KAPITOLA 3

Neurčitý integrál

Obsah

3.1.	Primitivní funkce a neurčitý integrál	13
3.2.	Vlastnosti neurčitého integrálu	14
3.3.	Výpočet neurčitého integrálu	14
3.3.1.	Využití diferenciálu	15
3.3.2.	Tabulky základních integrálů	15
3.3.3.	Metoda *per partes*	16
3.3.4.	Substituce	17
3.3.5.	Zavedení do diferenciálu	18
3.4.	Příklady vypočtu neurčitého integrálu	19
3.4.1.	Integrály, pro něž je vhodné využit metodu *per partes*	19
3.4.2.	Integrál racionální lomené funkce	20
3.4.3.	Univerzální trigonometrická substituce	21
3.4.4.	Některé integrály obsahující kvadratický polynom	23
3.4.5.	Různé příklady	29

§ 3.1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

Mějme funkci f definovanou na nějakém intervalu (a, b). Pojmy primitivní funkce a neurčitého integrálu slouží pro zodpovězení otázky: *derivací čeho je výraz $f(x)$?*

Definice 3.1. *Primitivní funkce* k funkci f na intervalu (a, b) je taková funkce F, že pro každé x z (a, b) platí $F'(x) = f(x)$.

Např. funkce $F(x) = \frac{5}{3}x^3$ je primitivní funkcí k $f(x) = 5x^2$, neboť $F'(x) = \frac{5}{3} \cdot 3x^2 = 5x^2 = f(x)$. Navíc všechny primitivní funkce pro $f(x) = 5x^2$ mají tvar $F(x) = \frac{5}{3}x^3 + C$, kde C je libovolná konstanta (toto platí i obecně).

Definice 3.2. Výraz

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad x \in (a, b), \tag{3.1}$$

kde F je primitivní funkce k f a C je libovolná konstanta, se nazývá *neurčitým integrálem* funkce f.

Symbol $\int$ je označován jako integrační znak, funkce f se nazývá *integrandem* a formální symbol „$\mathrm{d}x$“ slouží k označení proměnné, podle níž daný výraz integrujeme. Zápis čteme takto: „integrál z $f(x)$ podle x“.

Neurčitý integrál (3.1) zodpovídá otázku: *jak vypadají všechny možné výrazy, které po zderivování vzhledem k proměnné x se promění na $f(x)$?* Platí tedy, že

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x),$$

a také

$$\left(\int F'(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x) + C, \tag{3.2}$$

kde C je libovolná konstanta.[1] Operace derivování a nalezení neurčitého integrálu jsou navzájem inverzní. Konstanta C se nazývá *integrační konstantou.*

VĚTA. *Ke každé funkci spojité na intervalu (a, b) existuje na tomto intervalu funkce primitivní a tudíž má funkce neurčitý integrál.*

§ 3.2. Vlastnosti neurčitého integrálu

Základní vlastností neurčitého integrálu je (3.2), tj. neurčitý integrál z derivace jakéhokoliv výrazu je rovný tomuto výrazu plus konstanta.

Vzhledem k § 4.1 a vlastnostem derivace pro libovolnou konstantu k platí

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int kf(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

tj. konstantu lze vždy vytknout před znak integrálu a integrál součtu (rozdílu) dvou výrazů je součtem (rozdílem) příslušných integrálů.

Neexistují smysluplné vzorce, které by vyjadřovaly $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ nebo $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$ přes $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int g(x)\,\mathrm{d}x$!

§ 3.3. Výpočet neurčitého integrálu

Derivace konkrétních funkcí vždy vypočítáme podle známých pravidel derivování, tj. výsledek je svým způsobem garantován a k jeho dosažení stačí jen znát základní vlastnosti derivace a tabulku derivací elementárních funkcí. Situace je odlišná v případě integrování: může se totiž stát, že neurčitý integrál nějaké

[1] Tj. integrál z derivace funkce je samotná ta funkce plus konstanta.

funkce zásadně „nejde vypočítat". Toto znamená, že existují elementární funkce, jejichž primitivní funkce již mezi elementární funkce nepatří. Je tomu tak např. pro $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = \sin(x^2)$ apod.; jsou to funkce pro něž nelze integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ žádným způsobem vyjádřit přes funkce elementární (tj. mocninné, exponenciální, trigonometrické, polynomiální, racionální lomené).

„Výpočtem" integrálu se rozumí jeho vyjádření přes nějakou kombinaci elementárních funkcí, např: $\int (x^2 + 5e^{3x})\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}e^{3x} + C$, kde C je libovolná konstanta.[2]

Na rozdíl od derivací, pro integrál platí, že:

(1) ne každý neurčitý integrál „jde vypočítat";
(2) i pokud daný neurčitý integrál vypočítat lze, je potřeba nalézt způsob jak to udělat. *Obecně platná metoda pro výpočet libovolných integrálu neexistuje.*

§ 3.3.1. Využití diferenciálu. Nehledě na to, že „$\mathrm{d}x$" v zápisu integrálu je pouze formální symbol, jenž značí proměnnou, podle níž se integruje, v praxi je pohodlné (a z hlediska výpočtů také vhodné) tlumočit výraz „$f(x)\,\mathrm{d}x$" jako „$f(x) \cdot \mathrm{d}x$" („$f(x)$ krát $\mathrm{d}x$"). Píšeme tedy např. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

§ 3.3.2. Tabulky základních integrálů. Přečtením tabulky známých derivací elementárních funkcí v opačném směru přirozeně vzniká užitečná tabulka základních integrálů (viz tabulka 3.1).[3]

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \tag{3.3}$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a \neq 1) \tag{3.4}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \tag{3.5}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \tag{3.6}$$

TABULKA 3.1. Integrály některých elementárních funkcí.

[2]Kontrola zderivováním: $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}e^{3x} + C\right)' = \frac{1}{3}3x^2 + \frac{5}{3}e^{3x}3 = x^2 + 5e^{3x}$.

[3]Pro lepší přehlednost v této tabulce vynecháváme libovolnou aditivní konstantu, která tam samozřejmě patří. Druhý vzorec v (3.3) chápeme jako přehlednou, avšak neúplné přesnou podobu vzorce (3.7) (viz pozn. 4, str. 16).

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{A} + C \qquad (|x| < A) \tag{3.8}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm B}\right| + C \tag{3.9}$$

$$\int \frac{1}{A^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + C \tag{3.10}$$

$$\int \frac{1}{A^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A + x}{A - x}\right| + C \tag{3.11}$$

TABULKA 3.2. Další často využívané integrály.

Vskutku máme $(x^m)' = mx^{m-1}$ a pak pro $m \neq 0$ platí $x^{m-1} = \frac{(x^m)'}{m} = \left(\frac{x^m}{m}\right)'$, tj. $F(x) = \frac{x^m}{m}$ je primitivní funkcí k $f(x) = x^{m-1}$. Dále platí $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ atd. Podobným způsobem se odvodí integrály řády dalších známých funkcí, které nalezneme v příslušné literatuře.[4] Další často využívané integrály nalezneme v tabulce 3.2.

Tyto „tabulkové" integrály bezprostředně v uvedené podobě zpravidla nepotkáme a u konkretních integrálů je potřeba vymyslet vhodné úpravy.

PŘÍKLAD 3.1. Integrál $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ snadno vypočítáme pomocí vzorce pro cosinus dvojitého uhlu, jenž nám umožní mocninu snížit:

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\int \mathrm{d}\,(\sin 2x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

§ 3.3.3. Metoda *per partes*. Mějme dvě funkce u a v, pro něž lze vypočítat derivace. Pak $(uv)' = uv' + u'v$, odkud $uv' = (uv)' - vu'$ a proto

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.12}$$

Podle (3.2) platí[5] $\int (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)$ a proto z (3.12) obdržíme

[4] V tabulce 3.1 je třeba okomentovat jen druhý vzorec v (3.3) vyjadřující $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$. I když tento vzorec běžně potkáváme v této zkrácené podobě, jeho matematicky precizním zněním je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & \text{pro } x < 0, \\ \ln x + C_2 & \text{pro } x > 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Konstanty integrování zde tedy mohou být různé na levé a pravé poloose. Důvodem je fakt, že $\ln|x|$ není v bodě $x = 0$ definován a tak se definiční obor této funkce dělí na dvě části, na nichž se výraz $\frac{1}{x}$ integruje zvlášť.

[5] Můžeme zde vzít konstantu integrování rovnou 0, protože se v součtu (3.13) vyskytuje další neurčity integrál obsahující konstantu integrování.

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

Způsobu výpočtu integrálů, jenž se zakládá na vzorci (3.13), se říká metoda *per partes*, neboli *po částech.*

Tuto metodu je vhodné použit, jestliže bude integrál $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ jednodušší než $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ (tj. zderivování u při současném zintegrování v' zpět na v situaci zlepšuje).

Mějme, např. $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$. Víme, že $(\sin x)' = \cos x$, pak $\cos x = v'(x)$ pro $v(x) = \sin x$. Vezme-li $u(x) = x$, platí $u'(x) = 1$ a z (3.13) obdržíme

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,(\sin x)'\,\mathrm{d}x = x\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Integrál $\int \sin x\,\mathrm{d}x$ je tabulkový: $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x +$ konstanta (viz (3.5)) a proto

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$$

§ 3.3.4. Substituce. Tzv. *substituční* metoda je založená na vzorci

$$\int f(h(x))h'(x)dx = F(h(x)) + C,$$

kde F je primitivní funkce pro f. Jinými slovy,

$$\int f(h(x))h'(x)dx = \int f(t)dt,$$

kde $t = h(x)$. Toto znamená, že pokud má integrand tvar $f(h(x))h'(x)$ pro nějakou[6] funkci h, potom je výsledek jednoduše integrálem z f z dosazeným místo argumentu výrazem $h(x)$, tj. stačí odvodit integrál z f.

Postup si lépe vysvětlíme, když s jeho použitím vypočteme konkretní integrál. Mějme např. integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$. V tabulce vidíme vzorec pro jiný, avšak podobný integrál:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x. \tag{3.14}$$

Zkusme původní integrál upravit tak, aby se dal použit vzorec (3.14). Máme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}. \tag{3.15}$$

[6]Zde se nesoustředíme na přesné formulace a příslušné podmínky explicitně neuvádíme.

Diferenciálem funkce f v bodě x se nazývá výraz

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.16}$$

Z hlediska výpočtů je zde pohodlné tlumočit výraz „$f'(x)\,\mathrm{d}x$" jako „$f'(x)\cdot\mathrm{d}x$" („$f'(x)$ krát $\mathrm{d}x$"). Připomíná to také alternativní (starší) označení pro derivaci: $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, odkud obdržíme (3.16) formálním vynásobením výrazem $\mathrm{d}x$ (jemuž se říká diferenciál nezávisle proměnné).

Z diferenciály se pracuje stejné jako s odpovídajícími derivacemi.

Zavedeme v (3.15) novou proměnnou

$$t = \frac{x}{2}. \tag{3.17}$$

Pak dle (3.16) $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\frac{1}{2}x) = (\frac{1}{2}x)'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$, tj. $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$, odkud

$$\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t. \tag{3.18}$$

Dosaďme (3.17) a (3.18) do (3.15):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

a s využitím (3.14), (3.17) ihned obdržíme výsledek:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Můžeme si také všimnout, ze výsledek je speciálním případem vzorce (3.10).

§ 3.3.5. Zavedení do diferenciálu. Jde pouze o poněkud jinou podobu vypočtu dle § 4.4.2, když se substituce provádí implicitně (nezapisujeme ji).

Mějme např. $\int (2x-7)^3\,\mathrm{d}x$.

Podle (3.16) platí $\mathrm{d}(2x-7) = (2x-7)'\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}x$, potom $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(2x-7)$. Dosazením tohoto výrazu do integrálu obdržíme:[7]

$$\begin{aligned}\int (2x-7)^3\,\mathrm{d}x &= \int (2x-7)^3\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(2x-7) = \frac{1}{2}\int (2x-7)^3\,\mathrm{d}(2x-7)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(2x-7)^4 + C\right) = \frac{1}{8}(2x-7)^4 + \tilde{C} \qquad (\tilde{C} = \frac{1}{2}C).\end{aligned}$$

Tímto způsobem např. výpočet integrálu (3.15) (§ 4.4.2, str. 36) zapíšeme takto:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C,$$

---

[7]Kontrola: $\left(\frac{1}{8}(2x-7)^4 + \tilde{C}\right)' = \frac{1}{8}\cdot 4(2x-7)^3\cdot 2 = (2x-7)^3$.

substituce $t = x/2$ je totiž dosti jednoduchá a můžeme ji provést implicitně s použitím (3.16), aniž bychom ji explicitně zapisovali.

§ 3.4. Příklady vypočtu neurčitého integrálu

Uveďme několik nejrozšířenějších typů integrálu, pro něž lze formulovat jistý obecný postup vypočtu.

