Kapitola XVI.

ZÁKLADNÍ APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU.

Tabulka určitých integrálů, jimiž se řeší základní geometrické a fyzikální aplikace, je na konci této kapitoly. Pro sestavení příslušných vzorců je zaveden pojem „diferenciál (element)“ geometrického útvaru, případně fyzikální veličiny.

§ 42. GEOMETRICKÉ APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU.

I. Obsah rovinné plochy.

Základní úloha:

Obsah P plochy omezené křivkou $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$.

Elementem dP uvedené rovinné plochy obsahu P je obdélník, jehož jedním rozměrem je y, druhým diferenciál dx v libovolném bodě intervalu $\langle a , b \rangle$.

$$dP = y.dx = f(x).dx$$

$$P = \int_a^b y.dx = \int_a^b f(x).dx \text{ , jestliže v intervalu } \langle a , b\rangle \text{ jest } f(x) > 0 \qquad (155)$$

$$P = -\int_a^b y.dx = -\int_a^b f(x).dx \text{ , jestliže v intervalu } \langle a , b\rangle \text{ jest } f(x) < 0$$

(je-li dána křivka implicitní rovnicí $F(x,y)= 0$, vyjádříme z ní y jako funkci x)

324.cvičení. Obsah plochy omezené obloukem křivky, osou x a přímkami $x=a$, $x=b$:

a) $y= x^3- 10x^2+ 24x$, $x=1, x=3$; [$29\frac{1}{3}$] b) $y= \frac{1}{x}$, $x=1$, $x=3$; [$\ln 3$]

c) $y= \ln x$, $x=a, x=b$, $(1< a<b)$; [$b.(\ln b - 1) - a.(\ln a - 1)$]

d) $y= x.\sin x$, $x=k\pi$, $x=(k+1)\pi$; [$(2k+1)\pi$]

e) $y= \frac{a}{2}.(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})$, $a > 0$, $x= -a$, $x= a$; [$a^2.(e - e^{-1})$]

Obsah plochy omezené křivkou $y=f(x)$, případně $F(x,y)=0$, osou y a přímkami $y = a$, $y = b$, $(a < b)$

$$dP= x.dy = \varphi(y).dy \text{ , } \quad P = \int_a^b x.dy = \int_a^b \varphi(y).dy \text{ , je-li } x > 0 \qquad (156)$$

($x = \varphi(y)$ určíme z rovnice křivky $y=f(x)$ nebo $F(x,y)=0$)

325.cvičení.

a) $xy = 4$, $y = 1$, $y = 4$; [$8.\ln 2$] b) $y = \ln x$, $y= \ln a$, $y= \ln b$; [$b-a$]

Obsah plochy omezené obloukem křivky $y = f(x)$ a osou x.

(Meze integrálu tvoří souřadnice průsečíků křivky $y= f(x)$ s osou x)

326.cvičení.

a) $y = 4 - x^2$, [$\frac{32}{3}$]; b) $y = 6x - x^2$, [36]; c) $y= x^2+ 2x-3$, [$\left|- \frac{32}{3}\right|$] ;

d) $y = x - x^2\sqrt{x}$, $[\frac{3}{14}]$; e) $y = \sin x$, $[2]$; f) $y = e^{-x}.\sin x$, $x \geq 0$, $[0,521]$

<u>Obsah plochy omezené obloukem křivky a osou</u> y.

327.<u>cvičení</u>.

a) $x = y^2(y-1)$, $[-\frac{1}{12}]$; b) $y^2 = 2x + 4$, $[\frac{16}{3}]$; c) $y^2 = (4-x)^3$, $[25,6]$

Protíná-li křivka osu souřadnic ve více bodech, např. osu x v bodech x_1, x_2, x_3 tak, že $x_1 < x_2 < x_3$, pak nejprve vyšetříme, ve kterém intervalu jsou funkční hodnoty $f(x) < 0$. Je-li např. $f(x) > 0$ v int. (x_1, x_2) a $f(x) < 0$ v int. (x_2, x_3), určíme součet obsahů ploch součtem integrálů

$$P = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_2} f(x)dx \qquad \text{nebo přímo} \qquad P = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right|$$

328.<u>cvičení</u>. a) $y = x^3 - 7x^2 + 10x$, $[21\frac{1}{12}]$; b) $y = x^5 - 5x^3 + 4x$, $[6\frac{1}{3}]$.

