.x^2$$

Funkce splňuje Dirichletovy podmínky ; Přesvědčte se ! Funkce je sudá a proto koeficienty $b_k = 0$. Opět si to ověříme výpočtem.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}.\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}.\left\{\frac{\pi^3}{3} - \left(\frac{-\pi^3}{3}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi}.\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}x^2.\cos kx\,dx = \frac{1}{2\pi}.\left[\frac{x^2}{k}.\sin kx + \frac{2x}{k^2}.\cos kx - \frac{2}{k^3}.\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{k^2}.\cos kx - \frac{-2\pi}{k^2}.\cos(-k\pi)\right\} = \frac{1}{2\pi}.\frac{4\pi}{k^2}.\cos k\pi = \frac{2}{k^2}.(-1)^k$$

$$a_1 = -2\,,\ a_2 = \frac{1}{2}\,,\ a_3 = -\frac{2}{9}\,,\ a_4 = \frac{1}{8}\,,\ a_5 = -\frac{2}{25}\,,\ a_6 = \frac{1}{18}\,,\ \dots\dots\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}x^2.\sin kx\,dx = \frac{1}{2\pi}.\left[-\frac{x^2}{k}.\cos kx + \frac{2x}{k^2}.\sin kx + \frac{2}{k^3}.\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}.\left\{-\frac{\pi^2}{k}.\cos k\pi + \frac{2}{k^3}.\cos k\pi - \left[-\frac{\pi^2}{k}.\cos(-k\pi) + \frac{2}{k^3}.\cos(-k\pi)\right]\right\} = 0$$

Fourierův rozvoj dané funkce :

$$\frac{1}{2}.x^2 = \frac{\pi^2}{6} - 2.\cos x + \frac{1}{2}.\cos 2x - \frac{2}{9}.\cos 3x + \frac{1}{8}.\cos 4x - \frac{2}{25}.\cos 5x + \dots\dots$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - 2.\left(\cos x - \frac{1}{2^2}.\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \frac{1}{4^2}.\cos 4x + \frac{1}{5^2}.\cos 5x - \dots\dots\right)$$

Podle Dirichletovy věty je pro každé x z intervalu $<-\pi, \pi>$ součet řady roven v tomto případě příslušné funkční hodnotě.Např. :

a) pro $x = 0$ obdržíme

$$0 = \frac{\pi^2}{6} - 2.\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots\dots\dots\right)$$

V závorce je nekonečná řada číselná, jejíž součet S lze ze vzniklé rovnice vypočítat :

$$S = \frac{\pi^2}{12}$$

b) pro $x = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{\pi^2}{18} = \frac{\pi^2}{6} - 2.\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}.\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}.(-1) - \frac{1}{4^2}.\frac{-1}{2} + \frac{1}{5^2}.\frac{1}{2} - \dots\dots\dots\right)$$

$$\frac{\pi^2}{9} = 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{2}{6^2} + \dots\dots$$

Součet číselné řady na pravé straně jest tedy $\frac{\pi^2}{9}$.

/223/.příklad. Určiti Fourierův rozvoj periodické funkce $y = \cos ax$ pro $-\pi \leq x \leq \pi$, a je necelé číslo.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\,dx = \frac{1}{\pi}.\frac{1}{a}\left[\sin ax\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi a}\left\{\sin a\pi + \sin a\pi\right\} = \frac{2.\sin a\pi}{\pi a}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\,.\,\cos nx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(a+n)x + \cos(a-n)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{a+n}.\sin(a+n)x + \frac{1}{a-n}.\sin(a-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left\{\frac{1}{a+n}\cdot\sin(a+n)\pi + \frac{1}{a-n}\cdot\sin(a-n)\pi - \left[\frac{-1}{a+n}\cdot\sin(a+n)\pi + \frac{-1}{a-n}\cdot\sin(a-n)\pi\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left\{\frac{1}{a+n}\cdot\sin(a+n)\pi + \frac{1}{a-n}\cdot\sin(a-n)\pi\right\} = \text{ po rozvedení a po úpravě}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2a}{a^2-n^2}\cdot\sin a\pi\cdot\cos n\pi = \frac{2a}{\pi\cdot(a^2-n^2)}\cdot\sin a\pi\cdot(-1)^n$$

$$a_1 = -\frac{2a.\sin a\pi}{\pi(a^2-1)},\quad a_2 = \frac{2a.\sin a\pi}{\pi(a^2-4)},\quad a_3 = -\frac{2a.\sin a\pi}{\pi(a^2-9)},\quad a_4 = \frac{2a.\sin a\pi}{\pi(a^2-16)},\ \dots\dots$$