§ 3.4.1. Integrály, pro něž je vhodné využit metodu *per partes*. Metodu *per partes* použijeme pro integrály součinů výrazů, z nichž jeden by bylo žádoucí zderivovat a zároveň je možné zintegrovat ten druhý.

PŘÍKLAD 3.2. Vypočtěme integrál

$$I(x) = \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x.$$

Přepišme integrál ve tvaru $\int \cos^3 x \cos x \, \mathrm{d}x$ a použijme metodu *per partes*:[8]

$$u(x) = \cos^3 x, \quad \mathrm{d}u(x) = -3\cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v(x) = \cos x \, \mathrm{d}x, \quad v(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x \cos x \, \mathrm{d}x &= \sin x \cos^3 x + 3 \int \sin x \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= \sin x \cos^3 x + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= \sin x \cos^3 x + 3 \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= \sin x \cos^3 x + 3 \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x - 3 \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x \\
&= \sin x \cos^3 x + \frac{3x}{2} + \frac{3}{4} \sin 2x - 3 \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Toto znamená, že platí rovnost

$$I(x) = \frac{3x}{2} + \sin x \cos^3 x + \frac{3x}{2} + \frac{3}{4} \sin 2x - 3I(x),$$

na niž lze hledět jako na rovnici pro $I(x)$. Zbývá tedy tuto rovnici vyřešit a přidat integrační konstantu; výsledkem bude

$$I(x) = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{16} \sin 2x + C = \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{8} \sin x \cos x + C.$$

PŘÍKLAD 3.3. Vypočtěme integrály

$$I(x) = \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x, \quad J(x) = \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Jelikož $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ a derivace sinu a kosinu jsou, až na znaménko, kosinus a sinus, je vhodné tyto integrály počítat metodou *per partes*, přičemž v daném případě není důležité který z těchto členů budeme derivovat. Uvažujme např. $I(x)$:

$$I(x) = \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \left(-\sin x\right) \mathrm{d}x$$

[8]Použili jsme také výsledek příkladu 3.1 pro $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

$$= \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + J(x).$$

Vykonáme-li podobné úpravy s $J(x)$, obdržíme

$$J(x) = \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin x - I(x).$$

$u(x) = \sin x$, $\mathrm{d}u(x) = \cos x \,\mathrm{d}x$
$\mathrm{d}v(x) = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$, $v(x) = \mathrm{e}^x$

Odvodili jsme tedy, že pro integrály platí vztahy

$$I(x) = \mathrm{e}^x \cos x + J(x), \quad J(x) = \mathrm{e}^x \sin x - I(x),$$

odkud $I(x) - J(x) = \mathrm{e}^x \cos x + J(x)$, $I(x) + J(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ a tudíž

$$I(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C, \quad J(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C.$$

§ 3.4.2. Integrál racionální lomené funkce. Jsou to integrály tvaru

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \,\mathrm{d}x,$$

kde p je polynom stupně n a q je polynom stupně m (takový integrand se nazývá racionální lomenou funkcí). Není-li funkce ryze lomená (tj. $n \geq m$), integrand dělením polynomů upravíme na součet polynomu a ryze lomené funkce. Polynomy se integrují velice snadno a tudíž stačí rozebrat pouze případ ryze lomené funkce, když platí $n < m$.

Pro integraci ryze lomené funkce vypočítáme její rozklad na součet parciálních zlomků,[9] jejichž integrály buď ihned převedeme na tabulkové nebo — pro složitější integrály tvaru $\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$ s $k > 1$ — odvodíme postupným zredukováním na jednodušší typy (těmito integrály se zde zabývat nebudeme).

Vyjádříme-li jmenovatel $q(x)$ ve tvaru součinu výrazů typu $(x-c)^k$ a $(x^2 + \alpha x + \beta)^k$ (kde $\alpha^2 < 4\beta$), rozkladem podílu $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parciální zlomky bude součet výrazů typu $\frac{D_1}{x-c} + \frac{D_2}{(x-c)^2} + \dots \frac{D_k}{(x-c)^k}$, odpovídajících každému výskytu v rozkladu členu $(x-c)^k$, a výrazů typu $\frac{A_1x+B_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, jež odpovídají členům $(x^2 + \alpha x + \beta)^k$.

Koeficienty se v různých parciálních zlomcích liší a jejich hodnoty je třeba vypočítat z podmínky, že všechny vypsané členy mají v součtu dávat původní funkci (přivedeme vše ke společnému jmenovateli a zajistíme, aby byl čitatel rovný $p(x)$).

[9] *Parciální zlomky* jsou nejjednodušší ryze lomené funkce typů $\frac{A}{(x-c)^k}$ nebo $\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, kde $k = 1, 2, \dots$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ má záporný diskriminant (tj. $\alpha^2 - 4\beta < 0$).

Poznamenejme, že jmenovatelé $(x-c)^k$ a $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ zde popisují všechny možné typy členů v rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů, když ho zapisujeme bez použití komplexních čísel.

Příklad 3.4. Integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$$

snadno vypočítáme rozkladem integrandu na parciální zlomky (§ 3.4.2). Rozklad polynomu ve jmenovateli na součin kořenových činitelů je $-(x-1)(x+1)$ a proto

$$\frac{1}{1-x^2} = -\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

přičemž pro všechna x má platit $-1 = A(x+1) + B(x-1)$. Dosadíme-li do této rovnosti kořeny $x = 1$ a $x = -1$, obdržíme $1 = -2A$, $1 = 2B$, odkud $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ a tudíž platí

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}t}{1-x^2} &= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Koeficienty vždy můžeme nalézt tak, že přirovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin na obou stranách rovnosti (v případe, kdy polynom ve jmenovateli má komplexní kořeny, se tomu nevyhneme; viz např. příklad 3.5).

§ 3.4.3. Univerzální trigonometrická substituce. Je-li integrand racionální funkcí výrazů $\cos x$ a $\sin x$, je možné pro výpočet integrálu použit *univerzální trigonometrickou substituci*

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{3.20}$$

kde t značí novou proměnnou. Pak, samozřejmě,

$$x = 2\operatorname{arctg} t \tag{3.21}$$

a pro diferenciál obdržíme $\mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Vzhledem k tomu, že platí

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

integrál tak převedeme na integrál racionální lomené funkce, a to pomocí následujících vzorců.

Vzorce pro vykonání univerzální trigonometrické substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}. \tag{3.22}$$

Z (3.22) ihned plyne, že[10] $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$, $\sec x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ a $\csc x = \frac{1+t^2}{2t}$, tj. po zavedení substituce (3.20) pomocí (3.20) převedeme všechny výskyty trigonometrických funkcí v integrandu na racionální lomené funkce proměnné t, přičemž podobný výraz vznikne i po přepočtu diferenciálu. Po vypočtu upraveného integrálu použijeme (3.20) a vrátíme se k původní proměnné x.

PŘÍKLAD 3.5. Vypočtěme

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme-li substituci (3.20), ze vzorců (3.20) obdržíme

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} - 1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{2t - (1+t^2)}{1 - t^2 + 2(1+t^2)}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\int \frac{t^2 - 2t + 1}{3 + t^2}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -2\int \frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

V integrandu je ryze lomená funkce, jíž můžeme dále rozložit na součet příslušných parciálních zlomků (§ 2.4.2):

$$\frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+3} = \frac{(At+B)(t^2+3) + (Ct+D)(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}.$$

Potřebujeme tedy, aby pro libovolné t platilo

$$(At+B)(t^2+3) + (Ct+D)(t^2+1) = t^2 - 2t + 1.$$

Přirovnáním koeficientů u t^0, t^1, t^2 a t^3 obdržíme podmínky[11]

$$3B + D = 1, \qquad 3A + C = -2, \qquad B + D = 1, \qquad A + C = 0,$$

odkud vypočítáme $A = -1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 1$. Pak

$$\begin{aligned}-2\int \frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t &= -2\int \frac{-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{t+1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}.\end{aligned}$$

Máme $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$, $\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t^2+1} = \ln(t^2+1)$, $\int \frac{2t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = \ln(t^2+3)$, až na aditivní konstantu, jíž k výsledku přidáme později. Potom

$$\begin{aligned}-2\int \frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t &= \ln(t^2+1) - \ln(t^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \ln\frac{t^2+1}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right). \qquad (3.23)\end{aligned}$$

[10] Připomeňme, že funkce sekans a kosekans se definují vzorci $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

[11] První podmínku, jež odpovídá koeficientům u t^0, lze vždy odvodit také dosazením hodnoty $t = 0$.

Teď již zbývá jenom dosadit do (3.23) vyjádření t přes x ze substituce (3.20) a přidat integrační konstantu:[12]

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + K. \tag{3.25}$$

Použití univerzální substituce (3.20) je zpravidla spojeno s pracnějším výpočtem proto je vždy vhodné si rozmyslet, zda není možné integrál vypočítat snadněji. Často je užitečná následující poznámka: je-li integrál ve tvaru

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x,$$

kde R je racionální lomená funkce dvou argumentů mající jednu z vlastnosti

$$R(-u,v) = -R(u,v), \quad R(u,-v) = -R(u,v), \quad R(-u,-v) = R(u,v)$$

pro všechna (u,v), pak lze použit jednu ze substitucí $t = \sin x$, $t = \cos x$ resp. $t = \operatorname{tg} x$.

Jestli např. $R(u,v) = u^2 v^3$, pak je R lichá podle v a tudíž použijeme $t = \cos x$:

$$\int \cos^2 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x \sin^2 x \sin x\,\mathrm{d}x = -\int \cos^2 x\,(1 - \cos^2 x)\,\mathrm{d}\,(\cos x)$$

atd.

§ 3.4.4. Některé integrály obsahující kvadratický polynom. Uveďme několik často se vyskytujících integrálu, kde v integrandu je přítomen kvadratický polynom. Některé z nich se obvykle uvádí v tabulkách integrálů (příklady 3.6, 3.7, 3.8).

PŘÍKLAD 3.6. Mějme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

kde $a > 0$. Definičním oborem integrandu je množina $\{x : |x| > a\}$.

---

[12] Často se stává, že výsledky integrace při použiti poněkud odlišných úprav se zdánlivě liší. Např. všimneme-li si, že dle (3.20) $t^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$, obdržíme

$$\ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3} = \ln \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 2} = \ln \frac{1}{1 + 2\cos^2 \frac{x}{2}} = \ln 1 - \ln\left(1 + 2\cos^2 \frac{x}{2}\right) = -\ln(\cos x + 2)$$

a proto lze (3.25) přepsat do tvaru

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x + 2) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + K. \tag{3.24}$$

Řešení 3.6.1. Funkce je sudá; uvažujme $x > a$. Vykonejme substituci $x = a \sec t$, kde $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ (připomeňme, že $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ a $0 < \cos x < 1$ pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$). Pak

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t - 1} = a \operatorname{tg} t$$

(pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ je $\operatorname{tg} t > 0$) a $\mathrm{d}x = -\frac{-a \sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{a \operatorname{tg} t}{\cos t}\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{1}{a \operatorname{tg} t} \frac{a \operatorname{tg} t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}.$$

Jelikož $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ a dle substituce $\frac{1}{\cos x} = \frac{x}{a}$, platí $\operatorname{tg} t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Pro $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ využijme výsledek příkladu 3.13, řešení 3.13.1; pak obdržíme

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left(\frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t\right) + C \\ &= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) + C = \ln\Big(x + \sqrt{x^2 - a^2}\Big) + K, \end{aligned}$$

kde K ($K = C - \ln a$) je libovolná konstanta. Tento vzorec jsme dokázali pro $x > a$.

Jelikož funkce v integrandu je sudá, pro $x < -a$ místo $F(x) = \ln\Big(x + \sqrt{x^2 - a^2}\Big)$ její primitivní funkce bude[13] $-F(-x) = -\ln\Big(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\Big)$. Úpravou obdržíme:

$$\begin{aligned} -F(-x) &= -\ln\Big(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\Big) = \ln 1 - \ln\Big(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\Big) \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} = \ln \frac{\sqrt{x^2 - a^2 + x}}{x^2 - 1 - x^2} = \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2}) \end{aligned}$$

Sjednocením dvou posledních rovností obdržíme vzorec platný pro všechna x s $|x| > a$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\Big|x + \sqrt{x^2 - a^2}\Big| + K.$$

[13]Zde využijeme takovou větu:

VĚTA. *Buďte f sudá funkce a F její primitivní funkce na $[0, +\infty)$. Pak je funkce $\tilde{F}(x) = -F(-x)$, $x \leq 0$, primitivní funkcí pro f na $(-\infty, 0]$.*

DŮKAZ. Vskutku, pro $x \leq 0$ máme $\tilde{F}'(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(-x) = -F'(-x) = -f(-x) = f(x)$. $\square$

Řešení 3.6.2. Funkce v integrandu je sudá a tudíž se můžeme omezit případem, kdy x je kladné, tj. $x > a$. Vzhledem k vlastnostem hyperbolických funkcí[14] (viz (3.26)) je zde vhodné provést substituci

$$x = a\cosh t, \tag{3.27}$$

pak $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\cosh^2 t - a^2} = a\sqrt{\cosh^2 t - 1} = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\sinh t$ a diferenciál bude $\mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{1}{a\sinh t} a\sinh t\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t.$$

Zbývá tedy jen vykonat inverzní substituci a vrátit se k původní proměnné x.