<u>Obsah plochy omezené křivkou, osou x a přímkou x=a</u> :

(Jednu mez určitého integrálu tvoří x-ová souřadnice průsečíku křivky s osou x)

329.<u>cvičení</u>. a) $y = \arcsin x$, $x = 1$, $[\frac{\pi}{2} - 1]$; b) $y = \ln x$, $x = e$, $[1]$.

<u>Obsah plochy omezené křivkou, osou y a přímkou y = a</u> .

(Jednu mez tvoří y-ová souřadnice průsečíku křivky s osou y.)

330.<u>cvičení</u>.

a) $y^2 = 4x$, $y = 2$, $[\frac{2}{3}]$; b) $y = x^3$, $y=8$, $[12]$; c) $y^2 = x^3$, $y = 8$, $[19,2]$.

<u>Obsah plochy omezené křivkou a přímkou</u>.

(Meze tvoří x-ové souřadnice průsečíků křivky s přímkou.)

331.<u>cvičení</u>.

a) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$, $[20\frac{5}{6}]$; c) $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$, $[\frac{9}{2}]$;

b) $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$, $[\frac{16}{3}]$; d) $x.y = 6$, $x + y - 7 = 0$, $[17,5 - 6.\ln 6]$.

<u>Obsah plochy omezené dvěma křivkami</u> :

332.<u>cvičení</u>.

a) $y = \frac{1}{5}(x^2 - 10x + 34)$, $y = \frac{1}{5}(10 + 18x - 3x^2)$, $[16\frac{2}{3}]$;

b) $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$, $[\frac{4}{3}p^2]$; c) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $[(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6})2]$;

d) $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = 6x$, $[\frac{4}{3}(\sqrt{3} + 4\pi)]$; e) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ a přímkou $x=1$, $[e + e^{-1} - 2]$.

<u>Obsah plochy omezené křivkou souměrnou podle osy x</u> :

Rovnice takové křivky obsahuje y v druhé mocnině, takže každému x z definičního oboru odpovídají dvě y navzájem opačná. Počítáme obsah poloviny plochy ležící nad osou x. (Někdy se vyskytnou i vyšší sudé mocniny y.)

333.<u>cvičení</u>.

a) $x^2 + y^2 = r^2$, $[\pi r^2]$; b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $[\pi ab]$

c) $y^2 = x^2 - x^4$, $[\frac{4}{3}]$; d) $a(y^2 - x^2) + x^3 = 0$, $[\frac{8}{15}a^2]$

Desítku úloh pro domácí práce možno sestavit z posledních úloh každého cvičení.

Obsah plochy při parametrickém vyjádření rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Do základního integrálu pro obsah plochy dosadíme z daných parametrických rovnic $y = \psi(t)$ a vypočtené $dx = \dot{\varphi}(t).dt$:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} y.dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t).\dot{\varphi}(t)dt$$

Meze t_1, t_2 určíme z rovnice $x = \varphi(t)$ po dosazení x_1, x_2, nejsou-li dány.

334.cvičení.

a) $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$ v intervalu $(0, 2)$ pro t; $[\frac{8}{15}]$

b) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ v intervalu $(0, 2\pi)$ pro t; $[3\pi a^2]$
(Plocha omezená osou x a obloukem cykloidy.)

Obsah plochy v polárních souřadnicích se určuje buď převedením na parametrické vyjádření (užitím transformačních rovnic $x = r.\cos\varphi$, $y = r.\sin\varphi$, kde za r dosadíme z polární rovnice křivky $r = \rho(\varphi)$) nebo výhodněji vzorcem

$$P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi , \quad r = \rho(\varphi)$$

335.cvičení.

a) Obsah plochy kvadrantu lemniskaty $r^2 = a^2.\cos 2\varphi, (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$; $[\frac{a^2}{4}]$

b) Obsah plochy omezené prvním závitem Archimedovy spirály $r = a\varphi$ a osou x, $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$; $[\frac{4}{3}a^2\pi^3]$

c) Obsah plochy omezené kardioidou $r = a(1 + \cos\varphi)$; $[\frac{3}{2}a^2\pi]$.

II. O b j e m r o t a č n í h o t ě l e s a.

Základní úloha :

Objem tělesa, jež vznikne rotací plochy P (omezené křivkou $y=f(x)$, osou x a přímkami $x=a$, $x=b$) kolem osy x.