Fourierův rozvoj dané funkce :

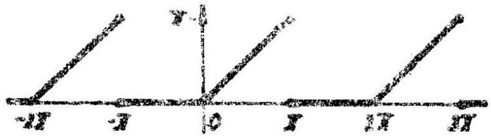
$$\cos ax = \frac{2a.\sin a\pi}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{a^2-1} + \frac{\cos 2x}{a^2-4} - \frac{\cos 3x}{a^2-9} + \frac{\cos 4x}{a^2-16} - \dots\dots\dots\right)$$

/224/. **příklad.** Určiti rozvoj perodické funkce s periodou 2π, která je v základním intervalu periodicity takto definována:

$f(x) = 0$ pro $-\pi < x \leq 0$

$f(x) = x$ pro $0 < x \leq \pi$

Obr.69



Funkce splňuje Dirichletovy podmínky. Ověřte si to .

Výpočet koeficientů Fourierova rozvoje nemůžeme provést jedinou integrací v intervalu $\langle-\pi,\pi\rangle$. Integrujeme v intervalech $\langle-\pi,0\rangle$, $\langle 0,\pi\rangle$, poněvadž daná funkce je v každém z těchto intervalů jinak definována.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\cdot\left\{0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0.\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x.\cos kx\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{0 + \left[\frac{x}{k}.\sin kx + \frac{1}{k^2}.\cos kx\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left\{\frac{1}{k^2}.\cos k\pi - \frac{1}{k^2}\right\} = \frac{1}{\pi k^2}.(\cos k\pi - 1) = \frac{1}{\pi k^2}.\left[(-1)^k - 1\right]$$

$$a_1 = -\frac{2}{\pi},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{2}{9\pi},\ a_4 = 0,\ a_5 = -\frac{2}{25\pi},\ a_6 = 0,\ \dots\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{0} 0.\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x.\sin kx\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{0 - \left[\frac{x}{k}.\cos kx + \frac{1}{k^2}.\sin kx\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\left\{\frac{\pi}{k}.\cos k\pi + 0 - 0 - 0\right\} = -\frac{1}{k}.\cos k\pi = -\frac{1}{k}.(-1)^k$$

$$b_1 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2},\ b_3 = \frac{1}{3},\ b_4 = -\frac{1}{4},\ b_5 = \frac{1}{5},\ b_6 = -\frac{1}{6},\ \dots\dots\dots$$

Fourierův rozvoj dané funkce :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cdot\left(\cos x + \frac{1}{9}.\cos 3x + \frac{1}{25}.\cos 5x + \dots\dots\dots\right) +$$

$$+ \left(\sin x - \frac{1}{2}.\sin 2x + \frac{1}{3}.\sin 3x - \frac{1}{4}.\sin 4x + \dots\dots\dots\right)$$

Podle Dirichletovy věty součet řady v bodech neapojitosti se rovná aritmetickému průměru jednostranných limit v těchto bodech :

$f(-\pi-0) = \pi$, $f(-\pi+0) = 0$ a proto $S(-\pi) = \dfrac{\pi+0}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

$f(\pi-0) = \pi$, $f(\pi+0) = 0$ a proto $S(\pi) = \dfrac{\pi+0}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

290. __cvičení.__ Rozviňte ve Fourierovu řadu v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ funkci :

a) $f(x) = \frac{x}{2}$, $\quad [f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots\dots]$

b) $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $\quad [f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x + \dots]$

c) $f(x) = x^2 + x$, $\quad [f(x) = \frac{2}{3}\cdot\pi^2 - 4(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x + \dots]$

d) $f(x) = \frac{1}{12}\cdot\pi^2 - \frac{x^2}{4}$, $\quad [f(x) = \cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \dots\dots]$