Vztah $x = a\cosh t$ znamená (viz pozn. 14), že $x = \frac{a}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$, tj. $\mathrm{e}^{2t} - \frac{2x}{a}\mathrm{e}^t + 1 = 0$, což je kvadratická rovnice $s^2 - \frac{2x}{a}s + 1 = 0$ pro $s = \mathrm{e}^t$. Vyřešíme-li tuto rovnici, obdržíme $s = \frac{x}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, kde vezmeme znaménko „+“, protože $s = \mathrm{e}^t$ a tudíž musí být $s > 0$ (navíc uvažujeme $x > a$). Jelikož $t = \ln x$, obdržíme

$$t = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln a$$

a proto

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C. \tag{3.28}$$

PŘÍKLAD 3.7. Mějme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

kde $a > 0$.

Připomeňme si vzorec $\mathrm{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ a zaveďme substituci $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak $\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2\mathrm{tg}^2 t + a^2} = a\sqrt{\mathrm{tg}^2 t + 1} = \frac{a}{\cos t}$ a $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, odkud

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{1}{\frac{a}{\cos t}} \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}.$$

Integrál $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ lze vypočítat různými způsoby (§ 3.4.5, příklad 3.13). Zde je pohodlné využít řešení 3.13.3

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \mathrm{tg}\,t\right| + K = \ln\left|\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 t} + \mathrm{tg}\,t\right| + K$$

a tudíž

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}\right| + K = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + a^2}\right| + K$$

[14]Připomeňme, že hyperbolické kosinus a sinus (§ 1.1) se definují jako $\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ a platí $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{3.26}$$

.

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C, \tag{3.29}$$

kde $C = K - \ln a$.

Z (3.28) a (3.29) obdržíme tabulkový integrál (3.9):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\Big(\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\Big) + C. \tag{3.30}$$

PŘÍKLAD 3.8. Mějme

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $a > 0$.

Zde lze použit výsledek (3.30) z příkladu 3.7. Aplikujme metodu *per partes* s $u(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, $v'(x) = 1$ a vzorec (3.30):

$$\begin{aligned} I(x) := \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x - a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2 - a^2} - I(x) - a^2 \ln\Big(\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|\Big), \end{aligned}$$

odkud nalezneme $I(x)$ a obdržíme

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\Big(\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|\Big) + C. \tag{3.31}$$

PŘÍKLAD 3.9. Mějme

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $a > 0$. Vypočítejme tento integrál různými způsoby.

Řešení 3.9.1. Daný integrál lze vypočítat metodou *per partes* podobně příkladu 3.8 s volbou $u(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$, $v'(x) = 1$ a využitím vzorce (3.30):

$$\begin{aligned} I(x) := \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} - I(x) + a^2 \ln\Big(\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|\Big). \end{aligned}$$

Poslední vztah je rovnicí pro nalezení $I(x)$, proto

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(|x + \sqrt{x^2 - a^2}|\right) + C. \tag{3.32}$$

Řešení 3.9.2. Vzhledem k vlastnostem hyperbolických kosinu a sinu (§ 1.1.1) lze zavést substituci

$$x = a\sinh t, \tag{3.33}$$

pak $\mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t$. Jelikož dle (1.4) $\cosh^2 t = \sinh^2 t + 1$, $\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$, $\cosh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh(2t) + 1)$ a $\int \sinh t\,\mathrm{d}t = \cosh t$, máme

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x &= \int a\sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2}\cosh t\,\mathrm{d}t = a^2\int a\sqrt{\sinh^2 t + 1}\cosh t\,\mathrm{d}t\\ &= a^2\int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int(\cosh(2t) + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4}\sinh(2t) + \frac{a^2}{2}t,\end{aligned}$$

kde integrační konstantu přidáme až na konci výpočtů. S využitím vzorce (1.6) pro inverzní funkci arsinh = $\sinh^{-1}$ z (3.33) obdržíme

$$t = \operatorname{arsinh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \ln a$$

a proto dle vzorce pro sinh dvojitého uhlu (1.4) a vztahu $a^2\cosh^2 t = a^2\sinh^2 t + a^2$

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{4}\sinh(2t) + \frac{a^2}{2}t &= \frac{a^2}{4}2\sinh t\cosh t + \frac{a^2}{2}t = \frac{1}{2}a\sinh t\cdot a\cosh t + \frac{a^2}{2}t\\ &= \frac{1}{2}a\sinh t\cdot\sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2} + \frac{a^2}{2}t\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \frac{a^2}{2}\ln a.\end{aligned}$$

Obdrželi jsme tedy vzorec

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C, \tag{3.34}$$

Sjednocením rovností (3.31) a (3.32) obdržíme vzorec

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln\left(|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|\right) + C. \tag{3.35}$$

Velmi často je vhodné vyjádřit kvadratický polynom ve tvaru $(x - c)^2 \pm d^2$.

PŘÍKLAD 3.10. Uvažujme integrál

$$\int \sqrt{4x^2 - 4x - 7}\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož $4x^2 - 4x - 7 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1 - 8 = (2x-1)^2 - 8$, platí

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x^2 - 4x - 7}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{(2x-1)^2 - 8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{(2x-1)^2 - 8}\,\mathrm{d}\,(2x-1) \\ &= \int \sqrt{(2x-1)^2 - (\sqrt{8})^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

odkud substitucí $2x - 1 = t$ obdržíme integrál tvaru $\int \sqrt{t^2 - a^2}\,\mathrm{d}t$ (viz příklad 3.8).

PŘÍKLAD 3.11. Mějme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}. \tag{3.36}$$

Jelikož pro polynom ve jmenovateli platí vyjádření

$$\begin{aligned}3 + 2x - x^2 &= -(x^2 - 2x - 3) = -(x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1 - 1 - 3) \\ &= -((x-1)^2 - 4) = 4 - (x-1)^2 \end{aligned} \tag{3.37}$$

obdržíme

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4 - (x-1)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x-1}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 3.12. Pro integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}},$$

jenž se liší od (3.36) pouze znaménkem polynomu, dle (3.37) obdržíme integrál typu (3.30):

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^2 - 4}} = \int \frac{\mathrm{d}\,(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 - 4}} \\ &= \ln\left(\left|x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 - 4}\right|\right) + C \\ &= \ln\left(\left|x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}\right|\right) + C.\end{aligned}$$

§ 3.4.5. Různé příklady.

PŘÍKLAD 3.13. Vypočtěme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

Uveďme tři způsoby řešení (všimněme si různých tvarů výsledků).

Řešení 3.13.1. Integrand je racionální funkcí výrazu $\cos x$ a tudíž lze využit obecnou trigonometrickou substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (§ 3.4.3). Dle vzorců (3.22) obdržíme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{t^2+1} \, \mathrm{d}t = 2 \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Integrál $\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ byl vypočítán v příkladu 3.4, použijme proto již odvozený vzorec (3.19):

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= 2\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}} \right| + C \\
&= \ln \left| \frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}} \right| + C = \ln \left| \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} \right| + C \\
&= \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right| + C.
\end{aligned}$$

Řešení 3.13.2. Po vynásobení čitatele a jmenovatele členem $\cos x$ lze zavést substituci $s = \sin x$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\,(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}s}{1 - s^2}.$$

Pro poslední integrál použijme (3.19):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1}{2} \ln |\sin x - 1| - \frac{1}{2} \ln |\sin x + 1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C.$$

Řešení 3.13.3. Jiný způsob je založen na vzorcích $\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ a $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= \int \frac{1}{\cos x} \frac{\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x} \, \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right)}{\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x} = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right| + C = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.
\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 3.14. Vypočtěme integrály

$$I(x) = \int \sin(\ln x) \, \mathrm{d}x, \quad J(x) = \int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x.$$

Vzhledem k definičnímu oboru logaritmu má smysl integrály uvažovat pouze pro $x > 0$, což nadále předpokládáme.

Vykonejme substituci $\ln x = t$; pak $x = \mathrm{e}^t$ (uvažujeme kladná x) a $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$:

$$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t, \quad \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Použijeme-li teď výsledky příkladu 3.3, obdržíme

$$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C,$$
$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C.$$

KAPITOLA 4

Určitý integrál

Obsah

4.1.	Neurčitý integrál – opakování	31
4.2.	Zavedení určitého integrálu	32
4.2.1.	Plocha pod křivkou	32
4.2.2.	Newton-Leibnizův vzorec	33
4.3.	Vlastnosti určitého integrálu	34
4.4.	Výpočet určitého integrálu	34
4.4.1.	Metoda *per partes*	34
4.4.2.	Substituce	36
4.5.	Příklady vypočtu určitých integrálů	39
4.5.1.	Racionální lomené funkce	39
4.5.2.	Univerzální trigonometrická substituce	39
4.5.3.	Různé příklady	43
4.6.	Geometrické aplikace určitého integrálu	43
4.6.1.	Plochy ohraničené křivkami	43
4.6.2.	...	52

Mějme reálnou funkci f jedné reálné proměnné definovanou na nějakém ohraničeném intervalu (a, b). Dále předpokládáme, že je funkce f na (a, b) spojitá (nebo po částech spojitá[1]). Pro takovouto funkci lze hovořit o jejím *integrálu neurčitém* a následně o *integrálu určitém.*

§ 4.1. Neurčitý integrál – opakování

Připomeňme si, že neurčitý integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ vzniká jako odpověď na otázku jak vypadají všechny možné výrazy, které po zderivování podle proměnné x se promění na $f(x)$. Integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se definuje rovností

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

[1]Tím se myslí, že (a, b) lze vyjádřit jako sjednoceni konečně mnoha intervalů, z nichž na každém je funkce spojitá.

kde F je primitivní funkce[2] k funkci f na intervalu (a, b) a C je libovolná konstanta, a se určuje vlastnostmi

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x), \qquad \left(\int F'(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x) + C. \tag{4.1}$$

Pojem neurčitého integrálu se tedy zavadí jako *operace inverzní* k operaci výpočtu derivace.

§ 4.2. Zavedení určitého integrálu

Pojem *určitého integrálu* se zavádí buď s použitím integrálu neurčitého (tj. přes primitivní funkci) nebo přímo přes tzv. integrální součty. V posledním případě se jedná o způsob, jímž se obdrží vzorec pro výpočet obsahu jistého křivočarého lichoběžníku, tj. plochy ležící pod křivkou a ohraničenou zleva a zprava svislými čarami.[3]

§ 4.2.1. Plocha pod křivkou. Mějme funkci f nabývající na $[a, b]$ nezáporných hodnot.

Zašrafujeme-li geometrický útvar, jež ohraničují křivka s rovnici $y = f(x)$, osa x a svislé přímky s rovnicemi $x = a$, $x = b$ (viz schematický obrázek 4.1a), *určitý integrál* funkce f na intervalu (a, b) (značí se $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$) udává obsah plochy tohoto útvaru.

Myšlenka vedoucí na způsob výpočtu velikosti plochy pod libovolnou křivkou spočívá v její přibližném nahrazení jednodušším tvarem s lehce vypočitatelnou plochou, a sice sjednocením malých obdélníků.[4]

Rozdělme interval $[a, b]$ na menší intervaly $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ zadáním $n - 1$ libovolných bodů x_1, x_2,..., x_{n-1} (definujme také $x_0 = a$, $x_n = b$). Vezmeme-li v každém z intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ libovolný bod ξ_i, u každého z těchto intervalů můžeme sestrojit obdélník šířky $x_{i+1} - x_i$ a výšky $f(\xi_i)$ (viz obrázek 4.1b). Pak hledanou plochu je přirozené přibližně nahradit součtem ploch zmíněných obdélníků, což je

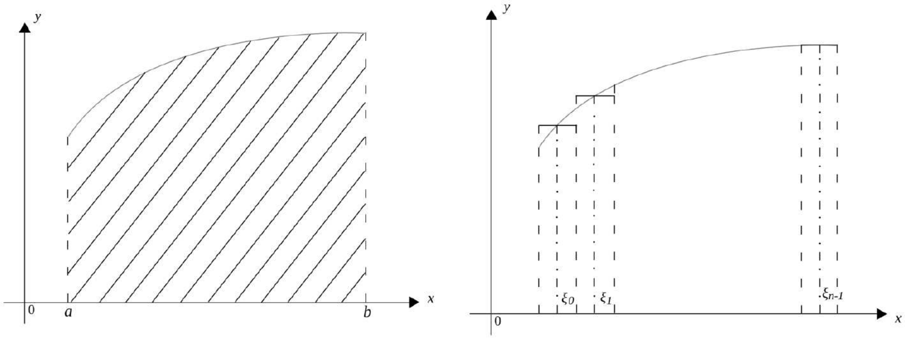
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Když je n velké (tj. zvolených bodů a odpovídajících subintervalů je hodně), všechny veličiny $x_{i+1} - x_i$ jsou malé a proto sestrojené obdélníky dostatečně dobře kopírují tvar původní plochy. Je logicky očekávat, ze by se „kvalita“ aproximace měla zlepšovat při zvětšení počtu subintervalů. *Určitým integrálem* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pak

[2] Jakákoliv primitivní funkce. Připomeňme si také, že primitivní funkce se určuje jednoznačně až na aditivní konstantu.