Element objemu dV tvoří válec, jehož základna má poloměr y a jehož výška je diferenciál dx.

$$dV = \pi y^2.dx = \pi[f(x)]^2dx \; ; \quad V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2dx \tag{157}$$

Při rotaci plochy P kolem osy y má element objemu poloměr základny x a výšku dy.

$$dV = \pi x^2.dy = \pi[\varphi(y)]^2dx \; ; \quad V = \pi\int_c^d x^2dy = \pi\int_c^d [\varphi(y)]^2dy \tag{158}$$

/$x = \varphi(y)$ vypočteme z explicitní nebo implicitní rovnice /

336.cvičení. Vypočítati objem tělesa vytvořeného rotací obrazce, omezeného čarami:

a) $y^2 = 2px$, $x = a$, kolem osy x ; $[\pi pa^2]$

b) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, kolem osy x ; $[12\pi]$

c) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x=a$, $x=b$, $y=0$, kolem osy x; $[\frac{\pi}{8}(e^{2b} - e^{-2b} - e^{2a} + e^{-2a}) + \frac{\pi}{2}(b-a)]$

d) $y = \sin x$, osou x pro $0 \leq x \leq \pi$, kolem osy x; $[\frac{1}{2}\pi^2]$

e) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ a osou x, kolem osy x; [$5\pi^2a^3$]

337. <u>cvičení</u>. Objem tělesa vytvořeného rotací plochy, omezené křivkou

a) $x^2 + y^2 = 25$, kolem osy x ; [$\frac{500}{3}\pi$]

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kolem osy x ; [$\frac{4}{3}\pi ab^2$] ; kolem osy y , [$\frac{4}{3}\pi a^2b$]

c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ kolem osy x ; [$\frac{32}{105}\pi a^3$].

338. Objem tělesa vytvořeného rotací plochy, omezené křivkami

a) $x^2 + y^2 = 16$, $xy = \sqrt{15}$, kolem osy x ; [$8\arcsin\frac{7}{8} - \sqrt{15}.\ln\sqrt{15}$]

b) $x^2 + 4y^2 = 20$, $y = \frac{1}{2}x^2$ a osou x, kolem osy y ; [$\frac{76}{3}\pi$]

c) $y^2 = x$, $y = x^2$, kolem osy x; [$\frac{3}{10}\pi$] .

III. Délka oblouku rovinné křivky.

Jako element oblouku křivky, tzv. diferenciál oblouku, zavádíme výraz

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} ,$$

jehož geometrický význam určíme snadno z geometrického znázornění diferenciálu funkce. Pro různá vyjádření rovnice křivky dáváme mu různý tvar :

Při explicitním tvaru rovnice křivky $y = f(x)$:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \sqrt{1 + y'^2}dx \; ; \qquad s = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1 + y'^2}\,dx \tag{159}$$

Při parametrickém vyjádření $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$:

$$ds = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}\,dt \qquad s = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}\,dt \tag{160}$$

Při vyjádření polární rovnicí $r = \varrho(\varphi)$:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi \qquad s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi \tag{161}$$

339. <u>cvičení</u>. Vypočítejte délku oblouku křivky :

a) $y^2 = ax^3$ v intervalu $\langle 0 , x \rangle$; [$\frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{4}{9} + ax\right)^3} - \frac{8}{27a}$]

b) $y^2 = (x+1)^3$, vyťatého přímkou $x = 4$; [$\frac{670}{27}$]

c) $y = \ln \sin x$ v intervalu $\langle \frac{\pi}{3} , \frac{2}{3}\pi \rangle$, [$\ln 3$]

d) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ v intervalu $\langle -1, 2 \rangle$, [$\frac{1}{2}(e^2 + e - e^{-2} - e^{-1})$]

e) $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ mezi průsečíky s osami souřadnic ; [$4\frac{1}{3}$]

f) kardioidy $r = 2a(1 - \cos\varphi)$; [$16a$]

DESÍTKA ÚLOH čís. 70a Vypočítejte délku oblouku křivky :

1) $y^2 = (2x - 1)^3$ v intervalu $\langle 1 , 2 \rangle$; [$\frac{2}{27}(28\sqrt{7} - 5\sqrt{10})$]