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{v } (-\pi, 0) \\ 1 & \text{v } \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$, $\quad [f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cdot(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots]$

f) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{v } (-\pi, 0\rangle \\ -2 & \text{v } (0, \pi\rangle \end{cases}$, $\quad [f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\cdot(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots]$

g) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{v } (-\pi, 0) \\ \pi & \text{v } (0, \pi) \end{cases}$, $\quad [f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\cdot(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots]$

h) $f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{v } (-\pi, 0) \\ x & \text{v } (0, \pi) \end{cases}$, $\quad [f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cdot(\cos x - \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \dots) + 3\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{3}{5}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots]$

k) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{v } (-\pi, 0\rangle \\ 0 & \text{v } (0, \pi\rangle \end{cases}$, $\quad [f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\sin nx]$

m) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{v } \langle 0, \pi\rangle \\ bx & \text{v } \langle -\pi, 0\rangle \end{cases}$, $\quad [f(x) = \frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(b-a)}{\pi}\cdot(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \dots) + (a+b)\cdot\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots]$

n) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & \text{v } \langle -\pi, 0) \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{v } \langle 0, \pi) \end{cases}$, $\quad [f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \dots\dots]$

Pro Fourierův rozvoj periodických funkcí s periodou 2π a se základními intervaly periodicity

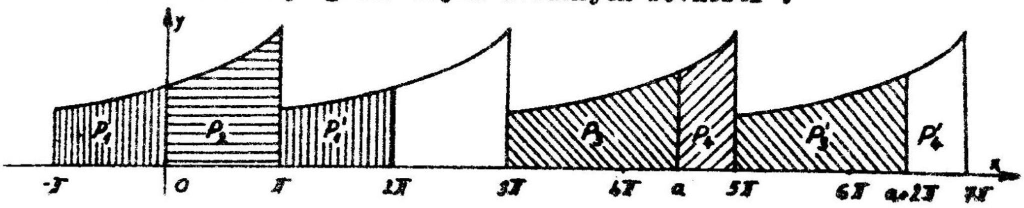
$$\langle 0, 2\pi \rangle \text{ nebo } \langle a, a+2\pi \rangle, \quad a \text{ libovolné číslo},$$

užijeme při výpočtu Fourierových koeficientů rovnosti

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{0}^{2\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{a}^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx ,$$

Následující obrázek naznačuje geom. smysl uvedených rovností .

Obr. 70

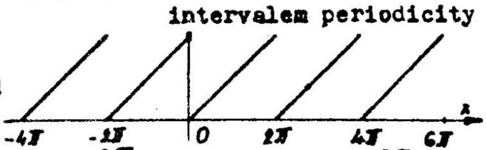


V vzniklých plochách platí : $P_1 + P_2 = P_2 + P_1' = P_4 + P_3'$

Rovnosti pro Fourierovy koeficienty obdržíme v uvedených případech z rovností (118)–(119), když integrační meze $(-\pi, \pi)$ nahradíme integračními mezemi $(0, 2\pi)$ [illegible]. Proto v těchto případech platí:

$$a_0 = [illegible]\,dx , \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cdot\cos kx\,dx , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cdot\sin kx\,dx$$

/225/.**příklad.** **Určiti Fourierův rozvoj periodické funkce $y = x$ se základním intervalem periodicity $(0\ ,\ 2\pi)$.**

Obr.71 

Funkce splňuje Dirichletovy podmínky. Ověřte si to !

