Nekonečno v matematice

RNDr BEDŘICH POSPÍŠIL:

NEKONEČNO V MATEMATICE

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

Spisovatel této knížky, *RNDr Bedřich Pospíšil*, se narodil 25. září 1912. Dne 29. dubna 1941 byl gestapem zatčen a odsouzen na tři léta do káznice, odkud se vrátil 17. května 1944 ve stavu tak zuboženém, že přes nejpečlivější ošetřování zemřel dne 27. října 1944.

Od června 1936 do násilného zavření českých vysokých škol byl členem mého topologického semináře. Za tuto krátkou dobu vyrostl v jednoho z nejpřednějších světových badatelů v obecné topologii, kterou obohatil o mnohé výsledky fundamentálního významu. Mimo jiné určil velmi originelním a důmyslným způsobem „počet" prvků důležitých nekonečných souborů, na př. „počet" všech možných topologií na libovolné nekonečné množině.*)

Dne 14. ledna 1937 byl promován na doktora přírodních věd. Po předepsaném dvouletí na můj podnět požádal o docenturu matematiky, ale habilitační řízení, ač ovšem v komisi proběhlo příznivě, bylo přerušeno neblahým 17. listopadem 1939 a teprve 10. dubna 1946 bylo posmrtně dokončeno. Zároveň se zesnulý stává 3. května 1946 mimořádným členem in memoriam druhé třídy České akademie věd a umění.

Po zavření vysokých škol snaží se Jednota československých matematiků a fysiků stručnými svazky „Cesty k vědění" nahrazovati zakázané vysokoškolské vzdělání české inteligence. K této práci se přihlásil také Pospíšil a tak vznikla tato knížka, mající za úkol snadno přístupnou, ale zároveň vědecky přesnou formou dáti poučení o problémech nekonečna. Je to úkol, k jehož řešení byl Pospíšil svými pracemi kvalifikován lépe než kdokoli z nás. Rozdělil si úkol velmi vhodně na dvě části. V prvé části vychází od znalostí o konečnu, které každý získal už v dětství, a ukazuje naprosto srozumitelně a při tom zcela exaktně, že je nesprávné ukvapeně přenášet představy o konečnu na nekonečno, že však nekonečno je stejně jako konečno přístupné přesným logickým úvahám, jejichž závěry ovšem vykazují podstatné rozdíly mezi konečnem a nekonečnem. Pospíšil se právem vyhýbá popularisaci a nikde neobětuje věcnou správnost jasnosti výkladu; přes naprostou exaktnost je však všude dokonale srozumitelný každému pozornému čtenáři. Styl této části může býti vzorem každému matematikovi obracejícímu se k nematematikům. Druhá část vychází od revise představ o konečnu, o které se opírala část prvá a v přesně systematickém postupu rozvádí elementární část obecné theorie množin s aplikacemi na čísla přirozená, racionální a reálná. Ač druhá část je ovšem obtížnější než prvá, není ani k jejímu studiu třeba žádných větších předběžných vědomostí; vyžaduje se tu ovšem jakési vyspělosti v usuzování, té však může čtenář nabýti v postačitelné míře pečlivým prostudováním části prvé. Přeji krásné knížce co nejvíce čtenářů.

Eduard Čech.

---

*) O vědecké činnosti B. Pospíšila viz můj článek v Časopise pro pěst. matem. a fys., roč. 72, str. D 1 až D 9.

PŘEDMLUVA

O pojmu nekonečna uvažovalo a stále uvažuje mnoho lidí, filosofů i hloubavých laiků. Při tom je v těch úvahách mnoho planého, lidé čítají otázky o nekonečnu k oněm neurčitým a mystickým otázkám, o nichž rádi uvažují, ač jsou sami přesvědčeni, že k nijakým konečným závěrům dospěti nelze. Chci je z úvah toho druhu přenésti na zcela exaktní pole, ukázat jim, že pro nás úvahy o nekonečnu nejsou již o nic mystičtější než kterékoliv zcela exaktní matematické úvahy. Kniha se dělí na dvě odlišně psané a různé účely sledující části. O tom v úvodě. Snažil jsem se spojit srozumitelnost výkladů s logickou přesností; rozhodně nemohu souhlasit s popularisátory, kteří jasnosti výkladu obětují věcnou správnost. Myslím, že správně vykládaná věc není o nic obtížnější k pochopení.

B. Pospíšil.

ÚVOD

Základním pojmem našich úvah je pojem *množiny*. Je to snad trochu nezvyklé slovo, jehož však se není třeba lekat. Množinou se rozumí prostě souhrn, soubor, skupina jakýchkoliv věcí. Na př. množina českých králů vládnuvších před rokem 1848, nebo množina všech knížek, které mám v knihovně, na př. množina bodů v rovině, které od daného bodu A v téže rovině R mají vzdálenost 5 cm; je to kružnice ležící v rovině R, mající střed v bodě A a poloměr dlouhý 5 cm.

Patří-li nějaká věc v do množiny M, říkáme, že v je *prvek* množiny M. Je-li na př. M množina českých králů vládnuvších před rokem 1848, a je-li v král Václav IV., pak v je prvek množiny M. Je-li naproti tomu v Napoleon Bonaparte nebo planeta Neptun, pak v není prvkem množiny M.

Množina je přesně popsána, když je řečeno, které věci jsou jejími prvky. Prvků může míti taková množina různě mnoho. Na př. množina autorových sourozenců má jenom jeden prvek. Množina všech lidí, kteří v tomto momentě jsou občany města Brna, je mnohem četnější. Ještě daleko četnější je množina všech lidí, kteří momentálně žijí na této planetě. Všechny tyto množiny, byť by měly hrozně mnoho, pro mne třeba nepředstavitelně mnoho prvků (jako třeba množina všech lidí na zeměkouli), přece jen se dají spočítat. Naproti tomu si všimněme, kolik má bodů jakási úsečka U. Je jich rozhodně víc než 180, víc než 1000, víc než milion, víc než trilion; žádným sebe větším číslem se nedopočteme. Říká se, že úsečka U má *nekonečně mnoho* bodů, že množina všech bodů na úsečce U je *nekonečná*. Podobně je tomu s množinou N všech přirozených čísel. (Přirozenými čísly rozumíme celá kladná čísla, t. j. čísla 1, 2, 3, 4, atd. do nekonečna.) N je nekonečná množina: přirozených čísel je víc než 5, víc než 857, víc než tři miliardy, . . ., žádným číslem se jich nedopočteme.

S konečnými množinami si ví rady každý člověk. Má o nich zcela jasnou a (dokonce!) zcela správnou představu. Všecky množiny, s kterými se běžně setkává, jsou konečné. Jiná věc je s množinami nekonečnými, t. j. takovými, které mají nekonečně mnoho prvků. Lidé správně poznávají, že tu jde o množiny s *mnohem* větším množstvím prvků, že je tu rozdíl kvantitativní. Ale to je vše, co si uvědomují. Představy, které mají o konečných množinách a které pro konečné množiny jsou správné, beze všeho přenášejí na nekonečno. Dostanou se tím do protimluvů, které jim činí z nekonečna cosi tajemného. Proto prohlašuji hned na tomto místě: Za prvé není nekonečno o nic méně, ale také o nic více tajemné, než konečno; je předmětem úvah stejně rigorosních a logických, jako jsou úvahy o konečnu. Za druhé, nekonečné množiny jsou oproti konečným tak nevýslovně veliké, že ta změna ve velikosti, v kvantitě, způsobuje, že nekonečné množiny jsou i kvalitativně něco *zcela jiného* než množiny konečné. Dokonce se dá vystihnout rozdíl mezi konečnem i nekonečnem čistě kvalitativně, aniž by se o množství prvků vůbec mluvilo. Nekonečno je prostě něco jiného než konečno, má jiné vlastnosti, což ostatně je i daným slovem *nekonečno* krásně vystiženo.

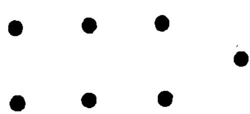
První část této knížky má seznámit čtenáře *věcně* s něčím, co ještě nezná, totiž s nekonečnými množinami.

Mnohé co se zdá správným a dokonce jasným z názoru, se ukázalo nesprávným. Čtenář uvidí, jak si bude musit opravit představu. V první části za „zřejmé" považuji jen běžné vlastnosti konečných množin, pokud jsou správně známy i tříletým dětem a něco málo o číslech ze školy.

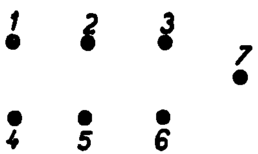
Ovšem i tříleté děti mohou mít nesprávné představy a naše znalosti o číslech byly do nás vpraveny v době, kdy jsme (oprávněně) věřili víc autoritě učitelově než svému rozumu. Představa, která nás tolikrát zklamala, mohla by klamat i ve věcech, které v první části přijímám za správné. Tu nedůvěru odstraní část druhá, v níž za známé považuji jen dvě věci: logické myšlení a český jazyk. Čtenář s myšlením prvou částí vytříbeným tam nabude představy o tom, jak vypadá matematická theorie a látku si zopakuje a ucelí.

PRVNÍ ČÁST

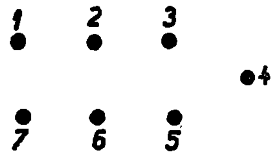
1,1. Spočetnost. Přirozenými čísly rozumíme čísla 1, 2, 3, 4, ... atd. do nekonečna. Užívá se jich k počítání konečných množin. Co to znamená na př., že množina M má 7 prvků? Znamená to, že je možno prvky množiny M očíslovat přirozenými čísly od jedné až do sedmi (včetně); při tom každému prvku množiny M jsme přiřadili přesně jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; různé prvky mají různá přirozená čísla a všecka čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 jsme při číslování uplatnili. Na př. množina teček v obr. 1 má 7 prvků; lze ji totiž očíslovat na př. takto:



Obr. 1.



anebo třeba

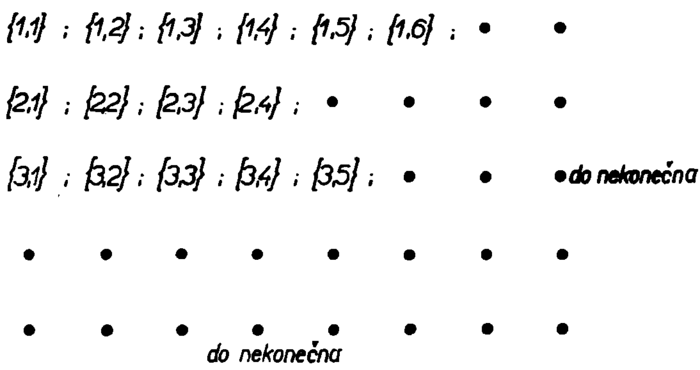


Obr. 2. Obr. 3.

Obecně řekneme, že množina M má *m* prvků, když její prvky lze očíslovat přirozenými čísly od 1 do *m* (včetně). Takové množiny M jsou právě množiny *konečné*. Tedy: množina M je konečná, když je možno její prvky očíslovat přirozenými čísly od 1 až do jistého *m* (včetně); to číslo *m* se nazývá počet prvků množiny M. Každá konečná množina má *zcela určitý* počet prvků; není možno, abychom při jednom očíslování upotřebili čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a při jiném očíslování jedné a téže množiny M upotřebili jenom čísel 1, 2, 3, 4, 5; čítáme-li dvakrát po sobě konečnou množinu M, po každé třeba jinak, musíme obakrát napočíst stejný počet prvků. To je přesně formulováno a dokázáno v dodatku.

I některé nekonečné množiny možno počítat pomocí přirozených čísel. Vezměte na př. samu množinu všech přirozených čísel, kterou vždy budu označovat N. Pak k očíslování prvků množiny N (což jsou zde náhodou přirozená čísla sama) arciť nestačí přirozená čísla od 1 až do jakéhosi m (včetně); těch by bylo příliš málo. Abychom očíslovali prvky množiny N, vezmeme na pomoc přirozená čísla *všechna*. A pak se ovšem očíslování hravě povede. Jedničku 1 očíslujeme jedničkou 1, dvojku 2 očíslujeme dvojkou 2, číslo 365 očíslujeme číslem 365 a vůbec každé číslo m očíslujeme týmž číslem m. Tímto nasnadě jsoucím způsobem jsme očíslovali celou množinu N; každému prvku množiny N jsme přiřadili přesně jedno z čísel 1, 2, 3, ... do nekonečna; různé prvky mají různá přirozená čísla a všechna čísla 1, 2, 3 do nekonečna jsou vyčerpána.

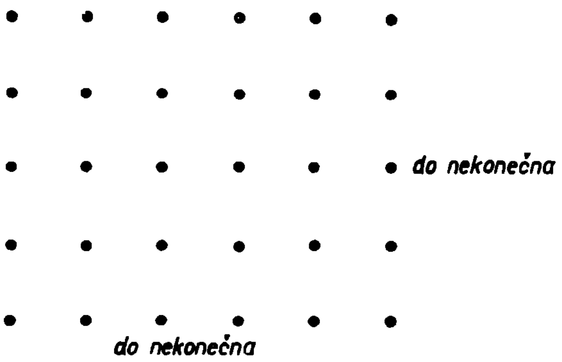
Tento příklad byl příliš triviální. Teď tedy nějaký těžší příklad. Označíme si N^2 množinu, do které patří právě všecky uspořádané *dvojice* $\{m; n\}$, kde m a n jsou přirozená čísla, na př. dvojice {1; 1}, {7; 5}, {2; 1866}, {dva miliony; 366} atp.



Obr. 4.

Při tom slovo „uspořádané“ znamená, že dvojici $\{7; 5\}$ a dvojici $\{5; 7\}$ považujeme za různé, tedy při dvojici $\{m; n\}$ záleží na tom, že m píšeme napřed a n potom; $\{n; m\}$ je obecně jiná dvojice. Nyní si napišme tabulku prvků množiny N^2. V prvním řádku budou všecky dvojice $\{1; n\}$, v druhém budou dvojice $\{2; n\}$ atd. (obr. 4).

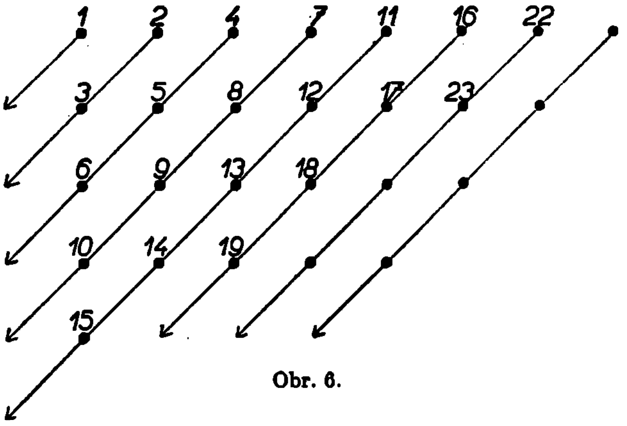
V naší tabulce jsou sepsány právě všechny prvky množiny N^2 a žádný není v tabulce dvakrát. Pro jednoduchost si tabulku označme schematem teček



Obr. 5.

Teď si ukážeme, že množinu N^2 je možno očíslovat právě všemi přirozenými čísly. Číslujeme jako na obrázku 6.

Popis. Od každého prvku v prvním řádku jsme si tedy vedli paprsek nalevo dolů (odchylky o 45 stupňů od vodorovných řádků). Začali jsme nahoře vlevo a šli po paprsku, dokud to šlo. Až jsme vyčerpali všecky tečky na jednom paprsku, přikročili jsme k nejbližšímu paprsku napravo. Tím způsobem pokračujíce do nekonečna jsme očíslovali všecky tečky v schematu a spotřebovali jsme postupně všecka přirozená čísla.

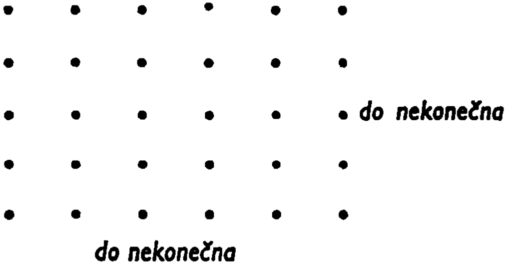


Obr. 6.

Vezmeme-li nyní zase na místo schematu s tečkami původní tabulku množiny N^2, dostáváme očíslování množiny N^2 pomocí *všech* přirozených čísel.

Množina N^2 *dá se tedy očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel.*

Všimněme si ještě jedné věci. Buď M nějaká množina, zcela libovolná (nemusí to být množina N^2), jenom to o ní budeme předpokládat, že její prvky možno psát do schematu tvaru:

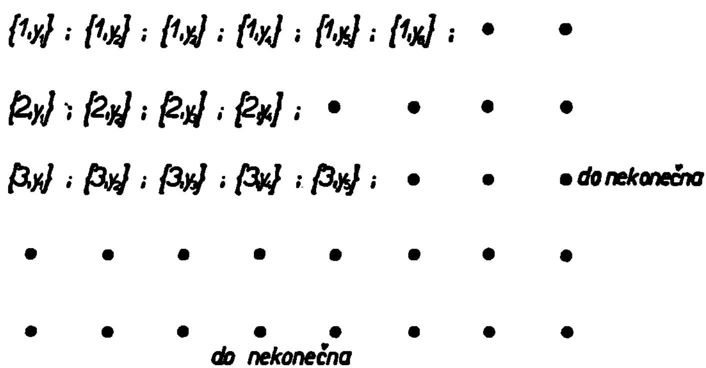


Obr. 7.

Pak podle obrázku (7) *je zase možno množinu* M *očíslovat pomocí všech přirozených čísel*; je to totiž úplně totéž jako tomu bylo u množiny N^2.

Poučka 1. *Dají-li se prvky nějaké množiny psát ve schematu tvaru jako v obr.* 7, *pak je možno tu množinu očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel.*

Tato poučka vede k zajímavým důsledkům. Označme N^3 množinu všech uspořádaných *trojic* $\{m; n; p\}$, kde m, n a p jsou přirozená čísla; takové trojice jsou na př. $\{1; 2; 3\}$, $\{8;$ milion$; 365\}$, $\{3; 2; 1\}$ a podobně. Na pořádku členů trojice zase záleží. Takovou trojici, třeba $\{5; 365; 122\}$ můžeme si myslit rozloženu na první člen 5 a dvojici $\{365; 122\}$. A naopak ten první člen 5 a dvojice obou dalších členů $\{365; 122\}$ se složí právě v tu trojici $\{5; 365; 122\}$. Místo trojic $\{m; n; p\}$ možno si tedy myslet dvojice $\{x; y\}$, jichž první členy jsou první členy našich trojic, t. j. $x = m$ a druhé členy jsou dvojice utvořené z obou dalších členů, t. j. $y = \{n; p\}$. Tedy v $\{x; y\}$ je x přirozené číslo a y je prvek množiny N^2. Ale jak už víme, možno prvky množiny N^2 očíslovat; ten prvek, který má číslo m, označme y_m. Tedy $y_1, y_2, y_3, \ldots$ do nekonečna jsou právě prvky množiny N^2, každý jednou. Pak množinu N^3 možno psát v tabulce



Obr. 8.

což je právě schema jako v obr. 7. Tedy podle poučky 1 *umíme i množinu* N^3 *očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel.*

Úplně stejně uvažujeme dál. N^4 bude množina všech uspořádaných čtveřic $\{m; n; p; q\}$, kde m; n; p a q jsou přirozená čísla. Čtveřici $\{m; n; p; q\}$ možno si myslit složenu z čísla m a trojice $\{n; p; q\}$, tedy místo našich čtveřic možno si myslit uspořádané dvojice $\{x; z\}$, kde x je přirozené číslo a z je uspořádaná trojice přirozených čísel, tedy z je prvek množiny N^3. Víme už, že prvky z množiny N^3 možno očíslovat přirozenými čísly: $z_1, z_2, z_3, \ldots$ do nekonečna. Dostaneme pak množinu N^4 v podobě tabulky

$\{1, z_1\}$; $\{1, z_2\}$; $\{1, z_3\}$; $\{1, z_4\}$; $\{1, z_5\}$; $\{1, z_6\}$; • •

$\{2, z_1\}$; $\{2, z_2\}$; $\{2, z_3\}$; $\{2, z_4\}$; • • • •

$\{3, z_1\}$; $\{3, z_2\}$; $\{3, z_3\}$; $\{3, z_4\}$; $\{3, z_5\}$; • • • do nekonečna

• • • • • • • •

• • • • • • • •

do nekonečna

Obr. 9.

A to je zase schema jako v obr. 7 a tedy podle poučky 1 *umíme i množinu* N^4 *očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel.*

Stejně bychom mohli uspořádané pětice $\{m; n; p; q; r\}$, kde m; n; p; q a r jsou přirozená čísla, rozložit na čísla m a čtveřice $\{n; p; q; r\}$ a viděli bychom, že *i množinu* N^5 *umíme očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel*; při tom N^5 je ovšem množina všech našich pětic. To si čtenář udělá sám za cvičení a totéž si udělá třeba ještě pro N^6 a N^7. Kroky, kterými jsme od N^2 přešli k N^3, od N^3 k N^4, od N^4 k N^5 atd. jsou pořád úplně stejné. Vidíme tedy, že bychom mohli pak postupovat jakkoliv daleko a stále by nám vycházelo, že *množinu* N^k *umíme očíslovat pomocí (všech) přirozených čísel*, ať je k rovno 2, nebo 3, nebo 4 atd., ať je k sebe větší. Při tom N^k je ovšem množina všech uspořádaných k-tic přirozených čísel, t. j. skupin k přirozených čísel, kde záleží na pořádku.

Teď se na moment vraťme ke konečným množinám. Mějme pět věcí, na př. přímo čísla 1, 2, 3, 4, 5. Utvořme teď všecky uspořádané dvojice $\{m; n\}$, kde m je jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5 a n je jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5. Tedy dvojice si můžeme sestavit do tabulky:

$$\begin{array}{lllll} \{1;1\}, & \{1;2\}, & \{1;3\}, & \{1;4\}, & \{1;5\}, \\ \{2;1\}, & \{2;2\}, & \{2;3\}, & \{2;4\}, & \{2;5\}, \\ \{3;1\}, & \{3;2\}, & \{3;3\}, & \{3;4\}, & \{3;5\}, \\ \{4;1\}, & \{4;2\}, & \{4;3\}, & \{4;4\}, & \{4;5\}, \\ \{5;1\}, & \{5;2\}, & \{5;3\}, & \{5;4\}, & \{5;5\}, \end{array} \tag{$*_5$}$$

která má pět řádků a 5 sloupců. Všech našich dvojic je zase konečně mnoho a jejich počet je 5^2. Obecně máme-li k prvků, třeba nechť jsou to čísla $1, 2, 3, \ldots, k$ sama, pak všech uspořádaných dvojic, jichž členy jsou naše čísla $1, 2, 3, \ldots, k$, jest zase konečně mnoho a jejich počet označujeme k^2. A *ten počet* k^2 *se nikdy nerovná* k, je vždy větší s jedinou výjimkou, totiž $1^2 = 1$. Definuji: počet prvků množiny M je k^2, když je možno prvky množiny M očíslovat (všemi) uspořádanými dvojicemi $\{m; n\}$, kde m je jedno z čísel $1, 2, \ldots, k$ a n je jedno z čísel $1, 2, \ldots, k$.

Rovnice $5^2 = 25$ znamená: Je jedno a totéž, má-li množina 25 prvků, nebo 5^2 prvků, t. j. je jedno, zda číslujeme množinu přirozenými čísly $1, 2, 3, 4, \ldots$ až do 25 anebo dvojicemi $\{m; n\}$, kde m a n jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5. Vskutku $5^2 = 25$, neboť možno v tabulce ($*_5$) nahradit naše dvojice tak, aby vznikla tabulka

$$\begin{array}{rrrrr} 1; & 2; & 3; & 4; & 5; \\ 6; & 7; & 8; & 9; & 10; \\ 11; & 12; & 13; & 14; & 15; \\ 16; & 17; & 18; & 19; & 20; \\ 21; & 22; & 23; & 24; & 25, \end{array}$$

a při číslování místo dvojic vzít stejnolehlá čísla, na př. místo $\{2; 3\}$ vzít 8, místo $\{4; 2\}$ vzít 17 a pod. Anebo zase místo čísel 1 až 25 lze při číslování užíti příslušné dvojice.

Snažme se dělat analogii pro nekonečné případy. Říkali jsme, že množina M má m prvků, když prvky množiny M bylo možno očíslovat čísly $1, 2, 3, \ldots, m$. Tím způsobem jsme mohli počítat konečné množiny. Abychom mohli obdobně počítat i nekonečné množiny (zatím aspoň některé), zavedeme si nový symbol $\aleph_0$.*) Budeme říkat, že množina M, tentokráte nekonečná, má $\aleph_0$ prvků, když se nám povede očíslovat prvky množiny M pomocí všech přirozených čísel. Pak též budeme $\aleph_0$ nazývat *počet prvků množiny* M. $\aleph_0$ je jakési nové číslo (a to ovšem nekonečné).

Hořejší výsledky můžeme vyslovit tedy takto:

Každá z množin N, N^2, N^3 *atd. má* $\aleph_0$ *prvků.*

Teď ale definujme mocniny čísla $\aleph_0$ obdobně k tomu, jak jsme definovali mocniny konečného čísla.

Definujeme: Počet prvků množiny M je $\aleph_0^2$, když je možno prvky množiny M očíslovat množinou N^2, t. j. všemi uspořádanými dvojicemi $\{m; n\}$, kde m a n jsou přirozená čísla. Tedy na př. množina N^2 sama má $\aleph_0^2$ prvků. My ale víme, že N^2 má $\aleph_0$ prvků a tedy

$$\aleph_0^2 = \aleph_0.$$

Tato rovnice znamená: Je jedno a totéž, má-li množina $\aleph_0$ prvků anebo $\aleph_0^2$ prvků, t. j. je jedno, zda číslujeme množinu přirozenými čísly, nebo uspořádanými dvojicemi přirozených

*) Čteme jej *alef nula*.

čísel. A to je vskutku pravda. Neboť především možno naše dvojice $y = \{m; n\}$ očíslovat přirozenými čísly: $y_1, y_2, y_3, \ldots$ a místo dvojice y_k užít k číslování příslušného čísla k. Anebo zase místo čísla k lze při číslování užít příslušné dvojice y_k. Neboť čísla k a příslušné dvojice y_k si přesně odpovídají jak jsme už dokázali. [Na př. dvojice v tabulce v obr. 4 se stejnolehlými čísly v tabulce v obr. 6.]

A to je pozoruhodné! Pro jedničku je ještě $1^2 = 1$; pro dvojku se však už 2^2 liší od 2 a čím jdeme výše, tím více se k^2 od k liší. Posloupnost

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \text{atd.}$$

sice se v prvním členu shoduje s posloupností

$$1, 2, 3, 4, \text{atd.},$$

ale ve druhém členu se už od ní rozejde a ten rozchod se zvětšuje, čím větší členy bereme, a to velmi a velmi značně, čím dál více. Teď by se zdálo, když přejdeme od konečných čísel $1, 2, 3, \ldots$ k nekonečným, z nichž první $\aleph_0$ jsme si již zavedli, že rozchod druhé mocniny oproti číslu samému ještě jen vzroste. Pravý opak je však pravdou. Pro první nekonečné číslo $\aleph_0$ je druhá mocnina $\aleph_0{}^2$ zase rovna samému číslu $\aleph_0$, jako tomu bylo u jedničky. V dalším uvidíme, že na počítání všech nekonečných množin nevystačíme s jediným číslem $\aleph_0$. To jde jen u poměrně „malých“ nekonečných množin. Proto budeme musit k počítání nekonečných množin zavést mimo $\aleph_0$ ještě jiná nekonečná čísla. A uvidíme, že pro každé takové nekonečné číslo α bude $\alpha^2 = \alpha$. Z toho je vidět, že k rozlišení různých nekonečen je naprosto ilusorní zavádět symboly ∞, ∞^2, ∞^3 a podobně. Symbol ∞ sám nevystihl by ten fakt, že je nekonečných čísel mnoho; a ∞^2, ∞^3 atd., není zase nic jiného, než ∞ samo. Proto nutno na celou věc jít z jiného konce.

Množiny konečné dohromady s takovými nekonečnými množinami, které mají $\aleph_0$ prvků, jsou t. zv. množiny *spočetné*.

Dohodneme se, že mezi konečné a tedy i spočetné množiny budeme čítati t. zv. množinu prázdnou, již označíme $\emptyset$. Množina $\emptyset$ je definována tím, že nemá vůbec žádných prvků; je jen jedna prázdná množina. Počet prvků množiny $\emptyset$ označujeme 0. Na př. množina ruských carů, kteří vládli v roce 1923, je prázdná.

Množina, která není spočetná, nazývá se *nespočetná*. Dosud jsme poznali samé množiny spočetné. Zakladatelé theorie množin se jistou dobu domnívali, že jiných množin není. Brzo však poznali svůj omyl. A my si v dalším odstavci ukážeme, že skutečně jsou nespočetné množiny a to dokonce i mezi množinami, o nichž čtenář již slyšel.

I,2. Nespočetné množiny. V sextě se v aritmetice probírají posloupnosti konečné i nekonečné. Jak se dostane taková posloupnost:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \text{ do nekonečna?}$$

Každému přirozenému číslu k přiřadím jakousi určitou věc a_k; a_k je t. zv. k-tý člen posloupnosti; a_k nemusí být číslo, může to být věc jakéhokoli druhu; a také nemusí být ta a_k mezi sebou různá. Tak na př. máme posloupnost:

9, Jaroslav Vrchlický, 365, Jaroslav Vrchlický, Jaroslav Vrchlický atd. Všecky další členy nechť jsou Jaroslav Vrchlický. Jest tedy $a_1 = 9$, $a_3 = 365$ a pro všechna ostatní k jest $a_k =$ Jaroslav Vrchlický.

A teď k věci! Označme na okamžik M množinu všech posloupností, jejichž členy jsou vždy rovny buďto jedničce 1 anebo dvojce 2. Tedy na př. posloupnosti

$$1, 1, 1, 1, 1, \ldots \text{ (samé jedničky 1),}$$

anebo

$$1,2, 1,2, 1,2, \ldots \text{ (střídavě 1 a 2)}$$

jsou prvky množiny M. Množina M nám bude prvním příkladem množiny nespočetné. Že M je skutečně nespočetná, dokážeme tak, že budeme předpokládat, že je spočetná a z toho předpokladu odvodíme nějaké nesprávné tvrzení, nebo rozpor, protimluv. Pak ale musí býti náš předpoklad nesprávný, tedy M nebude moci býti spočetná, bude tedy nespočetná. Takové důkazy jsou v matematice velmi obvyklé; jsou to t. zv. důkazy nepřímé.

Mysleme si tedy (nesprávně), že M je spočetná množina. Pak M má buďto konečný počet prvků třebas n anebo má $\aleph_0$ prvků. Prvky množiny M, t. j. posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \text{ do nekonečna,}$$

kde a_k je buď 1 nebo 2, se dají tedy očíslovat pomocí přirozených čísel, a to buďto pomocí čísel $1, 2, \ldots, n$ anebo pomocí všech přirozených čísel. Ty posloupnosti si napišme do sloupce podle pořadových čísel.

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots \text{ do nekonečna}$$

je první z nich,

$$a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots \text{ do nekonečna}$$

bude druhá z nich, a podobně další budou

$$a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \ldots \text{ do nekonečna,}$$
$$a_1^{(4)}, a_2^{(4)}, a_3^{(4)}, \ldots \text{ do nekonečna,}$$
atd.

Těch řádků je n v případě, že M má n prvků. V tom případě doplníme počet řádků na $\aleph_0$ tím, že jako další řádky píšeme vždy třeba

$$1, 1, 1, \ldots \text{ do nekonečna.}$$

Má-li M $\aleph_0$ prvků, je řádků už samo sebou nekonečně mnoho. Každý řádek je jeden prvek množiny M a *všecky prvky množiny* M *jsou tak vyčerpány*. A teď kýžený rozpor dostaneme tak, že si sestrojíme *prvek množiny* M, *který přece jen v žádném řádku napsán není.*

(Prvky množiny M jsou posloupnosti, tedy celé řádky.) Je-li $a_i^{(k)} = 1$, pak nechť $b_i^{(k)} = 2$ a je-li $a_i^{(k)} = 2$, pak nechť

$b_l^{(k)} = 1$. Tedy $b_l^{(k)}$ je vždy zase jedno z čísel 1 a 2, ale *jiné než* $a_l^{(k)}$. A teď uvažujme posloupnost

$$b_1^{(1)}, b_2^{(2)}, b_3^{(3)}, b_4^{(4)}, \ldots \text{ do nekonečna.}$$

k-tý člen naší posloupnosti je tedy $b_k^{(k)}$. Členy $b_k^{(k)}$ naší po sloupnosti jsou čísla 1 a 2 a tedy naše posloupnost je prvkem množiny M. Ale naše posloupnost není napsána v žádném řádku:

$$\begin{array}{l} a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots, \\ a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Skutečně není napsána v prvním řádku: neboť první člen prvního řádku je $a_1^{(1)}$, kdežto první člen naší posloupnosti je jiný, totiž $b_1^{(1)}$. Není napsána v druhém řádku: neboť druhý člen druhého řádku je $a_2^{(2)}$, kdežto druhý člen naší posloupnosti je jiný, totiž $b_2^{(2)}$. A obecně není napsána v k-tém řádku, neboť k-tý člen k-tého řádku je $a_k^{(k)}$, kdežto k-tý člen naší posloupnosti je jiný, totiž $b_k^{(k)}$. Skutečně tedy naše posloupnosti není napsána v žádném řádku a to jsme chtěli za účelem dosažení rozporu dokázat. Tedy náš předpoklad, že by M byla spočetná množina, je nesprávný, tedy: *Množina všech posloupností, jichž členy jsou* 1 *nebo* 2, *je nespočetná.*

Methodě, kterou jsme získali posloupnost $b_1^{(1)}, b_2^{(2)}, b_3^{(3)}, \ldots$ do nekonečna, budeme říkat *methoda diagonály*. Je to methoda stejně vtipná, jako jednoduchá. Máme-li sestrojit posloupnost, která není napsána ani v prvém, ani v druhém, ani v žádném jiném řádku, děláme to takto: První člen volíme jiný, než je první člen prvního řádku; pak ta posloupnost bude jiná než ta v prvním řádku. Druhý člen volíme jiný, než je druhý člen druhého řádku. Atd. Obecně k-tý člen volíme jiný než je k-tý člen k-tého řádku; pak ta posloupnost bude ovšem jiná, než ta v k-tém řádku. Nebude tedy rovna žádnému řádku. (Při tom jsme se ovšem musili starat o to, aby sestrojovaná posloupnost zůstala v množině M.)