2) $y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3$ vyťatého přímkou $x = -1$; [$\frac{28}{3}$]

3) $y = \frac{1}{3}(x-3).\sqrt{x}$ mezi průsečíky s osou x; [$2.\sqrt{3}$]

4) $y = \frac{x^2}{2p}$ v intervalu $\langle 0, a \rangle$; [$\frac{a}{2p}.\sqrt{a^2 + p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + p^2}}{p}$]

5) $y = \ln(1 - x^2)$ v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$; $[\ \ln 3 - \frac{1}{2}\ ]$

6) $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})$ v intervalu $\langle 0, a \rangle$; $[\ \frac{a}{2}(e - e^{-1})\ ]$

7) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, interval $\langle 0, a \rangle$ v 1. kvadr.; $[\ \frac{3}{2}a\ ]$

8) $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ mezi průsečíky s osou x; $[\ 4.\sqrt{3}\ ]$

9) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ v int. $\langle 0, 2\pi \rangle$; $[\ 8a\ ]$

10) jednoho závitu Archimedovy spirály $r = a.\varphi$; $[\ a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\ ]$

IV. Obsah rotační plochy.

Element obsahu rotační plochy se vyjadřuje jako plášť válce o **poloměru y** a výšce ds.

$dS = 2\pi y.ds$ při rotaci **křivky kolem osy x**; $S = 2\pi \int_a^b y.ds$	$dS = 2\pi x ds$ při **rotaci kolem osy y** $S = 2\pi \int_a^b x.ds$

(162)

Za diferenciál ds dosadíme jeden z výrazů (159),(160),(161) podle toho, jakou rovnicí je řídící křivka vyjádřena (explicitně, parametricky nebo v polárních souřadnicích.)

Meze a,b se vztahují k proměnné, jejíž diferenciál obsahuje příslušný diferenciální výraz pro ds.

340.cvičení. Vypočítati obsah plochy vytvořené otáčením oblouku křivky

a) $y = \frac{x^3}{3}$ v intervalu $\langle 0, 2 \rangle$; $[\ \frac{1}{9}.(17.\sqrt{17} - 1)\pi\ ]$, (kolem osy x)

b) $y^2 = 4 + x$ vyťatého přímkou $x = 2$; $[\ \frac{62}{3}\pi\ ]$, (kolem osy x)

c) $y = \sin x$ v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$; $[\ 2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))\ ]$, (kolem x)

d) $x^2 = 2y$ vyťatého přímkou $y = \frac{3}{2}$, kolem osy y; $[\ \frac{14}{3}\pi\ ]$

e) $x^2 + y^2 = r^2$ kolem osy x ; $[\ 4\pi r^2\ ]$

f) $x^2 + y^2 = r^2$ v intervalu $\langle a, b \rangle$, kolem osy x; $[\ 2\pi r(b - a)\ ]$

g) $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ mezi průsečíky s osou x, kolem osy x; $[\ 3\pi\ ]$

h) $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$ mezi průsečíky s osami souř., kolem osy x; $[\ 29{,}6\pi\ ]$

k) lemniskaty $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, kolem osy y ; $[\ 4\pi a^2\sqrt{2}\ ]$

DESÍTKA ÚLOH čís. 71 Obsah plochy vytvořené otáčením oblouku křivky

1) $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}})$ v intervalu $\langle 0, a \rangle$, kolem osy x; $[\pi\frac{a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)]$

2) $9ay^2 = x(3a - x)^2$ mezi průsečíky s osou x, kolem osy x; $[3\pi a^2]$

3) $y = \operatorname{tg} x$ v interv. $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$, kolem osy x; $[\ \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{10} + \sqrt{5} - \sqrt{2} - 1}{2})\ ]$

4) $4x^2 + y^2 = 4$ kolem osy y ; $[\ 2\pi(1 + \frac{4\pi\sqrt{3}}{9})\ ]$

5) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ kolem osy x ; $[\ \frac{12}{5}\pi a^2\ ]$

6) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ v int. $\langle 0, 2\pi \rangle$, kolem osy x; $[\ \frac{64}{3}\pi a^2\ ]$

7) $x = a.\cos^3 t$, $y = a.\sin^3 t$, kolem osy x ; [$\frac{12}{5}\pi a^2$]

8) $x = e^t.\sin t$, $y = e^t.\cos t$ v int. $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$,kolem osy x; [$\frac{2}{5}\sqrt{2}\,\pi(e^{\pi} - 2)$]

9) lemniskaty $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ kolem polární osy ; [$4\pi a^2(2 - \sqrt{2})$]

10) kardioidy $r = a(1+ \cos\varphi)$ kolem polární osy ; [$\frac{32}{5}\pi a^2$]

§ 43. FYZIKÁLNÍ APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU.