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\ dx = \frac{1}{\pi}.\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}.4\pi^2 = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x.\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}.\sin nx + \frac{1}{n^2}.\cos nx\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}.\left\{\frac{2\pi}{n}.\sin 2n\pi + \frac{1}{n^2}.\cos 2n\pi - \left[0 + \frac{1}{n^2}.1\right]\right\} = \frac{1}{\pi}.\left\{\frac{1}{n^2}.1 - \frac{1}{n^2}\right\} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x.\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}.\cos nx + \frac{1}{n^2}.\sin nx\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{2\pi}{n}\cos 2n\pi + \frac{1}{n^2}\sin 2n\pi - \left[-0+0\right]\right\} = -\frac{2}{n}$$

$b_1 = -2\ ,\ b_2 = -1,\ b_3 = -\frac{2}{3}\ ,\ b_4 = -\frac{1}{2}\ , \ldots\ldots\ldots\ldots$

Fourierův rozvoj dané funkce :

$x = \pi - 2.(\ \sin x + \frac{1}{2}.\sin 2x + \frac{1}{3}.\sin 3x + \frac{1}{4}.\sin 4x + \ldots\ldots.\ )$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ obdržíme : $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots..$

Číselná řada v poslední rovnosti má tedy součet $\frac{\pi}{4}$.

291.__cvičení__. Určiti Fourierův rozvoj dané periodické funkce se základním intervalem periodicity $(0\ ,\ 2\pi)$:

a) $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, [$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}.\sin 2x + \frac{1}{3}.\sin 3x + \ldots..$]

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & v\ (0,\pi) \\ \frac{x}{2} - \pi & v\ (\pi, 2\pi), \end{cases}$ [$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots.$]

c) $f(x) = \begin{cases} \sin x & v \langle 0, \pi\rangle \\ 0 & v \langle \pi, 2\pi\rangle \end{cases}$ [$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}.\left(\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} + \ldots\ldots.\right)$]

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & v\ (0,\pi) \\ 0 & v\ (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0, \pi, 2\pi, \end{cases}$ [$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}.(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots.)$]

e) $f(x) = x^2$, [$f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4.(\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2}\cos nx + \ldots) + - 4\pi.(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\sin nx + \ldots)$]

Fourierův rozvoj periodické funkce s obecnou periodou $T = 2t$.

Vzorce pro Fourierovy koeficienty vzhledem k obecné periodě $T = 2t$ při základním intervalu periodicity $(-t,\ t)$ obdržíme ze vzorců (118),(119) užitím transformační rovnice (117) přepsané do tvaru

$$u = \frac{2\pi}{T}.x \qquad \text{čili} \qquad u = \frac{\pi}{t}.x \ ,$$

přičemž si myslíme, že vzorce jsou zapsány pro funkci $F(u)$. Po transformaci obdržíme :

$$a_0 = \frac{1}{t}\,.\int_{-t}^{t} f(x)\,dx \ , \quad a_k = \frac{1}{t}.\int_{-t}^{t} f(x).\cos k.\frac{\pi}{t}x\,dx \ , \quad b_k = \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} f(x).\sin k.\frac{\pi}{t}x\,dx$$

Fourierův rozvoj má pak tvar :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos 1.\frac{\pi}{t}x + a_2\cos 2.\frac{\pi}{t}x + \ldots\ldots + b_1\sin 1.\frac{\pi}{t}x + b_2\sin 2.\frac{\pi}{t}x + \ldots.(120)$$

/226/.**příklad.** Určiti Fourierův rozvoj periodické funkce $y = x$ při základním intervalu periodicity $\langle -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\rangle$.

Jde o Fourierův rozvoj ve tvaru (120), když $t = \frac{\pi}{2}$

Výpočet Fourierových koeficientů :

$$a_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \frac{2}{\pi}.\frac{1}{2}.\left[x^2\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\,.\,0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x.\cos n.\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2n}\sin 2nx + \frac{1}{4n^2}\cos 2nx\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{4n}.\sin n\pi + \frac{1}{4n^2}\cos n\pi - \left[-\frac{\pi}{4n}\sin(-n\pi) + \frac{1}{4n^2}\cos n\pi\right]\right\} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x.\sin 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{2n}\cos 2nx + \frac{1}{4n^2}\sin 2nx\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{4n}\cos n\pi + 0 - \left(\frac{\pi}{4n}\cos n\pi - 0\right)\right\} = \frac{4}{n}.\,(-1)^n$$

$b_1 = 4,\ b_2 = -2\ ,\ b_3 = \frac{4}{3}\ ,\ b_4 = -1\ ,\ b_5 = \frac{4}{5}\ ,\ \ldots\ldots.$

Fourierův rozvoj dané funkce :

$$x = \frac{4}{\pi}.\left(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \ldots\ldots\ldots\right)$$

/227/.**příklad.** Funkci $y = \sin x$ vyjádřiti Fourierovou řadou při základním intervalu periodicity $\langle 0,\pi\rangle$.