Methoda diagonály nám dovolí dokázat nespočetnost jisté známé a důležité množiny. Jde o množinu všech *reálných čísel*; budeme ji vždy značit R. Především *ciframi* budu rozumět čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Všimněme si reálného čísla na př. — 365,2222... (samé dvojky); to číslo je určeno třemi věcmi; především znaménkem minus —, za druhé jakýmsi číslem 365, které stojí před desetinnou čárkou a které je buďto nula anebo přirozené číslo (v našem případě 365) a za třetí jakousi posloupností cifer, která stojí za desetinnou tečkou, v našem případě posloupností 2, 2, 2, 2, ... (samé dvojky). Podobně číslo + 0,324000... (samé nuly) je určeno znaménkem +, číslem 0 před desetinnou čárkou a posloupností cifer 3, 2, 4, 0, 0 (samé nuly) za desetinnou čárkou.

Shrňme: Reálné číslo je určeno třemi věcmi: za prvé znaménkem + nebo —, za druhé číslem před desetinnou čárkou, které je rovno buďto nule anebo je to přirozené číslo, a za třetí posloupností cifer za desetinnou čárkou. Jestliže za desetinnou čárkou jsou od jistého místa samé nuly, pak je zvykem ty nuly vynechávat. Na př. + 0,324000... (samé nuly do nekonečna) lze psát též + 0,324 anebo + 0,32400 a pod. Podobně —368,000... (samé nuly) je totéž jako —368 atd. Dále považujeme za totéž + 0,000... (samé nuly), t. j. + 0 a —0,000... (samé nuly), t. j. —0. Tedy + 0 = —0. Místo + 0 či —0 pišme prostě 0. A ještě jedna věc. Je-li před desetinnou čárkou číslo a a za desetinnou čárkou samé devítky, pak je to totéž, jakoby před desetinnou čárkou bylo číslo $a + 1$ a za ní samé nuly. Na př. + 15,999... (samé devítky) se rovná + 16,000 (samé nuly) a pod. —37,999... = —38,000... = 38.

Podobně nechť za desetinnou čárkou na k-tém místě je cifra c různá od 9 a na všech dalších místech samé devítky, pak smíme nahradit c cifrou $c + 1$ a na dalších místech psát samé nuly. Na př.

+ 15,996594999... (samé devítky)

se rovná

+ 15,996595000... (samé nuly)

čili

$$+15{,}996595;$$

podobně

$$-368{,}9875 = -368{,}9875000\ldots \text{ (samé nuly)}$$

se rovná

$$-368{,}9874999\ldots \text{ (samé devítky)}.$$

Symbolům jako $-368{,}9874999\ldots$ říkáme (desetinné) *rozvoje* příslušného čísla. Vidíme tedy, že některá reálná čísla mají dva různé rozvoje.

Vzhledem k tomu, že je tu právě popsaná dvojznačnost, musíme být při aplikaci methody diagonály poněkud opatrnější než dříve. Jde o to dokázati, že

R *je množina nespočetná.*

Postupujeme jako dříve. Mysleme si (nesprávně), že R je spočetná množina. Pak R má buďto konečný počet prvků, třebas n, anebo má $\aleph_0$ prvků. Prvky množiny R se dají tedy očíslovat pomocí přirozených čísel, a to buďto pomocí čísel $1, 2, \ldots, n$, anebo pomocí všech přirozených čísel. Prvky množiny R napišme pod sebe a znaménka vynechávejme; v k-tém řádku bude reálné číslo mající pořadové číslo k.

V prvním řádku bude číslo

$$a^{(1)}, c_1^{(1)}c_2^{(1)}c_3^{(1)} \ldots \text{ do nekonečna;}$$

při tom číslo $a^{(1)}$ před desetinnou čárkou je přirozené číslo nebo nula a $c_1^{(1)}$, $c_2^{(1)}$, $c_3^{(1)}$ atd. jsou cifry. Podobně v druhém řádku je číslo

$$a^{(2)}, c_1^{(2)}c_2^{(2)}c_3^{(2)} \ldots \text{ do nekonečna,}$$

a další řádky jsou

$$a^{(3)}, c_1^{(3)}c_2^{(3)}c_3^{(3)} \ldots \text{ do nekonečna, atd.}$$

Těch řádků je n v případě, že M má n prvků. V tom případě doplníme počet řádků na $\aleph_0$ tím, že v dalších řádcích píšeme vždy třeba číslo

$$0{,}0000\ldots \text{ (samé nuly)}.$$

Má-li R $\aleph_0$ prvků, je řádků už samo sebou nekonečně mnoho. Každý řádek je jeden prvek množiny R a *všecky prvky množiny* R *jsou tak vyčerpány.*

A teď ten kýžený rozpor dostaneme tak, že sestrojíme *prvek množiny* R (t. j. reálné číslo), *který přece jen v žádném řádku napsán není.* Je-li cifra $c_l^{(k)}$ rovna jedné, t. j.: $c_l^{(k)} = 1$, pak nechť $d_l^{(k)} = 2$; v opačném případě, t. j. není-li $c_l^{(k)}$ rovna jedné, nechť zase $d_l^{(k)} = 1$. Tedy $d_l^{(k)}$ je vždy zase cifra, ale *jiná než* $c_l^{(k)}$. A teď si všimněme čísla

$$+\,0{,}d_1^{(1)}d_2^{(2)}d_3^{(3)}d_4^{(4)}\ldots;$$

na k-tém místě za desetinnou čárkou je cifra $d_k^{(k)}$. A teď buďme opatrní! Cifry $d_k^{(k)}$ jsou jedničky a dvojky. Proto to naše číslo se dá psát jen tím jedním způsobem. (Neboť dva způsoby psaní byly možné jen tam, kde od jistého místa byly za desetinnou čárkou samé devítky anebo nuly.) Má-li se tedy naše číslo rovnat nějakému číslu, musí se s ním shodovat ve všech cifrách za desetinnou čárkou. Tedy se naše číslo neshoduje s číslem

$$a^{(1)},c_1^{(1)}c_2^{(1)}c_3^{(1)}\ldots$$

napsaným v prvním řádku: neboť první místo za desetinnou čárkou v prvním řádku je $c_1^{(1)}$, kdežto u našeho čísla je jiné, totiž $d_1^{(1)}$. Neshoduje se ani s číslem

$$a^{(2)},c_1^{(2)}c_2^{(2)}c_3^{(2)}\ldots$$

napsaným v druhém řádku: neboť druhé místo za desetinnou čárkou v druhém řádku je $c_2^{(2)}$, kdežto u našeho čísla je jiné, totiž $d_2^{(2)}$.

A obecně se neshoduje s číslem

$$a^{(k)},c_1^{(k)}c_2^{(k)}c_3^{(k)}\ldots$$

napsaným v k-tém řádku: neboť k-té místo za desetinnou čárkou v k-tém řádku je $c_k^{(k)}$, kdežto u našeho čísla je jiné, totiž $d_k^{(k)}$.

Skutečně tedy nalezené číslo není napsáno v žádném řádku, a to jsme chtěli za účelem dosažení rozporu dokázat. Tedy náš předpoklad, že by R byla spočetná, je nesprávný, tedy R je nespočetná, což bylo dokázati.

1,3. Kardinální čísla. V první kapitole jsme si všimli, že $5^2 = 25$ a že $\aleph_0^2 = \aleph_0$. První rovnice znamenala, že je jedno, má-li množina 25 prvků nebo 5^2, t. j., že je jedno, číslujeme-li něco přirozenými čísly $1, 2, 3, \ldots$ až 25 anebo uspořádanými dvojicemi $\{m; n\}$, kde m a n je vždy 1 nebo 2 nebo 3 nebo 4 nebo 5. To proto, že těch čísel $1, 2, \ldots$ až 25 a našich dvojic je stejný počet, t. j., že naše dvojice se dají očíslovat pomocí čísel $1, 2, 3, \ldots, 25$.

Úplně stejně rovnice $\aleph_0^2 = \aleph_0$ znamenala, že je jedno, má-li množina $\aleph_0$ prvků nebo $\aleph_0^2$, t. j., že je jedno číslovat přirozenými čísly $1, 2, 3, \ldots$ do nekonečna nebo uspořádanými dvojicemi $\{m; n\}$, kde m a n jsou přirozená čísla. To proto, že těch čísel $1, 2, \ldots$ do nekonečna a našich dvojic je stejný počet, t. j., že naše dvojice se dají očíslovat pomocí čísel $1, 2, 3, \ldots$ do nekonečna.

Teď si obecně mysleme dvě množiny A a B a nechť prvky množiny B se dají očíslovat pomocí prvků množiny A. (Při tom naše množiny mohou být nekonečné, dokonce i nespočetné.) Je-li C další množina, pak je úplně jedno, užijeme-li k číslování množiny C prvků množiny A nebo prvků množiny B. Zajisté. Mysleme si totiž, že prvky množiny A jsou jakési nálepky a prvky množiny B jakési štítky. (To ovšem jen kvůli názornosti.) Očíslování množiny B pomocí množiny A se provede tím, že každou nálepku nalepíme na příslušný štítek. Očíslování množiny C pomocí množiny B provedeme tím, že každý štítek (prvek množiny B) nalepíme na příslušnou věc z množiny C. Ale na tom štítku je nalepena nálepka, takže jsme prvky množiny C zároveň očíslovali nálepkami, t. j. prvky množiny A. Ty štítky jsou tam jen pro parádu. Tedy jsme k číslování množiny C místo množiny B mohli rovnou užít množiny A. A ovšem místo očíslování pomocí nálepek jsme stejně mohli užít štítků, protože o každém štítku víme, která nálepka na něj patří. Tedy zase místo množiny A bylo k číslování možno užít množiny B. Je to úplně jedno. Tedy:

Dá-li se množina B *očíslovat množinou* A, *je úplně jedno zda užijeme k číslování množiny* A *nebo množiny* B.

Jestliže dvě množiny A a B jsou takové, že je úplně jedno, čísluje-li se množinou A nebo množinou B, mohou-li se při číslování vzájemně zastupovat, říkáme, že jsou spolu *ekvivalentní* (rovnocenné). Tedy:

Dá-li se množina B *očíslovat množinou* A, *pak množiny* A *a* B *jsou ekvivalentní*. Jestliže naopak množiny A a B jsou ekvivalentní, pak se množina B dá očíslovat množinou A. Neboť množina B se samozřejmě dá očíslovat sama sebou, t. j. množinou B. Jelikož ale je jedno, číslujeme-li množinou A nebo B, můžeme množinu B očíslovat také množinou A. Hořejší výsledky shrneme:

Dvě množiny jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, když jedna z nich se dá očíslovat pomocí druhé.

Označme $\mathsf{N}(n)$ množinu přirozených čísel $1, 2, \ldots$ až do n včetně. Na př. $\mathsf{N}(5)$ má prvky 1, 2, 3, 4, 5. Dále je-li B množina (třeba i nekonečná), pak $|\mathsf{B}|$ bude počet prvků množiny B. Na př. jsme měli

$$|\emptyset| = 0, \ |\mathsf{N}(5)| = 5, \ |\mathsf{N}| = \aleph_0, \ |\mathsf{N}^2| = \aleph_0{}^2.$$

Když se dala množina B očíslovat množinou N, říkali jsme, že B má $|\mathsf{N}|$ (totiž $\aleph_0$) prvků. Obecně B má $|\mathsf{A}|$ prvků, když se dá B očíslovat množinou A.

Rovnice $|\mathsf{A}| = |\mathsf{B}|$ znamená ovšem, že je jedno, zda řeknu, že nějaká množina má $|\mathsf{A}|$ prvků či $|\mathsf{B}|$ prvků.

Tedy to znamená, že je stejné číslovat množinou A či množinou B. Tedy: Že množiny A a B mají stejný počet prvků, t. j. že $|\mathsf{A}| = |\mathsf{B}|$, znamená, že množiny A a B jsou ekvivalentní, čili, že jedna z nich (kterákoliv) se dá očíslovat pomocí druhé.

Podle první kapitoly tedy

$$|\mathsf{N}^2| = |\mathsf{N}|, \ |\mathsf{N}^3| = |\mathsf{N}|, \ |\mathsf{N}^4| = |\mathsf{N}|$$

a obecně

$$|\mathsf{N}^k| = |\mathsf{N}|.$$

Označíme-li obecně $\aleph_0^k$ počet prvků množiny N^k, možno psáti

$$\aleph_0^2 = \aleph_0, \ \aleph_0^3 = \aleph_0, \ \aleph_0^4 = \aleph_0 \text{ a obecně } \aleph_0^k = \aleph_0.$$

Čtenář si sám uvědomí, že definice mocniny $\aleph_0^3$, $\aleph_0^4$ atd. skutečně odpovídá příslušné definici mocnin n^3, n^4 atd. pro přirozené n.

Symbol $|\mathsf{A}|$ označující počet prvků množiny A je jakési „číslo" konečné nebo nekonečné podle toho, je-li A množina konečná či nekonečná. Konečná z těch čísel jsou 0, 1, 2, ..., zkrátka nula a čísla přirozená. Neboť konečná množina je buďto prázdná a pak počet prvků je 0 anebo má n prvků, kde n je přirozené číslo. Těm číslům $|\mathsf{A}|$ říkáme *kardinální čísla.* V mluvnici se říká „základní" čili „kardinální" číslovky slovům jeden, dva, tři atd., která označují *počet* na rozdíl od číslovek první, druhý, třetí atd., t. zv. „řadových" čili „ordinálních", které označují pořadové číslo. V theorii množin se zavádějí též t. zv. čísla ordinální, jichž pravý rozdíl oproti kardinálním vysvitne až u nekonečných množin. To však přesahuje rámec knížky.

Kardinální čísla $|\emptyset|$, $|\mathsf{N}(1)|$, $|\mathsf{N}(2)|$ atd. a $|\mathsf{N}|$ je zvykem označovat 0, 1, 2, atd. a $\aleph_0$. V předešlém odstavci jsme poznali, že množina R všech reálných čísel se nedá očíslovat žádnou z množin $\mathsf{N}(1)$, $\mathsf{N}(2)$ atd., ani množinou N (tím méně ovšem množinou $\emptyset$). Tedy se nerovná ani 1, ani 2, ani 3 atd. ani $\aleph_0$ (tím méně ovšem nule). Tím jsme dospěli k novému kardinálnímu číslu $|\mathsf{R}|$, které je zvykem označit $\aleph$.*) Píšeme

*) Čteme alef.

tedy $\aleph = |\mathsf{R}|$. Čísla $\aleph_0$ a $\aleph$ nikterak ještě nejsou všechna nekonečná kardinální čísla.

Snažme se nyní porovnávat kardinální čísla podle velikosti. Napřed si ozřejmíme, oč jde, na konečných číslech. Co to znamená $5 < 7$ (čti: 5 je menší než 7)? Znamená to toto: Mějme sedm koleček ○○○○○○○ a pět křížků +++++. Pak můžeme číslovat kolečka pomocí křížků, ale vždy nám při tom některá kolečka zbudou, ač jsme křížky spotřebovali všecky:

○	○	○	○	○	○	○
+	+	+	+	+		

nebo třeba

○	○	○	○	○	○	○
+	+		+		+	+

Nějaká kolečka *vždy* zbudou. A to slůvko vždy je velmi důležité! Vidíme to na nekonečných množinách. Číslujme totiž množinu N touž množinou N, na př. čísla v závorkách číslujme čísly bez závorek. Možno to udělat rozmanitými způsoby. V následujících obrázcích jsou čísla v závorkách očíslována pod nimi stojícími čísly bez závorek. Jedno číslování je takové:

(1)	(2)	(3)	(4)	atd.
1	2	3	4	atd.

Číslo (n) bylo vždy očíslováno číslem n.

Nezbylo nic, žádné číslo v závorce a žádné číslo bez závorky. Ale můžeme číslovat jinak:

(1)	(2)	(3)	(4)	atd.
	1	2	3	atd.

číslo $(n + 1)$ bylo očíslováno číslem n. Čísla bez závorek jsme vypotřebovali všecka a přes to jedna závorka zbyla, totiž (1). Dokonce i nekonečně mnoho závorek může zbýt:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	atd.
	1		2		3	atd.

Číslo $(2n)$ bylo očíslováno číslem n. Čísla bez závorek byla spotřebována všechna a přes to zbyly všechny liché závorky; jen sudé byly očíslovány.

Vzhledem k posledním dvěma příkladům bychom byli nakloněni říci, že čísel v závorkách je víc než čísel bez závorek. Ale chyba lávky. Vždyť přece obojích čísel bylo $\aleph_0$. A bylo by trapné říkat, že $\aleph_0$ je větší než $\aleph_0$. Z této trapné situace nás vyvede ono důležité slůvko *vždy*. Nám se sice podařilo, když jsme se o to snažili, číslování zařídit tak, aby zbyly nějaké závorky a aby při tom byla spotřebována všecka čísla bez závorek. Ale nestalo se to vždy. V prvním příkladě totiž žádná závorka nezbyla.

A teď tedy už můžeme definovat, co to znamená, že nějaké kardinální číslo $\mathfrak{a}$ je menší než jiné kardinální číslo $\mathfrak{b}$, což píšeme symbolicky $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. *Definujeme takto*: Zvolíme si množinu A, která má $\mathfrak{a}$ prvků, a množinu B s $\mathfrak{b}$ prvky. Povede-li se nám očíslovat množinu B množinou A částečně a dovedeme-li mimo to dokázat, že úplné očíslování není možné, pak $\mathfrak{a}$ je menší než $\mathfrak{b}$, t. j. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ znamená, že buďto $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ anebo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, t. j., že umíme B očíslovat pomocí A ať už částečně nebo úplně. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ se čte: $\mathfrak{a}$ je nanejvýš $\mathfrak{b}$, anebo $\mathfrak{b}$ je aspoň $\mathfrak{a}$. Ve druhé části uvidíme, že rovnice $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ se může dokázat tak, že se dokáže $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$. Je to velmi pohodlný způsob, jehož budeme hojně užívat.

Příklady. 1. $0 < 1$, $0 < 2$, ..., $0 < \aleph_0$, $0 < \aleph$, zkrátka $0 < \mathfrak{a}$, je-li jen $\mathfrak{a} \neq 0$.

Neboť když číslujeme jakoukoliv neprázdnou množinu množinou prázdnou, pak nemáme, čím bychom číslovali, a tedy ta neprázdná množina vždy zbude dokonce celá.

2. $1 < \aleph_0$, $2 < \aleph_0$, ..., zkrátka $n < \aleph_0$, je-li n přirozené.

Neboť čísla 1, 2, 3, 4, ... do nekonečna lze čísly 1, 2, ... až do n včetně očíslovat vždy jen částečně.

3. $\aleph_0 < \aleph$.

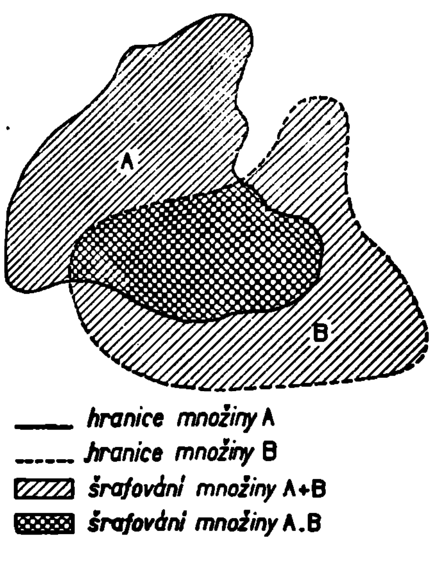
Částečně je možno totiž reálná čísla očíslovat čísly přirozenými. Číslo $+1$ očíslujeme číslem 1, číslo $+2$ číslem 2, zkrátka číslo $+n$ číslem n. Ale vždy nějaká reálná čísla zbudou. (Kdyby totiž bylo možno očíslovat všechna reálná čísla přirozenými čísly, pak by množina R měla $\aleph_0$ prvků, což víme, že nemá.)

4. Je-li n přirozené, pak $n < \aleph$.

Vskutku čísly $1, 2, 3, \ldots, n$ možno očíslovat reálná čísla $+1, +2, +n$. Ale při číslování množiny R čísly $1, 2, \ldots, n$ vždy něco zbude. (Kdyby ne, pak by R měla n prvků, ale víme, že nemá.)

Kardinální čísla můžeme sečítat a násobit tak jako přirozená čísla. Co to znamená sečítat? Jsou-li A a B dvě množiny, pak A + B bude nám znamenat množinu, kterou dostaneme, když dáme obě množiny A a B dohromady. Tedy A + B je množina těch věcí, které patří do A anebo do B.

Věci, které patří i do A i do B, také k množině A + B čítáme, ovšem jen jednou. (Obr. 10.)



Obr. 10.

Máme-li nyní 5 věcí a mimo to 7 věcí, *ale jiných*, pak všech těch věcí dohromady je $5 + 7$. (Kdyby mezi těmi 5 věcmi a těmi 7 věcmi byly některé stejné, pak by jich bylo dohromady méně.) Řekneme obecně: Jestliže množiny A a B nemají společných prvků a má-li A a prvků a B b prvků, pak množina A + B má $a + b$ prvků.

Tedy $a + b$ vypočteme takto: Zvolíme množinu A s a prvky a množinu B s b prvky, aby neměly společných prvků. Pak $a + b$ je počet prvků množiny A + B.

V tom je ale maličký háček. Mimo nás bude počítat $a + b$ nějaký náš přítel. Zvolí si množinu A′ s a prvky a množinu B′ s b prvky, aby neměly společných prvků. Pro něho $a + b$ bude počet prvků množiny A′ + B′. Počítali jsme oba úplně správně podle pravidla, ale nevědouce o sobě, zvolili jsme za A každý jinou množinu. Na př. $a = 5$ a já jsem zvolil za A množinu 1, 2, 3, 4, 5, kdežto můj přítel za A′ množinu I, II, III, IV, V. A také ty druhé množiny B a B′ jsme mohli zvoliti odlišně. Kdo nám zaručí, že nám oběma vyjde totéž? Vždyť pro mne $a + b$ byl počet prvků množiny A + B, kdežto pro něho, pro mého přítele, to byl počet prvků jiné množiny, totiž A′ + B′. Tato závada je jen zdánlivá. Počet prvků množiny A + B i množiny A′ + B′ bude totiž stejný a tedy nám oběma to $a + b$ vyjde stejně. Při čtení druhé části si to čtenář sám dokáže ve cvičení 12,2; je to tak lehké, že se o to může pokusit ihned.

Příklad. $5 + 7 = 12$; neboť 1, 2, 3, 4, 5 je 5 prvků, dále 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′ je 7 prvků a množinu 1, 2, 3, 4, 5, 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, která má $5 + 7$ prvků, lze očíslovat

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,$$

tedy má 12 prvků.

Spočítejme si, co je to $1 + \aleph_0$. Za množinu A si vezmeme množinu, která obsahuje jeden jediný prvek, třebas číslo 0. A za B zvolíme množinu N všech přirozených čísel. Jelikož 0 nepatří do N, nemají množiny A a B společných prvků. Počet prvků množiny A je 1, počet prvků množiny B je $\aleph_0$. Tedy množina A + B má celkem $1 + \aleph_0$ prvků. Co to ale je A + B?

Množina $A + B$ obsahuje 0 a přirozená čísla, t. j. $A + B$ má prvky

$$0, 1, 2, 3, 4, \text{atd. do nekonečna},$$

které možno očíslovat přirozenými čísly:

$$\begin{array}{l} 0, 1, 2, 3, \dots \\ 1, 2, 3, 4, \dots \end{array}$$

a tedy množina $A + B$ má $\aleph_0$ prvků. Tedy $1 + \aleph_0 = \aleph_0$. Úplně stejně na př. $5 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Máme-li totiž 5 prvků I, II, III, IV a V a $\aleph_0$ prvků 1, 2, 3, 4, ..., pak je možno dohromady je očíslovat přirozenými čísly:

$$\begin{array}{cccccccccl} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & 1 & 2 & 3 & 4 & \text{do nekonečna,} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \text{do nekonečna.} \end{array}$$

Obecně, je-li n libovolné přirozené číslo, pak

$$n + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Máme-li totiž n prvků $1', 2', 3', \dots$ až n' a $\aleph_0$ prvků 1, 2, 3, ..., do nekonečna, pak je jich celkem $\aleph_0$, neboť je můžeme očíslovat přirozenými čísly:

$$1', 2', 3', \dots, n', \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \dots \quad \text{do nekonečna,}$$

$$1, 2, 3, \dots, n, \; n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, \dots \quad \text{do nekonečna.}$$

Ale nejen to! Dokonce

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Máme-li totiž $\aleph_0$ prvků $+1, +2, +3, \dots$ do nekonečna a mimo to jiných $\aleph_0$ prvků $-1, -2, -3, \dots$ do nekonečna, pak je jich celkem $\aleph_0$, protože se dají takto očíslovat:

$$+1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, \dots \quad \text{do nekonečna,}$$

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \dots \quad \text{do nekonečna.}$$

Má tedy číslo $\aleph_0$ tu pozoruhodnou vlastnost, že se vůbec nezvětší, když k němu připočtu 1 anebo 2 anebo jakékoliv přirozené číslo. Ba ani tehdy se nezvětší, když k němu připočtu to číslo $\aleph_0$ samo. Je tomu tedy zcela jinak než jsme na to zvyklí u konečných čísel.

Co to je násobení? Je-li A nějaká množina a B také nějaká množina, označíme $A \times B$ množinu všech uspořádaných dvojic $\{a; b\}$, kde a je prvek množiny A a b je prvek množiny B. Má-li A 5 prvků, na př. 1, 2, 3, 4, 5 a má-li B 7 prvků, na př. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, pak $A \times B$ sestavme do tabulky

$$\begin{array}{c} \{1; 1\}, \{1; 2\}, \ldots, \{1; 7\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{5; 1\}, \{5; 2\}, \ldots, \{5; 7\}. \end{array}$$

Tato tabulka má 5krát 7 prvků.

Obecně se vypočte $a \times b$ (čili $a \,.\, b$, čili ab) takto: Zvolíme nějakou množinu A s a prvky a množinu B s b prvky. Utvoříme množinu $A \times B$ (všech uspořádaných dvojic $\{a; b\}$, kde a je prvek množiny A a b je prvek množiny B). Pak $a \times b$ je počet prvků množiny $A \times B$.

Stejně jako při sčítání může náš přítel počítat tak, že si zvolí jakési jiné množiny A′ s a prvky a B′ s b prvky; $a \,.\, b$ pro něho bude počet prvků množiny $A' \times B'$. Bude to ale totéž jako počet prvků množiny $A \times B$; vyjde mu tedy totéž jako nám (cvičení 12,2 ve druhé části).

Příklad. $5 \times 7 = 35$, neboť 5×7 je počet prvků množiny $A \times B$, kde A má 5 prvků 1, 2, 3, 4, 5 a B má 7 prvků, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Rovnice $5 \times 7 = 35$ plyne pak z toho, že prvky v poslední tabulce, kterých je 5×7, se dají očíslovat čísly 1 až 35 na př. takto:

$$\begin{array}{r} 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1, \\ 8,\ 9, 10, 11, 12, 13, 14, \\ 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, \\ 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, \\ 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29. \end{array}$$

Vypočteme si $\aleph_0 \times \aleph_0$. Jest $\aleph_0 \times \aleph_0 = |\mathsf{N} \times \mathsf{N}|$. Avšak $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ je množina dvojic $\{m; n\}$, kde m a n jsou přirozená čísla, tedy $\mathsf{N} \times \mathsf{N} = \mathsf{N}^2$. Tedy $\aleph_0 \times \aleph_0 = |\mathsf{N} \times \mathsf{N}| = |\mathsf{N}^2| = \aleph_0^2 = \aleph_0$.

Tedy

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0.$$

Co je to $2 \times \aleph_0$? $\mathsf{N}(2)$ obsahuje dva prvky a to 1 a 2. Pak prvky množiny $\mathsf{N}(2) \times \mathsf{N}$ jsou

$$\begin{array}{l} \{1; 1\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \ldots \text{ do nekonečna,} \\ \{2; 1\}, \{2; 2\}, \{2; 3\}, \ldots \text{ do nekonečna.} \end{array}$$

A možno je očíslovat přirozenými čísly třeba takto:

$$\begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \text{ atd.} \\ 2, 4, 6, 8, \text{ atd.} \end{array}$$

Tedy $\mathsf{N}(2) \times \mathsf{N}$ má $\aleph_0$ prvků. Avšak $\mathsf{N}(2)$ má dva prvky a N má $\aleph_0$ prvků a tedy $\mathsf{N}(2) \times \mathsf{N}$ má $\aleph_0$ prvků, čili

$$2 \times \aleph_0 = \aleph_0.$$

Je-li n přirozené číslo, pak vždycky

$$n \times \aleph_0 = \aleph_0.$$

$n \times \aleph_0$ je totiž počet prvků množiny $\mathsf{N}(n) \times \mathsf{N}$; neboť $\mathsf{N}(n)$ má n prvků a N má $\aleph_0$ prvků.

Prvky množiny $\mathsf{N}(n) \times \mathsf{N}$ jsou uspořádané dvojice, jichž první člen je nějaké z čísel $1, 2, \ldots$ až n a druhý člen je libovolné přirozené číslo. Možno si tedy $\mathsf{N}(n) \times \mathsf{N}$ sepsat do tabulky

$$\begin{array}{l} \{1; 1\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \ldots \text{ do nekonečna,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{n; 1\}, \{n; 2\}, \{n; 3\}, \ldots \text{ do nekonečna} \end{array}$$

a očíslovat přirozenými čísly takto:

$$\begin{array}{llll} 1, & n+1, & 2n+1, & \text{atd.} \\ 2, & n+2, & 2n+2, & \text{atd.} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n, & 2n, & 3n, & \text{atd.} \end{array}$$

Popis. Od každého členu prvního řádku vedeme svisle dolů paprsek. Začneme číslovat nahoře vlevo a jdeme po jednom paprsku, dokud to jde. Když jsme očíslovali všecky prvky na jednom paprsku, přejdeme k nejbližšímu pravému a očíslujeme zase shora dolů atd.

Mocnění kardinálních čísel jsme už měli:

Zopakujme: A^n je množina uspořádaných n-tic, jichž členy jsou prvky množiny A. a^n se vypočte takto: Zvolíme množinu A s a prvky, pak a^n je počet prvků množiny A^n. Našemu příteli, který místo A volil množiny A′ s a prvky, vyšel pro a^n počet prvků množiny A'^n, který je stejný jako počet prvků množiny A^n. Tedy mu vyšlo totéž co nám.

Ve cvičení 12,4 si čtenář sám zjistí, že pro kardinální čísla platí stejná početní pravidla jako pro čísla přirozená (viz druhou část). Budeme jich užívat.

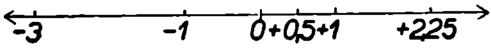
1,4. Kolik je racionálních čísel? Jsou-li a a b dvě reálná čísla, pak jedno z nich je menší a jedno větší. Je-li na př. a to menší, píšeme $a < b$. Na př. záporná čísla (t. j. čísla se znaménkem —) jsou menší než 0 a než kladná čísla (t. j. čísla se znaménkem +). 0 je menší než kladná čísla.

Některá reálná čísla se nazývají racionální. Jsou to taková, která se dostanou dělením dvou celých čísel. (Celá čísla jsou taková, která mají za desetinnou čárkou samé nuly.) Nulou dělit nesmíme.

Čísla, s kterými se při praktickém měření setkáváme, jsou vesměs racionální. Žádnou délku nelze změřiti absolutně přesně. Vždy nám vyjde jakési číslo přesné jen na jistý počet desetinných míst.

Ať měříme sebe přesněji, vždy náš výsledek lze vyjádřit racionálním číslem. I když správná hodnota není racionální, čili jak říkáme, je iracionální, vždy se dá nahradit racionálním číslem a vždy s jakousi chybou, ale ta chyba může býti libovolně malá. Ať ale stupňujeme přesnost pozorování sebe víc, ať máme přístroje (theoreticky mluveno) naprosto přesné, t. j. tak přesné, že chyba se dá zmenšit pod každou sebe menší mez, nikdy se nám nepodaří rozeznat reálná čísla od racionálních, vždy nám racionální čísla budou prakticky vyplňovat celou osu číselnou.