S t a t i c k ý m o m e n t a t ě ž i š t ě.

Statický moment hmotného útvaru U (předpokládáme konstantní specifickou hmotu 1) vzhledem k ose p nebo k rovině ρ vyjadřujeme za jistých podmínek určitým integrálem.Pro jeho sestavení užijeme opět ,,diferenciálu stat.momentu'' dM_p nebo dM_ρ ,který bude stat.momentem elementu útvaru vzhledem k ose p nebo k rovině ρ .Přitom si uvědomujeme,že těžišti útvaru U přisuzujeme hmotu celého útvaru a že stat.moment útvaru U se rovná stat.momentu jeho těžiště.

Dovedeme-li určit vzdálenost v těžiště elementu útvaru U od osy p nebo od roviny ρ ,bude

$$dM_p = dU.v \qquad \text{nebo} \qquad dM_\rho = dU.v ,$$

kde dU při konstantní specifické hmotě 1 zastupuje hmotu elementu útvaru. Pak

$$M_p = \int_a^b dU.v \qquad \text{nebo} \qquad M_\rho = \int_a^b dU.v$$

(Z geometrických aplikací víme,že dU je vyjádřeno diferenciálem integrační proměnné.)

Vyjádříme-li rovnost statických momentů útvaru U a jeho těžiště T rovnicí

$$M_p = U.v \qquad \text{nebo} \qquad M_\rho = U.v ,$$

obdržíme pro vzdálenost v těžiště od osy p nebo od roviny ρ rovnice

$$v = \frac{M_p}{U} \qquad \text{nebo} \qquad v = \frac{M_\rho}{U} ,$$

kde M_p nebo M_ρ a velikost útvaru U nahradíme určitým integrálem.

Jestliže osa p je totožna se souřadnicovou osou x,případně y, nebo rovina ρ se souřadnicovou rovinou v prostorové analytické geometrii,pak vzdálenost v je jednou ze souřadnic těžiště.V dalším budeme uvažovati jen takové případy.

Statický moment plochy omezené křivkou $y=f(x), y\geq 0$,osou x a přímkami $x=a, x=b$:

a) vzhledem k ose x: $M_x = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$, což plyne z $dM_x = \frac{y}{2}.ydx$ (163)

b) vzhledem k ose y: $M_y = \int_{x_1}^{x_2} xy\, dx$, což plyne z $dM_y = x.ydx$

Statický moment součtu (rozdílu) ploch se rovná součtu (rozdílu) stat.momentů.

Souřadnice těžiště $T(\xi, \eta)$ rovinné plochy _ :

$$\xi = \frac{M_y}{P} = \frac{\int_a^b xy\, dx}{\int_a^b y\, dx} \qquad \eta = \frac{M_x}{P} = \frac{\frac{1}{2}.\int_a^b y^2\, dx}{\int_a^b y\, dx} \tag{164}$$

341. cvičení. Vypočtěte souřadnice těžiště plochy omezené

a) křivkou $y = \frac{1}{a^2}x^2$, osou x a přímkou $x = a$; $[(\frac{3}{4}a, \frac{3}{10})]$

b) čtvrtkružnicí (v 1. kvadrantě) ; $[(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi})]$

c) půlkružnicí (v 1. a 2. kvadrantě) ; $[(0, \frac{4r}{3\pi})]$

d) křivkami $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$; $[(\frac{9}{5}, \frac{9}{5})]$

e) obloukem cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $[(\pi a, \frac{5}{6}a)]$

f) obloukem Archimedovy spirály $r = a.\varphi$ a průvodičem v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$; $[(\frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3}, \frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^2})]$

DESÍTKA ÚLOH čís. 72 Vypočtěte souřadnice těžiště plochy omezené

1) křivkou $y^2 = x$, osou x a přímkou $x = a$; $[(\frac{3}{5}a, \frac{3}{8}\sqrt{a})]$