Funkce splňuje Dirichletovy podmínky. Výpočet Fourierových koeficientů :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = -\frac{2}{\pi}.\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}.(-1-1) = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,.\cos n.\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2.\sin x\,.\cos 2nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1}{1+2n}\left[\cos(1+2n)x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{1-2n}.\left[\cos(1-2n)x\right]_0^{\pi}\right\} =$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}.\left\{\frac{1}{2n+1}.(-1-1) - \frac{1}{2n-1}.(-1-1)\right\} = \frac{2}{\pi}.\left\{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right\} = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$$

$a_1 = -\frac{4}{3\pi}$, $a_2 = -\frac{4}{3.5.\pi}$, $a_3 = -\frac{4}{5.7.\pi}$, $a_4 = -\frac{4}{7.9.\pi}$, ...

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \,.\cos 2nx \,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\cos(2n-1)x - \cos(2n+1)x\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2n-1}.\Big[\sin(2n-1)x\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{2n+1}.\Big[\sin(2n+1)x\Big]_0^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{0-0-(0-0)\right\} = 0$$

Fourierův rozvoj dané funkce podle (120) :

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}.\left[\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} + \frac{\cos 8x}{7.9} + \dots\dots\right]$$

/228/ příklady Určiti Fourierův rozvoj periodické funkce o periodě 2t, která je v základním intervalu periodicity (0, 2t) takto definována:

$$f(x) = \begin{cases} a & v \ \langle 0, t \rangle \\ -a & v \ (t, 2t\rangle . \end{cases}$$

Obr.72

Funkce splňuje Dirichletovy podmínky. Výpočet Fourierových koeficientů :

$$a_0 = \frac{1}{t}\int_0^t a\,dx + \frac{1}{t}\int_t^{2t}(-a)\,dx = \frac{a}{t}.\Big[x\Big]_0^t + \frac{-a}{t}.\Big[x\Big]_t^{2t} = a - \frac{a}{t}(2t-t) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{t}\int_0^t a.\cos n.\frac{\pi}{t}x\,dx + \frac{1}{t}\int_t^{2t}(-a).\cos n\frac{\pi}{t}x\,dx =$$

$$= \frac{a}{t}.\frac{t}{n\pi}.\Big[\sin\frac{n\pi}{t}x\Big]_0^t - \frac{a}{t}.\frac{t}{n\pi}.\Big[\sin\frac{n\pi}{t}x\Big]_t^{2t} = \frac{a}{n\pi}(0-0) - \frac{a}{n\pi}(0-0) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{t}\int_0^t a.\sin n.\frac{\pi}{t}x\,dx + \frac{1}{t}\int_t^{2t}(-a).\sin n.\frac{\pi}{t}x\,dx =$$

$$= -\frac{a}{t}.\frac{t}{n\pi}.\Big[\cos\frac{n\pi}{t}x\Big]_0^t + \frac{a}{t}.\frac{t}{n\pi}.\Big[\cos\frac{n\pi}{t}x\Big]_t^{2t} =$$

$$= -\frac{a}{n\pi}.\left\{\cos n\pi - 1\right\} + \frac{a}{n\pi}.\left\{\cos 2n\pi - \cos n\pi\right\} = \frac{2a}{n\pi}.\left\{1 - (-1)^n\right\}$$

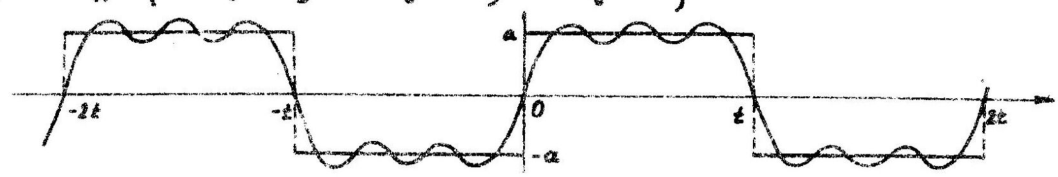
$b_1 = \frac{4a}{\pi}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{4a}{3\pi}$, $b_4 = 0$, $b_5 = \frac{4a}{5\pi}$, ...