[3] Leibniz a Newton, XVII st. Přesná formulace vznikla v rámci Riemannova integrálu v XIX st. Současně se matematicky precizně vyjasní plochy jakých figur lze v rámci tohoto integrálu vypočítat (existuji totiž „exotické“ případy, když určitý integrál neexistuje — podrobněji na toto téma zde hovořit nebudeme).

[4] Touto cestou vzniká definice toho, co je to obsah plochy obecného tvaru.



(A) (B)

OBRÁZEK 4.1. Plocha ohraničená křivkou s rovnici $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.

bude výsledek vhodným způsobem chápaného limitního přechodu při neustále zmenšujících se délkách subintervalů. Funkce, pro něž tato konstrukce neselhává, jsou integrovatelné (odpovídající plocha pod křivkou je vypočitatelná).

Neexistují např.:

$\int_{-1}^{1} \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$, $\int_{-\frac{1}{8}}^{1} \ln x\, \mathrm{d}x$ (funkce jsou definovány pouze pro kladná čísla);

$\int_1^2 \operatorname{tg} x\, \mathrm{d}x$ (interval $(1, 2)$ obsahuje bod $\frac{\pi}{2}$, v němž platí $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$ a $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$; lze ukázat, že tato nespojitost je neintegrovatelná a odpovídající plocha pod křivkou je nekonečná, viz příklad 5.4 a obrázek 5.2b).[5]

VĚTA. *Pro každou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, jež je na tomto intervalu spojitá nebo po částech spojitá, určitý integrál $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ existuje.*

Pojem určitého integrálu se rozšiřuje *se zachováním vlastností* (§ 4.3) i na funkce střídající znaménko.

§ 4.2.2. Newton-Leibnizův vzorec. Pro výpočet určitého integrálu stačí umět nalézt k dané funkci *primitivní* funkci (tj. vypočítat odpovídající integrál neurčitý). Platí totiž tzv. *Newton-Leibnizův vzorec*[6]

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{4.2}$$

kde F je primitivní funkce k funkci f na daném intervalu.

[5] Samotná nespojitost ještě neznamená, ze integrál neexistuje; záleží také na její typu a rychlosti růstu nebo klesání. Např. $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, avšak platí $\int_0^1 \ln x\, \mathrm{d}x = -1$ (viz obrázek 5.3b a příklad 5.5, p. 55); integrál tohoto typu se nazývá *nevlastní.*

[6] Vzorec (4.2) lze použit jako definici integrálu $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ spojité funkce f.

§ 4.3. Vlastnosti určitého integrálu

Vzhledem k Newton-Leibnizovu vzorci (4.2) a vlastnostem neurčitého integrálu pro libovolnou konstantu k platí

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^g (x)\,\mathrm{d}x,$$

tj. konstantu lze vždy vytknout před znak integrálu a integrál součtu (rozdílu) dvou výrazů je součtem (rozdílem) příslušných integrálů. Toto jsou stejné vlastnosti linearity, jež má integrál neurčitý. Dále platí

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

Z (4.3) je zřejmé, že ve speciálním případě, když $a = b$ (tj. horní a dolní meze integrování se shodují), platí

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nakonec, je-li c libovolný bod ležící mezi a a b, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

Tato vlastnost se nazývá aditivita vzhledem k intervalu, neboť (4.4) znamená, že integrál funkce na sjednocení navzájem disjunktních[7] intervalů je součtem integrálů z též funkce na jednotlivých intervalech. Je to vlastnost velmi přirozená vzhledem k tomu, že určitý integrál má význam plochy geometrického útvaru.

§ 4.4. Výpočet určitého integrálu

Základními nástroji jsou tzv. substituční metoda a metoda *per partes.*

§ 4.4.1. Metoda *per partes*. Metoda integrování *per partes* (tj. po částech) pro určitý integrál se formuluje téměř stejným způsobem jako v případě integrálu neurčitého.

Buďte u a v funkce, jež mají spojité derivace. Pak $(uv)' = uv' + u'v$, odkud $uv' = (uv)' - vu'$ a proto

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

Funkcí primitivní k derivaci součinu $(uv)'$ je, samozřejmě, součin uv. Vzhledem k Newton-Leibnizovu vzorci (4.2) pro libovolnou funkci g se spojitou derivaci platí

$$\int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = g(b) - g(a) \tag{4.6}$$

[7] Tj. takových, jejichž průnik je prázdny.

nebo, což je totéž,

$$\int_a^b \mathrm{d}g(x) = g(b) - g(a). \tag{4.7}$$

Proto

$$\int_a^b (u(x)v(x))' \,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) \tag{4.8}$$

a z (4.5) obdržíme

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.9}$$

Metoda integrování *per partes* pro určitý integrál spočívá v užití vzorce (4.9), jenž se často zapisuje ve zkráceném tvaru

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

Tuto metodu je vhodné použit, jestliže bude integrál $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ jednodušší než $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ (tj. zderivování u při současném zintegrování v' zpět na v situaci zlepšuje).

Vzpomeneme-li si teď na pojem diferenciálu funkce,[8] pro lepší zapamatování můžeme rovnost (4.10) zapisovat ve tvaru

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x). \tag{4.11}$$

PŘÍKLAD 4.1. Mějme např. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$. Jelikož $(\cos x)' = -\sin x$, pak $\sin x = v'(x)$ pro $v(x) = -\cos x$. Vezmeme-li dále $u(x) = x$, platí $u'(x) = 1$ a podle vzorce (4.10) obdržíme

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x &= -\int_0^\pi x\,(\cos x)'\,\mathrm{d}x = (x\cos x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x\\ &= \pi\cos\pi - 0\cos 0 + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = -\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x\\ &= -\pi + \int_0^\pi (\sin x)'\,\mathrm{d}x = -\pi + \sin x\,|_0^\pi = -\pi + \sin\pi - \sin 0 = -\pi.\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 4.2. Vypočtěme integrál

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,\mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

[8] Viz pozn. 10, str. 37

Jelikož $(\ln x)' = 1/x$, je vhodné použit metodu *per partes*:

$u(x) = \ln x, \quad du(x) = \frac{1}{x}\,dx$
$dv(x) = dx, \quad v(x) = x$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x)' \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x|_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x (\ln x)' \, \mathrm{d}x$$
$$= \ln 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - 1).$$

Načrtneme-li graf funkce $x \mapsto \ln x$ na intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$, můžeme odvodit, že nalezená hodnota integrálu (4.12) udává plochu rovinného útvaru z obr. 5.3a, str. 57.

§ 4.4.2. Substituce. *Substituční* metoda pro určitý integrál je založená na vzorci[9]

$$\int_a^b f(h(x)) \, \mathrm{d}h(x) = F(h(b)) - F(h(a)),$$

kde F je primitivní funkce pro f, tj.

$$\int_a^b f(h(x)) h'(x) \, \mathrm{d}x = F(h(b)) - F(h(a)).$$

Výpočet se provádí substituci $t = h(x)$, odkud $\mathrm{d}t = h'(x) \, \mathrm{d}x$ a pokud má integrand tvar $f(h(x))h'(x)$, pak lze x z výrazu úplně vyloučit a obdržíme integrál vzhledem k nové proměnné t. Tím pádem stačí odvodit neurčity integrál z f a dosadit odpovídající (ztransformované) meze. *Tento poslední krok, jenž nemá obdobu pro integrál neurčitý, je velmi důležitý, jelikož nesprávné integrační meze způsobí chybu.*

Věta. *Má-li funkce h na (a, b) spojitou derivaci, pro každou spojitou funkci f platí*

$$\int_a^b f(h(x)) h'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{h(a)}^{h(b)} f(t) \, \mathrm{d}t. \tag{4.13}$$

Metodu substituce občas používáme v alternativní podobě, a sice tak, že se vzorec (4.13) přečte „opačným“ směrem.

Věta. *Nechť $[\alpha, \beta]$ a $[a, b]$ jsou uzavřené intervaly a funkce $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je taková, že $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$. Má-li funkce h na (α, β) spojitou derivaci, pak*

[9] Tento vztah je přímým důsledkem metody substituce pro neurčitý integrál a Newton-Leibnizova vzorce (4.2). Metoda substituce pro neurčitý integrál je důsledkem pravidla derivovaní složené funkce.

pro každou spojitou na $[a,b]$ funkci f platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(h(s))h'(s)\,\mathrm{d}s. \tag{4.14}$$

V praxi výpočty provádíme nejčastěji tak, ze vzorec explicitně nevypisujeme a přecházíme přímo k zaměně proměnné. Přitom vykonáme následující kroky:

(1) vyšetříme výraz pod integrálem a zkusíme nalézt vhodnou substituci;
(2) zavedeme novou proměnnou, dosadíme do integrandu a vyloučíme proměnnou původní;
(3) vypočítáme nové meze integrování.

PŘÍKLAD 4.3. Mějme integrál

$$\int_{-1}^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}}.$$

Integrand obsahuje dva lineární členy: x a $x+2$, oba dva mají stejný diferenciál.[10] Proto zavedeme substituci $x+2=t$. Pak $x=t-2$ a $\mathrm{d}t=\mathrm{d}(x+2)=\mathrm{d}x$. Jelikož se proměnná x mění v mezích od -1 k 3, potom $t=x+2$ se mění od $-1+2=1$ k $3+2=5$:

$$\int_{-1}^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}} = \int_1^5 \frac{(t-2)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_1^5 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - 2\int_1^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_1^5 t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t - 2\int_1^5 t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\bigg|_1^5 - 2\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\bigg|_1^5 = \frac{5^{\frac{3}{2}}-1}{\frac{3}{2}} - 2\frac{5^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(\sqrt{5})^3 - 4\sqrt{5} + \frac{10}{3}.$$

Z vykonaných výpočtů můžeme odvodit, že by bylo lepší rovnou zavést substituci $\sqrt{x+2}=s$. Pak $x=s^2-2$ a proto $\mathrm{d}x=2s\,\mathrm{d}s$.[11] Dále, jelikož $-1\le x\le 3$, pak $1\le x+2\le 5$ a vzhledem k monotonnosti funkce $x\mapsto\sqrt{x+2}$ platí $1\le\sqrt{x+2}\le\sqrt{5}$. Dosazením do integrálu obdržíme, samozřejmě, stejný výsledek:

$$\int_{-1}^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}} = \int_1^{\sqrt{5}} \frac{(s^2-2)\cdot 2s\,\mathrm{d}s}{s} = 2\int_1^{\sqrt{5}} (s^2-2)\,\mathrm{d}s = 2\int_1^{\sqrt{5}} s^2\,\mathrm{d}s - 4\int_1^{\sqrt{5}} \mathrm{d}s$$

---

[10] Zde využijeme pojmu diferenciálu funkce jedné proměnné. *Diferenciálem* funkce f v bodě x se nazývá výraz

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.15}$$

kde „$f'(x)\,\mathrm{d}x$“ tlumočíme jako „$f'(x)\cdot\mathrm{d}x$“. Připomíná to také označení pro derivaci ve tvaru $f'(x)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, odkud obdržíme (4.15) formálním vynásobením výrazem $\mathrm{d}x$ (jemuž se říká diferenciál nezávisle proměnné). S diferenciály se pracuje stejné jako s odpovídajícími derivacemi.