2) obloukem elipsy a osami souřadnic (v 1. kvadrantě); $[(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi})]$

3) křivkou $y = 4 - x^2$ a osou x ; $[(0, \frac{8}{5})]$

4) křivkou $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ a osami souřadnic; $[(\frac{a}{5}, \frac{a}{5})]$

5) křivkami $y^2 = x$, $y = x^3$; $[(\frac{12}{25}, \frac{3}{7})]$

6) obloukem elipsy, kružnice a osou y (v 1. kvadrantě); $[(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4(a+b)}{3\pi})]$

7) křivkou $y = \sin x$ a osou x ; $[(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})]$

8) obloukem asteroidy $x = a.\cos^3 t$, $y = a.\sin^3 t$; a osami souřadnic v 1. kvadrantě $[(\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi})]$

9) kardioidou $r = a(1 + \cos\varphi)$; $[(\frac{5}{6}a, 0)]$

10) obloukem spirály $r = e^{\varphi}$ a přímkami $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $[\frac{2(e^{\frac{3}{2}\pi} - 3)}{15(e^{\pi} - 1)}, \frac{2(3e^{\frac{3}{2}\pi} + 1)}{15(e^{\pi} - 1)}]$

Poznámka. Při parametrickém vyjádření křivky dosadíme do vzorců (163), (164) za x, y a dx z parametrických rovnic.
Při vyjádření polárními souřadnicemi dosazujeme do těchže vzorců za x, y z rovnic transformačních $x = r.\cos\varphi$, $y = r.\sin\varphi$, kde za r dosadíme z polární rovnice.
Někdy jsou výhodnější přímé vzorce pro polární souřadnice :

$$M_x = \frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3.\sin\varphi\, d\varphi, \qquad M_y = \frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3.\cos\varphi\, d\varphi \qquad (165)$$

Statický moment rotačních těles (při rotaci kolem osy x) vzhledem k rovině $\rho \perp x$:

$$M_\rho = \pi\int_{x_1}^{x_2} xy^2\,dx, \text{ což plyne z } dM_\rho = \pi y^2 dx.x \;; \qquad M_x = 0 \qquad (166)$$

Souřadnice těžiště: $\xi = \frac{M}{V}$, $\eta = 0$, kde V je objem.

342. cvičení. Vypočtěte souřadnice těžiště

a) polokoule, $[(\frac{3}{8}r, 0)]$; b) rotačního kužele o poloměru r a výšce v ; $[(\frac{3}{4}v, 0)]$

c) úseče paraboloidu o výšce v, vzniklého rotací paraboly $y^2 = 2px$ kolem osy x . $[(\frac{2}{3}v, 0)]$

Statický moment oblouku křivky a těžiště :

a) vzhledem k ose x :
$$M_x = \int_a^b y\,.ds \,,$$
b) vzhledem k ose y :
$$M_y = \int_a^b x\,.ds \,,$$ (167)

což plyne z $dM_x = ds.y$ což plyne z $dM_y = ds.x$

Souřadnice těžiště: $\xi = \dfrac{M_y}{s}$ $\eta = \dfrac{M_x}{s}$, kde s je délka oblouku.

Za ds dosadíme jeden z výrazů (159),(160),(161) podle vyjádření křivky.

343.cvičení. Určiti souřadnice těžiště

a) čtvrtkružnice se středem v počátku ; $\left[\left(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right)\right]$

b) půlkružnice se středem v počátku ; $\left[\left(0, \frac{2r}{\pi}\right)\right]$

c) oblouku řetězovky $y = \frac{a}{2}.\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ mezi body $x_1 = -a, x_2 = a$; $\left[0, \frac{a(e^4+4e^2-1)}{4e(e^2-1)}\right]$

d) oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$; $\left[\left(\pi a, \frac{4}{3}a\right)\right]$

e) oblouku asteroidy $x = a.\cos^3 t$, $y = a.\sin^3 t$; $\left[\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a\right)\right]$

f) oblouku kardioidy $r = a(1+\cos\varphi)$ v int. $\langle 0, \pi\rangle$; $\left[\left(\frac{4}{5}a, \frac{4}{5}a\right)\right]$.