Fourierův rozvoj dané funkce :

$$f(x) = \frac{4a}{\pi}.\left\{\sin\frac{\pi}{t}x + \frac{1}{3}.\sin\frac{3\pi}{t}x + \frac{1}{5}.\sin\frac{5\pi}{t}x + \dots\dots\dots\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{t}x + \dots\right.$$

Náčrtek grafu náhradní funkce

$$s_5(x) = \frac{4a}{\pi}.\left\{\sin\frac{\pi}{t}x + \frac{1}{3}.\sin\frac{3\pi}{t}x + \frac{1}{5}.\sin\frac{5\pi}{t}x\right\}$$



Obr.73

292. *cvičení.* Určiti Fourierův rozvoj dané periodické funkce v daném základním intervalu periodicity :

a) $f(x) = \frac{x}{2}$ v $\langle -t, t \rangle$, $[\, f(x) = \frac{t}{\pi}.(\sin \frac{\pi x}{t} - \frac{1}{2}.\sin \frac{2\pi x}{t} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{t} + \dots) \,]$

b) $f(x) = mx$, $(m>0)$ v $(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$, $[\, mx = \frac{tm}{\pi}(\sin\frac{2\pi}{t}x - \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{t}x + \frac{1}{3}\sin\frac{6\pi}{t}x + \dots) \,]$

c) $f(x) = vx$ v $\langle 0, t \rangle$, $[\, f(x) = \frac{vt}{2} - \frac{4vt}{\pi^2}(\cos\frac{\pi}{t}x + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{t}x + \dots)$ v $\langle 0, t \rangle \,]$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{v } \langle 0, \frac{t}{2} \rangle \\ t-x & \text{v } (\frac{t}{2}, t \rangle \end{cases}$ $[\, \frac{4t}{\pi^2}(\sin\frac{\pi}{t}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{t}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{t}x - \dots) = \begin{cases} x & \text{v } \langle 0, \frac{t}{2} \rangle \\ t-x & \text{v } (\frac{t}{2}, t \rangle \end{cases} \,]$

e) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{t} & \text{v } \langle 0, \frac{t}{2} \rangle \\ 0 & \text{v } (\frac{t}{2}, t) \end{cases}$, $[\, \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{t}x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi}{t}x = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{t}x & \text{v } \langle 0, \frac{t}{2} \rangle \\ 0 & \text{v } (\frac{t}{2}, t \rangle \end{cases} \,]$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{4a}{T}x & \text{v } \langle -\frac{T}{4}, \frac{T}{4} \rangle \\ 2a(1-\frac{2}{T}x) & \text{v } \langle \frac{T}{4}, \frac{3}{4}T \rangle \end{cases}$, $[\, f(x) = \frac{8a}{\pi^2}.(\sin\frac{2\pi}{T}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{6\pi}{T}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{10\pi}{T}x + \dots) \,]$

__Rozvoj funkce ve Fourierovu řadu s i n o v o u nebo k o s i n o v o u.__

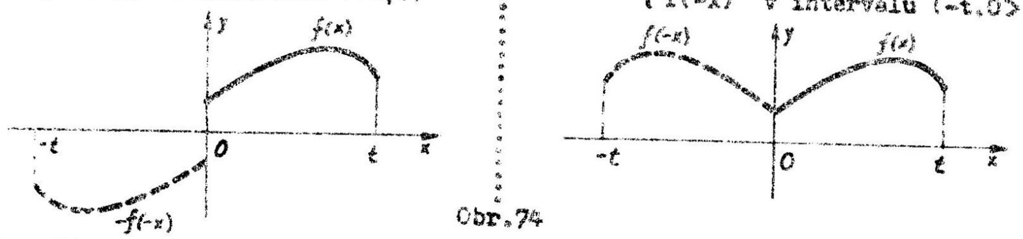
Funkci $f(x)$, která v intervalu $(0,t)$ splňuje Dirichletovy podmínky, chceme někdy rozložit buď ve __Fourierovu řadu sinovou__ nebo ve __Fourierovu řadu kosinovou.__ Připomeňme si, že lichá funkce $f(x)$ byla v intervalu $(-t,t)$ vyjádřena řadou sinovou ($a_n = 0$), sudá funkce byla v intervalu $(-t,t)$ vyjádřena řadou kosinovou ($b_n = 0$). Toho užijeme pro náš záměr tak, že k funkci $f(x)$ vytvoříme pomocnou __periodickou__ funkci $F(x)$, a to