[11] Mohli bychom také odvodit $\mathrm{d}s=\mathrm{d}(\sqrt{x+2})=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$, pak $\mathrm{d}x=2\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}s=2s\,\mathrm{d}s$.

$$= 2\frac{s^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{5}} - 4(\sqrt{5}-1) = \frac{2}{3}(\sqrt{5})^3 - 4\sqrt{5} + \frac{10}{3}.$$

PŘÍKLAD 4.4 (substituce a integrace *per partes*). Vypočtěme

$$\int_0^2 x^5 \mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Můžeme si všimnout, že platí $\mathrm{d}(x^3) = 3x^2\,\mathrm{d}x$ a proto je přirozené zavést substituci

$$t = x^3. \tag{4.16}$$

Potom $\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$ a tudíž $x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t$. Dále, jelikož se x mění v mezích od 0 k 2, pak t podle (4.16) je v mezích 0 a $2^3 = 8$:

$$\int_0^2 x^5\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^3\mathrm{e}^{x^3}\cdot x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^3\mathrm{e}^{x^3}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{d}(x^3) = \frac{1}{3}\int_0^8 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t. \tag{4.17}$$

Pro $\int_0^8 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ použijeme metodu *per partes*:

$$\int_0^8 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^8 t(\mathrm{e}^t)'\,\mathrm{d}t = (t\mathrm{e}^t)\Big|_0^8 - \int_0^8 1\cdot\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\mathrm{e}^2 - 0\mathrm{e}^0 - \int_0^8 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^t\Big|_0^8 = 2\mathrm{e}^2 - (\mathrm{e}^8 - \mathrm{e}^0) = 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^8 + 1.$$

Dosazením tohoto výrazu do (4.17) obdržíme

$$\int_0^2 x^5\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^8 + 1}{3}.$$

PŘÍKLAD 4.5. Vypočtěme

$$\int_{-1}^2 x(2-x^2)^7\,\mathrm{d}x.$$

Jedná se, samozřejmě, o integraci polynomu stupně 15, s čímž po vykonání příslušných úprav žádné potíže nebudou. Pro usnadnění výpočtů si zde můžeme všimnout, že se ten nejsložitější výraz $(2-x^2)^7$ zjednoduší, zavedeme-li novou proměnnou $t = 2 - x^2$. Pak bude $(2-x^2)^7 = t^7$ a $\mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x$. Navíc vzhledem k přítomnosti členu „x“, jenž můžeme k diferenciálu přiřadit, není potřeba vypočítávat $\mathrm{d}x$ ($\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2x}$, $x^2 = 2-t$) a stačí použít vztah $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$.

Vypočtěme nové meze integrovaní: $x = -1 \Rightarrow t = 2 - x^2 = 1$, $x = 2 \Rightarrow t = 2 - x^2 = 2 - 4 = -2$.[12] Pak obdržíme

$$\int_{-1}^2 x(2-x^2)^7\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 (2-x^2)^7\cdot x\,\mathrm{d}x = \int_1^{-2} t^7\cdot\Big(-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\Big) = -\frac{1}{2}\int_1^{-2} t^7\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{t^8}{8}\Big|_1^{-2} = -\frac{1}{16}((-2)^8 - 1) = -\frac{255}{16}.$$

[12]Nové meze integrovaní 1 a -2 vychází opačně uspořádané: dolní mez je vetší než ta horní, $1 > -2$. Není to chyba; důvodem je, že na intervalu $(-1, 2)$ je funkce $x \mapsto 2 - x^2$ klesající.

§ 4.5. Příklady vypočtu určitých integrálů

Výpočet určitých integrálů provádíme pomocí Newton-Leibnizova vzorce (4.2). Je důležité předem ověřit vlastnosti integrandu a ujistit se, že určitý integrál na daném intervalu je korektně definován.

§ 4.5.1. Racionální lomené funkce. Pro integraci racionální lomené funkce vypočítáme její rozklad na součet parciálních zlomků, pro něž neurčité integrály buď známe nebo nalezneme v tabulkách.

PŘÍKLAD 4.6. Uvažujme integrál

$$\int_0^1 \frac{x^3-1}{x^3+x^2+4x+4}.$$

V integrandu je neryze lomená funkce, již převedeme na ryze lomenou funkci dělením polynomů. Rozklad na parciální zlomky pak bude

$$\frac{x^3-1}{x^3+x^2+4x+4} = 1 - \frac{2}{5}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{5}\,\frac{3\,x+17}{x^2+4}.$$

Zde stačí okomentovat jen poslední člen, kde pro integraci rozložíme čitatel na součet dvou výrazů a v jednom z nich vydělíme v čitateli diferenciál jmenovatele $\mathrm{d}(x^2+4) = 2x\,\mathrm{d}x$:[13]

$$\begin{aligned}-\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{3\,x+17}{x^2+4}\,\mathrm{d}x &= -\frac{3}{5}\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x - \frac{17}{5}\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{10}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x^2+4)}{x^2+4}\,\mathrm{d}x - \frac{17}{10}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Výpočtem pak obdržíme

$$\int_0^1 \frac{x^3-1}{x^3+x^2+4x+4} = 1 + \frac{1}{5}\ln 2 - \frac{3}{10}\ln 5 - \frac{17}{10}\arctan\frac{1}{2}.$$

§ 4.5.2. Univerzální trigonometrická substituce. Je-li integrand racionální funkci výrazů $\cos x$ a $\sin x$, je možné pro výpočet integrálu použit *univerzální trigonometrickou substituci*

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}. \tag{4.18}$$

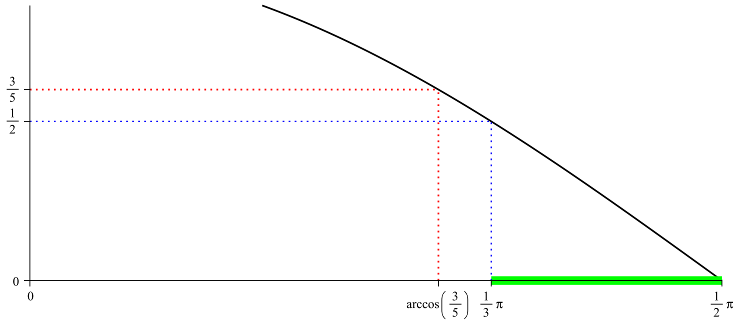
Pak $x = 2\operatorname{arctg} t$ a $\mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Vzhledem k tomu, že platí

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

integrál tak převedeme na integrál racionální lomené funkce, a to pomocí následujících vzorců.

---

[13]Takto integrujeme obecně výrazy typu $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.



OBRÁZEK 4.2. Graf funkce $x \mapsto \cos x$ pro $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Vzorce pro vykonání univerzální trigonometrické substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$
$$x = a \Rightarrow t = \operatorname{tg}\frac{a}{2}, \qquad x = b \Rightarrow t = \operatorname{tg}\frac{b}{2}. \tag{4.19}$$

PŘÍKLAD 4.7. Vypočtěme integrál

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{3-5\cos x}. \tag{4.20}$$

Funkce $x \mapsto \frac{1}{3-5\cos x}$ je spojitá v bodech $x \neq \arccos\frac{3}{5} + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Žádný z těchto bodů neleží v intervalu $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ (viz obr. 4.2) a tak se jedná o integrál spojité funkce, jenž je korektně definován.

Zavedeme-li v (4.20) trigonometrickou substituci (4.18), meze integrace pro novou proměnnou t budou $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (místo $x = \frac{\pi}{3}$) a $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ (místo $x = \frac{\pi}{2}$). Pak dle (4.19) se integrál (4.20) přepíše takto:[14]

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{3-5\cos x} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{3(t^2+1)-5(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{2t-1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t$$

[14]Provedli jsme rozklad podílu $\frac{1}{4t^2-1}$ na součet parciálních zlomků (§ 4.5.1): $\frac{1}{4t^2-1} = \frac{1}{(2t-1)(2t+1)} = \frac{A}{2t-1} + \frac{B}{2t-1}$, kde pro všechna t musí platit $A(2t+1) + B(2t-1) = 1$. Pak $A + B = 0$, $A - B = 1$, tj. $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\mathrm{d}(2t-1)}{2t-1} - \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\mathrm{d}(2t+1)}{2t+1} \\
&= \frac{1}{4}\ln|2t-1|\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} - \frac{1}{4}\ln|2t+1|\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \qquad (4.21)\\
&= \frac{1}{4}\left(\ln 1 - \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\right) - \frac{1}{4}\left(\ln 3 - \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{\ln 3}{4}.
\end{aligned}
$$

Poznamenejme, že v (4.21) nebyla potřeba přepočítávat integrační meze, neboť při zavedení do diferenciálu jsme ponechali proměnnou t, jež se mění v původních mezích $\frac{1}{\sqrt{3}}$ a 1 (tj. substituce typu $s = 2t \pm 1$ jsme explicitně nevykonávali).

PŘÍKLAD 4.8. Vypočtěme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x. \qquad (4.22)$$

V příkladu 3.5 jsme pomocí trigonometrické substituce (4.18) odvodili neurčity integrál $\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x$, pro nějž platí (3.24):

$$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x + 2) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C. \qquad (4.23)$$

Jelikož $-1 \le \cos x \le 1$, jmenovatel v (4.22) je vždy odlišný od 0. Integrand je tedy spojitou funkcí na $[-\pi, \pi]$ a stačí jen použit Newton-Leibnizův vzorec (4.2), tj. dosadit do (4.23) integrační meze:[15]

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}\,\mathrm{d}x &= -(\ln(\cos x + 2))|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD 4.9. Vypočtěme $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ a $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$. Ihned poznamenejme, že $\cos x \neq 0$ pro $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ a $\sin x \neq 0$ pro $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, integrandy jsou tedy na příslušných intervalech spojité a integrály existují. Tyto integrály lze převést na integrály racionálních lomených funkcí obecnou trigonometrickou substituci (4.18); v daném případe však je pohodlnější to udělat jinak.

[15]Připomeňme si, že funkce $x \mapsto \operatorname{tg} x$ a $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ jsou liché.

Řešení 4.9.1. V integrálu $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ vykonejme substituci $\sin x = t$, pak $\mathrm{d}t = \cos x \,\mathrm{d}x$ a tudíž

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Rozklad výrazu $\frac{1}{1-t^2}$ na parciální zlomky je $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-t}$, proto[16]

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+t)}{1+t} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-t)}{1-t} \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|,\end{aligned}$$

odkud zpětným dosazením $t = \sin x$ obdržíme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \tag{4.24}$$

a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{1-\sin\frac{\pi}{4}}} - \ln\sqrt{\frac{1+\sin 0}{1-\sin 0}} \\ &= \ln\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}} - \ln 1 = \ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \ln\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}} = \ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

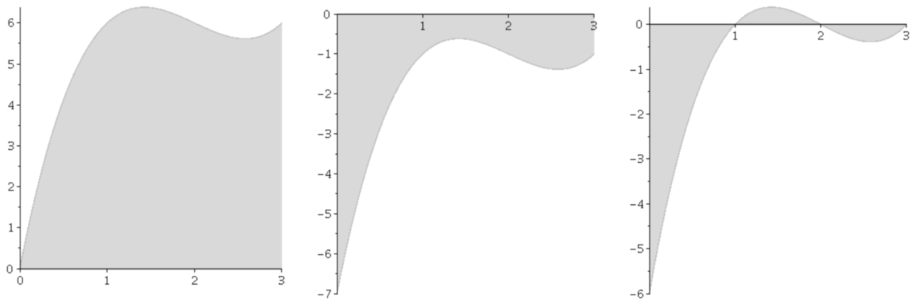
Řešení 4.9.2. Podobně předchozímu pro $t = \cos x$ máme $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \int \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}}} - \ln\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}} \\ &= \ln\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}} - \ln\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \ln\frac{1}{\sqrt{3}} - \ln\sqrt{\frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}} \\ &= -\ln\sqrt{3} - \ln\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln 3 - \ln(2-\sqrt{3}).\end{aligned}$$

[16]Integrační konstanty pro přehlednost vynecháváme



(A) (B) (C)

Obrázek 4.3. Geometrické útvary ležící mezi grafem funkce a osou x

§ 4.5.3. Různé příklady.

Příklad 4.10. Vypočtěme

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} (3-\ln x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Výraz $(3-\ln x)^2$ se významně zjednoduší po zderivovaní a tudíž má smysl zkusit *per partes* (§ 4.4.1), kde za druhou funkci v součinu zvolíme konstantu 1:

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} (3-\ln x)^2 \,\mathrm{d}x &= x(3-\ln x)^2\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} - 2\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x - 3}{x} x \,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} - 2\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} (\ln x - 3)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 6(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}) - 2\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= 7\mathrm{e}^2 - 10\mathrm{e} - 2x\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} + 2\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 7\mathrm{e}^2 - 10\mathrm{e} - 4\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e} + 2(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}) = 5\mathrm{e}^2 - 10\mathrm{e}.\end{aligned}$$

$u(x) = (3-\ln x)^2,\quad du(x) = \frac{2}{x}(\ln x - 3)\,dx$
$dv(x) = dx,\quad v(x) = x$

$u(x) = \ln x,\quad du(x) = \frac{dx}{x};$
$dv(x) = dx,\quad v(x) = x$

§ 4.6. Geometrické aplikace určitého integrálu

Pojem určitého integrálu funkce jedné reálné proměnné lze velmi efektivně uplatnit mimo jiné při řešení různých otázek geometrického charakteru.

§ 4.6.1. Plochy ohraničené křivkami. Mějme spojitou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Graf funkce představuje rovinnou křivku, s níž souvisí další geometrické útvary. Ve výpočtech se obvykle vyskytují útvary ležící mezi grafem a osou x a dále útvary ohraničené dvěma nebo více grafy.