Statický moment rotačních ploch a těžiště (při rotaci kolem osy x) vzhledem k rovině $\rho \perp x$ a procházející počátkem :

$$M_\rho = 2\pi \int_a^b xy\, ds \,,$$ což plyne z $dM_\rho = 2\pi y ds.x$; $M_x = 0$ (168)

Souřadnice těžiště: $\xi = \dfrac{M_\rho}{S}$, $\eta = 0$, kde S je obsah plochy.

Za ds dosadíme jeden z výrazů (159) , (160) , (161) podle vyjádření křivky.

344.cvičení. Vypočítati souřadnice těžiště

a) pláště přímého kužele o poloměru r a výšce v ; $\left[\left(\frac{2}{3}v, 0\right)\right]$

b) poloviny plochy kulové ; $\left[\left(\frac{1}{2}r, 0\right)\right]$.

P o z n á m k a k definici u r č i t é h o i n t e g r á l u.

Princip definice určitého integrálu funkce f(x) uvedeme stručně v pěti bodech :

O p e r a c e	Z á p i s	Geometrický význam
1. Rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ na n dílčích intervalů.	Dílčí body: x_i $(i=0,1,2,\dots,n)$; $x_0 = a$, $x_n = b$. Délka díl.inter.: $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$	Úsečka $\overline{AB}$ na ose x je rozdělena na n úseček.
2. Volba bodu ξ_k v každém dílčím intervalu a určení hodnoty funkce v tomto bodě.	$y_k = f(\xi_k)$	y_k je souřadnice y příslušného bodu na křivce $y = f(x)$.
3. Vytvoření součinu hodnoty funkce $f(\xi_k)$ a veličiny Δx_k	$f(\xi_k) \,.\, \Delta x_k$	Obsah obdélníka o rozměrech $f(\xi_k)$, Δx_k
4. Vytvořující součet (Integrální součet)	$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \,.\, \Delta x_k$	Obsah plochy stupňovitého mnohoúhelníka.
5. Postupné zjemňování rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Limita posloupnosti vytvořujících součtů.	$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$	Pro $f(x) > 0$ obsah plochy omezené osou x, souřadnicemi f(a) , f(b) a příslušným obloukem křivky $y = f(x)$.

Příslušný obrazec najde posluchač v učebnici K-B-P-R, Matematika II, str.176.

PŘEHLED URČITÝCH INTEGRÁLŮ PRO GEOMETRICKÉ A FYZIKÁLNÍ APLIKACE.

Pro aplikace určitého integrálu má význam jeho vyjádření užitím limity vytvořujících (integrálních) součtů při označení dx_k **pro délku k-tého** dílčího intervalu a x_k pro libovolný bod tohoto intervalu :

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ dx_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)dx_k = \lim_{\substack{n \to \infty \\ dx_k \to 0}} [\, f(x_1)dx_1 + f(x_2)dx_2 + \dots\dots + f(x_k)dx_k + \dots\dots + f(x_n)dx_n \,]$$

Nechť jistý jev probíhá tak, že závislost dvou jeho proměnných veličin x, y je dána rovnicí $y = f(x)$, která **vyjadřuje funkci** v intervalu $\langle a,b \rangle$ chraničenou. Má-li v tomto jevu smysl: a) rozdělení intervalu $\langle a,b \rangle$ na **dílčí intervaly délky** dx_k, b) **součin** $f(x_k)dx_k$ a c) součet těchto součinů, pak limitu těchto součtů, **pokud existuje, lze pro** $n \to \infty$ a $dx_k \to 0$ vyjádřit určitým integrálem J.

V geometrických a fyzikálních aplikacích nazveme člen vytvořujícího součtu $f(x_k).dx_k$ diferenciálem (ele**mentem) veličiny, kterou** užitím určitého integrálu vyjadřujeme; např. diferenciál (element) plochy dP, objemu **dV, délky oblouku ds, povrchu** dS, **statického** momentu dM_x apod. Označíme-li jej pro kterýkoli bod intervalu $\langle a,b \rangle$ **bez indexů pouze** $f(x).dx$, **pak** pro útvar (veličinu) U zapisujeme :

$$dU = f(x).dx \quad , \quad U = \int_a^b f(x).dx$$

Z fyzikálních aplikací **uvedeme** jen takové, které souvisí s aplikacemi geometrickými: statický moment M_x útvaru U vzhledem k ose x, stat. moment útvaru U vzhledem k ose y, stat. moment M_ρ útvaru U vzhledem k rovině $\rho \perp x$ a polohu těžiště. **Následující tabulka je** jen **návodem, jak sestavovat** příslušné vzta**hy z elementu útvaru, který je uveden v druhém sloupci.**