l i c h o u, tzv. lichým periodickým prodloužením, takto definovanou :

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{v intervalu } (0, t \rangle \\ -f(-x) & \text{v intervalu } (-t, 0) \end{cases}$$

s u d o u, tzv. sudým periodickým prodloužením, takto definovanou :

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{v intervalu } (0, t \rangle \\ f(-x) & \text{v intervalu } (-t, 0 \rangle \end{cases}$$



Obr. 74

Funkce $F(x)$ má v obou případech základní interval periodicity $(-t,t)$. Jí příslušné řada Fourierova bude vyjadřovat funkci $f(x)$ jen v intervalu $(0,t)$. Platnost rozvoje v krajních bodech tohoto intervalu $(0,t)$ vždy vyšetřujeme.

Fourierovy koeficienty mají tvar :

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{t}\int_{-t}^{0} -f(-x).\sin(-n\frac{\pi}{t}x)\,dx + \frac{1}{t}\int_{0}^{t} f(x).\sin n\frac{\pi}{t}x\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{t}\int_{0}^{t} f(x).\sin n.\frac{\pi}{t}x\,dx$$

Fourierova řada s i n o v á :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin n.\frac{\pi}{t}x$$

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{1}{t}\int_{-t}^{0} f(-x).\cos(-n\frac{\pi}{t}x)\,dx + \frac{1}{t}\int_{0}^{t} f(x)\cos n\frac{\pi}{t}x\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{t}\int_{0}^{t} f(x).\cos n.\frac{\pi}{t}x\,dx \qquad (121)$$

Fourierova řada k o s i n o v á :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos n.\frac{\pi}{t}x \qquad (122)$$

/229/. **příklad.** Funkci $f(x) = x.\sin x$ rozvinouti pro x z intervalu $(0,\pi\rangle$ ve Fourierovu řadu α) sinovou , β) kosinovou.

α) Rozvoj ve Fourierovu řadu sinovou :

Pomocná funkce :
$$F(x) = \begin{cases} x.\sin x & v\ (0,\pi) \\ -[-x.\sin(-x)] = -x.\sin x & v(-\pi,\ 0\rangle \end{cases}$$

Výpočet Fourierových koeficientů funkce $F(x)$ se základním intervalem periodicity $(-\pi,\pi)$:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin x.\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x.\cos(1-n)x - x.\cos(1+n)x\right]dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n-1}.\sin(n-1)x + \frac{1}{(n-1)^2}\cos(n-1)x\right]_0^{\pi} - \left[\frac{x}{n+1}\sin(n+1)x - \frac{1}{(n+1)^2}\cos(n+1)x\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{0 + \frac{1}{(n-1)^2}\cos(n-1)\pi - \frac{1}{(n-1)^2} - \left[0 + \frac{1}{(n+1)^2}\cos(n+1)\pi - \frac{1}{(n+1)^2}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}.\frac{4n}{(n+1)^2.(n-1)^2}.\left[\cos(n-1)\pi - 1\right] \qquad \vdots \cos(n+1)\pi = \cos(n-1)\pi$$

Výsledek v uvedeném tvaru nemá smysl pro $n = 1$.

$b_2 = -\frac{16}{9\pi}$, $b_3 = 0$, $b_4 = -\frac{32}{3^2.5^2\pi}$, $b_5 = 0$, $b_6 = -\frac{48}{5^2.7^2\pi}$, ...