§ 4.6.1.1. Plocha geometrického útvaru ležícího mezi grafem a osou x. Je-li potřeba určit obsah plochy S rovinného útvaru ohraničeného grafem funkce f, osou x a svislými přímkami s rovnicemi $x = a$, $x = b$, jsou možné následující případy schematicky zobrazené na obrazcích 4.3a, 4.3b a 4.3c:

4.3a: funkce f je na $[a, b]$ nezáporná, její graf leží nad osou x, integrál je nezáporný a plocha uvazovaného útvaru je $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

4.3b: funkce f je na $[a, b]$ nekladná, její graf leží pod osou x, integrál je nekladný a $S = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

4.3c: funkce f na $[a, b]$ střída znaménko, proto plocha uvazovaného útvaru je rovna součtu integrálů z $|f|$ na jednotlivých intervalech, kde má f konstantní znaménko (je kladná nebo záporná).

Integrál funkce střídající znaménko může být jak kladným tak i záporným číslem (nemluvíme-li o nule). Odlišnosti v postupu v případech 4.3a, 4.3b, 4.3c přirozeně vznikají vzhledem k znaménku funkce na odpovídajících množinách. Např. v 4.3b je funkce na celém intervalu záporná a tudíž pro výpočet plochy pomocí integrálu musíme počítat integrál z absolutní hodnoty funkce.

PŘÍKLAD 4.11. Vypočtěme obsah plochy S rovinného útvaru ohraničeného grafem funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 3$.

Graf této funkce je znázorněn na obrázku 4.3a. Funkce je na $[0, 3]$ nezáporná a tudíž

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 11x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 x^3\,\mathrm{d}x - 6\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x + 11\int_0^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{3^4}{4} - 6\frac{3^3}{3} + 11\frac{3^2}{2} = \frac{63}{4}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

PŘÍKLAD 4.12. Vypočtěme obsah plochy S rovinného útvaru ohraničeného grafem funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 7$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 3$.

Graf této funkce je znázorněn na obrázku 4.3b. Funkce je na $[0, 3]$ nekladná a tudíž dle (4.25), kde jsme již vypočetli $\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 11x)\,\mathrm{d}x$, platí

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 7)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 11x)\,\mathrm{d}x + 7\int_0^3 \mathrm{d}x = -\frac{63}{4} + 21 = \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 4.13. Vypočtěme obsah plochy S útvaru ohraničeného grafem funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 3$.

Graf této funkce je znázorněn na obrázku 4.3c. Funkce na $[0, 3]$ střída znaménko v bodech 1, 2 a 3, přičemž 3 je již krajní bod intervalu. Funkce je kladná na intervalu $(1, 2)$ a záporná na $(0, 1)$ a $(2, 3)$, proto je plocha rovna

$$S = -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{4}.$$

§ 4.6.1.2. Plochy ohraničené dvěma grafy. Určeni obsahu plochy ohraničené dvěma grafy se provádí podobným způsobem jako v § 4.6.1.1. Máme-li dvě funkce f a g, pro něž platí[17]

$$f(x) \geq g(x), \qquad x \in (\alpha, \beta), \tag{4.26}$$

a jejichž grafy se navzájem protínají pro $x = \alpha$ a $x = \beta$ tak, že v rovině vymezují jistou ohraničenou plochu, pak obsah plochy S jednoduše vypočteme přes určitý integrál. Vskutku je situace taková jako na schematickém obrázku 4.4a a je zřejmé, že obsah barevně zvýrazněné plochy je roven rozdílu obsahů dvou ploch, jež ohraničují grafy funkcí f a g spolu s osou x a přímkami $x = \alpha$, $x = \beta$. Dle § 4.6.1.1 obsahy těchto ploch udávají integrály $\int_\alpha^\beta f(s)\,\mathrm{d}x$ a $\int_\alpha^\beta f(s)\,\mathrm{d}x$, pak je

$$S = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta f(s)\,\mathrm{d}x, \tag{4.27}$$

nebo, což je totéž, $S = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$. Integrál od funkce s „horním“ grafem se v (4.27) vyskytuje se znaménkem „+“ a ten odpovídající „dolnímu“ grafu — se znaménkem „−“.

Poznamenejme, pro výpočet obsahu plochy pomocí vzorce (4.27) není nutné, aby obě dvě funkce nabývaly na (α, β) kladných hodnot (viz obrázky 4.4a, 4.4b), neboť v případe když tomu tak není (obrázek 4.4c) vždy můžeme grafy posunout nahoru přidáním k funkcím f, g nějakého dostatečně velkého čísla A, což situaci převede na případ 4.4a nebo 4.4b. Rozdíl funkcí, a tudíž i obsah plochy se přitom nezmění, protože $(f + A) - (g + A) = f - g$.

V případě když je se grafy protínají tak, že vzniká uzavřený rovinný útvar sestavený z několika částí (obrázek 4.5), obsah jeho plochy bude součtem ploch jednotlivých útvarů vypočtených podle výše uvedeného.

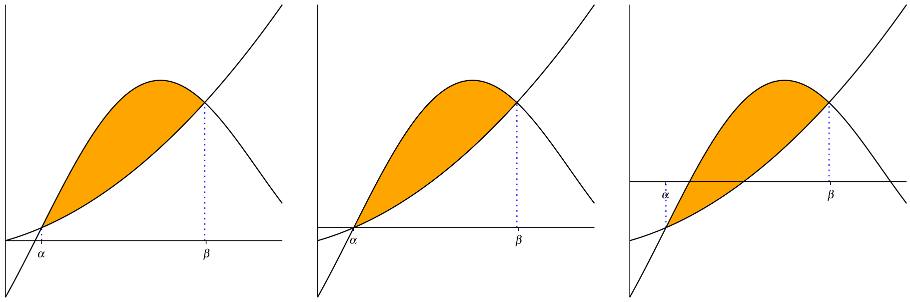
V případě, když se křivky *protínají ve více bodech* a tudíž máme ne jeden interval (α, β) ale několik, je potřeba si dávat pozor na uspořádaní grafů (tj. na nerovnost (4.26)). Muže se totiž stát, že po průsečíku už bude původně „horní“ graf níž. V takových případech počítáme integrály zvlášť na každém z intervalů (α, β) odpovídajících průsečíkům grafů, přičemž (4.27) používáme tak, aby se znaménkem „+“ byl vždy integrál z funkce, jež na (α, β) odpovídá „hornímu“ grafu.

PŘÍKLAD 4.14. Vypočtěme obsah plochy S uzavřeného rovinného útvaru ohraničeného grafy funkcí $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ v intervalu $(0, 2\pi)$.

Načrtněme grafy (viz obrázek 4.6a). Potřebný geometrický útvar (na obrázku 4.6a barevně zvýrazněný) je určen dvěma body, v nichž se grafy protínají, a ty jsou kořeny rovnice

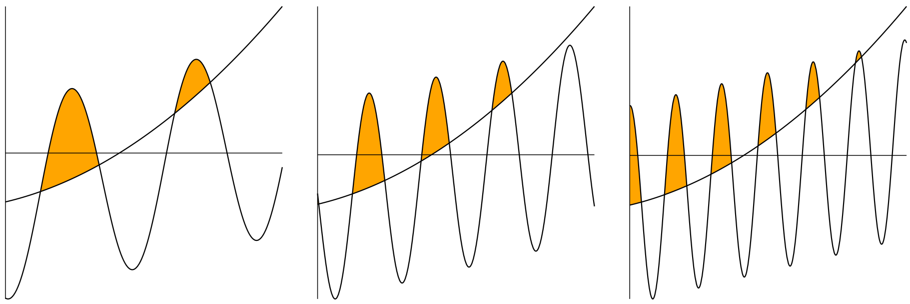
$$\sin x = \cos x \tag{4.28}$$

[17] Takové funkce se nazývají dobře uspořádané na daném intervalu.



(A) (B) (C)

OBRÁZEK 4.4. Rovinná plocha ležící mezi grafy dvou funkcí: posun grafů ve svislém směru obsah plochy nemění



(A) (B) (C)

OBRÁZEK 4.5. Plocha mezi grafy dvou funkcí sestavená více útvary

v intervalu $(0, 2\pi)$. V intervalu $(0, 2\pi)$ (4.28) platí pro body $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

Znázorněme si graficky plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, osou x a svislými přímkami $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ (obrázek 4.6a). Všude na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ leží graf sinu nad grafem kosinu, tj. $\sin x > \cos x$ pro $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$. Velikost plochy S je tedy podle § 4.6.1.1 rovna rozdílu integrálů $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x \, \mathrm{d}x$ a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x \, \mathrm{d}x$:

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x \, \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x \, \mathrm{d}x. \tag{4.29}$$

Jelikož

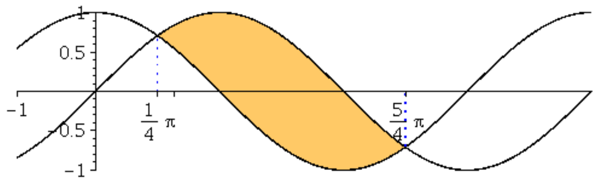
$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x \, \mathrm{d}x &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \mathrm{d}(\cos x) = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}, \\
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x \, \mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \mathrm{d}(\sin x) = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \sin\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},
\end{aligned}$$

z (4.29) obdržíme výsledek $S = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

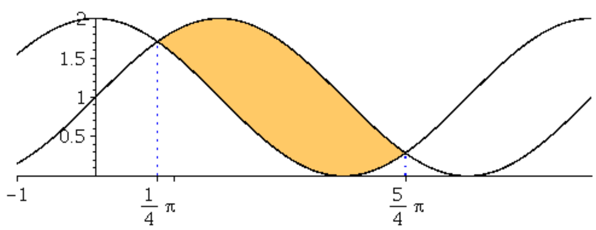
Všimněme si, že druhý integrál v (4.29) vychází *záporný*: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x \, \mathrm{d}x = -\sqrt{2}$. Ten však sám o sobě žádnou plochu neudává; obsah dané plochy je roven *rozdílu* dvou integrálů a tudíž je to logicky v pořádku. Zde je situace typu znázorněného na obrázku 4.3c, kde uvažovaná plocha protíná osu x a proto jistá její část leží pod osou a odpovídá záporným funkčním hodnotám. Jak již bylo zmíněno, přičtením vhodné konstanty takový případ můžeme vždy převést na 4.3a nebo 4.3b (stačí jen o tom vědět; pokaždé vykonávat takový posun, samozřejmě, nemusíme). Pro tento příklad je zřejmé, že, definujeme-li

$$\tilde{f}(x) = \cos x + 1, \quad \tilde{g}(x) = \sin x + 1,$$

pak jsou funkce $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$ na intervalu $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ nezáporné (viz obrázek 4.6b) a ohraničují plochu téhož obsahu, neboť $\tilde{g} - \tilde{f} = f - g$ a proto $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \tilde{g}(x) \, \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \tilde{f}(x) \, \mathrm{d}x = S$.



(A) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$



(B) $\tilde{f}(x) = \cos x + 1$, $\tilde{g}(x) = \sin x + 1$

OBRÁZEK 4.6. Grafy funkcí z příkladu 4.14 v intervalu $(0, 2\pi)$: posun útvaru ve svislém směru

PŘÍKLAD 4.15. Vypočtěme plochu S uzavřeného geometrického útvaru ohraničeného grafy funkcí $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = \frac{x}{2} + 1$ v intervalu $(-1, 3)$.

Po načrtnutí schematického grafu (viz obrázek 4.7) zjistíme, že se potřebný útvar určuje kořeny rovnice

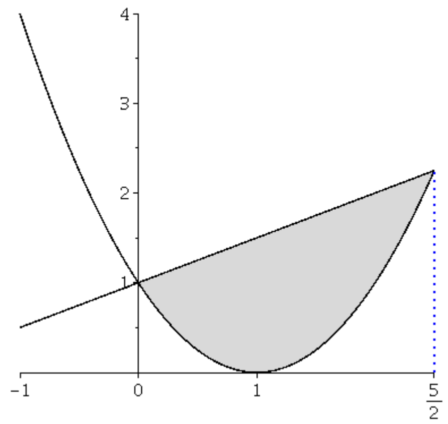
$$(x-1)^2 = \frac{x}{2} + 1 \tag{4.30}$$

nebo, což je totéž,

$$x^2 - \frac{5}{2}x = 0. \tag{4.31}$$

Kořeny rovnice (4.31) jsou 0 a $\frac{5}{2}$. V intervalu $(0, \frac{5}{2})$ leží graf funkce g nad grafem funkce f. Proto plocha rovinného útvaru jimi ohraničeného je rovna

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{x}{2} + 1\right) \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{5}{2}} (x-1)^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{5}{2}} x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{5}{2}} \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{5}{2}} (x-1)^2 \,\mathrm{d}(x-1) \\ &= \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} - \frac{(x-1)^3}{3}\bigg|_0^{\frac{5}{2}} = \frac{65}{16} - \frac{35}{24} = \frac{125}{48}.\end{aligned}$$

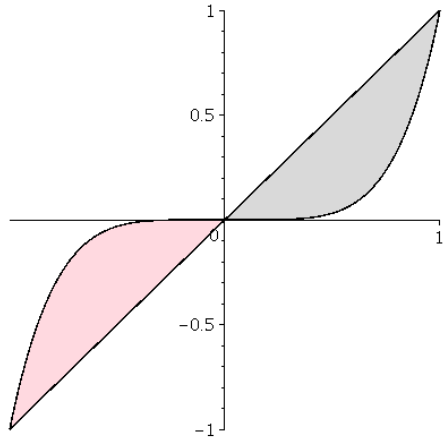


OBRÁZEK 4.7. Grafy funkcí $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = \frac{x}{2} + 1$ a jimi ohraničena plocha

PŘÍKLAD 4.16. Vypočtěme plochu S rovinného útvaru ohraničeného grafy funkcí $f(x) = x^5$, $g(x) = x$.