Osou číselnou rozumíme při tom přímku, jejíž body jsou očíslovány reálnými čísly, a to tak, jak jdou za sebou podle velikosti:



Obr. 11.

Racionální čísla při tom leží na ose číselné *hustě*. To znamená, že *prakticky* vyplní celou osu, že ke každému reálnému číslu ve vzdálenosti sebe kratší se najde racionální číslo. Čili mezi každými dvěma (sebe bližšími) reálnými čísly leží vždy nějaké racionální číslo. Na př. mezi čísly —5,874... (atd. jakési cifry) a +6 leží číslo 0, mezi +2,75... (atd. jakési cifry) a +2,76... (atd. jakési cifry) leží číslo +2,755000... (samé nuly). Anebo mezi číslem

—366,9968395795... (atd. jakési cifry)

a číslem

—366,9968417574... (atd. jakési cifry)

leží číslo

—366,996839580000... (samé nuly).

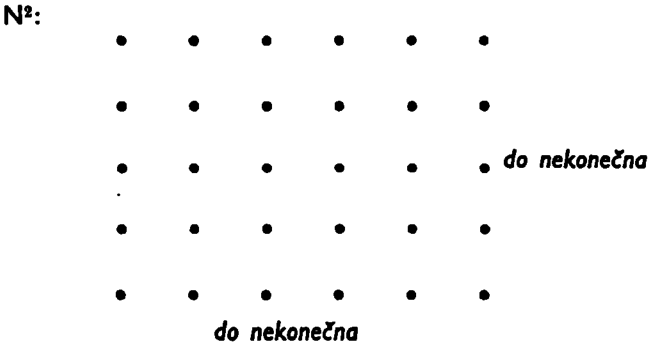
Mezi dvěma čísly leží vždy nějaké číslo, které má za desetinnou čárkou skoro samé nuly a takové číslo je vždy racionální. Na př. poslední číslo se dostane dělením celých čísel; rovná se totiž

—36699683958 : 100000000.

Tedy na každém sebe menším kousku osy číselné se vyskytují racionální čísla. Zakreslíme-li si na osu číselnou jen racionální čísla, pak se nám i při sebe podrobnějším pozorování jeví osa číselná dokonale vyplněna.

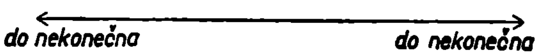
Měli jsme dosud dvě nekonečná čísla: $\aleph_0$ a $\aleph$. $\aleph$ bylo větší. Ale také byl rozdíl v množinách, které měly $\aleph_0$ prvků a $\aleph$ prvků. Množiny s $\aleph_0$ prvky byly množiny N, N^2 a pod. Všimneme-li si příslušných schemat, vypadalo to takto:

Obr. 12.



Obr. 13.

A $\aleph$ prvků měla osa číselná:



Obr. 14.

Vidíme hned rozdíl. Ta první schemata jsou řídká, jednotlivé body jsou daleko od sebe. To poslední schema je přímka, body jsou těsně u sebe, jsou husté, vzdálenosti jsou libovolně malé.

Snad proto má tedy poslední množina více prvků než ty dřívější? A označíme-li si Rac množinu všech racionálních čísel, pak i při naprosto dokonalém pozorování (kdy se přesnost dá *libovolně* stupňovat) schema množiny Rac bude vypadat zase jako ukazuje obr. 14.

Od celé reálné osy se nerozezná. Má tedy množina Rac také $\aleph$ bodů, nebo při nejmenším aspoň víc než $\aleph_0$. Ale chyba lávky!

Všech racionálních čísel je pouze $\aleph_0$, *tedy právě tolik jako přirozených čísel a o nic víc.* A dokonce toho už tolik umíme, že si to dokážeme úplně hravě. Racionální číslo je dáno „párem" (t. j. uspořádanou dvojicí) celých čísel. Na př. číslo $+0{,}328 = +328 : +1000$ je dáno párem $\{+328; +1000\}$. Nebo číslo $+3{,}333$ (samé trojky) se rovná $+10 : +3$ a je dáno párem $\{+10; +3\}$. To racionální číslo se dostane tím, že první člen páru dělíme druhým členem.

Nejdříve si spočítáme, kolik je těch párů celých čísel.

První členy jsou celá čísla, t. j.

jednak číslo 0 .... v počtu 1

jednak čísla

$+1, +2, +3, \ldots\ldots$ v počtu $\aleph_0$

$-1, -2, -3, \ldots\ldots$ v počtu $\aleph_0$

Celkem .... $1+\aleph_0+\aleph_0=(1+\aleph_0)+\aleph_0=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.

Tedy: Prvních členů našich párů je $\aleph_0$. Druhé členy jsou zase celá čísla a tedy: Druhých členů našich párů je $\aleph_0$. Našich párů je tedy

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Tedy našich párů celých čísel je $\aleph_0$. Ty páry možno tedy očíslovat přirozenými čísly:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

Každému páru p_k patří jakési racionální číslo r_k. Na př. páru $\{-8; +7\}$ patří číslo

$$-8 : +7 = -1{,}142857142857\ldots$$

(cifry 142857 se stále opakují). Místo párů p_k pišme příslušná racionální čísla:

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$$

tím dostaneme posloupnost, která obsahuje všecka racionální čísla. Ale ještě nejsme úplně hotovi. Může se stát, že různým párům patří stejná racionální čísla. Na př. páru $\{+32; -28\}$ patří číslo

$$+32 : -28 = -1{,}142857142857\ldots$$

(cifry 142857 se stále opakují). A to je stejné číslo, které patřilo páru $\{-8; +7\}$. Proto jsou v naší posloupnosti

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$$

některá racionální čísla napsána několikrát. Není to ještě správné číslování. Ale hned to napravíme. Nahoru k r_k si připišme $^{(1)}$. Místo r_k píšeme $r_k^{(1)}$; naše posloupnost je:

$$r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, r_3^{(1)}, r_4^{(1)}, \ldots$$

Obsahuje všecka racionální čísla, ale některá se opakují.

Když se některé číslo v naší řadě opakuje, tak je tam prostě necháme jen jednou a to (na př.) na tom místě, kde se vyskytuje po prvé, a ta opakovaná vynecháme. Na př. $r_1^{(1)}$ necháme a škrtneme všecka $r_k^{(1)}$, která se rovnají $r_1^{(1)}$. Zbude jakási menší řada:

$$r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(2)}, \ldots$$

Číslo $r_1^{(1)}$ se v ní vyskytuje jen jednou. Teď $r_2^{(2)}$ necháme a škrtneme všecka $r_k^{(1)}$, která jsou rovna $r_2^{(2)}$; vznikne řada

$$r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(3)}, r_4^{(3)}, r_5^{(3)}, \ldots$$

V ní se první dvě čísla vyskytují jen jednou. Z ní zase $r_3^{(3)}$ po-necháme, ale jinak škrtneme vše, co se rovná $r_3^{(3)}$ a ve zbylé řadě

$$r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(3)}, r_4^{(4)}, r_5^{(4)}, r_6^{(4)}, \ldots$$

se první tři čísla vyskytují jen jednou.

A tak stále pokračujme. Tím postupně jsme si určili čísla $r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(3)}$ atd. Sestavíme z nich posloupnost

$$r_1^{(1)}, r_2^{(2)}, r_3^{(3)}, r_4^{(4)}, \ldots,$$

která vznikla škrtnutím všeho zbytečného.

Tvrdím, že tato posloupnost obsahuje všecka racionální čísla. To jistě, neboť jsme při našem škrtání vlastně nic neubírali. Škrtli jsme jen opakovaná čísla, ponechávajíce vždy jeden exemplář neškrtnut. Dále se v naší posloupnosti nic neopakuje. Při prvním škrtnutí jsme totiž škrtli vše, co se rovnalo $r_1^{(1)}$, při druhém vše co se rovnalo $r_2^{(2)}$ atd., při k-tém škrtání jsme škrtli vše, co bylo rovno $r_k^{(k)}$. Ze dvou stejných čísel je vždy jedno škrtnuto, nic se tedy neopakuje.

Tedy máme (všecka) racionální čísla očíslována (bez opakování)

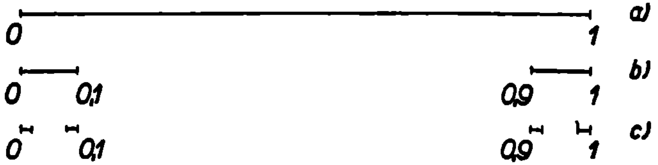
$$\begin{array}{cccc} r_1^{(1)}, & r_2^{(2)}, & r_3^{(3)}, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & \ldots \end{array}$$

Ještě si nutno uvědomit, že to číslování jde skutečně do nekonečna. To ale jistě. Mezi racionální čísla patří totiž také na př. čísla $+1, +2, +3, \ldots$ a těch je nekonečně mnoho; tedy tím spíše všech racionálních čísel musí být nekonečně mnoho. A naše číslování ukazuje, že je jich přesně $\aleph_0$, jak jsme chtěli dokázati.

1,5. Diskontinuum. V předešlé kapitole jsme si ukázali, že nespočetnost množiny nikterak nesouvisí s její hustotou, aspoň v tom smyslu, že mohou být množiny husté (jako na př. množina racionálních čísel) a přesto spočetné. A teď si uděláme naopak zase příklad množiny velice řídké a přes to nespočetné. Racionální čísla vyplňovala prakticky celou osu číselnou a přece jich bylo velmi málo; naproti tomu množina, kterou si teď popíšeme, bude na první pohled na ose číselné takřka mizet a přes to bude mít bodů velmi mnoho. Ta pamětihodná množina se jmenuje *diskontinuum* (protože je velice nespojitá, úplně sporadická) a má velikou důležitost v aplikacích. Dostane se tím, že z osy číselné postupně jisté části vynecháváme a to tak mnoho, že laikovi se na první pohled zdá, že nic nezbylo. Ale zbude přec jen něco a to něco je právě to diskontinuum a má to dokonce velmi mnoho, nespočetně mnoho bodů. Později se ukáže, že diskontinuum má dokonce $\aleph$ bodů, t. j. přesně tolik jako celá osa číselná.

Především z osy číselné vynecháme všecka čísla záporná a všecka čísla větší než $+1$. Zbude interval J (úsečka) od 0 do 1. (Viz obr. 15 a.)

Tuto úsečku rozdělíme na deset stejných dílků a vynecháme všecky díly mimo první a poslední; koncové body u prvního a posledního dílku nevynecháme; zbudou dva intervaly. (Viz obr. 15b.) Teď s těmi zbylými kousky naložíme zrovna tak; rozdělíme je na deset stejných dílků a všecky mimo první a poslední vynecháme; koncové body ponechaných dílků nevynecháme. Zbudou čtyři intervaly. (Viz obr. 15c.)



Obr. 15.

Koncové body jsou 0; $+0{,}01$; dále $+0{,}09$; $+0{,}1$; dále $+0{,}9$; $+0{,}91$; dále $+0{,}99$; $+1$. A ze zbylých čtyř kousků zase vynecháme prostředních osm desetin. A tak pokračujme stále a stále až do nekonečna. Ze zbylých kousků vždy vynecháváme prostředních osm desetin; ale koncové body ponechaných dílků nikdy nevynecháme. Zbývá toho méně a méně. To, co zbude nakonec po nekonečně mnoha vynecháních, to je právě to diskontinuum.

A co vlastně zbylo? Záporná čísla a čísla větší než $+1$ jsme vynechali. Tedy zbylá čísla mají před desetinnou čárkou $+0$. (I číslo $+1$ lze tak psát: $+1 = +0,\bar{9}$.) Za druhé jsme vynechali prostředních osm desetin. Ta zbylá čísla mají tedy na prvním místě za desetinnou čárkou buď 0 anebo 9. (I číslo $+0,1$ lze tak psát: $+0,1 = +0,0\bar{9}$). Dále jsme ze zbylých kousků (což jsou desetiny) vynechali prostředních osm desetin (což jsou setiny) a tedy zbylá čísla mají na druhém desetinném místě buďto 0 nebo 9. (I čísla $+0,01$; $+0,91$ lze pak psát: $+0,01 = +0,00\bar{9}$; $+0,91 = +0,90\bar{9}$.) Atd. A tak pokračujíce vidíme, že nám zbyla právě taková čísla, která je možno psát s $+0$ před desetinnou čárkou a se samými nulami a devítkami za desetinnou čárkou. Tedy: *Diskontinuum* D *je množina reálných čísel, kterou lze psát tak, že před desetinnou čárkou je $+0$ a za ní samé nuly a devítky.*

A zase je na místě opatrnost, neboť víme, že dekadické rozvoje jsou dvojznačné. Ale takové rozvoje, které mají za desetinnou čárkou jenom nuly a devítky, jsou tím jednoznačně určeny. Neboť při přechodu k jinému vyjádření se některá cifra změní o jednu a to už nebude ani nula ani devítka. Tedy opatrnost je zbytečná.

A nespočetnost množiny D dokážeme zase methodou diagonály. Nechť D je spočetná. Pak lze všecka čísla z D sepsat do sloupce, každé do jednoho řádku. Možno předpokládat, že řádků je nekonečně mnoho. Kdyby náhodou D měla jen konečný počet prvků, pak jako další řádky píšeme třeba číslo $+0,000\ldots$ (samé nuly). Tedy D je sepsána takto:

$$
\begin{array}{c}
+0,c_1^{(1)}c_2^{(1)}c_3^{(1)}\ldots,\\
+0,c_1^{(2)}c_2^{(2)}c_3^{(2)}\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Cifry $c_i^{(k)}$ jsou nuly a devítky. A teď nechť $d_i^{(k)} = 0$ v případě, že $c_i^{(k)} = 9$; a nechť $d_i^{(k)} = 9$ v případě $c_i^{(k)} = 0$. Pak číslo

$+ 0{,}d_1^{(1)}d_2^{(2)}d_3^{(3)} \ldots$ má za desetinnou čárkou samé nuly a devítky a tedy patří do D. A není napsáno v žádném řádku, neboť od k-tého řádku se liší na k-tém místě za desetinnou čárkou. Tento rozpor ukazuje nesprávnost našeho předpokladu, že D je spočetná. *Tedy diskontinuum* D *je nespočetná množina.*

A teď něco pro ty, kteří si pamatují ze sexty něco o řadách. Abychom si uvědomili, jak řídce je diskontinuum D rozloženo na ose číselné, vypočteme si celkovou délku toho, co jsme z intervalu J ubrali. Nejdříve jsme ubrali osm desetin, potom dvakráte po osmi setinách, potom čtyřikrát po osmi tisícinách atd., celkem tedy jsme ubrali

$$\tfrac{8}{10} + 2 \cdot \tfrac{8}{100} + 4 \cdot \tfrac{8}{1000} + \ldots$$

Je to geometrická řada, první člen $a_1 = \frac{8}{10}$ a kvocient $q = \frac{2}{10}$. Její součet je

$$a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} = \tfrac{8}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{10}} = \tfrac{8}{10} \cdot \tfrac{10}{8} = 1.$$

Tedy celková délka toho, co jsme z intervalu J ubrali, je 1, t. j. rovná se délce celého intervalu J. Na diskontinuum už žádná délka nezbyla; říkáme, že diskontinuum má míru nula.

A přes to, že celková délka toho ubraného je tak velká, jako délka intervalu, z něhož jsme ubírali, zbylo nám stále ještě nespočetně mnoho bodů. Diskontinuum má nespočetně mnoho bodů, přes to, že jeho míra je nula. Dokonce si ihned zjistíme, že počet bodů diskontinua je stejně veliký jako počet bodů celé osy číselné. Vypočteme si přesně, kolik má bodů diskontinuum D. Uvidíme, že nám vyjde $\aleph$.

Především D je částí osy číselné, tedy má jistě nejvýše tolik bodů, co celá osa číselná. Tedy má D nanejvýš $\aleph$ bodů, tedy buďto stejně mnoho, anebo méně. Abychom dokázali, že D má stejně mnoho bodů jako R, stačí tedy dokázat, že jich nemůže mít méně. Tedy nám zbývá dokázat, že D má aspoň tolik bodů jako R, t. j. že $|R| \leq |D|$. To znamená: Máme očíslovat D pomocí R, ať už částečně či úplně. Podaří-li se nám to, bude dokázáno, že R má přesně $\aleph$ bodů.

Vezmeme si na pomoc výsledky předchozí kapitoly. Racionálních čísel je $\aleph_0$; můžeme tedy všecka racionální čísla očíslovat čísly $1, 2, \ldots$ do nekonečna:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots \text{ do nekonečna.}$$

A teď mějme nějaké reálné číslo ϱ. Tomu číslu přiřadíme jistý bod v diskontinuu; ten bude

$$+0{,}c_1c_2c_3\ldots \text{ (nuly a devítky)}$$

a sestrojí se takto: Je-li $r_1 < \varrho$, bude $c_1 = 0$; v opačném případě bude $c_1 = 9$. Je-li $r_2 < \varrho$, bude $c_2 = 0$; v opačném případě bude $c_2 = 9$. Obecně stojí na k-tém místě nula v případě, že $r_k < \varrho$; v opačném případě se k-tá cifra c_k rovná devíti.

Vezmu-li teď jiné reálné číslo ϱ', na př. $\varrho < \varrho'$, pak mezi čísly ϱ a ϱ' je jakési racionální číslo r. Číslo r je napsáno v řadě

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

řekněme na l-tém místě, tedy $r = r_l$, tedy $\varrho < r_l < \varrho'$. A teď číslu ϱ je přiřazen bod diskontinua:

$$+0{,}c_1c_2c_3\ldots$$

a číslu ϱ' jakýsi bod

$$+0{,}c'_1c'_2c'_3\ldots$$

Jelikož $r_l < \varrho'$, jest $c'_l = 0$. Avšak $\varrho < r$ a tedy $c_l = 9$. Tedy různým reálným číslům ϱ a ϱ' patří různé body diskontinua. Tedy je to správné číslování. Podařilo se nám tedy D očíslovat aspoň částečně pomocí množiny R, což jsme právě chtěli. Tedy: *Diskontinuum* D *má přesně* $\aleph$ *bodů.*

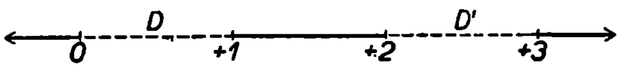
To je výsledek proto důležitý, že s diskontinuem se manipuluje mnohem pohodlněji než s celou osou číselnou, takže je pomocí D mnohem snazší odvodit početní pravidla pro číslo $\aleph$.

I,6. Početní pravidla pro číslo $\aleph$. Nejdříve si dokážeme: *Je-li n přirozené číslo, jest vždy $n + \aleph = \aleph$;* dokonce $\aleph_0 + \aleph = \aleph$. Diskontinuum D má $\aleph$ bodů; dále buď C množina všech čísel $-1, -2, -3, \ldots$ do nekonečna. Pak množina C + D má $\aleph_0 + \aleph$ prvků. Protože obsahuje celé diskontinuum D, musí mít naše množina C + D aspoň $\aleph$ bodů. Ale víc jich mít nemůže, neboť je to část osy číselné a ta má celkem jen $\aleph$ bodů. Tedy C + D má přesně $\aleph$ bodů, t. j.

$$\aleph_0 + \aleph = \aleph.$$

Je-li n přirozené, pak $n + \aleph = n + (\aleph_0 + \aleph) = (n + \aleph_0) + \aleph = \aleph_0 + \aleph = \aleph$. Tím je vše dokázáno.

A teď co je to $\aleph + \aleph$? Diskontinuum D si mysleme ve dvou exemplářích. První exemplář D, to bude diskontinuum samo, jak bylo popsáno v předešlé kapitole. Druhý exemplář označme D'; vznikne tím, že se D posune po ose číselné o dva dílky doprava. (Viz obr. 16.)



Obr. 16.

Tedy D' se liší od D jenom tím, že před desetinnou čárkou místo +0 stojí +2. A množiny D a D' ovšem nemají žádných společných bodů. (Proto jsme posunovali o *dva* dílky. Při posunutí jen o jeden dílek by obě množiny měly společný bod +1.) Množina D má $\aleph$ bodů a množina D', která se od D v podstatě ničím neliší, má ovšem též $\aleph$ bodů. Množina D + D' má tedy $\aleph + \aleph$ bodů. A kolik to je? Především má množina D + D' aspoň tolik bodů jako D, tedy aspoň $\aleph$ bodů. Za druhé je D + D' část osy číselné. Má tedy nejvýš tolik bodů co osa číselná, tedy nanejvýš $\aleph$ bodů. Tedy má D + D' přesně $\aleph$ bodů, t. j.

$$\aleph + \aleph = \aleph.$$

Teď si dokážeme:

Je-li n přirozené číslo, jest vždy $n \cdot \aleph = \aleph$; dokonce $\aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$.

Nejdříve si vypočteme $\aleph_0 \cdot \aleph$. Je to počet prvků množiny $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$. Prvky množiny $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ jsou uspořádané dvojice

$$\{m; +0{,}c_1c_2c_3\ldots\},$$

kde m je přirozené číslo a $+0{,}c_1c_2c_3\ldots$ je bod diskontinua, t. j. $c_1, c_2, \ldots$ jsou nuly a devítky.

Množina $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ má aspoň $\aleph$ prvků. Neboť když každému číslu $+0{,}c_1c_2c_3\ldots$ z diskontinua přiřadíme dvojici

$$\{1; +0{,}c_1c_2c_3\ldots\},$$

tak jsme $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ částečně očíslovali diskontinuem D a tedy má skutečně $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ aspoň tolik prvků co D, t. j. aspoň $\aleph$.

Množina $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ má však nanejvýš $\aleph$ prvků. Každému prvku

$$\{m; +0{,}c_1c_2c_3\ldots\}$$

množiny $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ můžeme totiž přiřadit reálné číslo $+m;$ $c_1c_2c_3\ldots$; tím jsme částečně očíslovali osu číselnou R naší množinou $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$. Tedy $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ má nanejvýš tolik prvků co R, t. j. $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ má nanejvýš $\aleph$ prvků.

Celkem tedy má $\mathsf{N} \times \mathsf{D}$ přesně $\aleph$ prvků, t. j. $\aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$. Rovnici $n \cdot \aleph = \aleph$ z toho odvodíme už lehko; místo $\aleph$ můžeme totiž psát $\aleph_0 \cdot \aleph$ a máme $n \cdot \aleph = n \cdot (\aleph_0 \cdot \aleph) = (n \cdot \aleph_0) \cdot \aleph =$ $= \aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$.

A teď si vypočteme $\aleph \cdot \aleph$ čili $\aleph^2$. Je to počet prvků množiny $\mathsf{D} \times \mathsf{D}$ čili D^2. Prvky té množiny jsou uspořádané dvojice

$$\{+0{,}c_1c_2c_3\ldots; +0{,}d_1d_2d_3\ldots\}.$$

Při tom $c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots$ jsou nuly a devítky. Ty dvojice můžeme (úplně) očíslovat pomocí prvků množiny D a to takto: Naše dvojice

$$\{+0{,}c_1c_2c_3\ldots; +0{,}d_1d_2d_3\ldots\}$$

bude očíslována prvkem

$$+0{,}c_1d_1c_2d_2c_3d_3\ldots$$

množiny D. Každému prvku

$$+0{,}e_1e_2e_3e_4\ldots$$

množiny D tak skutečně odpovídá přesně jedna dvojice, totiž

$$\{+0{,}e_1e_3e_5e_7\ldots;\ +0{,}e_2e_4e_6e_8\ldots\}.$$

Tedy množiny $D \times D$ a D mají stejně mnoho prvků, t. j.

$$\aleph\,.\,\aleph = \aleph,$$

čili

$$\aleph^2 = \aleph.$$

Pak ale též $\aleph^3 = \aleph$, $\aleph^4 = \aleph$ atd. Neboť $\aleph^3 = \aleph^2\,.\,\aleph = \aleph\,.\,.\,\aleph = \aleph$ a podobně $\aleph^4 = \aleph^3\,.\,\aleph = \aleph\,.\,\aleph = \aleph$ atd. Obecně tedy:

Je-li n přirozené číslo, jest vždy $\aleph^n = \aleph$.

Dokažme si na př. $\aleph^3 = \aleph$ přímo. $\aleph^3$ je počet prvků množiny D^3, t. j. uspořádaných trojic

$$\{+0{,}c_1c_2c_3\ldots;\ +0{,}d_1d_2d_3\ldots;\ +0{,}e_1e_2e_3\ldots\}.$$

$c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots, e_1, e_2, \ldots$ jsou samé nuly a devítky. Podaří-li se nám D^3 (úplně) očíslovat množinou D, která má $\aleph$ prvků, budeme hotovi. To se nám ale podaří snadno. Naši trojici totiž očíslujeme prvkem

$$+0{,}c_1d_1e_1c_2d_2e_2c_3d_3e_3\ldots$$

Každému prvku

$$+0{,}f_1f_2f_3\ldots$$

množiny D pak skutečně odpovídá přesně jedna trojice, totiž

$$\{+0{,}f_1f_4f_7f_{10}\ldots;\ +0{,}f_2f_5f_8f_{11}\ldots;\ +0{,}f_3f_6f_9f_{12}\ldots\}.$$

Čtenář si za cvičení úplně obdobně dokáže $\aleph^4 = \aleph$ a třeba ještě $\aleph^5 = \aleph$ přímo.

Dosud jsme za mocnitele připouštěli jenom konečná čísla 1, 2, 3, 4, … Teď si řekneme, co je to $A^{\aleph_0}$. Prvky množiny A^4

byly uspořádané čtveřice prvků množiny A, t. j. čtyřčlenné řady prvků množiny A. Obdobně prvky množiny $A^{\aleph_0}$ budou $\aleph_0$-členné řady prvků množiny A, t. j. prvky množiny $A^{\aleph_0}$ jsou posloupnosti, jejichž členy jsou prvky množiny A. A $a^{\aleph_0}$ se vypočte takto: zvolíme množinu A s a prvky; pak $a^{\aleph_0}$ je počet prvků množiny $A^{\aleph_0}$. (Na tom, jak volíme A, zase nezáleží, jen když A má a prvků.)

Platí $$\aleph = 2^{\aleph_0}.$$

Tuto neobyčejně důležitou rovnici dokážeme úplně snadno. U diskontinua je před desetinnou čárkou vždy $+0$; tedy se stačí starati jen o to, co je za desetinnou čárkou. Prvky diskontinua jsou tedy v podstatě posloupnosti ze samých nul a devítek. Je-li A množina, která obsahuje přesně dva prvky, totiž nulu a devítku, pak D je v podstatě totéž jako $A^{\aleph_0}$; a D má $\aleph$ bodů a $A^{\aleph_0}$ má $2^{\aleph_0}$ prvků. Tedy $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

Dále platí. *Je-li n přirozené číslo, větší než 1, pak vždy* $n^{\aleph_0} = \aleph$; dokonce

$$\aleph_0{}^{\aleph_0} = \aleph \text{ a } \aleph^{\aleph_0} = \aleph.$$

Nejdříve si vypočteme $\aleph^{\aleph_0}$. Je to počet prvků množiny $D^{\aleph_0}$, jejíž prvky jsou posloupnosti

$$d_1, d_2, d_3, \ldots$$

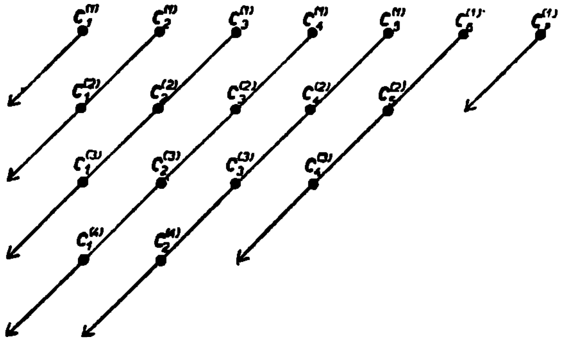
a to takové, že $d_1, d_2, \ldots$ jsou body diskontinua. Tedy

$$\begin{aligned} d_1 &= +0{,}c_1{}^{(1)}c_2{}^{(1)}c_3{}^{(1)}\ldots \\ d_2 &= +0{,}c_1{}^{(2)}c_2{}^{(2)}c_3{}^{(2)}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Abychom dokázali $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$, stačí naši posloupnost očíslovat (úplně) pomocí prvků množiny D. To se nám snadno povede. Naši posloupnost $d_1, d_2, \ldots$ totiž očíslujeme číslem

$$+0{,}c_1{}^{(1)}c_2{}^{(1)}c_1{}^{(2)}c_3{}^{(1)}c_2{}^{(2)}c_1{}^{(3)}\ldots,$$

které patří do diskontinua a dostane se takto. Od každé cifry za desetinnou čárkou v čísle d_1 vedeme nalevo dolů paprsek odchýlený od vodorovného směru o 45°. Začneme cifrou $c_1^{(1)}$ a píšeme cifry za sebou jdouce vždy po paprsku; a když vyčerpáme jeden paprsek, přejdeme k nejbližšímu paprsku. (Viz obr. 17.)



Obr. 17.

A každému číslu

$$+0{,}e_1e_2e_3e_4\ldots$$

pak skutečně odpovídá zcela určitá posloupnost

$$d_1, d_2, d_3, \ldots$$

totiž

$$\begin{aligned} d_1 &= +0{,}e_1e_2e_4e_7\ldots, \\ d_2 &= +0{,}e_3e_5e_8\ldots, \\ d_3 &= +0{,}e_6e_9\ldots, \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

Tedy našich posloupností je stejně mnoho jako prvků diskontinua, t. j. $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

Z toho plyne lehko také $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$.

Označme totiž A množinu obsahující jenom dvě čísla $+1$ a $+2$. Označme B množinu, která obsahuje $\mathfrak{b}$ čísel $+1$, $+2$, $+3, \ldots$; $\mathfrak{b}$ nechť je větší než jedna. Obsahuje-li B n čísel (t. j. $\mathfrak{b} = n$), jest $\mathsf{B} = \mathsf{N}(n)$. Anebo obsahuje B $\aleph_0$ čísel (t. j. $\mathfrak{b} = \aleph_0$) a pak $\mathsf{B} = \mathsf{N}$. V každém případě B obsahuje mimo jiné také čísla $+1$, $+2$, tedy A je část množiny B a ovšem B je část množiny R. Je tedy A^N část množiny B^N a to je část množiny R^N. Tedy

$$|\mathsf{A}^\mathsf{N}| \leqq |\mathsf{B}^\mathsf{N}| \leqq |\mathsf{R}^\mathsf{N}|,$$

t. j.

$$2^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{b}^{\aleph_0} \leqq \aleph^{\aleph_0}.$$

Avšak $2^{\aleph_0}$ je totéž jako $\aleph^{\aleph_0}$ (obojí je to rovno $\aleph$) a tedy $2^{\aleph_0} = \mathfrak{b}^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0}$. Při tom $\mathfrak{b}$ bylo buď n (> 1) anebo $\aleph_0$.

Tedy

$$2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = 4^{\aleph_0} = \ldots = \aleph_0{}^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} = \aleph.$$

1,7. Příklady množin, které mají $\aleph$ prvků. A) *Kladných čísel je $\aleph$.* Víc jich býti nemůže, protože všech reálných čísel je jenom $\aleph$. A na druhé straně mezi kladná čísla patří též čísla, která mají před desetinnou tečkou $+2$ a za ní samé nuly a devítky. Ta čísla tvoří množinu D′ zmíněnou už v odst. 1,6. (D′ je vlastně diskontinuum posunuté na ose číselné o 2 dílky napravo.) D′ má $\aleph$ prvků a tedy kladných čísel je aspoň $\aleph$. Tedy jich je přesně $\aleph$.

Uspořádaných skupin po 17 kladných čísel je $\aleph^{17} = \aleph$. *Obecně je uspořádaných n-tic kladných čísel $\aleph^n = \aleph$. A posloupností kladných čísel je $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.*

Početní pravidla pro číslo $\aleph$ jsme odvodili pomocí diskontinua, protože je to pohodlné. A teď užijeme těch formulí na jiné množiny (na př. množinu reálných čísel), které mají také $\aleph$ bodů, ale pro které by bylo svízelné ona pravidla odvozovat přímo.

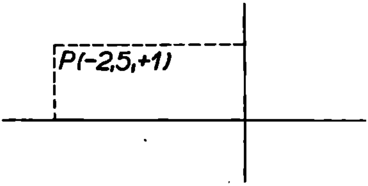
V této kapitole předpokládám jisté (ostatně zcela nepatrné) znalosti geometrie. Tím se nikterak neprohřešuji zásadě, že nepředpokládám nic, protože jde o pouhé příklady k objasnění, stojící vedle vlastní látky.

Především kolik má bodů přímka? Osa číselná měla $\aleph$ bodů; ty body byly reálná čísla. A každá jiná přímka má zrovna tolik bodů. Jako v analytické geometrii si totiž na naši přímce zvolíme jakýsi bod za počátek i jakousi délku za jednotku měřítka (na př. cm). Každý bod napravo od počátku označíme číslem se znaménkem plus, které nám udává, o kolik cm je vzdálen od počátku. A každý bod nalevo od počátku označíme též jeho vzdáleností od počátku, ale se znaménkem minus. A počátek označíme 0.

Situace je stejná jako na ose číselné v obr. 11. Body naší přímky jsou očíslovány reálnými čísly. Tedy:

Přímka má $\aleph$ bodů.