Pro $n = 1$ je nutno b_1 vypočítat jinou úpravou příslušného integrandu :

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin x.\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin^2 x\,dx = \frac{2}{2.\pi}\int_0^{\pi}(x - x.\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^{\pi} - \left[\frac{x}{2}.\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{2} - \left[0 + \frac{1}{4} - (0 + \frac{1}{4})\right]\right\} = \frac{\pi}{2}$$

Rozvoj dané funkce ve Fourierovu řadu sinovou :

$$f(x) = \frac{\pi}{2}.\sin x - \frac{16}{\pi}.\left(\frac{1}{1^2.3^2}.\sin 2x + \frac{2}{3^2.5^2}.\sin 4x + \frac{3}{5^2.7^2}.\sin 6x + \dots\dots\right)$$

v intervalu $\langle 0,\pi\rangle$

β) Rozvoj ve Fourierovu řadu kosinovou :

Pomocná funkce :
$$F(x) = \begin{cases} x.\sin x & v\ (0,\pi) \\ -x.\sin(-x) = x.\sin x & v\ (-\pi, 0) \end{cases}$$

Pro výpočet Fourierových koeficientů a_n užijeme přímo tvaru (121) :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin x.\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x.2.\sin x.\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n+1}\cos(n+1)x + \frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{x}{n-1}\cos(n-1)x + \frac{1}{(n-1)^2}\sin(n-1)x\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n+1}\cos(n+1)\pi + 0 + 0 - 0 - \left[-\frac{\pi}{n-1}\cos(n-1)\pi + 0 + 0 - 0\right]\right\} =$$

$$a_n = \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \frac{\cos(n-1)\pi}{n+1} = \frac{2}{(n+1).(n-1)}.\cos(n-1)\pi \quad \text{pro } n = 0, 2, 3, \dots$$

$a_0 = 2\,,\quad a_2 = -\frac{2}{3}\,,\quad a_3 = \frac{1}{4},\quad a_4 = -\frac{2}{3.5}\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$

Pro n=1 vypočteme a_1 jinou úpravou příslušného integrandu :

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin x\ .\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x.\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{x}{2}.\cos 2x + \frac{1}{4}.\sin 2x\Big]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big\{-\frac{\pi}{2} + 0 - (0+0)\Big\} = -\frac{1}{2}$$

Rozvoj dané funkce ve Fourierovu řadu kosinovou:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}.\cos x\ - 2.\Big(\frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 3x}{2.4} + \frac{\cos 4x}{3.5} - \ldots.\Big)\ \text{ v interv. } \langle 0,\pi\rangle$$

[illegible] <u>cvičení.</u> Danou funkci rozvinouti v intervalu $(0,\pi)$ ve Fourierovu řadu

α) sinovou , β) kosinovou :

a) $f(x) = x$, α) $\Big[f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots)$ v interv.$(0,\pi\rangle\Big]$

β) $\Big[f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots)$ v $\langle 0,\pi\rangle\Big]$

b) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, α) $\Big[f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x + \ldots.\ )$ v $(0,\pi)\Big]$

β) $\Big[f(x) = \frac{2}{\pi}(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots)$ v $\langle 0,\pi)\Big]$

c) $f(x) = x^2$, α) $\Big[f(x) = \frac{2}{\pi}\,\Big(\frac{\pi^2-4}{1^3}\sin x + \frac{\pi^2\,3^2-4}{3^3}\sin 3x + \frac{\pi^2 5^2-4}{5^3}\sin 5x + \ldots\Big) +$

$- 2\pi\Big(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + \ldots.\Big)$, v $\langle 0,\pi)\Big]$

d) $f(x) = x.\cos x$, α) $\Big[f(x) = -\frac{1}{2}\sin x + 2\Big(\frac{2}{1.3}\sin 2x - \frac{3}{2.4}\sin 3x + \frac{4}{3.5}\sin 4x + \ldots\Big)$

v $(0,\pi)\Big]$

β) $\Big[f(x) = -\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}\cos x - \frac{4}{\pi}\Big(\frac{5}{3^2.1^2}\cos 2x + \frac{17}{5^2.3^2}\cos 4x +$

$+ \frac{37}{7^2.5^2}\cos 6x + \ldots\Big)$ v $\langle 0,\pi\rangle\Big]$

24400 P16