Geom. útvar U	Element útvaru dU	Velikost útvaru	Statický moment elementu útvaru vzhledem k ose x (y), vzhledem k rovině $\rho \perp x$	Statický moment celého útvaru vzhledem k ose x(y) vzhledem k rovině ρ	Souřadnice těžiště útvaru o hmotě M : $T(\xi, \eta)$ $\xi = M_y : M$, $\eta = M_x : M$
Plocha obrazce	$dP = y.dx = f(x).dx$ (obdélník)	$P = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y.dx$	$dM_x = dP.\frac{y}{2} = y.dx.\frac{y}{2} = \frac{y^2}{2}.dx$	$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx$	
P=obsah plochy			$dM_y = dP.x = y.dx.x = xy.dx$	$M_y = \int_a^b xy.dx$	$M = P$, $\xi = \frac{M_y}{P}$
	V param. vyjádření $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $dP = \psi(t).\dot{\varphi}(t).dt$	$P = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t).\dot{\varphi}(t)dt$	$dM_x = \frac{1}{2}.\psi^2.\dot{\varphi}\,dt$	$M_x = \frac{1}{2}.\int_{t_1}^{t_2} \psi^2.\dot{\varphi}\,dt$	$\eta = \frac{M_x}{P}$

PŘEHLED URČITÝCH INTEGRÁLŮ PRO GEOMETRICKÉ A FYZIKÁLNÍ APLIKACE.
(Pokračování)

Geom. útvar U	Element útvaru dU	Velikost útvaru	Statický moment elementu útvaru vzhledem: a) k ose x, příp. y, b) k rovině $\varrho \perp x$, př. $\sigma \perp y$	Statický moment celého útvaru vzhledem k ose x(y), vzhledem k rovině ϱ	Souřadnice těžiště útvaru o hmotě M: $T(\xi, \eta)$ $\xi = M_y : M$, $\eta = M_x : M$
Obsah plochy (pokrač)	V param. vyjádření: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$		$dM_y = \varphi \cdot \psi \cdot \dot{\varphi} . dt$	$M_y = \int_{t_1}^{t_2} \varphi \cdot \psi \cdot \dot{\varphi} . dt$	
	V polár. souřad.: $r = \rho(\varphi)$ $dP = \frac{1}{2} . r^2 . d\varphi$	$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$		$M_x = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 . \sin\varphi . d\varphi$ $M_y = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 . \cos\varphi . d\varphi$	
Oblouk křivky s=délka oblouku	$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$ V param. vyjádření: $ds = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} . dt$ V polár. souřad.: $ds = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} . d\varphi$	$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} . dx$ $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} . dt$ $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} . d\varphi$	$dM_x = y . ds = y . \sqrt{1+y'^2} . dx$ $dM_y = x . ds = x . \sqrt{1+y'^2} . dx$	$M_x = \int_a^b y . \sqrt{1+y'^2} . dx$ $M_y = \int_a^b x . \sqrt{1+y'^2} . dx$	$M = s$ $\xi = \frac{M_y}{s}$ $\eta = \frac{M_x}{s}$
Objem V rotač. tělesa	Při rotaci kolem x $dV = \pi y^2 . dx$	$V = \pi \int_a^b y^2 . dx$	$dM_\varrho = dV . x = \pi x y^2 dx$	$M_x = 0$ $M = \pi \int_a^b x . y^2 dx$	$M = V$; $\xi = \frac{M_\varrho}{V}$, $\eta = 0$
	Při rotaci kolem y $dV = \pi x^2 . dy$	$V = \pi \int_a^b x^2 . dy$	Příslušné vztahy vznikají záměnou proměnných x a y.		
Obsah S rotač. plochy	Při rotaci kolem x $dS = 2\pi y . ds$ Při rotaci kolem y $dS = 2\pi x . ds$	$S = 2\pi \int_a^b y . \sqrt{1+y'^2} . dx$	$dM_\varrho = dS . x = 2\pi xy . ds$	$M_x = 0$ $M_\varrho = 2\pi \int_a^b xy . \sqrt{1+y'^2} dx$	$M = S$; $\xi = \frac{M_\varrho}{S}$, $\eta = 0$