A teď kolik bodů má rovina? Jako v analytické geometrii si nakreslíme v naší rovině dvě kolmice, t. zv. osy, řekněme „jednu vodorovnou a jednu svislou“. A pro každý bod *P* naší roviny si určíme jakousi uspořádanou dvojici reálných čísel. Říká se jim „souřadnice bodu *P*“. První souřadnice značí vzdálenost od svislé osy; má znaménko plus, je-li *P* od svislé osy napravo; je-li nalevo, má znaménko minus. Druhá souřadnice značí vzdálenost od vodorovné osy; znaménko má plus či minus podle toho, je-li náš bod od vodorovné osy nahoru, či dolů. (Viz obr. 18.)



Obr. 18.

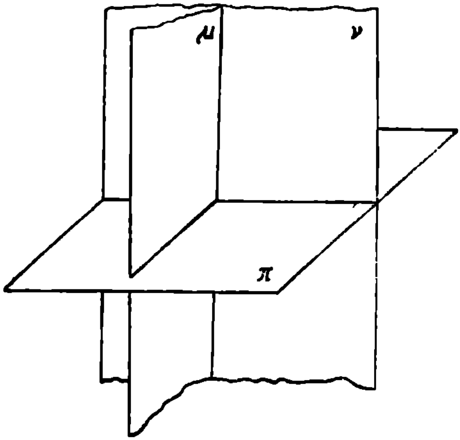
Body roviny jsou tak očíslovány uspořádanými dvojicemi reálných čísel. Je jich tedy tolik co těch dvojic, t. j. $\aleph^2 = \aleph$.

Tedy:

Rovina má také $\aleph$ bodů.

A kolik bodů má prostor? Zvolíme si v našem prostoru tři roviny na sebe kolmé: vodorovnou (rovinu π) a dvě svislé (roviny ν a μ).

A body prostoru si očíslujeme uspořádanými trojicemi reálných čísel; ta čísla se jmenují zase souřadnice. První



Obr. 19.

značí vzdálenost od roviny μ (napravo plus, nalevo minus), druhá značí vzdálenost od roviny ν (dopředu plus, dozadu minus) a třetí značí vzdálenost od roviny π (nahoru plus, dolů minus). Body našeho prostoru se tedy dají očíslovat uspořádanými trojicemi reálných čísel. Je jich tedy $\aleph^3 = \aleph$. Tedy

prostor má $\aleph$ bodů.

Vidíme tedy, že *přímka, rovina i prostor mají stejný počet bodů.*

Starší matematika užívala k počítání nekonečných množin symbolů $\infty = \infty^1, \infty^2, \infty^3, \ldots$ Říkalo se, že přímka má $\infty = \infty^1$ bodů, že rovina má ∞^2 bodů, že prostor má ∞^3 bodů. Na druhé straně přirozených čísel bylo také ∞, racionálních čísel též ∞. Uspořádaných dvojic přirozených čísel bylo ∞^2 a podobně. Nám ale vyšlo něco zcela jiného. Na rozdíl od staré matematiky jsme napočítali, že přímka, rovina i prostor mají stejný počet bodů. Naproti tomu racionálních čísel je méně, ale je jich stejně mnoho jako na př. uspořádaných dvojic přirozených čísel. To počítání po staru, pokud má vůbec smysl, má smysl zcela jiný než naše. Nemá vůbec co dělat s počtem prvků, jak se snad někteří při logické nejasnosti pojmů domnívali. Pokud se přirozených čísel, uspořádaných dvojic přirozených čísel a pod. týče, má ∞, ∞^2 atd. smysl dosti pochybný.

Naproti tomu symbolům $\infty = \infty^1$, ∞^2 atd. pro přímku, rovinu, prostor a vůbec v geometrii možno přikládat rozumný význam, který však s počtem prvků nemá co dělat. Exponent 1, 2 a 3 pro přímku, rovinu a prostor mají názorný význam dimense. Přímka je jednorozměrná, rovina dvojrozměrná, prostor trojrozměrný. Přímka a rovina mají stejný počet bodů; to znamená: každému bodu roviny lze přiřadit určitý bod přímky a to tak, že různým bodům jsou přiřazeny různé body a rovina i přímka se tím vyčerpají. To je pravda, ale takové přiřazení (očíslování) je vždy velmi nenázorné. Že takové očíslování existuje, jsme vyčetli z formule $\aleph^2 = \aleph$, která byla odvozena z diskontinua a ne z roviny a přímky. To proto, že autor nepřišel na žádný způsob, jak přímo očíslovat body přímky pomocí bodů roviny, který by byl tak jednoduchý, aby jej bylo vhodno vykládat v populární knížce. Takové přiřazení s jednoduchými vlastnostmi geometrickými totiž žádné není.

B) Úlohy v následujících odstavcích s hvězdičkami mají vyložit názorně bez logické precisace, oč vlastně jde, mluví-li se o ∞^1, ∞^2, ∞^3 atp. Netýkají se vlastního předmětu knížky a mají za úkol objasnit čtenáři, že při $\infty^1, \infty^2, \ldots$ jde o něco zcela jiného než o nějakou škálu nekonečna.

* Požadujme na našem přiřazení, aby bylo spojité. T. j. dvěma blízkým bodům v rovině přiřazené body na přímce jsou zase blízké, spojitým pohybům v rovině odpovídají spojité pohyby na přímce. Pak souvislá množina (která se skládá jen z jednoho kusu) v rovině dá na přímce zase souvislou množinu. Teď z naší roviny odstraníme bod. Ta rovina se nerozpadne. Tomu odstraněnému bodu v rovině patří na přímce jakýsi bod. A ten bod patřil jenom tomu vynechanému bodu v rovině, takže ochuzení naší roviny o jeden bod nutně ochudí o příslušný bod i přímku. Ale přímka odnětím bodu přestane býti souvislou, ačkoli rovina bez jednoho bodu souvislou zůstala. Tedy souvislé množině je přiřazena množina nesouvislá. Nemůže být tedy naše přiřazení spojité. To znamená:

* Při očíslování přímky body roviny jistým blízkým bodům jsou nutně přiřazeny body vzdálené, to očíslování je vždy „nepořádné"; spojitým pohybům v rovině odpovídají skoky na přímce.

* Požaduje-li se na číslování, aby bylo spojité, nedá se už přímka očíslovat rovinou. Přímka a rovina jsou sice ekvivalentní s hlediska theorie množin (jak jsme o ekvivalenci mluvili v odst. 1,3), ale dají se rozeznat pomocí pojmů *spojitého* číslování. Nauka, která se zabývá spojitými přiřazeními, se nazývá topologie. Tedy přímka a rovina se dají rozeznat topologicky. Rovněž i prostor se dá od nich topologicky rozeznat, ač s hlediska theorie množin, t. j. staráme-li se jen o počet prvků, jen o očíslování, aniž klademe požadavky spojitosti, je s oběma ekvivalentní.

* Ve školách se učí, že trojúhelník je určen třemi na sobě nezávislými údaji a žádným jiným počtem nezávislých údajů. (Údaje jsou kladná čísla.) Vzhledem k tomu se říká, že je ∞^3 trojúhelníků. V této formě to ale není vůbec pravda. Tvrdím,

že trojúhelník je určen takovým jediným údajem, nebo také sedmnácti zcela na sobě nezávislými údaji; ba dokonce možno trojúhelníky určovat $\aleph_0$ (tedy nekonečně mnoha) údaji, které jsou na sobě naprosto nezávislé.

Spočteme si totiž, kolik je trojúhelníků. Každý trojúhelník má tři strany; napišme si jejich délky podle velikosti za sebou (největší napřed). Tím jsme každému trojúhelníku přiřadili uspořádanou trojici kladných čísel. Tedy množina uspořádaných trojic kladných čísel je částečně očíslována pomocí trojúhelníku. Tedy je trojúhelníků nanejvýš tolik, co takových trojic, t. j. nanejvýš $\aleph^3 = \aleph$. Na druhé straně každému kladnému číslu c přiřaďme trojúhelník, jehož všecky strany jsou c. Tím jsme trojúhelníky částečně očíslovali kladnými čísly. Je tedy trojúhelníků aspoň tolik, co těch čísel, tedy aspoň $\aleph$. Celkem tedy:

Trojúhelníků je přesně $\aleph$.

Možno tedy trojúhelníky „určovat“ (přesně očíslovat) kladnými čísly. Takový jediný údaj (kladné číslo) určí přesně trojúhelník (který je tím číslem očíslován) a ten trojúhelník určí to číslo. Tedy trojúhelník je určen jediným údajem (kladným číslem).

Pro každé přirozené číslo n jsme však měli rovnici $\aleph^n = \aleph$. Na př. tedy $\aleph^{17} = \aleph$. Avšak $\aleph^{17}$ je počet uspořádaných sedmnáctic kladných čísel (neboť $\aleph$ je počet kladných čísel) a tedy je trojúhelníků právě tolik co uspořádaných sedmnáctic kladných čísel. Možno tedy trojúhelníky „určovat“ (přesně očíslovat) uspořádanými sedmnácticemi kladných čísel. Každými takovými sedmnácti údaji je určen zcela určitý trojúhelník. A změní-li se ta sedmnáctice, t. j. změní-li se některý z těch 17 údajů, změní se i náš trojúhelník. Každý z těch sedmnácti údajů můžeme zvlášť a zcela libovolně změnit; změní se tím prostě ta sedmnáctice a náš trojúhelník. *Trojúhelník je určen sedmnácti zcela nezávislými na sobě údaji* (kladnými čísly).

Číslo 17 jsme vzali jen jako příklad. Ať je n zcela libovolně přirozené číslo, jest $\aleph^n = \aleph$ a tedy trojúhelník je určen n zcela na sobě nezávislými údaji (kladnými čísly).

Trojúhelníky je možno určovat dvěma nebo stotisíci nezávislými údaji stejně dobře jako třemi.

Dokonce jest $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$. *Tedy je trojúhelník určen také $\aleph_0$, tedy nekonečně mnoho na sobě zcela nezávislými údaji (kladnými čísly).*

Ale zase nevykládám, jakých je těch 17 či $\aleph_0$ údajů. To proto, že ty údaje nemají nijaký „názorný" smysl. Že trojúhelník je určen třemi a žádným jiným počtem „názorných" údajů, není však žádný matematický výrok: „Názornost" není logický pojem.

* Mají smysl výroky: Trojúhelník je určen třemi stranami, stranou a oběma přilehlými úhly a podobně. Kdo nám ale zaručí, že při určování trojúhelníka těžnicemi, výškami atp. nevyjde počet nezávislých určovacích prvků jiný? O tom se sice přesvědčujeme případ od případu (ač ne zcela přesně, neboť někdy ty úlohy jsou víceznačné, tedy ne zcela určené a zase naopak — dokonce při určení třemi stranami — někdy nevyjde vůbec žádný trojúhelník), ale obecná formulace problému a jeho řešení ve staré geometrii chybí.

* Přesto lze výroku, že je ∞^3 trojúhelníků, dát rozumný smysl. V topologii se totiž pojem prostoru přenáší i tam, kde na to nejsme zvyklí. Z množiny všech trojúhelníků si uděláme také jakýsi „prostor"; jeho „body" jsou trojúhelníky. Aby to byl prostor, musí mezi body být jisté vztahy; musíme vědět, co to znamená, že dva body jsou blízko sebe. Na př. v našem případě to bude znamenat, že strany jednoho z obou trojúhelníků se málo liší od stran druhého. Říkáme, že jsme do množiny trojúhelníků zavedli topologii. A teď se dá zcela obdobně jako u přímky, roviny a obyčejného prostoru zavést pojem dimense. (Topologům se to podařilo zcela obecně.) A tu nám vyjde, že ten prostor trojúhelníků má dimensi 3.

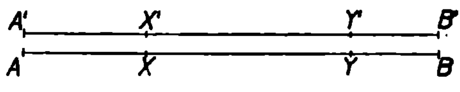
A to je výklad výroku, že „trojúhelníků je ∞^3", či že trojúhelník je určen právě třemi nezávislými údaji."

* Ale s dimensemi do tří nikterak nevystačíme. Prostor, jehož body jsou přímky v obyčejném prostoru, je čtyrrozměrný, je ∞^4 přímek v obyčejném prostoru. Prostor všech elips v rovině je pětirozměrný, těch elips je ∞^5. (Blízké jsou patrně dvě elipsy tehdy, když ke každému bodu na jedné z nich možno najíti blízký bod na druhé.) O prostoru s takovouto topologií, jehož body jsou elipsy v rovině, jest dokázat, že má dimensi 5 ve smyslu topologické theorie dimense. Tím teprv nabudeme oprávnění tvrdit, že je těch elips ∞^5. Při tom všem je *počet* přímek v prostoru, jakož i *počet* elips v rovině zase $\aleph$.

* Celkem tedy lze říci, že symbolům ∞^1, ∞^2, ∞^3, ... možno přisoudit v geometrii jistý rozumný smysl, ale že nikterak nesouvisí s počtem nějakých věcí. Ty exponenty 1, 2, atd. udávají dimensi, což je pojem patřící do topologie. Útvary různých dimensí nerozeznávají se pomocí číslování. Rozeznávají se teprve topologicky, t. j. když na číslování klademe požadavky spojitosti: A teď další příklady z geometrie.

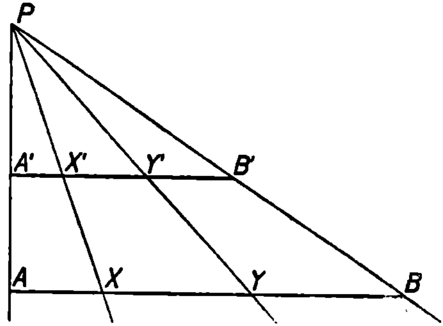
Úsečka je, jak známo, množina bodů na přímce, které jsou mezi dvěma různými body, t. zv. *koncovými body* té úsečky. Při tom ty koncové body buď k úsečce čítáme a mluvíme o úsečce *uzavřené*, nebo nečítáme a mluvíme o úsečce *otevřené*, nebo k úsečce čítáme jen jeden z těch koncových bodů a mluvíme o úsečce *polootevřené*.

Především tvrdím, že *všecky otevřené úsečky mají stejný počet bodů*.



Obr. 20.

Koncové body těch úseček budou A a B u jedné a u druhé A' a B'. (K otevřeným úsečkám jich nečítáme.) Jsou-li ty úsečky stejně dlouhé, pak je položíme na sebe a body obou si přesně odpovídají. (Obr. 20.) Když jsou různě dlouhé, pak si je položme podle obr. 21, spojme bod A s A', B s B' a z průsečíku P promítejme jednu tu úsečku na druhou. Pak jsme bod X promítli do X', bod Y do Y' atd. A tím jsme body X, Y, atd. očíslovali pomocí bodů $X', Y', \ldots$ Je tedy těch bodů obojích stejně mnoho.



Obr. 21.

Abychom tedy spočítali, kolik bodů má otevřená úsečka, stačí si vybrat zcela určitou otevřenou úsečku, ty ostatní mají bodů také tolik. Vybereme si na ose číselné úsečku U s koncovými body -1 a $+2$. (Obr. 22.)

Diskontinuum D leží na téže úsečce (leží totiž mezi body 0 a $+1$). A D má $\aleph$ bodů, takže naše úsečka U má aspoň $\aleph$ bodů. Ale víc než $\aleph$ bodů mít nemůže, protože celá osa číselná má jenom $\aleph$ bodů. *Tedy U a vůbec každá jiná otevřená úsečka má $\aleph$ bodů.*

Obr. 22.

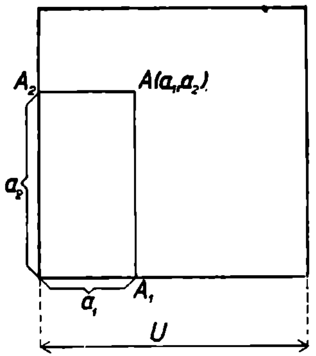
Je-li úsečka polootevřená, má o jeden bod víc, jeden z konců totiž k ní čítáme. Má tedy $\aleph + 1$ bodů; avšak $\aleph + 1 = \aleph$. *Tedy i polootevřená úsečka má $\aleph$ bodů.*

Uzavřená úsečka má o dva koncové body víc než otevřená úsečka; má tedy $\aleph + 2$ body; avšak $\aleph + 2 = \aleph$. *Tedy i uzavřená úsečka má $\aleph$ bodů.*

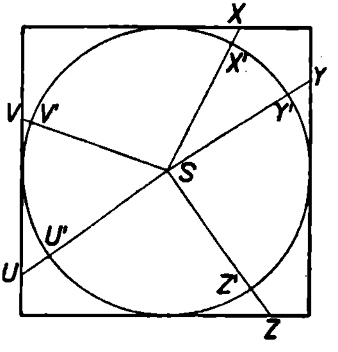
Celkem máme výsledek:

Každá úsečka má $\aleph$ bodů.

Kolik bodů má čtverec (bez obvodu)? Strana čtverce je (otevřená) úsečka U a čtverec sám je vlastně množina $U^2 = U \times U$.



Obr. 23.



Obr. 24.

Bod A ve čtverci (obr. 23) si můžeme totiž myslet označen jako uspořádanou dvojici $\{A_1; A_2\}$, kde

A_1 je bod „základny" U,
A_2 je bod „výšky" U.

A U má $\aleph$ bodů, tedy náš čtverec U^2 má $\aleph^2$ bodů; avšak $\aleph^2 = \aleph$, tedy *čtverec má $\aleph$ bodů.*

Obvod čtverce se skládá ze čtyř otevřených úseček (zatím totiž vrcholy nečítáme) a mimo to čtyř vrcholů. Každá z těch úseček má $\aleph$ bodů a tedy ten obvod má $4 \,.\, \aleph + 4$ body. Avšak $4 \,.\, \aleph = \aleph$, tedy $4 \,.\, \aleph + 4 = \aleph + 4 = \aleph$. Tedy *obvod čtverce má $\aleph$ bodů.*

* Kolik má bodů kružnice? Narýsujme si kružnici o poloměru r a o středu S a opišme jí čtverec (o straně $2r$). Zvolím-li

na naší kružnici bod Y', pak se Y' promítne do bodu Y na obvodu čtverce. Body na obvodu čtverce se promítají do bodů kružnice a naopak, ty body si přesně odpovídají. Tedy má kružnice stejně mnoho bodů jako obvod čtverce, t. j. *kružnice má* $\aleph$ *bodů*. (Obr. 24.)

Podobně si můžeme vypočíst počet bodů jiných geometrických útvarů.

Povrch krychle se skládá ze šesti stěn, což jsou čtverce, z 12 hran (otevřených úseček) a osmi vrcholů. Má tedy $6 \, . \, \aleph + 12 \, . \, \aleph + 8$ bodů. A to je $\aleph$ bodů. *Tedy povrch krychle má* $\aleph$ *bodů.*

* *A povrch koule má také* $\aleph$ *bodů.* Možno totiž té kouli opsat krychli a ze středu povrch koule promítnout na povrch té krychle (jako u kružnice a čtverce). Vidíme, že povrch koule a povrch krychle mají stejně mnoho, tedy $\aleph$ bodů.

Povrch krychle, povrch koule, kružnice atd. měly $\aleph$ bodů bez ohledu na velikost.

Cvičení. Kolik bodů má plná krychle? ($\aleph^3 = \aleph$).

Kolik bodů má plná koule? (Také $\aleph$, neboť jí lze vepsat i opsat krychli. Má tedy aspoň i nejvýš tolik bodů co krychle.)

Kolik bodů má trojúhelník, plný kruh, obvod šestiúhelníka, povrch válce (promítej na krychli!), vnitřek válce (opiš a vepiš krychli!) (Vesměs $\aleph$ bodů.)

I,8. Nekonečných kardinálních čísel je mnoho. Dosud jsme poznali dvě nekonečná kardinální čísla, totiž $\aleph_0$ a $\aleph$. To první značilo počet přirozených čísel 1, 2, 3, ...; to druhé značilo řekněme počet bodů v rovině. Teď si všimněme, kolik je všech částí roviny; uvidíme, že jejich počet t bude větší než počet bodů v rovině, t. j. t bude větší než $\aleph$ a ovšem také než $\aleph_0$.

Především body roviny jsou též jejími částmi. Je tedy částí roviny aspoň tolik jako bodů roviny, t. j. $t \geqq \aleph$. Abychom dokázali, že $t > \aleph$, stačí tedy zjistit, že není pravda $t = \aleph$, t. j. že není možno části roviny očíslovat body roviny (tak aby nic nezbylo). Budeme to dokazovat zase nepřímo. Budeme (nesprávně) předpokládat, že všecky části roviny je možno očíslovat body roviny. Jde jen o to dokázat rozpor. Tu část roviny, která je očíslována bodem P, označíme $č(P)$. A teď přijde úsudek úplně obdobný nám známé methodě diagonály. Sestrojíme si jím jakousi část $č$ roviny. Ta část $č$ bude určena, budeme-li vědět o každém bodě roviny, jestli do $č$ patří nebo ne. Bude to takto. Je-li P bod roviny, pak se může stát, že P patří do $č(P)$; pak bod P do $č$ nedáme. Stane-li se však naopak, že P nepatří do $č(P)$, pak bod P dáme do $č$. Teď ale všecky části byly očíslovány body; tedy i naše $č$ byla očíslována jakýmsi bodem Q. Tedy $č = č(Q)$. A teď mohou nastat dva případy:

I. Q patří do $č(Q)$. Avšak body P, které patřily do $č(P)$, jsme do $č$ nedali; tedy ani Q jsme do $č$ nedali. Tedy Q přece jen do $č(Q)$ nepatří. V prvém případě jsme už kýžený rozpor dostali.

II. Q nepatří do $č(Q)$. Avšak body P, které nepatřily do $č(P)$, jsme do $č$ dali; tedy zvláště jsme do $č$ dali náš bod Q. Tedy Q přece jen do $č(Q)$ patří. I v tomto případě máme rozpor.

V každém případě, ať už Q do $č(Q)$ patří či ne, jsme dospěli k rozporu, který ukazuje nesprávnost našeho předpokladu, že by totiž bylo možno všecky části roviny očíslovat jejími body. Tedy to možno není, t. j. rovina má jiný počet částí než bodů, $\mathfrak{t}$ se nerovná $\aleph$. Ježto však $\mathfrak{t} \geqq \aleph$, je nutně $\mathfrak{t}$ větší než $\aleph$:

$$\aleph_0 < \aleph < \mathfrak{t}.$$

Tak jsme získali nové nekonečné kardinální číslo $\mathfrak{t}$, které je větší než obě nám již známá, totiž $\aleph_0$ a $\aleph$.

Způsob jak jsme postupovali je vlastně zase methoda diagonály. Vtip je úplně stejný jako při důkazu existence nespočetných množin. Čtenář, který má smysl pro abstrakci, si toho všimne.

Teď si můžeme sestrojit kardinální číslo, které je ještě větší než t. Postupujeme takto: Především si opatříme nějakou množinu M, která má t prvků. (Je to na př. množina všech částí roviny.) Je-li nyní u počet všech částí množiny M, pak $u > t$. Je to úplně stejné jako prve. Především prvky množiny M jsou také jejími částmi a tedy počet těch částí je aspoň roven počtu prvků, t. j. $u \geqq t$. Kdyby bylo $u = t$, mohli bychom zase části množiny M očíslovat jejími prvky; $\check{c}(p)$ budiž zase část očíslovaná prvkem p. A zase bychom si sestrojili $\check{c}$ a našli prvek množiny q u množiny M takový, že $\check{c} = \check{c}(q)$ a dospěli ke stejnému rozporu jako prve. Čtenář si to sám provede; stačí si prostě přečíst hořejší úvahu. (Místo roviny a jejích bodů přijde prostě množina M a její prvky.)

A úplně stejně bychom i k číslu u našli číslo ještě větší. A obecně:

Ke každému kardinálnímu číslu se dá najít číslo ještě větší.

Úvaha je vždycky úplně stejná. Možno to také říci takto: *Ke každé množině se dá najít množina, která má ještě víc prvků.*

Tedy je nekonečných kardinálních čísel velká spousta; k danému číslu lze vždy nacházet stále větší a větší a ke konci nedojdeme. Je jich rozhodně nekonečně mnoho. Je jich mnohem více než čísel konečných (těch je $\aleph_0$); o tom, jak strašně mnoho je nekonečných kardinálních čísel, se dočte čtenář na konci odst. 2,12 v druhé části. Bylo by sice lze to vyložit už tady, ale nechci čtenáři poplést představy, které si sotva ujasnil.

1,9. K čemu potřebujeme tak mnoho reálných čísel. Řekli jsme, že daleko nejdůležitější nekonečná čísla jsou $\aleph_0$ a $\aleph$. Proč je číslo $\aleph_0$ tak důležité? Prostě proto, že přirozená řada čísel je to hlavní nejen v matematice, ale ve všem myšlení vůbec; slavný matematik Kronecker řekl: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“ (Celá čísla stvořil Pán Bůh, všecko ostatní vymyslili lidé.) A ta tak důležitá přirozená řada čísel má $\aleph_0$ prvků, proto je často $\aleph_0$ tak důležité.

A teď prosím, racionálních čísel je také $\aleph_0$. A když počítáme, tak se vždy nutně omezíme na konečný počet cifer za desetinnou čárkou; místo $\sqrt{2}$ píšeme jen $+1{,}4$ nebo $+1{,}41$ nebo $+1{,}414\ldots$, místo π píšeme $+3{,}14$ nebo $+3{,}14159$ a podobně, prostě z technických důvodů, ač víme, že je to jen přibližné. Prakticky počítáme jen s racionálními čísly, kterých je $\aleph_0$. K čemu tedy zavádět i ostatní, neracionální, reálná čísla? Nač si zbytečně počet čísel zvyšovat na $\aleph$?

Má to mnoho velmi závažných důvodů, proč je to zcela nezbytné. Především má být věda objektivní, t. j. vyhovovat všem. Není vhodné, aby každý měl svou zvláštní matematiku. Může, pravda, ten, kdo počítá jen na tři cifry, místo $\sqrt{2}$ vzít 1,41 a místo π vzít $+3{,}14$. To ale už nevyhovuje tomu, kdo počítá přesně na čtyři cifry. Je pravda, že v počítání nutno se vždy omezit na určitou přesnost. Ale objektivně všem vyhovující matematika musí řešit otázky pro každého, ať si přesnost počítání jakkoliv předepíše. Řekněme, že by poloměr nějaké kružnice byl $+5$ (pro jednoduchost přesně). Pak její obvod pro toho, kdo počítá přesně na tři cifry je $+31{,}4$.

Pro toho, kdo počítá přesně na šest cifer, je ten obvod $+31{,}4159$ atd. Matematika ale říká, že ten obvod je $(+2\pi)\,.\,(+5)$. Tento výrok znamená: Podle jakýchsi pravidel se čísla $+2\pi$ a $+5$ znásobí, výsledek je jakési reálné číslo. Ten kdo chce počítat na tři cifry, vezme z toho čísla první tři cifry a to, co mu vyjde, bude pro něho hledaný obvod; vyjde mu $+31{,}4$. Ten, kdo počítá na šest cifer, vezme číslo $(+2\pi)\,.\,(+5)$ na šest cifer a to, co mu vyjde, bude pro něho hledaný obvod; vyjde mu $+31{,}4159$. Vzorec $(+2\pi)\,.\,(+5)$ vyhoví každému, ať si počítá na kolik chce cifer. Ty příslušné cifry se dokonce dají vypočíst, aniž bychom hledali ostatní pro nás nepotřebné cifry; dokonce už v daných číslech $+2\pi$ a $+5$ se omezíme na vhodný počet cifer; v našem případě na tolik cifer, na kolik chceme mít přesný výsledek. Někdy je však nutno znát daná čísla přesněji, na více cifer než na kolik chceme mít přesný výsledek.

Reálná čísla s nekonečnými (a zcela nepravidelnými jako u $\sqrt{2}$ a π) rozvoji nám vystihují racionální čísla, s nimiž prakticky počítáme, vždy, ať počítáme sebe přesněji. Místo abychom říkali: obvod naší kružnice je $+31{,}4$ při počítání na tři místa, $+31{,}4159$ při počítání na šest míst atd., místo abychom pro každý počet cifer musili udávat zvlášť výsledek, řekneme jednoduše, že náš obvod je roven jakémusi reálnému číslu $(+2\pi) \cdot (+5)$. A ten jediný výrok už vše vystihuje.

K tomu tedy zavádí se reálná čísla, jichž je $\aleph$.

A ještě je jiný důvod, proč je zcela nutno zabývat se množinami, které mají více než $\aleph_0$ prvků. Vynechme z osy číselné jeden bod (na př. 0). Pak na vynechaném místě vznikne t. zv. *mezera*. To znamená: naše přímka se rozpadne ve dva kusy K_1 a K_2 (to, co je před vynechaným bodem, a to, co je za ním), při tom oba ty kusy jsou otevřené. To znamená, že nemají žádných koncových bodů. Skutečně v prvním z těch kusů K_1 (což je množina všech záporných čísel) zvolme libovolně bod p; máme ukázat, že to není koncový bod prvního kusu. Ten bod je jakési záporné číslo. Zvětšíme-li o jednu cifru před desetinnou čárkou, dostaneme číslo, které leží před p. Tedy není p levým koncovým bodem. A mezi p a 0 je, jak víme, také nějaké číslo q a to q (protože je před 0) patří do našeho kusu K_1 a je za p. Tedy p není ani pravým koncovým bodem našeho kusu K_1. Stejně je tomu s kusem K_2, ani ten nemá koncových bodů. Při tom celý jeden kus (totiž K_1) je před druhým kusem (před K_2). Tomu právě říkáme, že mezi K_1 a K_2 je mezera.

Přímka je uspořádaná množina (když ji probíráme v určitém směru). V geometrii se žádá, aby přímka byla souvislá, abychom se spojitě dostali na ní z jednoho bodu do druhého. To znamená dvě věci. Především na ní nesmějí být t. zv. *skoky* (obr. 25):

Obr. 25.

t. j. mezi každými dvěma body musí ležet nějaké body, přímka musí být hustá. Na to by stačilo ovšem $\aleph_0$ bodů. Neboť jsme viděli, že racionálních čísel je jenom $\aleph_0$ a přes to jsou hustá, mezi každými dvěma leží zase nějaká. Za druhé však žádáme, aby na přímce nebylo mezer. A k tomu, abychom splnili oba dva ty požadavky, už nikterak nevystačíme s $\aleph_0$ body, jak si dokážeme v druhé části. K tomu, aby přímka byla souvislá, je naprosto nutno, aby měla více než $\aleph_0$ bodů. Dokonce nesmí mít o nic méně než $\aleph$ bodů. Stejně je tomu s rovinou a prostorem; kdyby měly méně než $\aleph$ bodů, nebylo by možno dostat se spojitě z jednoho bodu do druhého, což by se zcela příčilo našim geometrickým představám.

Viděli jsme tedy, že s číslem $\aleph_0$ nevystačíme ani v aritmetice ani v geometrii. Ale s číslem $\aleph$ už úplně vystačíme: reálných čísel je $\aleph$, bodů v prostoru je $\aleph$. Ostatně si aritmetika a geometrie přesně odpovídají; přímka a osa číselná je v podstatě totéž. (To je základní myšlenka analytické geometrie.)

1,10. Co jsou to t. zv. veličiny nekonečně malé. Čísla $\aleph_0$, $\aleph$ a pod., o kterých jsme dosud mluvili, jsou nekonečně veliká. Mnohdy se slyší, že derivace je podíl nekonečně malých veličin, že integrál je součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin a pod. Zvláště dříve byly tyto fráze v oblibě. Takové výroky mají tu nectnost, že u laiků vzbuzují nesprávné představy a někdy vedou i k chybnému počítání. Je chyba si myslit, že by derivace skutečně byla podílem jakýchsi „čísel“. Ty fráze mají smysl spíše obrazný. Jak jest jim rozumět, vyložím pro úplnost v této kapitole.

Myslím si, že se automobil pohybuje po silnici. Silnice má v různých místech různé stoupání; automobil jede do kopce pomaleji. Pohyb automobilu není rovnoměrný. Průměrnou rychlost automobilu v jisté době, na př. mezi 9. a 11. hodinou vypočteme tak, že v té době ujetou dráhu dělíme příslušnou dobou. Ujel-li automobil od 9. do 11. hodin 72 km, je jeho průměrná rychlost za tu dobu 72 km : 2 hod. = 36 km za hod. Teď počítejme jeho průměrnou rychlost mezi 9. a 10. hodinou. Ujel-li v té době 37,5 km, je to průměrná rychlost 37,5 km : 1 hod. = 37,5 km za hod. Mezi 9 hod. 15 min. a 9 hod. 45 min. ujel náš automobil třebas 18,5 km. Průměrná jeho rychlost v té půlhodině je 18,5 km : $\frac{1}{2}$ hod. = 37 km za hodinu.