Grafy funkcí se protínají v bodech $[-1, -1]$, $[0, 0]$ a $[1, 1]$, přičemž v bodě $[0, 0]$ se mění znaménko rozdílu $f - g$ a proto vpravo od 0 leží graf f pod grafem g („šedá“ plocha), kdežto vlevo od 0 je tomu naopak („červená“ plocha)). Proto je plocha rovna

$$S = -\int_{-1}^{0} (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x + \int_0^1 (g(x) - f(x)) \,\mathrm{d}x$$



OBRÁZEK 4.8. Plocha ohraničená grafy funkcí $f(x) = x^5$ a $g(x) = x$

$$= -\int_{-1}^{0}(x - x^5)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x - x^5)\,\mathrm{d}x = -\Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}\Big)\Big|_{-1}^{0} + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}\Big)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Zde bychom si mohli také všimnout, že obě dvě funkce f a g jsou liché; pak je ihned zřejmé, že je $S = 2\int_0^1 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.

Poznamenejme, že kdybychom zde pro výpočet obsahu plochy nesprávně použili vzorec (4.27) s jedním integrálem v mezích $\alpha = -1$ a $\beta = 1$, obdrželi bychom absurdní výsledek $S = \int_{-1}^{1}(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(x^5 - x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Postupujeme stejným způsobem i v případech, když se grafy křivek protínají ve více bodech a změna uspořádaní větví grafů nastává několikrát.

PŘÍKLAD 4.17. Vypočtěme plochu S rovinného útvaru ohraničeného grafy funkcí $f(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{45}{4}x - 6$ a $g(x) = \frac{x}{4}$ v intervalu $(0, 4)$.

Je potřeba určit průsečíky grafů těchto funkcí; ty jsou kořeny rovnice

$$x^3 - 6x^2 + \frac{45}{4}x - 6 = \frac{x}{4}. \tag{4.32}$$

Rovnici (4.32) úpravami převedeme na tvar

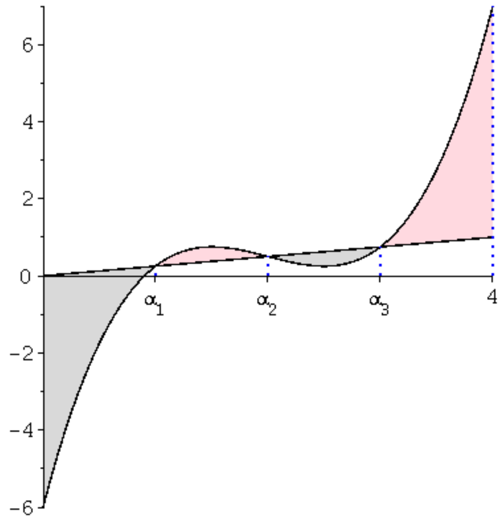
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0. \tag{4.33}$$

Polynom v (4.33) má celé koeficienty. Použitím Hornerova schematu nalezneme kořeny rovnice (4.33); ty jsou 1, 2 a 3.

Průsečíky grafu funkci f a g v intervalu $(0, 4)$ se tedy nachází v bodech, jejichž souřadnice na ose x jsou

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 3.$$

Grafy jsou znázorněné na obrázku 4.9.



OBRÁZEK 4.9. Plocha ohraničená grafy funkcí $f(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{45}{4}x - 6$ a $g(x) = \frac{x}{4}$ v intervalu $(0, 4)$

Potřebná plocha se skládá z několika částí zabarvených šedě a červeně, přičemž v „šedých“ částech (intervaly $(0, \alpha_1)$ a (α_2, α_3)) leží graf přímky g nad grafem funkce f a v „červených“ částech (intervaly (α_1, α_2) a $(\alpha_3, 4)$) je tomu naopak. Proto v daném případě pro určení obsahu plochy je potřeba sečíst integrály z funkce $g - f$ na intervalech $(0, \alpha_1)$, (α_2, α_3) a integrály z funkce $f - g$ na (α_1, α_2) a $(\alpha_3, 4)$:

$$\begin{aligned} S = {} & \int_0^{\alpha_1} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \\ & + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \int_{\alpha_3}^{4} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Jelikož se v integrálech čtyřikrát vyskytuje stejný výraz, je vhodné vypočítat neurčitý integrál

$$\begin{aligned} \int (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^3 - 6x^2 + \frac{45}{4}x - 6 - \frac{x}{4}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - \frac{12x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} - 6x \end{aligned}$$

a následně dosadit odpovídající meze:

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha_1} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\alpha_1} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\ &= -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{12x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} - 6x\right)\Bigg|_0^1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} + \frac{12}{3} - \frac{11}{2} + 6 = \frac{9}{4},\\
\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x &= -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{12x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} - 6x\right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{4},\\
\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{12x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} - 6x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{4},\\
\int_{\alpha_3}^{4} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{12x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} - 6x\right)\Bigg|_3^4 = \frac{1}{4} - \frac{12}{3} + \frac{11}{2} - 6 = \frac{9}{4},
\end{aligned}
$$

a z (4.34) obdržíme

$$S = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2 \cdot \frac{10}{4} = 5.$$

PŘÍKLAD 4.18 (parametricky zadaná křivka). Vypočtěme obsah plochy ohraničené elipsou s poloosami a a b.

Rovnice takové elipsy je

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \tag{4.35}$$

pro daný účel je však pohodlnější její parametrické zadání:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \tag{4.36}$$

kde $0 \le t \le 2\pi$. Z obr. 4.10a je zřejmé, že vzhledem k souměrnosti je hledaná plocha S rovna $4S_0$, kde S_0 značí plochu sektoru ležícího v prvním kvadrantu. Pro S_0 platí

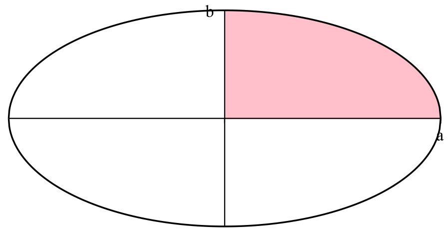
$$S_0 = \int_0^a y\,\mathrm{d}x, \tag{4.37}$$

kde y značí odpovídající funkci proměnné x, jež tento úsek grafu popisuje (tj. y jako funkci nezávisle proměnné x). Abychom nemuseli vyjádření této funkce explicitně zapisovat, použijme raději parametrické rovnice (4.36); pak v integrandu vyhází $y\,\mathrm{d}x = -b\sin t\,\mathrm{d}(a\cos t) = -ab\sin^2 t\,\mathrm{d}t$. Přepočítejme integrační meze: pro $x = 0$ obdržíme $\cos t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$; pro $x = a$ je $\cos t = 1$, tj. $t = 0$. Pak obdržíme[18]

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \int_0^a y\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\,\mathrm{d}(a\cos t) = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,\mathrm{d}t = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi ab - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\,(\sin 2t)\\
&= \frac{1}{4}\pi ab,
\end{aligned}
$$

odkud $S = 4S_0 = \pi ab$.

[18] Použijeme vzorec $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.



(A)

OBRÁZEK 4.10. Příklady rovinných ploch

Poznamenejme, že v případe bezprostředního využití vzorce (4.37) bychom museli z rovnice (4.35) vyjádřit

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

což by vedlo na integrál

$$S_0 = b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = ab\int_0^1 \sqrt{1 - s^2}\,\mathrm{d}s.$$

Zavedeme-li substituci $s = \sin\phi$, máme $\mathrm{d}s = \cos\phi\,\mathrm{d}\phi$, pro $s = 0$ je $t = 0$, pro $s = 1$ je $t = \frac{\pi}{2}$ a pak bude

$$\begin{aligned} ab\int_0^1 \sqrt{1 - s^2}\,\mathrm{d}s &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\phi}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{4}\pi ab + \frac{1}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{4}\pi ab, \end{aligned}$$

odkud obdržíme stejný výsledek[19] $S = \pi ab$.

§ 4.6.2. ... [...]

[19]Poznamenejme, že pro $b = a$ obdržíme πa^2, tj. plochu kruhu o poloměru a.

KAPITOLA 5

Nevlastní integrály

Existence určitého integrálu a jeho hodnota podstatně závisí na vlastnostech funkce na daném intervalu. Může se stát, že primitivní funkci známe, avšak určitý integrál na daném intervalu je nekonečny nebo vůbec neexistuje. Takové případy vyžadují upřesnění pojmu integrálu a úpravu technik práce s nim.

§ 5.1. Motivace

Uveďme několik motivačních příkladů.

PŘÍKLAD 5.1. Vypočtěme integrál

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}.$$

Jelikož příslušný neurčity integrál je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \int x^{-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^{-2} + C, \tag{5.1}$$

využitím Newton-Leibnizova vzorce (4.2) snadno obdržíme

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3}{8}.$$

Obsah plochy znázorněné na obr. 5.1a je tedy rovný $\frac{3}{8}$.

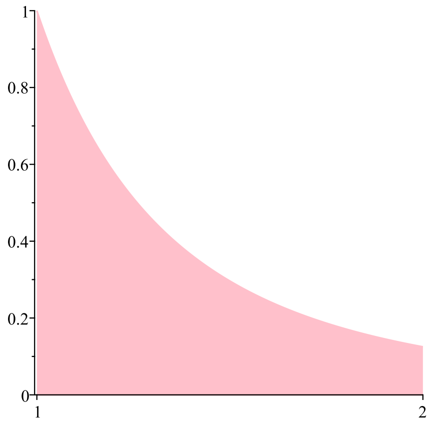
PŘÍKLAD 5.2 (integrál neexistuje). Uvažujme integrál

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}.$$

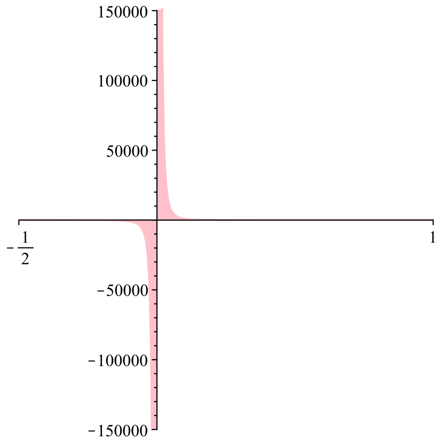
Dosadíme-li výraz (5.1) do Newton-Leibnizova vzorce (4.2), obdržíme $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\big|_{-1}^1 = -\frac{1}{2}(1-1) = 0$. Tento výsledek je však *chybný*, protože interval $(-1,1)$ obsahuje bod 0, v němž má funkce singularitu (mimo jiné, je narušena její spojitost) a nebyli jsme oprávněni Newton-Leibnizův vzorec použit.

Tento integrál neexistuje a odpovídající geometrický útvar obsah nemá. Vskutku, pro libovolná kladná ε_1 a ε_2 platí $\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\big|_{-1}^{-\varepsilon_1} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\varepsilon_1^2})$ a $\int_{\varepsilon_2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\big|_{\varepsilon_2}^1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon_2^2} - 1)$. Budeme-li v těchto vzorcích hodnoty ε_1 a ε_2 neomezeně zmenšovat, vychází

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) = -\infty, \tag{5.2}$$



(A) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{3}{8}$



(B) $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ neexistuje

OBRÁZEK 5.1. Integrál z $\frac{1}{x^3}$ na různých intervalech

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) = +\infty \tag{5.3}$$

a pro $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$, což by dle (4.4) mělo být součtem $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ a $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$, tak obdržíme

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \infty - \infty.$$

Tomuto neurčitému výrazu však nemůžeme smysluplným způsobem přiřadit hodnotu ani kdybychom integrálem $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ rozuměli limitu součtu $\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} + \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ pro ε_1, $\varepsilon_2 \to 0+$, neboť taková limita neexistuje.