Teď se ptejme, jak rychle jel náš automobil o půl desáté. Jak to zjistíme? Změříme dráhu za jistou dobu kolem půl desáté a dělíme ji tou dobou. Může nám vyjít ovšem leccos. Dělili jsme to třikráte a vyšlo nám pokaždé něco jiného; po prvé 36, po druhé 37,5, po třetí 37 km za hodinu. To proto, že jsme brali ty doby kolem půl desáté různé a automobil jel nerovnoměrně. Ta první doba byla 2 hodiny, to je příliš mnoho. Poslední výsledek je asi nejspolehlivější. Budou-li různí lidé měřit tu rychlost automobilu o půl desáté, vyjde jim (i když předpokládáme theoreticky naprostou přesnost měření) každému něco jiného, prostě proto, že měřili dráhu za různé doby. Ale ty výsledky všecky mají tu pozoruhodnou vlastnost, že se „hromadí" všecky kolem jistého čísla, více či méně se od něho lišíce. To číslo je t. zv. *okamžitá rychlost* našeho automobilu o půl desáté. Ta okamžitá rychlost sice obecně nikomu z měření nevyjde, ale všecky výsledky měření aproximuje. Ať si předepíši sebe menší přípustné chyby, řekněme menší než ε, které si libovolně předem zvolím, vždycky se bude naměřená průměrná rychlost od té okamžité rychlosti lišit o méně než ε, jen když časové intervaly kolem půl desáté volím dost krátké, řekneme kratší než δ. Čím větší přesnost vyžaduji, t. j. čím menší ε předepíši, tím ovšem musím volit kratší časové intervaly, menší δ.

To právě, co jsem popsal, se vyjadřuje výrokem: okamžitá rychlost je „nekonečně krátká dráha dělená příslušnou nekonečně krátkou dobou“. Ale ta okamžitá rychlost není vůbec žádný podíl. Průměrné rychlosti v časových intervalech kolem půl desáté jsou aproximovány právě tou okamžitou rychlostí a to s libovolnou přesností, jen když ty intervaly často volíme dost krátké. A výrokem o podílu nekonečně malých čísel se má právě vyjádřit, že se aproximují skutečné podíly a to s přesností libovolně se zvyšující, když ty intervaly časové a tedy i příslušné dráhy se volí kratší a kratší, aniž bychom kdy dosáhli naprosté přesnosti. Naprosté přesnosti bychom dosáhli (t. j. chybu ε stlačili na nulu), kdyby bylo možno i ty intervaly časové a příslušné dráhy stlačit na nulu, což ovšem nejde: podíl dvou nul není nic rozumného. Ta představa právě, že okamžitá rychlost je to, co bychom v tomto nemožném případě měli dostat, vedla k tomu způsobu vyjadřování o podílu nekonečně malé dráhy a nekonečně krátkého času.

Vděčíme Newtonovi a Leibnizovi za methodu, která dovoluje vypočíst takové „podíly nekonečně malých čísel“. Je to t. zv. *počet diferenciální*.

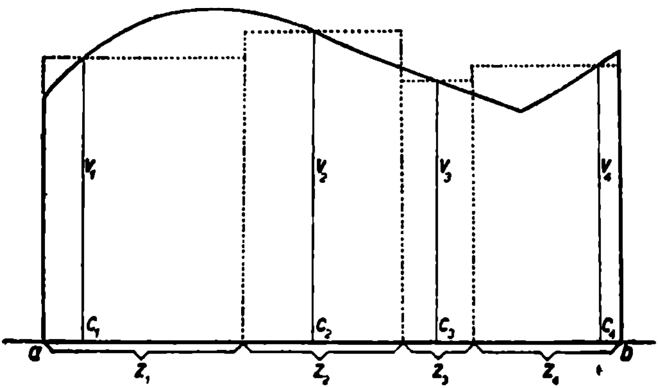
Každému číslu t přiřaďme číslo $s(t)$; na př. může t značit čas, $s(t)$ vzdálenost našeho automobilu od pevného bodu na silnici (měřeno po silnici). Mezi okamžiky t_1 a t_2 uplynula doba $t_2 - t_1$ a ujetá dráha jest $s(t_2) - s(t_1)$. Průměrná rychlost mezi okamžiky t_1 a t_2 jest

$$c_{t_1, t_2} = [s(t_2) - s(t_1)] : (t_2 - t_1).$$

Když teď v je okamžitá rychlost v okamžiku t_1, pak, ať si zvolím ε sebe menší, vždy najdu δ takové, že c_{t_1, t_2} se rovná v s chybou menší než ε, jen když jsem okamžiky t_1 a t_2 volil k t_0 blíže než o δ.

Ve fysice i v technické praxi se vyskytují na každém řádku příklady podobného druhu, kde t obecně nemusí být čas a s nemusí být vzdálenost. Číslo v, jež určíme, není ovšem obecně rychlost; v se nazývá *derivace* veličiny s podle t v „bodě“ t_0. Je tedy okamžitá rychlost v čase t_0 rovna derivaci dráhy s podle času t v okamžiku t_0.

Derivace nejsou žádné podíly; jsou podíly jen aproximovány. A pravidla pro počítání s derivacemi mnohdy jsou obdobná s příslušnými pravidly pro podíly. Nesmíme se však tím dát svést a o každém takovém pravidle, chceme-li ho užívat, musíme *vědět* zvlášť, že pro derivace platí.



Obr. 26.

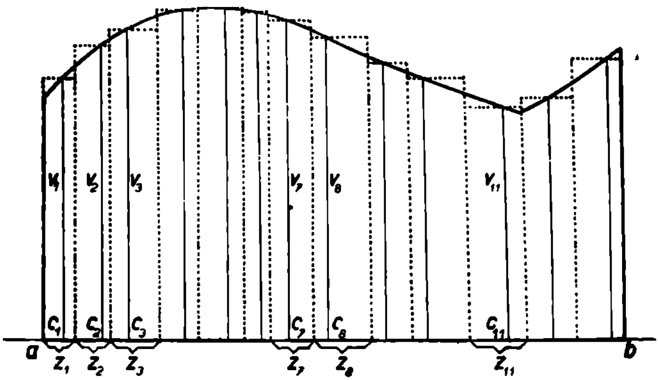
Teď zas něco jiného. Počítejme obsah plochy ohraničené silně vytaženým obrysem. (Obr. 26.)

Obsah plochy je přibližně roven obsahu plochy tečkovaných obdélníků. Obsah prvního z nich je základna z_1 krát výška v_1, obsah druhého je $z_2 . v_2$ atd. Celkem je ten přibližný obsah roven součtu všech obsahů $z_i v_i$, t. j.

$$\Sigma z_i v_i.$$

Teď místo na čtyři dílky můžeme rozdělit úsečku ab na 13 dílků, vesměs třeba kratších než byly předchozí. Zase si v těch dílcích zvolíme nějak body $c_1, c_2, \ldots$ a sestrojíme obdélníky jako prve. (Obr. 27.)

Vyjde nám zase jiný přibližný obsah. Ten závisí na počtu dílků, na tom, jaké jsou, na tom, kde volíme body $c_1, c_2, \ldots$ Ale co pak je to skutečný obsah našeho obrazce? Je to takové číslo P, které je všemi těmi přibližnými výsledky aproximováno. Ať přípustná chyba je jakkoliv malá, menší než předem zvolené ε, vždycky se nám podaří P aproximovat



Obr. 27.

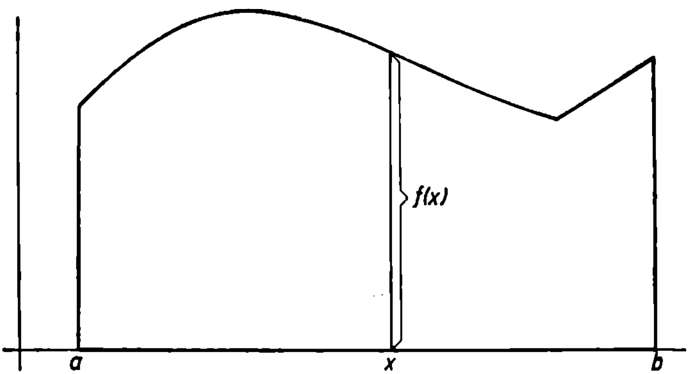
s chybou menší než ε těmi přibližnými plochami $\Sigma z_i v_i$, které mají dílky z_i, dost malé, menší než jakési δ. Čím jsou dílky z_i menší, tím je jich ovšem víc. Přesný výsledek ale nikdy nedostaneme, obsah P se žádnému z těch součtů nerovná. Je však aproximován tím lépe, čím jsou dílky z_i menší (a čím je jich tedy víc).

Říkává se, že obsah P je součet nekonečně mnoha nekonečně malých plošek $z_i v_i$. Tím se chce říci, že aproximace by byla přesná (t. j. chyba sražena na nulu), kdyby dílky byly přímo nulové a bylo jich za to nekonečně mnoho; ovšem součet nekonečně mnoha nul, myšlený v této frázi, nic rozumného není.

Je-li $f(x)$ výška křivky v bodě x (obr. 28); pak na př. $v_i = f(c_i)$ a naše součty $\Sigma z_i v_i$ jsou $\Sigma f(c_i) \, . \, z_i$. Známe-li $f(x)$ v každém bodě x, známe naši křivku. To číslo, které součty $\Sigma f(c_i) \, z_i$ aproximují, t. j. náš obsah P, se označuje

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x,$$

což se čte „integrál od a do b funkce $f(x)$“. Integrál je apro-



Obr. 28.

ximován součty $\Sigma f(c_i) \, z_i$, sám však součtem není. Platí pro něj některá pravidla jako pro součty; avšak mnohá pravidla platná pro součty jsou pro integrály prostě nesprávná. Integrální počet pochází též od Newtona a Leibnize.

Není úkolem této knížky se tím podrobněji zabývat. Upozorňuji znovu na to, že s derivacemi a integrály nesmíme počítat jako s podíly a součty, pokud nám o užívaných pravidlech není o každém zvlášť známo, že pro derivace a integrály platí.

Poznámka ke konci první části. Ještě s jiného druhu „nekonečnem" se setkáváme. My jsme si všímali nekonečného počtu prvků množiny. Odedávna však lidé uvažovali o tom, je-li prostor, v němž žijí, konečný či nekonečný. Při tom se nikterak neptali snad na to, kolik má bodů; je předem jasno, že má nekonečně mnoho bodů. Otázka po nekonečnosti prostoru se týká něčeho jiného, totiž jeho *rozlohy*. Prostor je nekonečný, když vzdálenosti jeho bodů jsou jakkoliv veliké. Zvolím-li si libovolný bod A a libovolně velikou délku δ, pak se vždycky dá najít takový bod B, který je od A vzdálen o délku ještě větší než δ. To se tedy míní nekonečností prostoru. Prostor eukleidovský, kterým se zabýváme na školách, je nekonečný. Moderní fysika však leckdy měří vzdálenosti takovým způsobem, že se náš prostor „zkroutí", přestane být eukleidovský. Při měření běžných „malých" délek do pouhých milionů kilometrů se ta nová míra liší od eukleidovské neuvěřitelně málo. „Zakřivení" se objeví až při větších vzdálenostech. A jaký je ten zkroucený prostor, zda je konečný nebo nekonečný, je věcí měření a ne úvah, jako jsou věcí měření rozměry naší ložnice. Abstraktní theorie neopřená o měření nám nemůže říci nic o rozměrech konkretní ložnice, ani o rozměrech konkretního prostoru, v němž žijeme.

Zakřivení trojrozměrného prostoru lze si snad těžko představit. Ale naše představa je to poslední, čím lze ověřovat pravdu. Je zcela myslitelný trojrozměrný prostor sám o sobě uzavřený asi tak, jako ve dvou dimensích je sám o sobě uzavřen povrch koule. A tak zakřivený prostor je konečný (a nemá okraje). Zakřivení a rozměry prostoru se počítají podle rozložení hmoty, které nutno zjišťovat měřením. Definitivně uspokojivou odpověď, jak velký je náš prostor, dosud nemáme a dohady nepopularisuji.

DRUHÁ ČÁST

PŘEHLED DRUHÉ ČÁSTI

Tento přehled má podat čtenáři myšlenkový běh druhé části. U formálně psaných úvah se laikům stává, že vidí sice, že vše klape, dovedou si vše zkontrolovat, ale uniká jim souvislost. Proto nechť si čtenář pročte tento přehled a před čtením každého odstavce druhé části nechť si z přehledu zopakuje vše, co se týká odstavců dřívějších i toho, který hodlá číst.

Po zavedení základních pojmů a označení v odst. 2,1 definují v odst. 2,2 t. zv. *čítání* množin. Některé množiny, t. zv. *spočetné*, je možno čítat po jednom prvku tak, že vycházejíce od jakéhosi prvního prvku čítáme dál a dál nové a nové prvky, až se celá množina vyčerpá. Takovým čítáním se množina uspořádá a to tak, že prvek později čítaný je za prvkem čítaným dříve: věta 2,1. To uspořádání je velmi důležité a je studováno v odst. 2,2.

Při čítání dané množiny se mohou stát dvě věci: Buďto dojdeme k poslednímu prvku anebo nikdy k žádnému poslednímu prvku nedojdeme. V prvním případě říkáme, že naše množina je *konečná*, ve druhém případě je *nekonečná*. Je arciť možno danou množinu čítat všelijak, ale podle věty 4,2 dojdeme-li při *jednom* čítání ke konci, stane se tak při každém jiném čítání také. Při rozhodování, je-li množina konečná, tedy nezáleží nikterak na tom, které čítání jsme si vyvolili.

Odstavec 2,4 obsahuje základní věty o konečných množinách.

Množina N přirozených čísel je nekonečná spočetná množina. Je-li M konečná množina (neprázdná), pak se M dá očíslovat jistou množinou N(n). [N(n) je množina všech přirozených čísel až do n včetně.] To n je zcela určeno množinou M a je to počet prvků množiny M. Je-li M nekonečná spočetná, pak se dá očíslovat množinou N, t. j. všemi přirozenými čísly. Je-li dáno jisté čítání množiny M, pak je tím určeno zcela určité očíslování množiny M množinou $N(n)$ či množinou N: věta 5,3. („Čítáním“ žáků ve třídě podle abecedy je už dáno očíslování v katalogu. „Čítáním“ podle velikosti jsou už dána pořadová čísla v tělocviku a pod.) Dále jsou v odst. 2,5 zavedeny početní úkony s přirozenými čísly.

Odstavec 2,6 obsahuje základní věty o spočetných množinách. Na př. součet a kartézský součin spočetných množin je spočetná množina; srovnej odst. 1 a 3 první části.

V sedmém odstavci zavádím kladné zlomky, t. j. kladná racionální čísla. Je jich spočetně mnoho a jsou hustě uspořádána: mezi dvěma kladnými zlomky je vždy ještě jiný kladný zlomek a před a za každým kladným zlomkem je vždy ještě nějaký jiný kladný zlomek. (Srovnej s odst. 1,4.) Mám-li nyní zcela libovolnou spočetnou množinu A, která je uspořádána hustě, pak podle věty 7,3 to vlastně není zase nic jiného než množina kladných zlomků. Prvky množiny A odpovídají úplně kladným zlomkům tak, že se i uspořádání úplně zachová.

Avšak v množině kladných zlomků jsou mezery. Zaplněním těch mezer v odst. 2,8 dostaneme všecka kladná čísla; mezery jsou zaplněny čísly irracionálními. (Srovnej odst. 2,9 první části.) Množina kladných čísel už nemá mezer a obsahuje hustou spočetnou část (totiž kladné zlomky); říkáme, že je to *kontinuum*. A teď přijde důležitá věta 8,5: Je v podstatě jediné kontinuum. Každá dvě kontinua jsou si totiž podobná. A dokonce víc platí. Každé z daných kontinuí C_1 a C_2 obsahuje hustou spočetnou část A_1 a A_2. Teď si část A_1 očíslujeme pomocí části A_2 tak, aby uspořádání množin A_1 a A_2 si při tom očíslování odpovídalo. Pak jsme tím určili *automaticky* jedno zcela určité očíslování celé množiny C_1 množinou C_2 takové, že si uspořádání obou množin zase přesně odpovídají a při tom prvky množiny A_1 jsou očíslovány tak jako dříve (množinou A_2). Pamatujme si tedy, že chceme-li očíslovat kontinuum C_1 kontinuem C_2 (aby se uspořádání zachovalo), stačí se omezit na číslování jakýchsi hustých spočetných částí. To je základ pro očíslování kladných čísel pomocí desetinných rozvojů.

Zavedouce totiž v odst. 2,9 arabské číslice pro označování přirozených čísel, definujeme v odst. 2,10 kladné číslice; na př. číslice pro číslo π začíná 3,14159... Ty číslice tvoří kontinuum C_2. A máme jimi očíslovat kladná čísla, která tvoří kontinuum C_1. K tomu *stačí* očíslovat jistou hustou spočetnou část kontinua C_1 pomocí jisté husté spočetné části A_2 kontinua C_2. A jak to zařídíme, je nasnadě. Je-li d rovno desíti, pak A_1 budou čísla $\frac{a}{d^n}$ a A_2 znaky mající za desetinnou čárkou skoro samé nuly. A na př. číslo $\frac{365}{d^3}$ bude očíslováno znakem 0,365000..., číslo $\frac{87006}{d^2}$ znakem 870,06000 ..., číslo $\frac{30705}{d^7}$ znakem 0,0030705000... Pak už sama sebou jsou všecka kladná čísla očíslována kladnými znaky.

V odst. 2,11 jsou definována reálná čísla (i záporná). Početní úkony jsou zavedeny přímo jen pro racionální čísla. A úkony početní pro reálná čísla se definují pomocí nich. Máme-li na př. sečíst reálná čísla a a b, pak si počínáme takto: Součet $a + b$ nepočítáme přesně. Počítejme s chybou menší než ε, řekněme. To uděláme tak, že si místo a a b vezmeme *racionální* čísla a' a b' a počítáme $a' + b'$. Když čísla a' a b' byla zvolena dostatečně blízká číslům a a b (když se od nich lišila o méně než vhodné δ) pak $a' + b'$ nám aproximuje hledaný součet $a + b$ dostatečně přesně, s chybou menší než ε.

Součet $a + b$ je tím zcela přesně *definován* (cvičení 11,27): žádné jiné číslo se nám nepodaří součty aproximovat *libovolně* přesně. Jedině při počítání součtu $a + b$ možno přípustnou chybu ε zvolit *zcela libovolně malou*. Tak se skutečně sečítá: čísla zaokrouhlíme na vhodný počet cifer a výsledek vyjde s požadovanou přesností (srovnej odst. 1,9).

Odst. 2,12 obsahuje základní věty o kardinálních číslech, najmě v první části chybějící důkaz věty: Je-li $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b} < \aleph$, pak také $\mathfrak{a} < \aleph$. Z ní plyne: máme-li dokazovat, že množina A má $\mathfrak{a}$ prvků, stačí dokázat dvě věci a to, že A má aspoň $\mathfrak{a}$ prvků a za druhé, že A má nejvýše $\mathfrak{a}$ prvků (t. j. že nemá víc než $\mathfrak{a}$ prvků). Tím způsobem jsme počítali, kolik mají množiny prvků, většinou už v první části.

Každá uspořádaná spojitá množina (bez mezer a bez skoků) obsahuje podle cvičení 8,20 kontinuum. Kontinuum má ale $\aleph$ bodů a tedy každá spojitá množina musí mít aspoň $\aleph$ bodů (cvičení 12,19). Srovnej odst. 9 první části.

Zvláštní postavení má dosud přehlížený odst. 2,3. Obsahuje t. zv. *princip indukce*. Má-li se něco definovat pro všecka přirozená čísla, *stačí* to umět přímo definovat pro jedničku a pak pro každé jiné číslo už jenom za předpokladu, že jsme definici pro všecka menší čísla už provedli. Důležitost toho principu se znova a znova ukazuje v dalších kapitolách. Je to jeden z hlavních principů v matematice.

2,1. Základní pojmy. Základní pojem je *množina*.

Patří-li věc a do množiny A, t. j. je-li a prvek množiny A, píšeme $a \in$ A. Není-li x prvek množiny A, píšeme x non $\in$ A. Dvě množiny A a B jsou si rovny: A = B, když a jen když mají stejné prvky, t. j. z $x \in$ A plyne $x \in$ B a naopak z $x \in$ B plyne $x \in$ A. Jestliže z $x \in$ A plyne $x \in$ B (ať už z $x \in$ B plyne $x \in$ A nebo ne), říkáme, že A je *část* (Teilmenge, sous-ensemble nebo partie, subset) množiny B; píšeme A $\subset$ B. Zvláště A $\subset$ A. Je-li A $\subset$ B a při tom A $\neq$ B (t. j. nikoliv A = B), říkáme, že A je *pravá část* (echte Teilmenge, vrai sous-ensemble n. partie aliquote) množiny B.

Cvičení 1,1. Je-li A $\subset$ B a B $\subset$ C, pak také A $\subset$ C.

1,2. A = B, když a jen když A $\subset$ B a zároveň B $\subset$ A.

Sjednocení čili *součet* A + B množin A a B je množina takto definovaná: $x \in$ A + B znamená, že buďto $x \in$ A anebo

$x \in B$ (anebo obojí zároveň). Obecně nechť $\mathfrak{J}$ je množina, jejíž prvky jsou množiny.

Abychom neříkali „množina množin", říkáme, že $\mathfrak{J}$ je *systém* nebo *třída* množin.

Pak *sjednocení* čili *součet* třídy $\mathfrak{J}$ je množina $\Sigma(\mathfrak{J})$ všech věcí, které patří do některé množiny, po př. do některých množin z třídy $\mathfrak{J}$.

Průnik $A \,.\, B$ čili prostě AB množin A a B je množina takto definovaná: $x \in AB$ znamená, že $x \in A$ a zároveň $x \in B$. Obecně *průnik* $\Pi(\mathfrak{J})$ třídy $\mathfrak{J}$ je množina těch věcí, které patří zároveň do všech množin třídy $\mathfrak{J}$. $A - B$ je množina těch věcí, které patří do A a při tom nepatří do B. $\{a\}$ je množina, jejíž jediný prvek je a, t. j. $x \in \{a\}$ znamená $x = a$.

$\emptyset$ značí t. zv. *prázdnou* množinu, která nemá vůbec prvků. Je-li $AB = \emptyset$, jsou množiny A a B *disjunktní* [(elemente) fremd, disjoint, disjoint n. disjoined n. disjunct].

Cvičení 1,3. Dokažte

$$
\begin{aligned}
(A + B) + C &= A + (B + C),\\
A + B &= B + A,\\
(AB)\,C &= A\,(BC),\\
AB &= BA,\\
A\,(B + C) &= AB + AC,\\
A + BC &= (A + B)\,(A + C).
\end{aligned}
$$

[Na vzor dokáži poslední rovnici. Máme dokázat dvě věci. Za prvé, že každý prvek levé strany je prvkem pravé strany. Za druhé, že každý prvek pravé strany je prvkem levé strany.

Buď tedy za prvé $x \in A + BC$. Pak buďto $x \in A$ anebo $x \in BC$. V případě $x \in A$ jest $x \in A + B$, jakož i $x \in A + C$, tedy vskutku jest $x \in (A + B)(A + C)$. V případě $x \in BC$ jest $x \in B$ a tedy $x \in A + B$ a zároveň je $x \in C$ a tedy $x \in A + {}$ $+ C$, tedy zase $x \in (A + B)(A + C)$.

Nechť za druhé $x \in (A + B)(A + C)$. Pak buďto $x \in A$, v kterémžto případě $x \in A + BC$. Anebo x non $\in A$. Pak z $x \in \mathsf{A} + \mathsf{B}$ plyne $x \in \mathsf{B}$ a ovšem z $x \in \mathsf{A} + \mathsf{C}$ plyne $x \in \mathsf{C}$, tedy $x \in \mathsf{BC}$, tedy opět $x \in \mathsf{A} + \mathsf{BC}$.]

Dále dokažte: Jsou-li $\mathfrak{J}_1$ a $\mathfrak{J}_2$ třídy množin, pak

$$\Sigma(\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2) = \Sigma(\mathfrak{J}_1) + \Sigma(\mathfrak{J}_2),$$
$$\Sigma\{\mathsf{A}\} = \mathsf{A}.$$

($\{\mathsf{A}\}$ je třída obsahující jenom množinu A.)

Další základní pojem je *uspořádaná dvojice*, stručně *pár* $\{a; b\}$. Má *první člen* a a druhý člen b. Rovnice $\{a; b\} = \{c; d\}$ značí, že $a = c$ a zároveň $b = d$.

Cvičení 1,4. Je-li $a \neq b$ (t. j. nikoliv $a = b$), pak $\{a; b\} \neq \{b; a\}$. Musí se tedy páry $\{a; b\}$ a $\{b; a\}$ dobře rozeznávat.

Množinu všech párů $\{a; b\}$, při čemž $a \in A$ a $b \in B$, označujeme $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$. (Neplést s $\mathsf{A} \,.\, \mathsf{B} = \mathsf{AB}$!) Je to t. zv. *kartézský* součin množin A a B.

Cvičení 1,5.
$$\mathsf{A} \times (\mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{A} \times \mathsf{B} + \mathsf{A} \times \mathsf{C}$$
$$\mathsf{A} \times (\mathsf{BC}) = (\mathsf{A} \times \mathsf{B})\,(\mathsf{A} \times \mathsf{C})$$
$$\mathsf{A} \times (\mathsf{B} - \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \times \mathsf{B}) - (\mathsf{A} \times \mathsf{C}).$$

Další základní pojem je *zobrazení* množiny A do množiny B (in, dans, onto a part of B). Takové zobrazení f je pravidlo, které *každému* $a \in \mathsf{A}$ přiřazuje zcela určitý prvek $f(a)$ množiny B. $f(\mathsf{C})$ označujeme množinu všech prvků $f(c)$, kde $c \in \mathsf{AC}$. Je-li $f(\mathsf{A}) = \mathsf{B}$, je f zobrazení množiny A *na* B. Jestliže f různým prvkům množiny A přiřazuje různé prvky množiny B t. j. když ze vztahů $a_1 \in \mathsf{A}$, $a_2 \in \mathsf{A}$, $a_1 \neq a_2$ plyne $f(a_1) \neq f(a_2)$, říkáme, že zobrazení f je *prosté n. jednoznačné*. Příkladem prostého zobrazení f množiny A na A je t. zv. zobrazení *identické*, které každému $a \in \mathsf{A}$ přiřazuje zase $a : f(a) = a$.

Cvičení 1,6. $f(\mathsf{C}) = f(\mathsf{AC})$.

1,7. f je zobrazení množiny A na $f(\mathsf{A})$.

1,8. f je zobrazení množiny A na B, když a jen když každý prvek množiny B je přiřazen některému prvku (případně některým prvkům) množiny A.

1,9. f je prosté, když a jen když každý prvek z $f(A)$ je přiřazen jednomu jedinému prvku z A.

Je-li f prosté zobrazení množiny A na B, pak podle 1,9 každý prvek b množiny B je přiřazen jednomu jedinému prvku množiny $A : b = f(a)$. Ten prvek a označujeme $f^{-1}(b)$.

Cvičení 1,10. f^{-1} je prosté zobrazení množiny B na A.

Je to t. zv. *zobrazení inversní* k f.

[* Sinus je zobrazení množiny A všech úhlů do množiny R všech (reálných) čísel, nikoliv však *na* množinu R. Neboť (je-li $f(x) = \sin x$) $f(A)$ není rovna R, $f(A)$ obsahuje jen čísla mezi -1 a $+1$ (včetně). Sinus není funkce prostá, neboť na př. $0° \neq 180°$ a přesto $\sin 0° = \sin 180°$ (obojí je 0).

Je-li R množina všech reálných čísel, pak pro $f(x) = x^2$ jest f zobrazení množiny R do R, nikoliv na R, neboť záporná čísla do $f(R)$ nepatří. Není to zobrazení prosté, neboť $-5 \neq 5$ a přesto $f(-5) = f(+5)$ (obojí je 25).

Je-li však P množina *kladných* čísel, $f(x) = x^2$, pak f je zobrazení množiny P na P. Neboť každé kladné číslo je druhou mocninou jistého kladného čísla (své druhé odmocniny). A je to zobrazení prosté, neboť dvě různá kladná čísla mají různé druhé mocniny (to větší z nich má větší druhou mocninu). Inversní zobrazení f^{-1} k našemu f je druhá odmocnina (se znaménkem $+$), $f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$.

Nechť f je zobrazení množiny R všech reálných čísel do množiny R, $f(x) = x^3$. Pak f je zobrazení množiny R na R a to prosté. Jest $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.]

Nechť f je zobrazení množiny A do B a nechť g je zobrazení množiny B do C. Je-li nyní dán libovolný prvek a množiny A, pak mu je přiřazen v množině B určitý prvek $f(a) = b$. A tomu prvku B je zase přiřazen určitý prvek $g(b) = c$ množiny C. Tím způsobem jsme ke každému prvku a množiny A našli určitý prvek c množiny C. Označíme-li $c = h(a)$, pak h

je zobrazení množiny A do C; říkáme mu zobrazení složené z f a g a označujeme je gf.

[* Na př. sinus úhlů tupých je zobrazení množiny těchto úhlů do množiny čísel a logaritmus je zobrazení množiny čísel do množiny čísel (logaritmus čísla je zase jakési číslo) do které jsme přidali symbol $-\infty$ (neboť $\log 0 = -\infty$). Z nich složené zobrazení log sin je zobrazení množiny tupých úhlů do množiny čísel doplněné symbolem $-\infty$. A vypočte se tak, že k danému tupému úhlu se najde sinus a k tomu sinu logaritmus.]

Cvičení 1,11. Zobrazení složené z prostých je prosté.

1,12. Je-li f zobrazení množiny A na B a g zobrazení množiny B na C, pak gf je zobrazení množiny A na C.

1,13. Je-li f prosté, pak $f^{-1}f$ je identické. Říkáme, že A je *ekvivalentní k* B (nebo s B), když je možno udati nějaké prosté zobrazení množiny A na B; píšeme $A \sim B$.

1,14. Užívajíce postupně zobrazení identického, inversního a složeného, dokažte:

(reflexivita) $A \sim A$;

(symetrie) je-li $A \sim B$, pak také $B \sim A$;

(transitivita) je-li $A \sim B$ a zároveň $B \sim C$, pak také $A \sim C$.

Označme B^A množinu všech zobrazení množiny A do B.

1,15. Za předpokladu, že $A \sim A'$ a $B \sim B'$, dokažte: Je-li $AB = \emptyset$ a $A'B' = \emptyset$, pak $A + B \sim A' + B'$, $A \times B \sim A' \times B'$, $B^A \sim B'^{A'}$.

1,16. $(A + B) + C \sim A + (B + C)$; mimo to z $AB = AC = BC = \emptyset$ plyne $(A + B)\, C = \emptyset$, jakož i $A\,(B + C) = \emptyset$.

1,17. $A + B \sim B + A$; mimo to z $AB = \emptyset$ plyne $BA = \emptyset$.

1,18. $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

1,19. $A \times B \sim B \times A$.

1,20. $\{a\} \times A \sim A$.

1,21. $A \times (B + C) \sim (A \times B) + (A \times C)$; mimo to z $BC = \emptyset$ plyne $(A \times B)\,(A \times C) = \emptyset$.

1,22. Je-li $AB = \emptyset$, pak $C^{A+B} \sim C^A \times C^B$.

1,23. $C^{B \times A} \sim (C^B)^A$.

1,24. $C^{\{a\}} \sim C$.

[Na vzor naznačím důkaz pro 1,22 a 1,23. Ostatek je velmi lehký.

Ad 1,22. Nechť $f \in C^{A+B}$; označme f_1 (resp. f_2) zobrazení množiny A (resp. B) do C takové, že pro $x \in A$ (resp. $x \in B$) jest $f_1(x) = f(x)$ (resp. $f_2(x) = f(x)$). Nechť $h(f) = \{f_1; f_2\}$. Čtenář uváží, že h je prosté zobrazení množiny C^{A+B} na $C^A \times C^B$ (za předpokladu $AB = \emptyset$).

Ad 1,23. $f \in C^{B \times A}$ značí, že f je zobrazení množiny párů $\{b; a\}$, kde $b \in B$ a $a \in A$, do C. Nechť $h(f)$ je zobrazení množiny A do C^B, které prvku $a \in A$ přiřazuje zobrazení f_a množiny B do C takové, že $f_a(b) = f(\{b; a\})$. Jde o to ukázat, že h je prosté zobrazení množiny $C^{B \times A}$ na $(C^B)^A$.]

Cvičení 1,25. Nechť $A \sim B$ $B = B_1 + B_2$ s disjunktními sčítanci. Pak možno psáti $A = A_1 + A_2$ s disjunktními sčítanci $A_1 \sim B_1$ $A_2 \sim B_2$.

Je-li f prosté zobrazení množiny B na A stačí klást $A_1 = f(B_1)$, a $A_2 = f(B_2)$. Analogicky pro víc sčítanců.

Cvičení 1,26. Je-li $AB = \emptyset$ $A' \subset A$ $B' \subset B$ $A' + B' = A + B$, pak $A' = A$ a $B' = B$.

2,2. Čítání. Obvyklé definice konečných množin mají tu nevýhodu, že nejsou prostou formalisací toho, co má normální člověk na mysli, mluví-li o konečné množině. Hodlám zde postupovat způsobem, který co nejtěsněji sleduje vývoj představ od dětství. Bude to formalisace genetického vývoje matematických pojmů.

Normální člověk rozumí konečnou množinou takovou, kterou může „čítat", přebírat po jednom prvku a při tom se dostane na konec, nastane okamžik, kdy už celou množinu přebral. Jakým způsobem čítáme množinu M? Takto:

(A) Zvolíme výchozí prvek a; ten čítáme jako první.

(B) Ke každému již čítanému prvku x množiny M, *pokud to ještě jde*, t. j. pokud jsme celou M ještě nevyčerpali, zvolíme v M „následovníka“ $\nu(x)$, kterého čítáme hned po x.

Při tom ovšem

(C) výchozí prvek a není následovníkem žádného prvku z M;

(D) žádný prvek nečítáme dvakrát, tedy různé prvky mají různé následovníky a konečně

(E) naším čítáním musíme vyčerpat celou množinu M; nesmí zbýt nic nečítaného, t. j. přechodem od a k $\nu(a)$ a pak vůbec od každého x k $\nu(x)$ proběhneme celou M. Jinými slovy: Když hodíme do nádoby $\mathfrak{M}$ především prvek a a za každým x hodíme do $\mathfrak{M}$ také následovníka $\nu(x)$, tož nakonec jsme naházeli do nádoby $\mathfrak{M}$ celou množinu M.

Formalisujeme:

Čítání množiny M je určeno dvěma věcmi a a ν, které hoví těmto pravidlům:

(A) a je prvek množiny M.

(B) ν je pravidlo, které některým (ne však nutně všem) prvkům x množiny M přiřazuje jakési prvky $\nu(x)$ množiny M. Prvek x určuje jednoznačně prvek $\nu(x)$.

Množinu všech x, kterým jsou nějaké prvky $\nu(x)$ přiřazeny, označíme ν_{M}.

(C) a se nerovná žádnému $\nu(x)$.

(D) Jsou-li x a y dva různé prvky množiny ν_{M}, pak také $\nu(x)$ a $\nu(y)$ jsou dva různé prvky.

(E) $\mathfrak{M}$ nechť je množina, která obsahuje prvek a a mimo to, když $\mathfrak{M}$ obsahuje nějaký prvek x množiny ν_{M}, pak vždycky $\mathfrak{M}$ obsahuje též příslušný prvek $\nu(x)$. Za těchto předpokladů $\mathfrak{M}$ obsahuje všechny prvky množiny M.

Čítání množiny M určené prvkem a a pravidlem ν označujeme vždycky $\mathsf{M}(a, \nu)$.

Uvidíme později, že jsou množiny, ke kterým se žádné čítání vůbec nalézt nedá, které se čítat nedají; jsou to t. zv. množiny nespočetné. Dá-li se k množině M nalézt vůbec nějaké čítání, říkáme, že množina M je *spočetná*. Je zvykem počítat prázdnou množinu $\emptyset$ také mezi spočetné množiny. Taková spočetná množina je na př. množina všech přirozených čísel: za a zvolíme číslo 1 a pro každé přirozené číslo x označíme $\nu(x) = x + 1$. Čtenář si za cvičení uvědomí, že pravidla (A) až (E) jsou splněna; na př. (E) vyslovuje t. zv. princip úplné indukce. [Uvádím tento příklad, protože je všem běžný. Později ale budu precisovat pojem přirozeného čísla a definovat $x + 1$. Budiž mi odpuštěno, že jsem pro jasnost výkladu předběhl.] Vidíme tedy, že spočetné množiny mohou být nekonečné; naproti tomu všecky konečné množiny jsou spočetné, neboť pravidla (A) až (E) jsme dělali podle konečných množin. Otázka, kdy je množina konečná, zůstává ještě otevřena; precisaci pojmu konečnosti musíme zatím poodložit a promluvit si trochu víc o čítání.

Uspořádání množiny M je pravidlo $<$, které určuje pro každé dva prvky x a y množiny M, je-li či není „x před y při uspořádání $<$“, což píšeme $x < y$. Při tom požadujeme splnění těchto dvou pravidel (x, y a z jsou prvky množiny M):

1. Zákon trichotomie: Je buďto $x < y$ anebo $x = y$ anebo $y < x$. Při tom žádné dva z oněch případů nemohou nastat současně.

2. Zákon transitivity: Jestliže $x < y$ a zároveň $y < z$, pak také platí $x < z$. Říkáme též, že M je uspořádaná (geordnet, ordonné, ordered) množina. Je-li $W \subset M$, pak pravidlo $<$ je také uspořádáním množiny W: pro $x \in W$ a $y \in W$ je vztah $x < y$ definován, neboť $x \in M$ a $y \in M$ a oba zákony pro uspořádání ovšem platí ve W, platily-li dokonce ve větší množině M. Bude-li řeč o uspořádané množině, pak její části budeme automaticky považovat za uspořádané týmž pravidlem. Místo $a < b$ se psává též $b > a$. Někdy, abychom vyznačili uspořádání $<$ množiny M, budeme psát M($<$).

Jsou-li $<$ a $\prec$ dvě uspořádání a je-li $x < y$ přesně tehdy, když $x \prec y$, pak považujeme uspořádání $<$ a $\prec$ za sobě rovna. $x \leqq y$ znamená že buďto $x = y$ anebo $x < y$.

V dalším budiž pevně dána spočetná množina M a její čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$.

Věta 2,1. *Existuje jedno jediné uspořádání $<$ množiny M takové, že pro každý prvek x množiny ν_{M} platí $x < \nu(x)$.*

Jest

(1) *$a \leqq n$ pro každé $n \in \mathsf{M}$*

(2) *je-li $m \in \nu_{\mathsf{M}}$, $n \in \mathsf{M}$, $m < n$ pak $\nu(m) \leqq n$.*

Důkaz bude poněkud obtížnější, ale to je málo platné. To další půjde pak už docela hravě.

Především ukážeme, že (3) pro každé $n \in \nu_{\mathsf{M}}$ jest n různé od $\nu(n)$. Za tím účelem označme P množinu těch $n \in \nu_{\mathsf{M}}$, pro která n se nerovná $\nu(n)$. Položme $\mathfrak{M} = \mathsf{P} + (\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}})$. Především $a \in \mathfrak{M}$, neboť buďto $a \in \mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$; anebo $a \in \nu_{\mathsf{M}}$, v kterémžto případě jest a různé od $\nu(a)$ podle (C) a tedy $a \in \mathsf{P}$. Je-li za druhé $x \in \mathfrak{M}$, pak buďto $x \in \mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ anebo $x \in \mathsf{P}$ čili $x \neq \nu(x)$. Buďto $\nu(x) \in \mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$; anebo $\nu(x) \in \nu_{\mathsf{M}}$ a v tomto případě z různosti prvků x a $\nu(x)$ podle (D) vyplývá různost prvků $\nu(x)$ a $\nu[\nu(x)]$, čili $\nu(x) \in \mathsf{P}$. Tedy jest $a \in \mathfrak{M}$ a je-li $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, pak také $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$. Tedy každý prvek n množiny ν_{M} patří také do $\mathfrak{M}$, tedy do P (neboť do $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ nepatří), čili pro každý prvek n množiny ν_{M} jest $n \neq \nu(n)$ a to jsme chtěli dokázat.

Budiž nyní n pevný prvek množiny M. Označíme na okamžik $\mathfrak{K}$ třídu všech částí L množiny M takových že

(a′) $n \in \mathsf{L}$

(b′) je-li $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, $\nu(x) \in \mathsf{L}$, pak také $x \in \mathsf{L}$.

Čtenář si za cvičení uvědomí, že taková L skutečně existují (na př. $\mathsf{L} = \mathsf{M}$) a že průnik $\mathsf{M}(n) = \Pi(\mathfrak{K})$ třídy $\mathfrak{K}$ hoví těmto podmínkám:

(a) $n \in \mathsf{M}(n)$,

(b) je-li $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, $\nu(x) \in \mathsf{M}(n)$, pak také $x \in \mathsf{M}(n)$,

(c) je-li L část množiny M, která splňuje (a′) a (b′), pak $\mathsf{M}(n) \subset \mathsf{L}$. Možno říci prostě, že $\mathsf{M}(n)$ je nejmenší z množin L, které splňují (a′) a (b′).

Pomocí (C) si dále čtenář dokáže, že

(4) $\mathsf{M}(a) = \{a\}$.

Nyní si dokážeme:

(5) *Je-li* $m \in \nu_{\mathsf{M}}$, *pak* $\mathsf{M}[\nu(m)] = \mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\}$, *při čemž* $\nu(m)$ *není prvkem množiny* $\mathsf{M}(m)$.

Především podle (a) $\nu(m) \in \mathsf{M}[\nu(m)]$ a za druhé $\mathsf{L} = \mathsf{M}[\nu(m)]$ podle (b), kde klademe $x = m$, splňuje (a′) a podle (b) L splňuje (b′) a tedy podle (c) jest $\mathsf{M}(m) \subset \mathsf{L}$ a celkem

$$\mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\} \subset \mathsf{M}[\nu(m)].$$

Naopak si čtenář uváží, že $\mathsf{L} = \mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\}$ splňuje (a′) a (b′), kde $n = \nu(m)$ a tedy podle (c)

$$\mathsf{M}[\nu(m)] \subset \mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\}.$$

Celkem tedy skutečně

$$\mathsf{M}[\nu(m)] = \mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\}.$$

Buď nyní P množina těch $m \in \nu_{\mathsf{M}}$, pro která *není* $\nu(m) \in \in \mathsf{M}(m)$. Buď $\mathfrak{M} = \mathsf{P} + (\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}})$. Buďto $a \in \mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ anebo $a \in \nu_{\mathsf{M}}$ a pak podle (3) $a \neq \nu(a)$ a na druhé straně podle (4) $\mathsf{M}(a) = \{a\}$ a tedy *není* $\nu(a) \in \mathsf{M}(a)$, t. j. $a \in \mathsf{P}$. V každém případě tedy $a \in \mathfrak{M}$.

Buď nyní $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$; pak $x \in \mathsf{P}$ a tedy *není* $\nu(x) \in \mathsf{M}(x)$. Buďto $\nu(x) \in \mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ anebo $\nu(x) \in \nu_{\mathsf{M}}$. V tomto druhém případě *není* $\nu[\nu(x)] \in \mathsf{M}(x)$. [Kdyby totiž bylo $\nu[\nu(x)] \in \mathsf{M}(x)$, pak by podle (b) bylo $\nu(x) \in \mathsf{M}(x)$.] Podle (3) jest $\nu[\nu(x)] \neq \nu(x)$ a tedy *není* $\nu[\nu(x)] \in \mathsf{M}(x) + \{\nu(x)\} = \mathsf{M}[\nu(x)]$. Tedy $\nu(x) \in \mathsf{P}$ a z $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$ obecně plyne $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathsf{M} \subset \subset \mathfrak{M}$ a tedy pro $m \in \nu_{\mathsf{M}}$ jest $m \in \mathfrak{M}$, tedy $m \in \mathsf{P}$, z čehož vychází i druhá část tvrzení (5).

A teď budeme definovat pravidlo $<$. Vztah $x < y$ bude nám značit (pro $x \in \mathsf{M}$, $y \in \mathsf{M}$), že $\mathsf{M}(x) \subset \mathsf{M}(y)$ a při tom $\mathsf{M}(x) \neq \mathsf{M}(y)$. Především jde o to, že pravidlo $<$ je uspořádání, t. j. že splňuje zákon trichotomie a transitivity. Relace $x < \nu(x)$ pro všechna $x \in \nu_{\mathsf{M}}$ plyne ihned z (5) a zákon transitivity je zřejmý, jak čtenář uváží.

I trichotomie plyne z (5), ale trochu složitěji. Nejdříve si musíme dokázat (1) a (2).

(1) platí: Buď totiž $\mathfrak{M}$ množina takových n, pro která (1) je splněno. Zřejmě $a \in \mathfrak{M}$. Je-li $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, pak $a \leqq x$ a ovšem $x < \nu(x)$ a tedy podle zákona transitivity $a < \nu(x)$, tedy $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, což je právě tvrzení (1).

(2) platí: $m < n$ znamená: $\mathsf{M}(m) \subset \mathsf{M}(n)$, $\mathsf{M}(m) \neq \mathsf{M}(n)$. Označme $\mathsf{L} = \mathsf{M}(n) - \{m\}$; jak čtenář si pomocí (D) ihned ověří, kdyby neplatilo $\nu(m) \in \mathsf{M}(n)$, množina L by splňovala (a′) a (b′) a tedy by podle (c) bylo $\mathsf{M}(n) \subset \mathsf{L}$, tedy též $\mathsf{M}(m) \subset \mathsf{L}$, tedy podle (a) též $m \in \mathsf{L}$, což ovšem není možné. Tedy nutně $\nu(m) \in \mathsf{M}(n)$; z toho pomocí (5) vychází

$$\mathsf{M}[\nu(m)] = \mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\} \subset \mathsf{M}(n),$$

čili $\nu(m) \leqq n$, což je právě tvrzení (2).

A teď k trichotomii! Buď $\mathfrak{M}$ množina těch x, že pro každý prvek $n \in \mathsf{M}$ je buďto $n \leqq x$ anebo $x < n$. Podle (1) jest $a \in \mathfrak{M}$. Nechť $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$. Buďto $n \leqq x$ a pak z $x < \nu(x)$ a zákona transitivity plyne $n < \nu(x)$, anebo $x < n$ a pak podle (2) jest $\nu(x) \leqq n$. Podle (E) jest tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, tedy pro každé dva prvky x a $y \in \mathsf{M}$ je buďto $x \leqq y$ anebo $y < x$. Ty vztahy se vylučují, sic by z nich a ze zákona transitivity plynulo $x < x$, tedy zvláště $\mathsf{M}(x) \neq \mathsf{M}(x)$.

Jde nyní jen o to, že uspořádání $<$ je požadavkem $x < \nu(x)$ jednoznačně určeno. Mějme tedy ještě jedno uspořádání $\prec$ množiny M; pro všechna $x \in \nu_{\mathsf{M}}$ budiž $x \prec \nu(x)$. Buď dán prvek m množiny M a označme P množinu všech takových $x \in \mathsf{M}$, pro která $m \preceq x$. Buď Q množina těch $x \in \mathsf{M}$, pro která

$x \leqq m$. Položme $\mathfrak{M} = \mathsf{P} + \mathsf{Q}$. Podle (1) jest $a \in \mathsf{Q}$ a tedy $a \in \mathfrak{M}$. Nechť $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$. Pak buďto $x \in \mathsf{P}$ a tedy $m \preccurlyeq x$; ze vztahu $x \prec \nu(x)$ a zákona transitivity pro $\prec$ pak vychází $m \prec \nu(x)$, tedy $\nu(x) \in \mathsf{P}$, tedy $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Anebo $x \in \mathsf{Q} - \mathsf{P}$; pak $x < m$, tedy podle (2) $\nu(x) \leqq m$, tedy $\nu(x) \in \mathsf{Q}$, tedy zase $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. V každém případě tedy $\nu(x) \in \mathfrak{M}$ a podle (E), tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, z čehož snadno plyne $\mathsf{M} - \mathsf{Q} \subset \mathsf{P}$. Čili: neplatí-li $x \leqq m$, jest $m \preccurlyeq x$. Jinak řečeno: Z $m < x$ plyne $m \preccurlyeq x$ a tedy $m \prec x$. Naopak z $x \prec m$ plyne $x < m$, neboť z $m \leqq x$ by plynulo $m \preccurlyeq x$. Tedy $u < v$ a $u \prec v$ značí přesně totéž; $\prec$ je totéž jako $<$. Tím je první a nejtěžší věta dokázána.

V důkazu věty 1 definované množiny $\mathsf{M}(n)$, $n \in \mathsf{M}$, lze nyní definovat jinak, totiž: $\mathsf{M}(n)$ je množina všech $x \in \mathsf{M}$, pro která $x \leqq n$.

[Buď totiž $\mathfrak{M}$ množina těch $n \in \mathsf{M}$, pro která tomu tak jest; podle (1) a (4) jest $a \in \mathsf{M}$. Buď nyní $m \in \mathfrak{M}$, $m \in \nu_{\mathsf{M}}$; pak $x \in \mathsf{M}(m)$ znamená totéž jako $x \leqq m$, $x \in \mathsf{M}$. Podle (5) tedy $x \in \mathsf{M}[\nu(m)]$ znamená totéž jako: buďto $x \leqq m$ anebo $x = \nu(m)$. Je-li však $x \leqq m$, jest $x < \nu(m)$. A je-li $x < \nu(m)$, jest $x \leqq m$, neboť není $\nu(m) \leqq x$ a tedy podle (2) není $m < x$. Tedy $x \in \mathsf{M}[\nu(m)]$ znamená totéž jako $x \leqq \nu(m)$, čili $\nu(m) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tudíž $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, c. b. d.]

Buď A nějaká množina, $\prec$ její uspořádání, $\emptyset \neq \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. Má-li nějaký prvek $b \in \mathsf{B}$ tu vlastnost, že z $x \in \mathsf{B}$ plyne $b \preccurlyeq x$, pak b se nazývá *první* prvek množiny B (při daném uspořádání). $\prec$ je *dobré uspořádání* (Wohlordnung) množiny A, když každá neprázdná část množiny A má první prvek.

Cvičení 2,1. Množina B má nanejvýš jeden první prvek.

Věta 2,2. *Buď $\prec$ zcela libovolné uspořádání množiny* $\mathsf{M}(n)$, $n \in \mathsf{M}$. *Pak $\prec$ je dobré uspořádání množiny* $\mathsf{M}(n)$.

Důkaz. Označme $\mathfrak{M}$ množinu těch $n \in \mathsf{M}$, pro která věta platí. Podle (4) zcela triviálně $a \in \mathfrak{M}$. Buď nyní $m \in \mathfrak{M}$, $m \in \nu_{\mathsf{M}}$. Abychom dokázali větu 2,2 pro všechna $n \in \mathsf{M}$, stačí podle (E) dokázat, že platí pro $n = \nu(m)$. Buď $\prec$ zcela libovolné uspořádání množiny $\mathsf{M}(n)$. Podle (5) jest $\mathsf{M}(m) \subset \mathsf{M}(n)$ a pravidlo $\preceq$ je též uspořádání množiny $\mathsf{M}(m)$. Buď $\emptyset \neq \mathsf{B} \subset \mathsf{M}(n)$. Buďto B neobsahuje $n = \nu(m)$ a pak podle (5) $\mathsf{B} \subset \mathsf{M}(m)$ a B má první prvek. Anebo $\mathsf{B} = \{n\}$ a B má zase první prvek, totiž n. Nebo konečně $n \in \mathsf{B} \neq \{n\}$. Pak podle (5) je $\mathsf{B} - \{n\}$ neprázdná část množiny $\mathsf{M}(m)$ a podle předpokladu má první prvek b. Je-li $b \preceq n$, je b první prvek množiny B; je-li $n \preceq b$, je n první prvek množiny B a jsme hotovi.

$<$ bude vždy uspořádání množiny M udané ve větě 2,1.

Věta 2,3. *$<$ je dobré uspořádání množiny* M.

Důkaz. Buď $\emptyset \neq \mathsf{B} \subset \mathsf{M}$, $n \in \mathsf{B}$. Buď $\mathsf{B}(n)$ množina těch x, pro která $x \in \mathsf{B}$, $x \leq n$. Pak $n \in \mathsf{B}(n)$ a tedy $\emptyset \neq \mathsf{B}(n) \subset \mathsf{M}(n)$. podle věty 2,2 má množina $\mathsf{B}(n)$ první prvek b. Jest $b \in \mathsf{B}$. Tvrdím, že b je první prvek množiny B. Kdyby ne, pak by existovalo $x \in \mathsf{B}$, $x < b$. Ježto $b \leq n$, bylo by $x < n$ a tedy $x \in \mathsf{B}(n)$, což není možné, neboť b byl první prvek množiny $\mathsf{B}(n)$.

Viděli jsme, že uspořádání $<$ bylo čítáním $\mathsf{M}(a, \nu)$ jednoznačně určeno. Nyní si uvědoměme, že i naopak čítání $\mathsf{M}(a,\nu)$ je přesně určeno uspořádáním $<$. [Ovšem není pravda, že by každé uspořádání množiny určovalo nějaké její čítání, jak ještě uvidíme.] Možno to říci takto: Dána-li dvě různá čítání množiny M, pak k nim podle věty 2,1 patřící uspořádání jsou mezi sebou různá. To bude obsahem věty 2,5.

Napřed si dokážeme pomocnou větu. Při tom je-li A nějaká množina, $\preceq$ její uspořádání, $b \in \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ a $x \preceq b$ pro všechna $x \in \mathsf{B}$, pak b je t. zv. *poslední* prvek množiny B.

Cvičení 2,2. Množina B má nanejvýš jeden poslední prvek.

Věta 2,4. *Není-li n poslední prvek množiny* M, $n \in \mathsf{M}$, *pak* $n \in \nu_{\mathsf{M}}$. *Je-li n poslední prvek množiny* M, *pak n nepatří do* ν_{M}.

Důkaz. Buď $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}} \neq \emptyset$. Podle věty 2,3 má množina $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ první prvek n, t. j. z $x < n$ plyne $x \in \nu_{\mathsf{M}}$. Buď $\mathfrak{M} = \mathsf{M}(n)$. Podle (1) jest $a \in \mathfrak{M}$. Je-li dále $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, jest

$x < n$ a tedy podle (2): $\nu(x) \leq n$, t. j. $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathfrak{M} \supset \mathsf{M}$, t. j. n je poslední prvek množiny M. A je-li m vůbec nějaký prvek množiny $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$, pak podle definice prvku n jest $n \leq m$ a z toho, že n je poslední v M plyne, že $m \leq n$ a tedy $m = n$. Tedy $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ obsahuje vskutku jenom případný poslední prvek množiny M.

A je-li n poslední prvek množiny M, pak ovšem n nepatří do ν_{M}, neboť by $n < \nu(n)$.

Věta 2,5. *Čítání* $\mathsf{M}(a, \nu)$ *množiny* M *je jejím uspořádáním* $<$ *jednoznačně určeno.*

Důkaz. a je podle (1) první prvek množiny M. Množina ν_{M} je určena větou 2,4. A pro $m \in \nu_{\mathsf{M}}$ je $\nu(m)$ podle (2) první prvek množiny $\mathsf{M} - \mathsf{M}(m)$.

Zvláště tedy byl prvek a čítáním $\mathsf{M}(a, \nu)$ jednoznačně určen podle (1). Jiné jednoznačné určení prvku a obsahuje

Věta 2,6. *Ke každému prvku* $n \in \mathsf{M}$ *vyjma* a *existuje* $m \in \mathsf{M}$, $n = \nu(m)$.

Důkaz. Buď P množina všech $\nu(m)$, $m \in \mathsf{M}$, $\mathfrak{M} = \{a\} + \mathsf{P}$. Podle (E) jest $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$ a tedy pro $a \neq n \in \mathsf{M}$ jest $n \in \mathsf{P}$, tedy $n = \nu(m)$. Že a činí výjimku, plyne z (C).

Cvičení 2,3. Prvek m ve větě 2,6 je prvkem n přesně určen.

Každý prvek $n \in \mathsf{M}$ vyjma a má tedy zcela určitého „předchůdce" m, t. j. prvek $m \in \mathsf{M}$, pro který $n = \nu(m)$.

Cvičení 2,4. Je-li m předchůdce prvku n, pak $k < n$, když a jen když $k \in \mathsf{M}(m)$. Tedy zvláště $m < n$.

Podle věty 2,4 je nejvýš jeden prvek množiny M, který není prvkem množiny ν_{M}. Jsou případy, že vůbec takového prvku není; na př. je-li M množina přirozených čísel, $a = 1$, $\nu(n) = n + 1$. Buď nyní $\mathsf{U} \subset \mathsf{M}$, $\mathsf{U} \neq \mathsf{M}$ a nechť z $\nu(x) \in \mathsf{U}$ plyne $x \in \mathsf{U}$. Takové množiny budeme nazývat *úseky* množiny M. Uvidíme, že $\mathsf{U}(a, \nu)$ je čítání množiny U a že U ($\neq \emptyset$) má vždy poslední prvek, tedy podle věty 2,4 prvek, který není v ν_{U}.

Především definujme úseky jinak a to pomocí uspořádání $<$:

Věta 2,7. *Neprázdné úseky množiny* M *jsou právě ty neprázdné její části* $\mathsf{U} \neq \mathsf{M}$, *pro které z* $n \in \mathsf{U}$, $x < n$ *plyne* $x \in \mathsf{U}$. *Neprázdné úseky množiny* M *jsou právě množiny* $\mathsf{M}(n)$, $n \in \mathsf{M}$. *Tedy každý neprázdný úsek množiny* M *má poslední prvek.*

Důkaz. Je-li $\mathsf{U} \neq \emptyset$ úsek, pak $\mathsf{M} - \mathsf{U} \neq \emptyset$ a tedy podle věty 2,3 jest v $\mathsf{M} - \mathsf{U}$ první prvek m. Buď za prvé $m = a$, $\mathfrak{M} = \mathsf{M} - \mathsf{U}$; pak z (E) plyne $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, t. j. $\mathsf{U} = \emptyset$, což není. Tedy $m \neq a$ a podle věty 2,6 lze psáti m ve tvaru $m = \nu(n)$. Podle definice prvku m jest $\mathsf{M}(n) \subset \mathsf{U}$. Kdyby $\mathsf{M}(n) \neq \mathsf{U}$, pak by podle věty 2,3 v množině $\mathsf{U} - \mathsf{M}(n)$ byl první prvek u různý od a podle (1), tedy $u = \nu(v)$ podle věty 2,6. Pak ale $v \in \mathsf{U}$, $v < u$ a tedy $v \in \mathsf{M}(n)$, tedy $v \leqq n$. Kdyby $v = n$, pak by $u = \nu(v) = m \in \mathsf{M} - \mathsf{U}$. Tedy $v < n$ a podle (2) $u \in \mathsf{M}(n)$, což je spor. Tedy $\mathsf{U} = \mathsf{M}(n)$.

Je-li nyní U neprázdná část množiny M, $\mathsf{U} \neq \mathsf{M}$, buď m první prvek množiny $\mathsf{M} - \mathsf{U}$. Jestliže z $n \in \mathsf{U}$, $x < n$ plyne $x \in \mathsf{U}$, pak podle (1) $a \in \mathsf{U}$ a tedy $m \neq a$, $m = \nu(n)$ podle věty 2,6. Pak $\mathsf{U} = \mathsf{M}(n)$. Za prvé totiž podle definice prvku m jest $\mathsf{M}(n) \subset \mathsf{U}$. Kdyby $u \in \mathsf{U} - \mathsf{M}(n)$, pak by $n < u$ a podle (2): $\nu(n) \leqq u$, tedy $m = \nu(n) \in \mathsf{U}$, což je spor. Tedy zase $\mathsf{U} = \mathsf{M}(n)$.

Cvičení 2,5. Buď U úsek množiny M, tedy $\mathsf{U} = \mathsf{M}(n)$. Buď $\nu'_{\mathsf{U}} = \mathsf{U} - \{n\}$. Je-li $u \in \nu'_{\mathsf{U}}$, položíme $\nu'(u) = \nu(u)$. Pak platí (A) až (E) pro U, a, ν' místo M, a, ν. To právě znamenalo tvrzení, že $\mathsf{U}(a, \nu)$ je čítání množiny U. Píšeme-li stále U, a, ν' místo M, a, ν', pak podle věty 2,1 dostaneme přesně jedno uspořádání $<'$ množiny U takové, že $x <' \nu'(x)$ pro všechna $x \in \nu'_{\mathsf{U}}$. Pro $x \in \mathsf{U}$, $y \in \mathsf{U}$ znamená $x <' y$ přesně totéž co $x < y$.

[Vše je lehké; ukáži sám na př., že je splněno (E) pro U, a, ν. Buď $\mathfrak{M}'$ množina obsahující a a z $x \in \mathfrak{M}'$, $x \in \nu'_{\mathsf{U}}$ nechť plyne

$\nu'(x) \in \mathfrak{M}'$. Buď $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + (\mathsf{M} - \mathsf{U})$. Pak $a \in \mathfrak{M}$; je-li $x \in \nu'_{\mathsf{U}}$, pak z $x \in \mathfrak{M}$ plyne $x \in \mathfrak{M}'$ a tedy $\nu(x) = \nu'(x) \in \mathfrak{M}$. Je-li $x \in \nu_{\mathsf{M}} - \nu'_{\mathsf{U}}$, $x \in \mathsf{U}$, pak podle věty 2,5 je x poslední prvek množiny U, tedy $x = n$ a jest $\nu(x) = \nu(n) \in \mathsf{M} - \mathsf{U}$, $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Je-li konečně $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, $x \in \mathsf{M} - \mathsf{U}$, pak $\nu(x) \in \mathsf{M} - \mathsf{U}$ a tedy $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, tedy $\mathfrak{M}' \supset \mathsf{U}$, o. b. d.]

Říkáme, že $\mathsf{M}(a, \nu)$ *indukuje* v U čítání $\mathsf{U}(a, \nu')$, čili prostě $\mathsf{U}(a, \nu)$.

Podle našeho cvičení tedy platí

Korolár. *Každý úsek spočetné množiny je spočetná množina.*

2,3. Indukce. Buď $\mathsf{M}(a, \nu)$ čítání množiny M, $<$ uspořádání definované ve větě 2,1.

Čtenář si všiml, že v hořejších důkazech hrála podmínka (E) hlavní roli. Můžeme ji formulovat takto: *Je-li* $\mathsf{V}(x)$ *nějaký výrok, který má smysl pro každý prvek x množiny* M, *pak k tomu, abychom dokázali* $\mathsf{V}(x)$ *pro všechna x, stačí dokázat přímo jenom* $\mathsf{V}(a)$ *a jinak dokázat* $\mathsf{V}(x)$ *jenom za předpokladu, že platí* $\mathsf{V}(y)$ *pro předchůdce y prvku x.*

Označme totiž $\mathfrak{M}$ množinu těch $x \in \mathsf{M}$, pro která $\mathsf{V}(x)$ platí. Pak dokážeme-li $\mathsf{V}(a)$, jest $a \in \mathfrak{M}$. A za druhé z platnosti výroku $\mathsf{V}(y)$ dovedeme dokázat platnost výroku $\mathsf{V}[\nu(y)]$ $[\nu(y) = x]$ a tedy z $y \in \mathfrak{M}$ plyne $\nu(y) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, t. j. platí $\mathsf{V}(x)$ pro všechna x.

K některým důkazům hořejší formulace je trochu slabá. Silnější formulace zní takto:

Je-li $\mathsf{V}(x)$ *výrok, který má smysl pro každý prvek x množiny* M, *pak k tomu, abychom dokázali* $\mathsf{V}(x)$ *pro všecka x, stačí dokázat* $\mathsf{V}(x)$ *jenom za předpokladu, že platí* $\mathsf{V}(y)$ *pro všechna* $y < x$.

Podle věty 2,3 a 2,1 je $<$ dobré uspořádání množiny M, a její první prvek. A tento předpoklad už k důkazu posledního výroku stačí; o čítání množiny M není třeba mluvit, ba M nemusí ani být spočetná.

Neboť kdyby to nebylo pravda, pak by množina $\mathsf{M} - \mathfrak{M}$ nebyla prázdná a měla by tedy první prvek x. Z definice prvku x plyne, že pro $y < x$ jest $y \in \mathfrak{M}$ a tedy podle našeho předpokladu také $x \in \mathfrak{M}$, což není možné, neboť $x \in \mathsf{M} - \mathfrak{M}$.

Hořejší výroky jsou slabší a silnější formulace t. zv. *principu důkazu indukcí.*

Zcela obdobného principu lze užít k definicím. *Princip definice indukcí* budu formulovat v silnějším znění (F bude množina, z které definované věci vybíráme):

Abychom (přesně a jednoznačně) definovali věc $f(x) \in \mathsf{F}$ *pro každý prvek* $x \in \mathsf{M}$, *stačí definovat jenom věc* $f(x) \in \mathsf{F}$ *za předpokladu, že věci* $f(y) \in \mathsf{F}$ *pro všechna* $y < x$ *jsou už známy.*

Věc $f(x)$ definujeme na základě toho, jak byly definovány věci $f(y)$ pro $y < x$. Byly-li věci $f(y)$ pro $y < x$ definovány, na př. $f(y) = z(y)$, pak $f(x)$ se z nich dostane jakýmsi předem daným pravidlem g, tu věc pravidlem g získanou označíme $g(z)$. Závisí na z, t. j. na tom, co byly věci $z(y)$ pro $y < x$. A $f(x)$ se rovná právě $g(z)$.

Za M zvolme na př. množinu N přirozených čísel, $a = 1$; za F množinu záporných čísel a snažme se určit posloupnost (nekonečnou řadu) tak, aby první člen $f(1)$ byl roven $p = -1$ a aby x-tý člen byl součet všech předchozích členů $-x$. Pak $f(a)$ bylo definováno přímo $(= -1)$ a x-tý člen za předpokladu, že předešlé členy známe (jinak bychom nemohli určit jejich součet). Tím je posloupnost úplně určena:

$$-1, -3, -7, -15, -31, \text{atd.}$$

$f(x) = g(z)$ je součet všech $z(y)$, kde $y < x$, zmenšený o x. z udává, jak byly věci $f(y) = z(y)$ definovány pro $y < x$. Větších y se pravidlo z netýká.

Zase úplně stačí předpokládat, že $<$ je dobré uspořádání množiny M, a její první prvek.

Formalisujme to poněkud lépe. Je-li f zobrazení množiny M uspořádané pravidlem $<$ do F, označíme f_x pro $x \in \mathsf{M}$ pravidlo, které každému $y < x$ přiřazuje $f(y)$, t. j. $f_x(y) = f(y)$; ostatních $y \geqq x$ se f_x netýká. Pak náš princip zní:

($\mathfrak{C}$) *Nechť v případě, že každému prvku $y < x$ už byl přiřazen určitý prvek $z(y) \in \mathsf{F}$ jistým pravidlem z, umíme definovat určitou (na z závislou) věc $g(z) \in \mathsf{F}$, podle pravidla g. Pak existuje přesně jedno zobrazení f množiny M do F takové, že $f(x) = g(f_x)$ pro $x \in \mathsf{M}$.*

V důkaze značí M_x (pro $x \in \mathsf{M}$) množinu všech $y < x$.