Vskutku, buďte $\varepsilon_1 = \frac{1}{n^2}$ a $\varepsilon_2 = \frac{1}{n}$, kde $n = 1, 2, \ldots$. Pak $\int_{-1}^{-\frac{1}{n^2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2}(1 - n^2)$ a $\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2}(n - 1)$, odkud máme

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{n^2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2}(1 - n^2) + \frac{1}{2}(n - 1) = -\frac{1}{2}n(n - 1) \to -\infty, \quad n \to +\infty.$$

Vezmeme-li naopak $\varepsilon_1 = \frac{1}{n}$ a $\varepsilon_2 = \frac{1}{n^2}$, obdržíme

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2}n(n - 1) \to +\infty, \quad n \to +\infty.$$

Chování výrazu $\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} + \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ pro ε_1, $\varepsilon_2 \to 0+$ tudíž podstatně závisí na rychlosti s jakou se ε_1 a ε_2 blíží k 0 a o limitě při ε_1, $\varepsilon_2 \to 0+$ proto nelze mluvit. Integrál $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ tedy neexistuje ani v tomto smyslu.[1]

[1]Rovnosti (5.2), (5.3) znamenají, že pro *nevlastní* integrály $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ a $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ platí $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\infty$, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = +\infty$. Podíváme-li se na obrázek 5.1b, vzniká intuitivní představa, že „velikost“ nekonečna je v obou dvou případech stejná (plochy pod $(-1, 0)$ a nad $(0, 1)$ jsou sobě rovné) a

PŘÍKLAD 5.3 (nekonečný obsah plochy). Vypočtěme obsah plochy ohraničené křivkou s rovnici $y = \operatorname{tg} x$, osou x a přímkami $x = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Požadovaný obsah plochy udává určitý integrál $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx$, který však konečnou hodnotu nemá.

Vskutku máme $(\cos x)' = -\sin x$, odtud $d(\cos x) = -\sin x \, dx$ a $\sin x \, dx = -d(\cos x)$ a proto (implicitně provádíme substituci $\cos x = t$ a používáme (4.7))

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \sin x \, dx = -\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \, d(\cos x) \\
&= -\int_1^{\frac{\pi}{2}} d(\ln \cos x) = -\ln \cos x \Big|_1^{\frac{\pi}{2}} \qquad (5.4) \\
&= -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \ln \cos x + \ln \cos 1. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Zde výraz $\ln \cos 1$ má smysl, protože $\cos 1 \approx 0.54 > 0$. Avšak $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, tudíž $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln \cos x$ neexistuje a $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \ln \cos x = \lim_{t \to 0+} \ln t = -\infty$. Odtud vzhledem k (5.5) obdržíme[2]

$$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx = +\infty. \qquad (5.6)$$

Poznamenejme, že funkce $x \mapsto \operatorname{tg} x$ není v bodě $\frac{\pi}{2}$ spojitá. Geometricky vztah (5.6) znamená, že plocha znázorněná na obr. 5.2a má nekonečný obsah.

PŘÍKLAD 5.4 (integrál neexistuje). Uvažujme integrál

$$\int_1^2 \operatorname{tg} x \, dx.$$

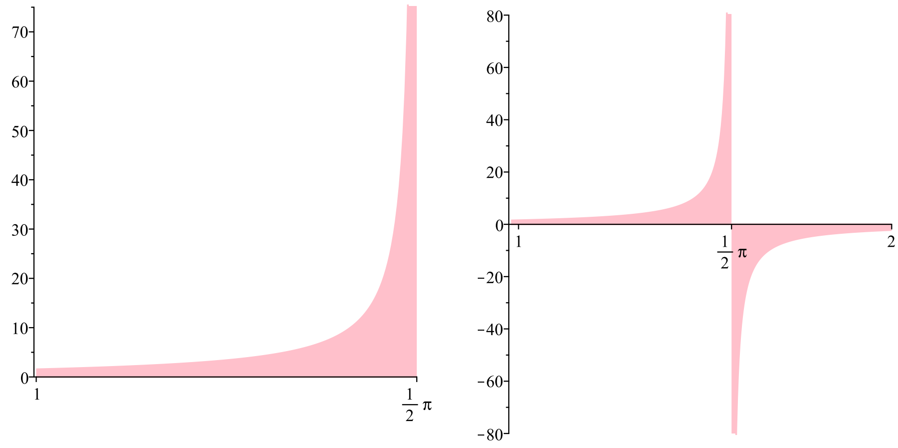
Víme, že $\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln |\cos x| + C$ a může se zdát, že stačí jen použit Newton-Leibnizův vzorec (4.2), tj. v (5.4) místo $|_1^{\frac{\pi}{2}}$ dosadit meze $|_1^2$; pro $\int_1^2 \operatorname{tg} x \, dx$ by nám tak vyšla hodnota $-\ln \cos x|_1^2 = \ln \cos 1 - \ln \cos 2$. Poslední výraz však nemá smysl, neboť $\cos 2 \approx -0.42 < 0$. V čem je problém? Z obrázku 5.2b vidíme, že interval integrování $(1, 2)$ obsahuje bod $\frac{\pi}{2}$, v němž se narušuje spojitost funkce (a není funkce vůbec definována). Vzorec (4.2) zde použit nesmíme, navíc integrál ani neexistuje; argumentovat lze podobně příkladu 5.2.

PŘÍKLAD 5.5 (integrace *per partes*, singularita v konci intervalu). Vypočtěme integrál

$$\int_0^1 \ln x \, dx.$$

že by přece mohlo platit $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = 0$, definujeme-li tento integrál nějak jinak. Ze vztahů (5.2), (5.3) plyne, že skutečně bude tomu tak, rozumíme-li tento nevlastní integrál ve smyslu Cauchyho *hlavní hodnoty*, tj. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^3} \big)$.

[2]Tento integrál je tzv. *nevlastní*: funkce $x \mapsto \operatorname{tg} x$ je spojitá všude na otevřeném intervalu $(1, \frac{\pi}{2})$ a není vůbec definována v jeho pravém koncovém bodě $\frac{\pi}{2}$. Proto integrál $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx$ můžeme chápat pouze ve smyslu limity $\lim_{b \to \frac{\pi}{2}-} \int_1^b \operatorname{tg} x \, dx$; ta však, jak jsme již zjistili, je nekonečná.



(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = +\infty$ (B) $\int_0^{2} \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$ neexistuje

OBRÁZEK 5.2. Integrál z $\operatorname{tg} x$ na různých intervalech

Stejně jako v příkladu 4.2 použijeme integraci *per partes*:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x &= (x \ln x)|_0^1 - \int_0^1 x \,\mathrm{d}(\ln x) = (x \ln x)|_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\ &= (x \ln x)|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = \ln 1 - \lim_{x \to 0+} x \ln x - 1 = -1. \end{aligned} \tag{5.7}$$

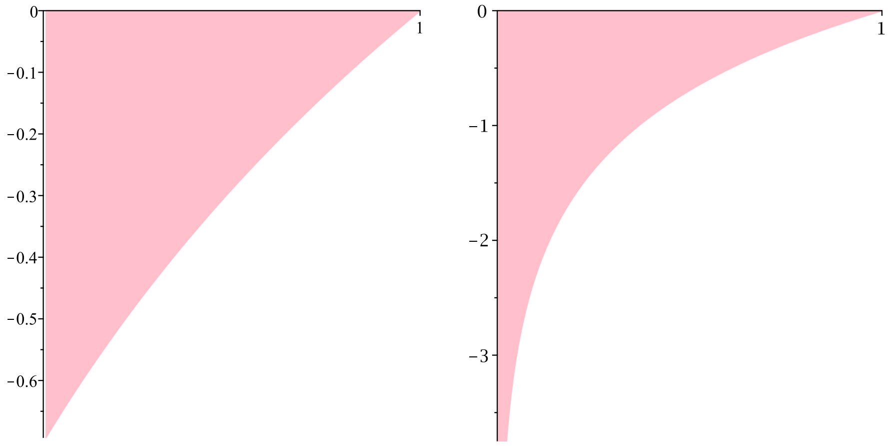
Rozdíl je však v tom, že dosazeni meze 0 v $(x \ln x)|_0^1$ vyžadovalo použití jednostranné limity, protože hodnota $\ln 0$ není definována a $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$. Zde jsme odvodili $\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$ podle l'Hôpitalova pravidla; hodnota limity je 0, neboť $\lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$.

Z (5.7) lze rovněž odvodit, že plocha rovinného útvaru ohraničeného křivkou s rovnici $y = \ln x$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 1$ (viz obr. 5.3b) je rovna $\int_0^1 |\ln x| \,\mathrm{d}x = 1$, kde kvůli nespojitosti funkce $x \mapsto \ln x$ v okolí 0 určitý integrál musíme tlumočit v tzv. nevlastním smyslu: $\int_0^1 |\ln x| \,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 |\ln x| \,\mathrm{d}x$.

§ 5.2. Zavedení nevlastního integrálu

Myšlenky použité při analýze uvedených příkladů vedou na přirozené definice nevlastních integrálů.

§ 5.2.1. Nevlastní integrál s nekonečnými mezemi. Buď f funkce, jež je definována na intervalu $[a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$. Nechť integrál $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ existuje pro libovolně velké $b > a$.



(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$ (B) $\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x = -1$ (nevlastní!)

OBRÁZEK 5.3. Integrál z $\ln x$ na různých intervalech

DEFINICE 5.1. Existuje-li limita integrálů $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ při $b \to +\infty$, pak hodnota této limity se nazývá integrálem funkce f v mezích od a do $+\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Toto je *nevlastní integrál* s nekonečnou horní mezí. Je-li limita konečná, říká se, že integrál *konverguje* (v opačném případě, tj. když limita je nekonečna nebo neexistuje, integrál *diverguje*).

Podobným způsobem zavádíme integrál $\int_{-\infty}^b f(x) \, \mathrm{d}x$, kde je f definována na intervalu $(-\infty, b]$. Existují-li integrály $\int_c^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$ a $\int_{-\infty}^c f(x) \, \mathrm{d}x$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$, jejich součtem definujeme nevlastní integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_c^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^c f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Integrály z příkladů 5.1 a 5.2 jsou nevlastními integrály ve smyslu definice 5.1.

PŘÍKLAD 5.6. Integrál

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje v opačném případě.

Nechť $\alpha \neq 1$. Pak

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(b^{1-\alpha} - 1 \right). \tag{5.8}$$

Z (5.8) plyne, že $\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ pro $\alpha > 1$ a $\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = +\infty$ pro $\alpha < 1$. Nakonec pro $\alpha = 1$ platí

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

§ 5.2.2. Nevlastní integrál z neomezené funkce. Buď f funkce definovaná na intervalu (a, b) $(-\infty < a < b < +\infty)$, neomezená v pravém okolí[3] bodu a a omezena na každém intervalu $(a+\varepsilon, b)$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolně male kladné číslo.

Definice 5.2. Existují-li všechny integrály $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro libovolně malá ε, integrálem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ rozumíme jednostrannou limitu těchto integrálů pro $\varepsilon \to 0+$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V případě existence konečné limity integrál *konverguje*, jinak integrál *diverguje*. Bod a, kde není funkce f omezená, nazývá se *singulárním* bodem této funkce.

Podobným způsobem definujeme integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ v případě, kdy je f neomezená v okolí bodu b:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže obě meze a a b jsou pro f singulárními body, zavádíme integrál rovností

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.9}$$

kde c je nějaký bod intervalu (a, b) a integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ chápeme v uvedeném výše smyslu. Říkáme, že integrál (5.9) *konverguje*, jestliže konvergují oba integrály součtu (v opačném případě integrál *diverguje*).

Nakonec, má-li funkce f singularitu v nějakém bodě $c \in (a, b)$ a existují-li nevlastní integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, definujeme pak nevlastní integrál[4] $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ rovností (5.9).

Integrály z příkladů 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 jsou nevlastními integrály z neomezených funkcí.

Příklad 5.7. Integrál

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

konverguje pro $\alpha < 1$ a diverguje v opačném případě.

Nechť $\alpha \neq 1$. Pak

$$\lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{a\to 0}\frac{1}{1-\alpha}\left(1 - a^{1-\alpha}\right).$$

[3]Tj. neomezená na $(a, a+\varepsilon)$, kde ε je malé kladné číslo

[4]Zde je možné uvažovat i možnosti, kdy $a = -\infty$ nebo $b = +\infty$ (viz § 5.2.3); v takových případech se na pravé straně rovnosti (5.9) objeví integrály s nekonečnou mezí, jež chápeme ve smyslu § 5.2.1.

a tudíž $\lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ pro $\alpha < 1$ a $\lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = +\infty$ pro $\alpha > 1$. Pro $\alpha = 1$ obdržíme

$$\lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{a\to 0+} (\ln 1 - \ln a) = +\infty.$$

§ 5.2.3. Nevlastní integrál z neomezené funkce s nekonečnými mezemi. Tento druh nevlastních integrálů vzniká kombinací integrálů dvou předchozích typů.

DEFINICE 5.3. Je-li funkce $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ neomezená v pravém okolí bodu a, integrálem $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ rozumíme součet

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde c je nějaký bod[5] intervalu $(a, +\infty)$.

Integrály typu $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde f je neomezená v okolí nějakého bodu $b > a$, zavadíme rovností

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ rozumíme ve smyslu definicí 5.1 a 5.3.

PŘÍKLAD 5.8. Z příkladů 5.6 a 5.7 plyne, že integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

diverguje pro libovolné α.

[5] Pak se dokáže, že na volbě bodu c výsledek nezávisí.