(α) Nechť pro jisté $\sigma \in \mathsf{M}$ existují zobrazení s množiny M_σ do F taková, že pro každé $x \in \mathsf{M}_\sigma$, jest $s(x) = g(s_x)$. Tvrdím:

(β) Nejvýš jedno s splňuje tvrzení (α).

Nechť totiž s^1 a s^2 jsou dvě taková s. Buď x první prvek množiny těch $x \in \mathsf{M}_\sigma$, že $s^1(x) \neq s^2(x)$. Pro $y < x$ jest $s^1(y) = s^2(y)$, tedy $s_x{}^1 = s_x{}^2$, tedy $s^1(x) = g(s_x{}^1) = g(s_x{}^2) = s^2(x)$, což odporuje volbě prvku x. Tedy takového x není a $s^1 = s^2$, t. j. platí (β).

Z buď množina všech $\sigma \in \mathsf{M}$ takových, že platí (α) (i co do existence zobrazení s).

(γ) Je-li $\mathsf{M}_\sigma \subset \mathsf{Z}$, pak $\sigma \in \mathsf{Z}$. Máme tedy dokázat, že existuje zobrazení s množiny M_σ do F takové, že pro každé $x \in \mathsf{M}_\sigma$ jest $s(x) = g(s_x)$. Budiž tedy $x \in \mathsf{M}_\sigma$. Pak $x \in \mathsf{Z}$, tedy existuje (a podle (β) právě jedno) zobrazení t množiny M_x do F takové, že pro každé $y < x$ je $t(y) = g(t_y)$. Položme $s(x) = g(t) \in \mathsf{F}$. Abychom dokázali vztah $s(x) = g(s_x)$, stačí tedy dokázat $s_x = t$, t. j. $s_x(y) = t(y)$, to znamená $s(y) = t(y)$ pro $y < x$. Je však t zobrazení množiny M_x do F mající vlastnost α) (t místo s, x místo σ), tedy t_y zobrazení množiny M_y do F mající vlastnost α) (t_y místo s, y místo σ), tedy podle definice zobrazení s je $s(y) = g(t_y) = t(y)$ c. b. d.

Čteme-li v důkazech tvrzení (β) a (γ) M a f místo M_σ a s, obdržíme místo (β) a (γ):

(β') Existuje nejvýš jedno zobrazení f splňující podmínky věty.

(γ') Je-li $M \subset Z$, pak existuje aspoň jedno f splňující podmínky věty.

Máme tedy celkem ukázat, že ze $\sigma \in M$ plyne $\sigma \in Z$. Kdyby ne, pak by množina těch σ, která by v Z nebyla, měla první prvek σ. Především jest $M_\sigma \subset Z$ podle volby prvku σ. Tedy podle (γ) jest $\sigma \in Z$ a věta je dokázána.

Uděláme si ihned jednu důležitou aplikaci. Říkáme, že množina A s uspořádáním $<_1$ je podobná (ähnlich, semblable, similar) množině B s uspořádáním $<_2$, když se dají prvky množiny B očíslovat pomocí prvků množiny A tak, že pořádek patřících si prvků je stejný, t. j. když existuje zobrazení f množiny A na B takové, že z $x \in A$, $y \in A$, $x <_1 y$ plyne $f(x) <_2 f(y)$.

Píšeme pak typ $A =$ typ B. Zobrazení f je t. zv. *podobnost* množin A a B.

Cvičení 3,1. Zobrazení f je prosté. Tedy: jsou-li množiny A a B podobné, jsou ekvivalentní.

3,2. Užívajíce postupně zobrazení identického, inversního a složeného, dokažte:

(reflexivita) typ $A =$ typ A;

(symetrie) je-li typ $A =$ typ B, jest typ $B =$ typ A;

(transitivita) je-li typ $A =$ typ B a zároveň typ $B =$ typ C, pak také typ $A =$ typ C. [To identické, inversní a složené zobrazení je zase podobnost.]

Je-li B uspořádána pravidlem $\prec$, $x \in B$, pak B_x je množina všech $y \prec x$. Nerovnost typ $A <$ typ B bude vždy značit, že A je podobná jakési množině B_x.

Cvičení 3,3. Je-li $y \prec x$, pak $B_y \subset B_x$.

3,4. Je-li typ $A <$ typ B a typ $B <$ typ C, pak také typ $A <$ typ C. Platí to i když v jedné z prvních dvou nerovností připustíme rovnost.

Pro symboly typ A platí tedy zákon transitivity pro pravidlo $<$. Zákon trichotomie platí jen, omezíme-li se na dobrá uspořádání. Pak totiž platí

Cvičení 3,5. Je-li F dobře uspořádána, $A = F_\varphi$, pak $\varphi \in F$ je množinou A přesně určeno.

3,6. Jestliže je F dobře uspořádána, $W \subset F$, $W \neq F$, když z $y \in W$ plyne $F_y \subset W$, pak existuje $\varphi \in F$ takové, že $W = F_\varphi$. [Za φ volte první prvek množiny $F - W$.]

Trichotomie pro typy. Jsou-li W_1 a W_2 dobře uspořádané množiny, pak buďto typ $W_1 <$ typ W_2 anebo typ $W_2 <$ $<$ typ W_1 anebo typ $W_1 =$ typ W_2 a žádné dva z těchto případů nemohou nastat současně.

Důkaz. Označme $M = W_1$, $F = W_2$; buď a, resp. p první prvek množiny M, resp. F. Je-li z zobrazení množiny $M_\xi (\xi \in M)$ do F, pak buďto $z(M_\xi) = F_\varphi$ pro jisté $\varphi \in F$. Podle cvičení 3,5 je pak to φ přesně určeno.

V tomto případě položíme $g(z) = \varphi$. Anebo takového φ není; pak budiž $g(z) = p$. Podle principu definice indukcí pak existuje zobrazení f množiny M do F takové, že $f(a) = p$ a je-li $f(M_\xi) = F_\varphi$, jest $\varphi = f(\xi)$. Je-li $f(M_\xi) \neq F_\varphi$ pro všechna $\varphi \in F$, pak $f(\xi) = p$.

Buď $V \subset M$ a z $\xi \in V$ nechť plyne jednak $M_\xi \subset V$, jednak $f(M_\xi) = F_{f(\xi)}$.

(α) Buďto $f(V) = F$ anebo $f(V) = F_\varphi$, $\varphi \in F$.

Buď totiž $x \in F$, $x \prec y$, $y \in f(V)$. [Uspořádání množiny M i množiny F označuji stejně: $\prec$; k omylu nedojde.] Pak lze psát $y \in f(\eta)$, $\eta \in V$. Jest dále $M_\eta \subset V$, tedy $f(M_\eta) \subset f(V)$ a $f(M_\eta) = F_{f(\eta)} = F_y$. Avšak $x \in F_y$, tedy $x \in f(V)$. Z $y \in f(V)$ tedy plyne $F_y \in f(V)$. Není-li $f(V)$ rovno F, jest $f(V) = F_\varphi$ podle cvičení 3,6 pro $W = f(V)$. Tím (α) dokázáno.

Buď $f' = f/V$ zobrazení množiny V do F takové, že pro $x \in V$ je vždy $f'(x) = f(x)$.

(β) f/V je podobnost množin V a $f(V)$. Z $\xi \prec \eta \in V$ plyne totiž $\xi \in M_\eta$, $f(\xi) \in f(M_\eta) = F_{f(\eta)}$ a tedy skutečně $f(\xi) \prec f(\eta)$.

A teď k vlastnímu důkazu! Za prvé nechť existují taková $\varrho \in M$, že $f(M_\varrho) \neq F_\varphi$ pro všechna $\varphi \in F$. Buď ϱ první z nich.

Lze pak klásti $V = M_\varrho$ a tedy z (α) plyne $f(M_\varrho) = F$; podle (β) je pak f/M_ϱ podobnost množin M_ϱ a F, tedy typ $F <$ $<$ typ M.

Anebo $f(M_\xi) = F_{f(\xi)}$ pro každé $\xi \in M$. Lze klásti $V = M$ a podle (α) a (β) je $f = f/V$ podobnost množin M a $f(V) = F$, resp. $f(V) = F_\varphi$ a tedy typ $W \leqq$ typ F.

Jeden z případů jmenovaných v dokazovaném tvrzení tedy skutečně nastane. Jde o to ukázat, že se ty případy vylučují. Kdyby typ $W_1 <$ typ W_2 a zároveň typ $W_2 \leqq$ $\leqq$ typ W_1, pak by typ $W_1 <$ typ W_1. Totéž by plynulo z relací typ $W_2 <$ typ W_1 a typ $W_2 =$ typ W_1. Pak by ale existovalo $x \in M$ ($= W_1$) takové, že typ M = typ M_x. Buď f podobnost množin M a M_x. Pak $f(x) \in M_x$, t. j. $f(x) \prec x$. Je tedy neprázdná množina takových $y \in M$, pro která $f(y) \prec y$. Buď y první prvek té množiny. Pak pro $z = f(y)$ jest $z \prec y$, tedy $f(z) \prec f(y)$, t. j. $f(z) \prec z$. To ale není možné, neboť prvek y byl zvolen tak, že z nerovnosti $z \prec y$ plyne $z \preceq f(z)$. Tím trichotomie dokázána.

Cvičení 3,5. Konec posledního důkazu vlastně dokazuje větu:

Nechť f je zobrazení množiny M s dobrým uspořádáním $\prec$ do M; nechť z $x \prec y$ plyne $f(x) \prec f(y)$. Pak je vždy $x \preceq f(x)$.

[Jinak by byla neprázdná množina takových $y \in M$, pro která $f(y) \prec y$ atd. jako svrchu.]

3,6. *Je-li M' část dobře uspořádané množiny, pak* typ $M' \leqq$ $\leqq$ typ M.

[Jinak by typ M = typ M'_x, pro podobnost f množin M a M'_x by bylo $f(x) \prec x$.]

Ještě si udělejme tři cvičení o podobnostech, která budou v dalším užitečná.

Cvičení 3,7. Buď σ podobnost množin X a Y, $A \subset B \subset X$. Pak $\sigma(A) \subset \sigma(B)$. Je-li $A \neq B$, jest $\sigma(A) \neq \sigma(B)$.

3,8. Pro $A \subset X(<)$ označme supr A první prvek $\alpha \in X$ takový, že pro všechna $a \in A$ jest $a \leqq \alpha$. (Jest nejvýš jedno takové α.) Buď σ podobnost množin X a Y. Je-li $\alpha =$ supr A, jest $\sigma(\alpha) =$ supr $\sigma(A)$.

3,9. Je-li $A \subset X$, σ podobnost množin X a Y a x první prvek množiny $X - A$, pak $\sigma(x)$ je první prvek množiny $Y - \sigma(A)$.

2,4. Konečné množiny. Teď budeme definovat konečnost a dokážeme si základní poučky o ní.

Věta 4,1. *Je-li $n \in M$, pak množina $M(n)$ není ekvivalentní s žádnou svou pravou částí.*

Důkaz. Buď $\mathfrak{M}$ množina těch $n \in M$, pro která je naše tvrzení správné. Ze (4) zřejmě plyne $a \in \mathfrak{M}$. Buď $m \in \mathfrak{M}$, $m \in \nu_M$. Vzhledem k (E) stačí dokázat $n = \nu(m) \in \mathfrak{M}$. Označme $A = M(n)$ a B nechť je pravá část množiny A. Jde o to odvodit spor z existence pravidla f udaného v definici ekvivalence. Především si budeme pravidlo f poněkud modifikovat. Modifikované pravidlo f' bude každému prvku x množiny $A' = M(m)$ přiřazovat jakousi věc $f'(x)$. Bude skoro vždycky $f'(x) = f(x)$; jediná výjimka bude toto: Je-li $f(x) = n$, $x \in A'$, pak z $x \neq n$ plyne $f(x) \neq f(n)$ a tedy $f(n) \neq n$, tedy $f(n) \in A'$ podle (5); a v tom případě bude $f'(x) = f(n)$. Tedy podle (5) je vždycky $f'(x) \in A'$. A čtenář si za cvičení ukáže, že z $x_1 \neq x_2$ plyne $f'(x_1) \neq f'(x_2)$. Označme B' množinu všech $f'(x)$. Pak B' je část množiny A' a A' je ekvivalentní s B'. Abychom dostali rozpor proti vztahu $m \in \mathfrak{M}$, máme jen ukázat, že $B' \neq A'$.

Nechť tedy $B' = A'$. Je-li $f(n) = n$, pak (ježto podle (5) není $n \in A'$) jest $f'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in A'$ a tedy $B = B' + \{n\} = A$ podle (5). Anebo je $f(n) \neq n$ a tedy podle (5) jest $f(n) \in B'$ a tedy $f'(x) = f(n)$ pro jisté $x \in A'$. Pak ovšem musí $f(x)$ být mimo množinu B'. [Neboť prvky $f'(y)$, $y' \in A'$, tvoří právě množinu B' a jsou to právě prvky $f(y)$ pro $y \neq x$

a prvek $f(n)$. Kdyby $f(x) \in \mathsf{B}'$, pak by v rozporu s definicí pravidla f bylo $f(x) = f(y)$ pro $y \neq x$ anebo $f(x) = f(n)$ a podle (5) $x \neq n$.] Podle (5) tedy $f(x) = n$ a $\mathsf{B} = \mathsf{B}' + \{n\} = \mathsf{A}$ proti předpokladu.

Věta 4,2. *Množina* M *je ekvivalentní s nějakou svou pravou částí, když a jen když* $\nu_\mathsf{M} = \mathsf{M}$.

Důkaz. Je-li $\nu_\mathsf{M} = \mathsf{M}$, položme $\mathsf{M} = \mathsf{A}$, $\mathsf{M} - \{a\} = \mathsf{B}$ a $\nu = f$ v definici ekvivalence. Pak množina M je ekvivalentní se svou pravou částí $\mathsf{M} - \{a\}$ podle (D) a věty 2,6.

Je-li nyní $\nu_\mathsf{M} \neq \mathsf{M}$, pak podle věty 2,4 $\mathsf{M} - \nu_\mathsf{M}$ obsahuje přesně jen poslední prvek n množiny M a jest tedy $\mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$. Podle věty 4,1 tedy M není ekvivalentní s žádnou svou pravou částí.

O množině přirozených čísel říkáme, že je nekonečná, čímž vyznačujeme tu skutečnost, že každý její prvek má následovníka, žádný není poslední. Dojdeme-li při čítání k poslednímu prvku, který už nemá následovníka, t. j. když $\nu_\mathsf{M} \neq \mathsf{M}$, říkáme, že množina je konečná. A priori by se ale mohlo stát, že by při čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$ množiny M bylo $\nu_\mathsf{M} \neq \mathsf{M}$, avšak při nějakém jiném čítání $\mathsf{M}(a', \nu')$ téže množiny by bylo $\nu'_\mathsf{M} = \mathsf{M}$. To však vylučuje věta 4,2. Je-li $\nu_\mathsf{M} = \mathsf{M}$ nebo $\nu_\mathsf{M} \neq \mathsf{M}$, totiž podle ní vůbec nezávisí na tom kterém čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$. Je to při všech čítáních stejné a závisí to jenom na tom, je-li či není M ekvivalentní s nějakou svou pravou částí. Vzhledem k tomu lze definovat: Množina M nazývá se *konečná* (endlich, fini, finite), je-li spočetná a jestliže při nějakém čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$ množiny M jest $\nu_\mathsf{M} \neq \mathsf{M}$. Při tom nezáleží na tom, jak bylo zvoleno čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$. Vzhledem k větě 4,2 možno též říci: Množina nazývá se konečná, je-li spočetná a není-li ekvivalentní s žádnou svou pravou částí. Při tom prázdnou množinu počítáme mezi konečné množiny. Není-li spočetná množina konečná, říkáme, že je *nekonečná* (unendlich, infini, infinite).

Cvičení 4,1. Množina ekvivalentní se spočetnou je spočetná.

4,2. Množina ekvivalentní s konečnou je konečná.

Věta 4,3. *Každá množina* $\mathsf{M}(n)$ *je konečná.*

Důkaz plyne z věty 2,7, koroláru na konci kapitoly 2 a věty 4,1.

Cvičení 4,3. Každá množina M_x pro $x \in \mathsf{M}$ je úsek množiny M. Je to pravá část množiny M a podle věty 2,7 existuje $y \in \mathsf{M}$ takové, že $\mathsf{M}_x = \mathsf{M}(y)$.

Věta 4,4. *Každá část konečné množiny je konečná množina.*

Důkaz. Buď M konečná, $\mathsf{C} \subset \mathsf{M}$. Kdyby typ $\mathsf{M} <$ typ C, pak by M byla ekvivalentní (srv. cvičení 3,1) s jistou svou pravou částí C_x. Tedy podle trichotomie pro typy typ $\mathsf{C} \leqq$ typ M a tedy je buď $\mathsf{C} = \mathsf{M}$, nebo C je ekvivalentní s jistou množinou M_x. M_x je úsek množiny M a tedy podle věty 2,7 jest $\mathsf{M}_x = \mathsf{M}(y)$ pro jisté $y \in \mathsf{M}$. Tedy C je ekvivalentní s množinou $\mathsf{M}(y)$, která je podle věty 4,3 konečná. Je tedy C konečná.

Věta 4,5. *Každé uspořádání konečné množiny je dobré.*

Důkaz. Je-li totiž M konečná, jest $\nu_{\mathsf{M}} \neq \mathsf{M}$ při uspořádání $<$ z věty 2,1, má tedy podle věty 2,4 množina M poslední prvek n, t. j. $\mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$. A naše tvrzení plyne z věty 2,2.

Věta 4,6. *Každá dvě uspořádání téže konečné množiny jsou si podobná.*

Důkaz. M^1 a M^2 budiž naše množina; M^1 a M^2 se liší leda uspořádáním. Kdyby typ $\mathsf{M}^1 \neq$ typ M^2, pak by podle 4,5 a trichotomie pro typy bylo na př. typ $\mathsf{M}^1 <$ typ M^2. Množina M^1 by byla ekvivalentní s jakousi pravou částí M_x^2 množiny M^2, tedy se svou pravou částí a nebyla by konečná.

Dvě uspořádání téže konečné množiny se tedy od sebe liší jen „permutací“ prvků.

Věta 4,7. *Dvě konečné množiny jsou si podobné, když a jen když jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Z podobnosti plyne ekvivalence podle cvičení 3,1. Jsou-li M_1 a M_2 konečné ekvivalentní množiny, zvolme prosté zobrazení f množiny M_2 na M_1. Je-li M_1 uspořádáno pravidlem $\prec_1$ a M_2 pravidlem $\prec_2$, označme M_3 množinu M_2 uspořádanou pravidlem $\prec_3$ takto: pro $x \in \mathsf{M}_3$ a $y \in \mathsf{M}_3$ značí $x \prec_3 y$, že $f(x) \prec_1 f(y)$. Čtenář uváží, že to je uspořádání a že f je podobnost množin M_3 a M_1. Tedy typ $\mathsf{M}_3 =$ typ M_1 a podle věty 4,6 typ $\mathsf{M}_3 =$ typ M_2, tedy vskutku typ $\mathsf{M}_1 =$ typ M_2.

Cvičení 4,4. Je-li $\prec$ uspořádání množiny M a značí-li $x \prec^* y$ totéž co $y \prec x$, pak $\prec^*$ je uspořádání množiny M, t. zv. *inversní k* $\prec$.

4,5. Inversní uspořádání k $\prec^*$ je $\prec$.

4,6. První (poslední) prvek množiny $\mathsf{C} \subset \mathsf{M}$ při uspořádání $\prec$ je její poslední (první) prvek při uspořádání $\prec^*$.

Věta 4,5 bis. *Je-li* M *uspořádaná konečná množina,* $\emptyset \neq \mathsf{C} \subset \mathsf{M}$, *pak* C *má poslední prvek.*

Důkaz. Inversní uspořádání množiny M je podle věty 4,5 dobré a C má tedy při něm první prvek, což je její poslední prvek při daném uspořádání.

Věta 4,8. *Jsou-li* A *a* B *konečné množiny, pak množiny* $\mathsf{A} + \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ *a* B^{A} *jsou konečné.*

Je-li M *konečná třída konečných množin, pak* $\Sigma(\mathsf{M})$ *je konečná množina.*

Důkaz. Položme $\mathsf{A} = \mathsf{M}$;*) pak podle věty 2,4 je možno psáti $\mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$. Je-li $\mathfrak{M}$ množina všech $m \in \mathsf{M}$ s konečnou $\mathsf{M}(m) + \mathsf{B}$, ukažme, že $a \in \mathfrak{M}$ a že z $m \in \nu_{\mathsf{M}}\mathfrak{M}$ plyne $\nu(m) \in \mathfrak{M}$. Pak bude zvláště $n \in \mathfrak{M}$ a tedy i $\mathsf{M}(n) + \mathsf{B} = \mathsf{A} + \mathsf{B}$ konečná. Podle (4) a (5) věty 2,1 stačí ukázat, že přidáním jednoho

---

*) Toto M nemá nic společného s M v druhé části věty.

prvku ke konečné množině se dostane konečná množina. Je-li ten prvek už v původní množině, není co dokazovat. Buď tedy M konečná množina, s čítáním $\mathsf{M}(a, \nu)$, $\mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$ podle věty 2,4. Je-li p nový prvek, $\mathsf{M}' = \mathsf{M} + \{p\}$, $\nu'(x) = \nu(x)$ pro $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, $\nu'(n) = p$, pak si čtenář snadno zverifikuje, že platí (A) až (E), kde místo M a ν se píše M' a ν'. Tedy ν' je čítání množiny M' a při tom $\mathsf{M}' \neq \nu'_{\mathsf{M}'}$, neboť p nemá následovníka při čítání ν'. Tedy je M' skutečně konečná.

Buď $\mathfrak{M}$ množina těch m, pro která $\mathsf{M}(m) \times \mathsf{B}$ je konečná. Podle 2,1 (4) jest $\mathsf{M}(a) \times \mathsf{B} = \{a\} \times \mathsf{B}$, tedy ekvivalentní s B (cvičení 1,20), tedy konečná, t. j. $a \in \mathfrak{M}$. Podle věty 2,1 (5) a cvičení 1,5 jest

$$\mathsf{M}[\nu(m)] \times \mathsf{B} = (\mathsf{M}(m) \times \mathsf{B}) + (\{\nu(m)\} \times \mathsf{B}).$$

Poslední množina je zase (podle cvičení 1,20) ekvivalentní s B a tedy konečná. Tedy z dokázaného již tvrzení o součtu plyne: Je-li $\mathsf{M}(m) \times \mathsf{B}$ konečná, je i $\mathsf{M}[\nu(m)] \times \mathsf{B}$ konečná, t. j. z $m \in \mathfrak{M}\nu_{\mathsf{M}}$ plyne $\nu(m) \in \mathfrak{M}$, tedy podle (E) jest $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, tedy $n \in \mathfrak{M}$, tedy $\mathsf{M}(n) \times \mathsf{B} = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ konečná.

Stejně je tomu s B^{A}. Především je $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(a)}$ podle 1,24 konečná. Dále podle věty 2,1 (5) a 1,22 jest

$$\mathsf{B}^{\mathsf{M}[\nu(m)]} \sim \mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)} \times \mathsf{B}^{\{\nu(m)\}}.$$

Druhý součinitel napravo je podle 1,24 ekvivalentní s B a tedy konečný. Je-li tedy $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)}$ konečná, je podle dokázaného již tvrzení o součinu také

$$\mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)} \times \mathsf{B}^{\{\nu(m)\}}$$

a tedy i $\mathsf{B}^{\mathsf{M}[\nu(m)]}$ konečná. Tedy, je-li $\mathfrak{M}$ množina všech m s konečnou $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)}$, jest $a \in \mathfrak{M}$ a z $m \in \mathfrak{M}\nu_{\mathsf{M}}$ plyne $\nu(m) \in \mathfrak{M}$ a tedy podle (E) jest $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, tedy $n \in \mathfrak{M}$, tedy $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(n)} = \mathsf{B}^{\mathsf{A}}$ konečná.

Konečně pišme $\mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$ ve shodě s větou 2,4. Prvky $x \in \mathsf{M}$ jsou konečné množiny. Buď $\mathfrak{M}$ množina těch $m \in \mathsf{M}$, pro která $\Sigma(\mathsf{M}(m))$ je konečná. Podle 2,1 (4) a cvičení 1,3 jest $\Sigma(\mathsf{M}(a)) = \Sigma(\{a\}) = a \in \mathsf{M}$, tedy je to konečná množina a $a \in \mathfrak{M}$. Je-li $m \in \mathfrak{M}\nu_{\mathsf{M}}$, pak podle 2,1 (5) a 1,3:

$$\Sigma(\mathsf{M}[\nu(m)]) = \Sigma(\mathsf{M}(m)) + \Sigma(\{\nu(m)\}) = \Sigma(\mathsf{M}(m)) + \nu(m).$$

Oba sčítanci jsou však konečné množiny, první proto, že $m \in \mathfrak{M}$, druhý proto, že patří do M. Tedy je i součet $\Sigma(\mathsf{M}[\nu(m)])$ konečný, t. j. $\nu(m) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy též $\Sigma(\mathsf{M}(n)) = \Sigma(\mathsf{M})$ je konečná.

Cvičení 4,7. Buď f zobrazení spočetné množiny A na B. A si můžeme myslet dobře uspořádanou. Označíme-li $g(b)$ ($b \in \mathsf{B}$) první takový prvek a množiny A, pro který $f(a) = b$, pak g je prosté zobrazení množiny B do A.

Cvičení 4,8. Dá-li se množina prostě zobrazit do konečné množiny, je konečná. (Je totiž ekvivalentní s částí konečné množiny.)

Věta 4,9. *Existuje-li zobrazení konečné množiny* A *na* B, *pak je* B *konečná.*

Důkaz. Plyne z cvičení 4,7 a 4,8.

Cvičení 4,9. Je-li Z konečná množina párů $\{\xi, \eta\}$, pak množina P prvních členů ξ (Q druhých členů η) je konečná. (Neboť Z možno zobrazit na P: $f(\{\xi, \eta\}) = \xi$ a podobně na Q.) Také $\mathsf{P} + \mathsf{Q}$ je konečná. Platí to zvláště, když existuje zobrazení z nějaké množiny M_z na Z.

4,10. Je-li A nekonečná, K konečná, pak $\mathsf{A} - \mathsf{K}$ je nekonečná.

2,5. Přirozená čísla. Podle vět 2,1 a 2,5 si čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$ a příslušné uspořádání $<$ spočetné množiny M přesně a jednojednoznačně odpovídají. Je tedy jedno vycházet od čítání nebo od příslušného uspořádání. Definujeme na př.:

Čítání dvou množin jsou si *podobná*, jsou-li si podobná příslušná uspořádání.

Věta 5,1. *Jsou-li množiny* M_1 *a* M_2 *nekonečné spočetné množiny, pak každé čítání množiny* M_1 *je podobné každému čítání množiny* M_2.

Při tom množiny M_1 a M_2 *mohou být různé nebo si rovny.*

Důkaz. Kdyby totiž si podobné nebyly, t. j. typ $\mathsf{M}_1 \neq$ $\neq$ typ M_2, pak z 2,3 a trichotomie pro typy by plynulo na př. typ $\mathsf{M}_1 <$ typ M_2, t. j. typ $\mathsf{M}_1 =$ typ M_{2x} pro jisté $x \in \mathsf{M}_2$. Avšak podle cvičení 4,3 by bylo možno psát $\mathsf{M}_{2x} = \mathsf{M}_2(y)$ a množina M_1 by byla ekvivalentní s konečnou množinou $\mathsf{M}_2(y)$ (srv. větu 4,3) a tedy konečná.

Korolár 5,1. *Každá dvě čítání dané množiny jsou si podobná.*

Důkaz. Je-li ta množina konečná, plyne to z věty 4,6. Je-li nekonečná, plyne to z věty 5,1 pro $\mathsf{M}_1 = \mathsf{M}_2$ rovnou naší množině.

Korolár 5,2. *Každá nekonečná spočetná množina je ekvivalentní s* M.

Důkaz. Neboť při uspořádání podle věty 2,1 je vzhledem k 5,1 podobná množině M.

Označme nyní N jakousi zcela libovolnou, ale jednou pro vždy pevně zvolenou nekonečnou spočetnou množinu, $\mathsf{N}(1, \nu)$ pevné čítání množiny N. N nazveme množinou přirozených čísel, její prvky budou t. zv. *přirozená čísla*. Místo $\nu(x)$ budeme psát $x + 1$. Podle věty 2,1 existuje přesně jedno uspořádání $<$ množiny N takové, že $x < x + 1$ pro každé $x \in \mathsf{N}$; je to t. zv. *přirozené uspořádání* množiny N.

Ve volbě množiny N a jejího čítání byla, zdá se, značná libovůle. Vzhledem k větě 5,1 to však není tak zlé. Kdybychom provedli jinou volbu, pak by vše zůstalo podobné, t. j. vše by se krylo, až na „označení“. Se stanoviska abstraktní matematické theorie nelze takové dvě volby jednu od druhé rozeznat. Na př. Čech říká prvkům množiny N: jeden, dva, tři atd., Němec volí za množinu výrazů: eins, zwei, drei atd., což s hlediska matematiky je jedno. Podle věty 5,1 každá jiná volba množiny N se liší od jmenovaných zase jen „filologicky“. Možno tedy považovat přirozená čísla i jejich přirozené uspořádání za přesně a jednoznačně definované pojmy.

Existence množiny N se nedá dokázat. Je to základní předpoklad matematiky, přirozená čísla jsou od Boha. (Srovnej citát z Kroneckera.) Z toho plyne existence konečných množin a to „nekonečně mnoho“. Podle věty 4,3 jsou totiž množiny $N(n)$ konečné a pro různá n jsou i množiny $N(n)$ různé. Je jich tolik co prvků n množiny N, která je nekonečná.

Přirozených čísel užíváme k počítání prvků množin a jejich číslování. Podkladem toho jsou následující dvě věty.

Věta 5,2. *Nechť* $M \neq \emptyset$ *je konečná množina; pak existuje přesně jedno* $n \in N$ *takové, že* $M \sim N(n)$.

(Říkáme, že M má n prvků, n je *počet prvků* množiny M. Zvláště $N(n)$ má n prvků).

Důkaz. Množinu M si vzhledem k větám 2,1, 2,3 můžeme myslet dobře uspořádanou. Kdyby typ N $\leq$ typ M, pak by N byla (podobná a tedy) ekvivalentní s částí konečné množiny M, tedy podle věty 4,4 konečná. Tedy trichotomie pro typy dá typ M $<$ typ N, t. j. typ M $=$ typ N_x pro jisté x, čili typ M $=$ typ $N(n)$ podle cvičení 4,3. Tedy M je ekvivalentní s $N(n)$. Kdyby M byla ekvivalentní s $N(n_1)$ i s $N(n_2)$ a na př. $n_1 < n_2$, pak by $N(n_2)$ byla ekvivalentní se svou pravou částí $N(n_1)$, což odporuje větě 4,3. Tedy n je vztahem $M \sim N(n)$ přesně určeno.

Je-li M konečná, $M \sim N(n)$, označíme $\overline{M}$ množinu $N(n)$. Je-li M spočetná nekonečná, označíme $\overline{M}$ množinu N.

Věta 5,3. $M(a, \nu)$ *buď čítání množiny* M. *Pak existuje jedno jediné zobrazení* f *množiny* $\overline{M}$ *do* M *takové, že* $f(1) = a$ *a* $f(m + 1) = \nu[f(m)]$ *pro* $m + 1 \in M$. f *je jediná podobnost množin* $\overline{M}$ *a* M.

[Při tom, dáno-li čítání množiny, míníme její uspořádání podle věty 2,1. Čítání množin $\mathsf{N}(n)$ je podle cvičení 2,5 indukováno čítáním množiny N a příslušné uspořádání je stejné jako v N.]

Důkaz. Množiny $\overline{\mathsf{M}}$ a M jsou si podobné. Pro konečnou M to plyne z věty 4,7, pro nekonečnou M z věty 5,1. Za f volme podobnost množin $\overline{\mathsf{M}}$ a M. Pro všecka $m \in \overline{\mathsf{M}}$ jest $1 \leqq m$, tedy $f(1) \leqq f(m)$. Ježto $f(m)$ vyčerpá všecky prvky množiny M, je $f(1)$ první prvek M, tedy $f(1) = a$ podle věty 2,1 (1). Za druhé jest $m < m + 1$ a z $m < x$ plyne $m + 1 \leqq x$. Tedy ($x \in \overline{\mathsf{M}}$) jest $f(m) < f(m + 1)$ a z $f(m) < f(x)$ plyne $f(m + 1) \leqq$ $\leqq f(x)$. Ježto $f(x)$ jsou všecky prvky v M, je tedy $f(m + 1)$ první prvek $y \in \mathsf{M}$, pro který $f(m) < y$, a tedy $f(m + 1) =$ $= \nu[f(m)]$ podle věty 2,1(2).

Mějme nyní dvě zobrazení f: f_1 a f_2, která splňují větu. (Zvláště to mohou být podobnosti, neboť ty podle právě řečeného větu splňují.) Buď $\mathfrak{M}$ množina těch $x \in \overline{\mathsf{M}}$, pro která $f_1(x) = f_2(x)$. Zřejmě $1 \in \mathfrak{M}$. A je-li $m \in \mathfrak{M}$, t. j. $f_1(m) = f_2(m)$, a $m + 1 \in \overline{\mathsf{M}}$, pak $f_1(m + 1) = \nu[f_1(m)] = \nu[f_2(m)] = f_2(m + 1)$, tedy $m + 1 \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\overline{\mathsf{M}} \subset \mathfrak{M}$, tedy $f_1(x) = f_2(x)$ pro všecka x a tedy $f_1 = f_2$. Zobrazení f je jediné; a je to ta svrchu zvolená podobnost.

Cvičení 5,1. Množina A je konečná, když a jen když existuje $n \in \mathsf{N}$ takové, že A má n prvků. [Malá písmena značí přirozená čísla.]

5,2. Je-li $\mathsf{A} \sim \mathsf{A}'$ a má-li A n prvků, pak A' má n prvků.

5,3. Má-li A n prvků a má-li také A' n prvků, pak $\mathsf{A} \sim \mathsf{A}'$.

Nechť A má a prvků, nechť B má b prvků. Jsou-li množiny A a B disjunktní a má-li $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ c prvků, píšeme $c =$ $= a + b$.

Cvičení 5,4. „Součet“ $a + b$ je čísly a, b přesně určen. [To značí: Dána čísla a a b. Dva lidé, já a můj přítel, počítají nezávisle na sobě $a + b$. Já si za tím účelem zvolím disjunktní množiny A a B mající a a b prvků. $a + b$ pro mne bude počet prvků množiny $\mathsf{A} + \mathsf{B}$. Můj přítel nevěda o mně si zvolí jiné disjunktní množiny A' a B' mající a a b prvků. $a + b$ pro něho bude počet prvků množiny $\mathsf{A}' + \mathsf{B}'$. Čtenář má ukázat, že ten počet bude stejný jako počet prvků množiny $\mathsf{A} + \mathsf{B}$, že nám oběma vyjde totéž. Plyne to z toho, že podle cvičení 1,15 jest $\mathsf{A} + \mathsf{B} \sim \mathsf{A}' + \mathsf{B}'$ a podle cvičení 5,2 mají ekvivalentní množiny stejný počet prvků.]

Co je to $x + 1$, bylo už dříve definováno: $x + 1 = \nu(x)$. To úplně souhlasí s naší nynější definicí. Neboť $\{\nu(x)\} \sim \sim \{1\}$; tedy podle 2 (4): $\{\nu(x)\} \sim \mathsf{N}(1)$. Množiny $\mathsf{N}(x)$ a $\{\nu(x)\}$ jsou podle 2 (5) disjunktní a $\mathsf{N}[\nu(x)] = \mathsf{N}(x) + \{\nu(x)\}$. Počet prvků je postupně $\nu(x)$, x a 1 a tedy vskutku

$$\nu(x) = x + 1$$

i ve smyslu nynější definice symbolu $x + 1$.

Je-li $\mathsf{C} = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ a má-li A a prvků, B b prvků a C c prvků, pak píšeme $c = a \times b$ či $c = a \,.\, b$ či $c = ab$.

Cvičení 5,5. „Součin“ ab je čísly a a b přesně určen.

Je-li $\mathsf{C} = \mathsf{B}^{\mathsf{A}}$, píšeme podobně $c = b^a$.

Cvičení 5,6. „Mocnina“ b^a je čísly a a b přesně určena.

Ke každým dvěma číslům a a b skutečně lze $a + b$, ab a b^a nalézt, což jsou přirozená čísla.

Cvičení 5,7. Za tím účelem stačí volit $\mathsf{A} = \mathsf{N}(a) \times \{1\}$, $\mathsf{B} = \mathsf{N}(b) \times \{2\}$, při čemž $2 = 1 + 1$. Ty dvě množiny mají totiž skutečně a a b prvků a jsou disjunktní (což potřebujeme k vůli součtu). A množiny $\mathsf{A} + \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ a B^{A} jsou konečné a tedy ke každé z nich existuje přirozené číslo, její počet prvků. A ta přirozená čísla jsou právě $a + b$, ab a b^a.

Cvičení 5,8. Nahradíme-li množiny příslušným počtem prvků, nahradí se ekvivalence $\sim$ rovností $=$ (Ekvivalentní množiny mají stejný počet prvků). Volíce $\mathsf{A} = \mathsf{N}(a) \times \{1\}$

$\mathsf{B} = \mathsf{N}(b) \times \{2\}$, $\mathsf{C} = \mathsf{N}(c) \times \{3\}$ $(3 = 2 + 1)$, odvoďte ze cvičení 1,16 až 1,24 tato pravidla:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$a + b = b + a,$$
$$(ab)\,c = a(bc),$$
$$ab = ba,$$
$$1 \, . \, a = a,$$
$$a\,(b + c) = ab + ac,$$
$$c^{a+b} = c^a \, . \, c^b,$$
$$c^{ba} = (c^b)^a,$$
$$c^1 = c.$$

Věta 5,4. *Jest $m < n$, když a jen když existuje x takové, že $n = m + x$.*

Důkaz. Je-li $m < n$, pak $n \in \mathsf{N}(n) - \mathsf{N}(m)$ a tedy množina $\mathsf{X} = \mathsf{N}(n) - \mathsf{N}(m)$ je neprázdná. Je to část množiny $\mathsf{N}(n)$ a tedy podle věty 4,4 konečná; X má řekněme x prvků. Množiny $\mathsf{N}(m)$ a X jsou disjunktní a $\mathsf{N}(n) = \mathsf{N}(m) + \mathsf{X}$. Pro počet prvků to znamená $n = m + x$.

Naopak je vždy $m < m + x$. Pro $x = 1$ to platí. Platí-li to pro x, platí to i pro $x + 1$; neboť $m < m + x < (m + x) + 1 = m + (x + 1)$. Tedy podle (E) to platí pro každé x.

Věta 5,5. *Je-li $m + x = m + y$ anebo $mx = my$, jest $x = y$.*
Je-li $m + x < m + y$ anebo $mx < my$, jest $x < y$.
Je-li $x < y$, jest $m + x < m + y$ a $mx < my$.

Důkaz. Je-li $x < y$, možno psát $y = x + u$ podle věty 5,4. Pak $m + x < (m + x) + u = m + (x + u) = m + y$ a podobně $mx < mx + mu = m\,(x + u) = my$. Z toho plyne poslední tvrzení věty.

Kdyby první tvrzení bylo nesprávné, pak by $x \neq y$ a tedy na př. $x < y$, což by vedlo k nerovnostem $m + x < m + y$

a $mx < my$ proti předpokladu. Tedy i první tvrzení je správné.

Kdyby druhé tvrzení bylo nesprávné, pak by buď $x = y$ a tedy $m + x = m + y$ a $mx = my$ proti předpokladu; anebo by $y < x$ a pak by zase proti předpokladu bylo $m + y < m + x$ a $my < mx$. Tedy všechna tvrzení jsou správná.

Cvičení 5,9. Je-li $m < n$, pak existuje jedno jediné x takové, že $n = m + x$. Označujeme $x = n - m$. Je-li $m' < m$, pak $n - m < n - m'$. Vždy $n - m < n$.

Věta 5,6. *Nechť* A *má a prvků; nechť* B *má b prvků. Jest $a < b$, když a jen když* A *je ekvivalentní s pravou částí množiny* B.

Důkaz. Nechť A je ekvivalentní s pravou částí A′ množiny B. Pak A′ a B — A′ jsou neprázdné disjunktní a podle 4,4 konečné množiny mající a a řekněme x prvků. Jest B = A′ + (B — A′) a tedy $b = a + x$, tedy $a < b$ podle věty 5,4.

Je-li naopak $a < b$, pak $\mathsf{N}(b) = \mathsf{N}(a) + \mathsf{X}$, $\mathsf{X} = \mathsf{N}(b) - \mathsf{N}(a)$. Množiny $\mathsf{N}(a)$ a X jsou zase neprázdné, disjunktní a konečné. Podle cvičení 1,25 lze psáti $\mathsf{B} = \mathsf{B}_1 + \mathsf{B}_2$ s disjunktními sčítanci, $\mathsf{B}_1 \sim \mathsf{N}(a)$, $\mathsf{B}_2 \sim \mathsf{X}$. Ti sčítanci jsou tedy neprázdní a tedy B_1 je pravá část množiny B a je ekvivalentní s A.

Buď 0 nový symbol, „počet prvků množiny $\emptyset$“, $\mathsf{N}_0 = \{0\} + \mathsf{N}$.

Cvičení 5,10. Buď $\nu_0(0) = 1$, $\nu_0(x) = x + 1$ pro $x \in \mathsf{N}$; pak $\mathsf{N}_0(0, \nu_0)$ je čítání množiny N_0. Tím čítáním je určeno uspořádání $\prec$: $x \prec \nu_0(x)$. Jest vždy $0 \preceq x$ a pro $x \in \mathsf{N}$, $y \in \mathsf{N}$ jest $x \prec y$, když a jen když $x < y$. Proto pišme prostě $<$ místo $\prec$.

5,11. Definuji-li $0 + x = x + 0 = x$, $0 \,.\, x = x \,.\, 0 = 0$, $x^0 = 1$, $0^0 = 1$, $0^x = 0$ pro $x \neq 0$, pak platí pravidla ve cvičení 5,8, i když a, b, c jsou prvky množiny N_0.

2,6. Spočetné množiny. Nejprve kriterium spočetnosti:

Věta 6,1. *Je-li* M *dobře uspořádaná množina a jsou-li všecky množiny* M_x *pro* $x \in \mathsf{M}$ *konečné, pak* M *je spočetná.*

Dokonce dané uspořádání množiny M *patří k nějakému čítání* (ve smyslu věty 2,1).

Důkaz. Označme a první prvek množiny M. Není-li x poslední prvek množiny M, označme $\nu(x)$ první prvek y, pro který $x < y$. ($<$ je uspořádání množiny M.) Tvrdím, že $\mathsf{M}(a, \nu)$ je čítání množiny M. Že platí (A), (B) a (C), je zřejmé. Je-li $x \neq y$, tedy na př. $x < y$, jest $\nu(x) \leqq y < \nu(y)$, z čehož plyne (D). Nechť $\mathfrak{M}$ splňuje předpoklady podmínky (E). Kdyby neplatilo $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, byla by $\mathsf{M} - \mathfrak{M}$ neprázdná množina a měla by tedy první prvek x. Ježto M_x je konečná (a neprázdná, neboť $a \in \mathsf{M}_x$), má podle věty 4,5 bis poslední prvek y. Jest $y < x$ a pro $y < z$ jest z non $\in \mathsf{M}_x$, t. j. $x \leqq z$. Je tedy $x = \nu(y)$. Avšak z $y < x$ a definice prvku x plyne $y \in \mathfrak{M}$ a tedy $\nu(y) \in \mathfrak{M}$, t. j. $x \in \mathfrak{M}$, což je spor, neboť $x \in \mathsf{M} - \mathfrak{M}$. Tedy vskutku $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$ a tvrzení podmínky (E) je též splněno. A uspořádání $<$ patří k čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$, neboť $x < \nu(x)$.

Věta 6,2. *Každá část spočetné množiny je spočetná.*

Důkaz. Buď M spočetná množina uspořádaná podle věty 2,1 a 2,3, $\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}$. Pak je M' dobře uspořádaná množina a $\mathsf{M}'_x \subset \mathsf{M}_x$. Podle cvičení 4,3 a věty 4,3 je M_x a tedy podle věty 4,4 také M'_x konečná. Podle předešlé věty je tedy M' spočetná.

Cvičení 6,1. Nechť M je spočetná třída, jejíž prvky jsou konečné (spočetné) množiny. Pak možno sestrojit spočetnou třídu M', jejíž prvky jsou konečné (spočetné) množiny *po dvou disjunktní*, a $\Sigma(\mathsf{M}') = \Sigma(\mathsf{M})$. (Podle věty 5,3 možno prvky množiny M očíslovat přirozenými čísly $n \in \overline{\mathsf{M}}$, psát je ve tvaru $f(n)$. $f(n)$ jsou konečné (spočetné) množiny. A teď označme $f'(n)$ množinu těch x, která patří do $f(n)$ a nepatří do žádné dřívější množiny $f(m)$, $m < n$. Ty množiny $f'(n)$, které jsou prázdné, vynechejme. Zbylé $f'(n)$ tvoří třídu M' a f' je prosté zobrazení *části* množiny $\overline{\mathsf{M}}$ na M' (neboť prázdná $f'(n)$ byla vynechána). Jest $f'(n) \subset f(n)$. Že M' vyhovuje, dokáže čtenář sám: $x \in f'(n)$, je-li n první číslo, pro něž $x \in f(n)$, a jen tehdy. Je-li M konečná, je také M' konečná.)

6,2. Je-li M třída uspořádaná pravidlem $<$, jejíž prvky jsou po dvou disjunktní množiny uspořádané pravidly $<$ (k omylu nedojde), pak pro prvky x a y množiny $\Sigma(\mathsf{M})$ definujeme $x < y$ takto: Je-li $x \in \mathsf{X} \in \mathsf{M}$, $y \in \mathsf{Y} \in \mathsf{M}$ a při uspořádání třídy M jest $\mathsf{X} < \mathsf{Y}$, pak $x < y$. Je-li $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$, pak $x < y$ je totéž jako při uspořádání množiny $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$. (T. j. nejprve uspořádáme celé množiny $\mathsf{X} \in \mathsf{M}$ a pak v každé z nich uspořádáme prvky, tak jak už byly.) Jsou-li na př. prvky množiny M jen dva ($\mathsf{X} < \mathsf{Y}$):

$$\mathsf{X} : \ldots,$$
$$\mathsf{Y} : \ldots,$$

pak množina $\mathsf{S} = \Sigma(\mathsf{M}) = \mathsf{X} + \mathsf{Y}$ je uspořádána takto:

$$\underset{\mathsf{X}}{\ldots} \quad \underset{\mathsf{Y}}{\ldots}$$

Dokažte, že $<$ je uspořádání množiny $\Sigma(\mathsf{M})$.

6,3. Je-li M dobře uspořádaná a všecky množiny $\mathsf{X} \in \mathsf{M}$ také, pak $\Sigma(\mathsf{M})$ je dobře uspořádaná.

[První prvek v $\mathsf{C} \subset \Sigma(\mathsf{M})$, $\mathsf{C} \neq \emptyset$ se sestrojí takto: Najdeme první množinu X, pro kterou $\mathsf{XC} \neq \emptyset$ a v XC (což je část množiny X) první prvek.]

6,4. Je-li $\mathsf{S} = \Sigma(\mathsf{M})$, $x \in \mathsf{X} \in \mathsf{M}$, pak

$$\mathsf{S}_x \subset \Sigma(\mathsf{M}_\mathsf{X}) + \mathsf{X}.$$

(T. j.: Prvky $y < x$ jest hledat v množinách $\mathsf{Y} \leqq \mathsf{X}$.)

A teď přijde velmi pohodlné kriterium spočetnosti.

Věta 6,3. *Nechť* M *je spočetná třída, jejíž prvky jsou konečné množiny. Pak* $\Sigma(\mathsf{M})$ *je spočetná.*

Důkaz. Podle cvičení 6,1 možno předpokládat, že množiny patřící do M jsou po dvou disjunktní. Množinu M možno si myslet dobře uspořádanou podle vět 2,1 a 2,3. Rovněž množiny $X \in M$ možno dobře uspořádat. Pak podle cvičení 6,3 je $S = \Sigma(M)$ dobře uspořádaná a podle cvičení 6,4

$$S_x \subset \Sigma(M_X) + X.$$

Avšak podle věty a cvičení 4,3 je M_X konečná třída konečných množin. Podle věty 4,8 je tedy součet napravo konečná množina a tedy podle věty 4,4 je S_x konečná. Tedy podle věty 6,1 je S spočetná.

Cvičení 6,5. Buď M' třída všech množin $N(n) \times N(n)$, $n \in N$. Pak M' je spočetná a $\Sigma(M') = N \times N$.

(Je-li $f(n) = N(n) \times N(n)$, je f prosté zobrazení množiny N na M'. Je-li $m \leqq r$ a $n \leqq r$, na př. $r = m + n$, jest $\{m, n\} \in N(r) \times N(r)$.)

6,6. Je-li X spočetná, pak existuje prosté zobrazení f_X množiny X do N. Pro každou X si zvolme pevně takové f_X. (f_X existuje na základě ekvivalence $X \sim \overline{X}$.)

6,7. Jsou-li A a B spočetné, položme $f(\{x, y\}) = \{f_A(x), f_B(y)\}$. Pak f je prosté zobrazení množiny $A \times B$ do $N \times N$.

6,8. Buď M spočetná třída disjunktních spočetných množin, $x \in X \in M$. Položme $f(x) = \{f_M(X), f_X(x)\}$.

Pak f je prosté zobrazení množiny $\Sigma(M)$ do $N \times N$. (Když se změní x, pak se buď změní X a pak se změní $f_M(X)$. Anebo se X nezmění a pak se musí změnit $f_X(x)$.

6,9. Množina, kterou možno prostě zobrazit do spočetné množiny je spočetná. (Je ekvivalentní s částí spočetné množiny.)

6,10. Množina, která má jen dva prvky, je spočetná. (Jsou-li ty prvky a a b, pišme $f(a) = 1$ a $f(b) = 1 + 1$. Pak f je prosté zobrazení do N.)

Věta 6,4. *Jsou-li* A *a* B *spočetné množiny, pak množiny* $A + B$ *a* $A \times B$ *jsou spočetné.*

Je-li M *spočetná třída, jejíž prvky jsou spočetné množiny, pak je* $\Sigma(M)$ *spočetná.*

Důkaz. Především je $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ spočetná. Neboť je rovna $\Sigma(\mathsf{M}')$, kde M' je podle cvičení 6,5 spočetná a její prvky $\mathsf{N}(n) \times \mathsf{N}(n)$ podle vět 4,3 a 4,8 konečné, tedy $\Sigma(\mathsf{M}')$ podle věty 6,3 spočetná.

Podle cvičení 6,1 je dovoleno předpokládat, že množiny z třídy M jsou po dvou disjunktní.

Spočetnost množin $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ a $\Sigma(\mathsf{M})$ plyne ze spočetnosti množiny $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ a cvičení 6,7, 6,8, 6,9. $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ je jen zvláštní případ součtu $\Sigma(\mathsf{M})$, kde M má jen dva prvky A a B; podle cvičení 6,10 je M skutečně spočetná.

Věta 6,5. *Je-li* B *spočetná a* A *konečná, je* B^{A} *spočetná.*

Důkaz. Podle věty 2,4 pišme $\mathsf{A} = \mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$. Podle věty 2,1 (4), (5) a cvičení 1,22 jest

$$\mathsf{B}^{\mathsf{M}(a)} = \mathsf{B}^{\{a\}}, \quad \mathsf{B}^{\mathsf{M}[\nu(m)]} = \mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)} \times \mathsf{B}^{\{\nu(m)\}}.$$

Množiny $\mathsf{B}^{\{a\}}$ a $\mathsf{B}^{\{\nu(m)\}}$ jsou podle 1,24 ekvivalentní s B a tedy spočetné. Je-li tedy $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)}$ spočetná, je podle věty 6,4 také $\mathsf{B}^{\mathsf{M}[\nu(m)]}$ spočetná. Označíme-li tedy $\mathfrak{M}$ množinu všech m se spočetnou $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)}$, jest $a \in \mathfrak{M}$ a z $m \in \mathfrak{M}\nu_{\mathsf{M}}$ plyne $\nu(m) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $n \in \mathfrak{M}$, t. j. $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(n)} = \mathsf{B}^{\mathsf{A}}$ je spočetná.

Kdyby A byla nekonečná spočetná, pak by B^{A} byla nespočetná i kdyby B byla konečná (s víc než jedním prvkem).

Věta 6,6. *Existuje-li zobrazení spočetné množiny* A *na* B, pak *je* B *spočetná.*

Důkaz. Plyne ze cvičení 4,7 a 6,9.

2,7. Hustá uspořádání spočetných množin. Začneme příkladem. Budu definovat kladné zlomky a čtenář bude sledovat, jak formalisuji to, co o tom ví ze školy. Malá písmena jsou přirozená čísla.

Označíme $\frac{a}{b}$ množinu všech párů $\{c; d\}$ takových, že $ad = bc$. Říkáme, že $\frac{a}{b}$ je kladný zlomek. Označíme $\mathfrak{F}$ množinu všech kladných zlomků.

Cvičení 7,1. $\{a; b\} \in \frac{a}{b}$.

7,2. Je-li $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, pak $ad = bc$. (Neboť $\{c; d\} \in \frac{a}{b}$.)

7,3. Je-li $ad = bc$, jest $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (Jest $ady = bcy$, tedy z $\{x; y\} \in \frac{a}{b}$, t. j. $ay = bx$ plyne $bdx = bcy$, $dx = cy$. $\{x; y\} \in \frac{c}{d}$ a naopak.)

Tedy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ znamená totéž jako $ad = bc$. V tom už čtenář poznává zlomky. Teď ty zlomky uspořádáme pravidlem $<$. Nerovnost $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ bude znamenat totéž jako $ad < bc$.

Je v tom jeden háček; týž zlomek lze psát více způsoby (na př. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, neboť $1 \,.\, 4 = 2 \,.\, 2$). Musíme se přesvědčit, že nerovnosti mezi zlomky nezávisí na tom speciálním způsobu psaní. Je-li tedy $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ a $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dlužno ukázat, že také $\frac{a'}{b'} < \frac{c'}{d'}$. Předpoklady možno psát jinak, totiž $ab' = a'b$, $cd' = c'd$, $ad < bc$. Z toho postupně plyne: $cd' \,.\, a'b = c'd \,.\, a'b = c'd \,.\, ab' = ad \,.\, c'b' < bc \,.\, c'b'$. Tedy $bc \,.\, a'd' < bc \,.\, c'b'$, tedy $a'd' < c'b'$, tedy skutečně $\frac{a'}{b'} < \frac{c'}{d'}$.

Cvičení 7,4. $<$ je uspořádání množiny $\mathfrak{F}$. (Je-li na př. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, jest $ad < bc$, $cf < de$ tedy $adf < bcf < bde$, tedy $af < be$, z toho transitivita.)

Cvičení. 7,5. Je-li $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$, jest $b = c$.

Je-li $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$, jest $a = c$.

Zvolme za m první přirozené číslo, pro které $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ s vhodným n. Podle cvičení 7,4 je tím i n přesně určeno. Čísla m a n jsou charakterisována tím, že pro $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ nutně $m \leqq a$, $n \leqq b$. (m bylo tak už voleno. Kdyby $b < n$, pak by bylo $bm < mn \leqq an$, tedy $bm < an$, t. j. $\frac{m}{n} < \frac{a}{b}$.) $\frac{m}{n}$ je t. zv. „zkrácený tvar" zlomku $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Věta 7,1. *$\mathfrak{F}$ je spočetná množina.*

Důkaz. Zlomky pišme vesměs ve zkráceném tvaru. Buď $f\left(\frac{m}{n}\right) = \{m; n\}$. Je-li $\frac{m_1}{n_1} \neq \frac{m_2}{n_2}$, pak ovšem $\{m_1; n_1\} \neq \{m_2; n_2\}$. Tedy f je prosté zobrazení množiny $\mathfrak{F}$ do $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$, tedy podle věty 6,4 a cvičení 6,9 je $\mathfrak{F}$ spočetná.

Uspořádání $<$ množiny A nazývá se *husté* (dicht, dense, dense) a A *hustě uspořádaná*, když pro každé dva prvky $x \in \mathsf{A}$, $y \in \mathsf{A}$, $x < y$ existují prvky r, s, t množiny A takové, že $r < x < s < y < t$. Při tom předpokládáme, že A má aspoň dva různé prvky.

Věta 7,2. *$\mathfrak{F}$ je hustě uspořádaná množina.*

Důkaz. Nechť $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; pak si čtenář sám zjistí, že

$$\frac{a}{b+1} < \frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd} < \frac{c}{d} < \frac{c+1}{d}.$$

$\mathfrak{F}$ má dva různé prvky, na př. $\frac{1}{1}$ a $\frac{1+1}{1}$: $1 \cdot 1 = 1$, $(1+1) \cdot 1 = 1 + 1$, $1 \neq 1 + 1$, tedy $\frac{1}{1} \neq \frac{1+1}{1}$.

Cvičení 7,6. $\mathfrak{F}$ je nekonečná. (Stačí najít nekonečnou část množiny $\mathfrak{F}$. A to bude množina všech zlomků $\frac{n}{1}$, $n \in \mathsf{N}$.)

7,7. $\frac{m}{1} < \frac{n}{1}$, když a jen když $m < n$.

$\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$, když a jen když $n < m$.

7,8. Hustě uspořádaná množina nemá ani první ani poslední prvek.

7,9. Husté uspořádání není dobré.

7,10. Hustě uspořádaná množina je nekonečná. (Z toho znova plyne, že $\mathfrak{F}$ je nekonečná.)

7,11. Každá množina $\mathsf{A} + \mathfrak{F}$ je nekonečná. (Užij věty 4,4 a inkluse $\mathfrak{F} \subset \mathsf{A} + \mathfrak{F}$.)

7,12. Je-li X uspořádána pravidlem $<$, pak $\mathsf{X} \times \{a\}$ je uspořádána předpisem: $\{x; a\} < \{y; a\}$ pro $x < y$. Jest typ $(\mathsf{X} \times \{a\}) =$ typ X.

Máme-li dokazovat typ $\mathsf{X} =$ typ Y možno tedy předpokládat $\mathsf{XY} = \emptyset$; neboť místo X a Y možno vzít $\mathsf{X} \times \{1\}$ a $\mathsf{Y} \times \{2\}$.

Ve cvičeních 7,13 a 7,14 bude $\mathsf{P}' = \mathsf{P} + \{k\}$, $\mathsf{Q}' = \mathsf{Q} + \{u\}$. P' a Q' budou konečné uspořádané množiny (uspořádání $<$), π podobnost množin P a Q.

7,13. Buď k non ϵ P, a poslední prvek ϵ P, pro který $a < k$, b první, pro který $k < b$, $\pi(a) < u < \pi(b)$. Pak u non ϵ Q. Pro $x \epsilon \mathsf{P}$ buď $\pi'(x) = \pi(x)$, $\pi'(k) = u$. Pak π' je podobnost množin P' a Q'. (Není-li prvku a nebo b, mysleme si vynecháno vše, co se ho týká.)

(Je-li $x \epsilon \mathsf{P}$, $x < k$, pak množina všech prvků z P, které jsou $< k$, je neprázdná. A z konečnosti množiny P plyne existence prvku $a \epsilon \mathsf{P}$ posledního takového, že je $< k$. Z $x < k$ plyne $x \leqq k$.)

7,14. Buď u non ϵ Q, a poslední prvek ϵ Q, pro který $a < u$, b první, pro který $u < b$, $\pi^{-1}(a) < k < \pi^{-1}(b)$. Pak k non ϵ P. Pro $x \epsilon \mathsf{P}$ buď $\pi'(x) = \pi(x)$, $\pi'(k) = u$. Pak π' je podobnost množin P' a Q'.

(Není-li prvku a nebo b, mysleme si vynecháno vše, co se ho týká.)

7,15. Je-li A spočetná, pak existuje prosté zobrazení s množiny $\mathsf{A} + \mathfrak{J}$ na N.

Spočetná množina $\mathfrak{J}$ je při svrchu popsaném t. zv. *přirozeném uspořádání* uspořádána hustě. A to její uspořádání má tu pozoruhodnou a důležitou vlastnost, že je to v podstatě jediné husté uspořádání spočetné množiny:

Věta 7,3. *Nechť* A *je hustě uspořádaná spočetná množina, pak* typ A = typ $\mathfrak{J}$.

Důkaz. Podle cvičení 7,12 možno předpokládat $\mathsf{A}\mathfrak{J} = \emptyset$ a podle cvičení 7,15 existuje prosté zobrazení s množiny $\mathsf{A} +$ $+ \mathfrak{J}$ na N.

Buď ξ resp. η prvek množiny A, resp. $\mathfrak{J}$ s co nejmenším $s(\xi)$, resp. $s(\eta)$. Označme $\mathsf{P}_1 = \{\xi\}$, $\mathsf{Q}_1 = \{\eta\}$, $\wp(\xi) = \eta$. Pak $\wp$ je podobnost množin P_1 a Q_1, $\mathsf{P}_1 \subset \mathsf{A}$, $\mathsf{Q}_1 \subset \mathfrak{J}$.

Vtip našeho důkazu bude ten, že budeme sestrojovat podobnosti jakýchsi množin $\mathsf{P}_x \subset \mathsf{A}$ s jakýmisi $\mathsf{Q}_x \subset \mathfrak{J}$. Ta P_x a Q_x budeme postupně zvětšovat, až se nám podaří sestrojit podobnost celých množin A a $\mathfrak{J}$.

Buď π podobnost množin $\mathsf{P} \subset \mathsf{A}$ a $\mathsf{Q} \subset \mathfrak{J}$. Množina $\mathsf{P} + \mathsf{Q}$ buď konečná. Podle cvičení 4,10 existují tedy prvky $w \in$ $\in (\mathsf{A} + \mathfrak{J}) - (\mathsf{P} + \mathsf{Q})$. Volme w tak, aby $s(w)$ bylo co nejmenší.

Je-li $w \in \mathsf{A}$ (resp. $w \in \mathfrak{J}$), buď a poslední prvek v P (resp. v Q) takový, že $a < w$ a b první takový, že $w < b$. (Není-li prvku a nebo b, myslíme si vynecháno vše, co se ho týká. Jsou-li množiny P a Q prázdné, pak ty podmínky odpadnou vůbec a bude $k = \xi$, $u = \eta$, $\pi' = \wp$.)

A teď rozeznáváme dva případy:

1. Je-li $w \in \mathsf{A}$, budiž $k = w$; z hustoty množiny $\mathfrak{J}$ plyne existence prvku $u \in \mathfrak{J}$ takového, že $\pi(a) < u < \pi(b)$. Volme u tak, aby $s(u)$ bylo co nejmenší.

2. Je-li $w \in \mathfrak{J}$, budiž $u = w$; z hustoty množiny A plyne existence prvku $k \in \mathsf{A}$ takového, že $\pi^{-1}(a) < k < \pi^{-1}(b)$. Volme k tak, aby $s(k)$ bylo co nejmenší.

Podle cvičení 7,13 a 7,14 v každém případě k non $\in \mathsf{P}$ a u non $\in \mathsf{Q}$. Dále, klademe-li $\pi'(x) = \pi(x)$ pro $x \in \mathsf{P}$ a $\pi(k) = u$, je π' podobnost množin $\mathsf{P}' = \mathsf{P} + \{k\}$ a $\mathsf{Q}' = \mathsf{Q} + \{u\}$.

Tím jsme získali methodu, jak podobnost množin P a Q rozšířit na větší množiny P' a Q'. F bude množina všech podobností konečných částí množiny A s částmi množiny $\mathfrak{f}$.

Pro každé $y < x$ ($x \in \mathsf{N}$) mějme již definovánu takovou podobnost $z(y)$. Pro $x > 1$ možno psát $x = m + 1$. Máme tedy zvláště definovánu jakousi podobnost $\pi = z(m)$ konečných množin $\mathsf{P} \subset \mathsf{A}$ a $\mathsf{Q} \subset \mathfrak{f}$. Abychom mohli definovat indukcí, nutno říci, co to je $g(z)$ v F. Naše $g(z)$ bude podobnost π' množin P' a Q' sestrojená svrchu. Podle (E) (pro $\mathsf{M} = \mathsf{N}$) existuje tedy zobrazení f množiny N do F takové, že $f(1) = \wp$ a $f(x) = g(f_x)$ pro $1 < x \in \mathsf{N}$. $f(x) \in \mathsf{F}$ a tedy $f(x)$ je podobnost π_x jakési konečné $\mathsf{P}_x \subset \mathsf{A}$ a jakési konečné $\mathsf{Q}_x \subset \mathfrak{f}$.

(0) Je-li $\pi = \pi_m$, $\mathsf{P} = \mathsf{P}_m$, $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_m$, pak $\pi_{m+1} = \pi'$, $\mathsf{P}_{m+1} = \mathsf{P}'$, $\mathsf{Q}_{m+1} = \mathsf{Q}'$. Tedy $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_{m+1}$, $\mathsf{Q}_m \subset \mathsf{Q}_{m+1}$ a $\pi_{m+1}(x) = \pi(x)$ pro $x \in \mathsf{P}_m$.

[Položme $x = m + 1$, $z = f_x$. Jest $\pi = \pi_m = f(m) = f_x(m) = z(m)$. Tedy $g(z) = \pi'$. Avšak $g(z) = g(f_x) = f(x) = \pi_x$, tedy vskutku $\pi' = \pi_x = \pi_{m+1}$.]

(1) Je-li $m < n$, jest $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_n$, $\mathsf{Q}_m \subset \mathsf{Q}_n$ a pro $x \in \mathsf{P}_m$ jest $\pi_n(x) = \pi_m(x)$.

[Dostane-li se n z m přičteními jedničky 1, platí to podle (0).] Položme obecně $n = m + v$.

Buď $\mathfrak{M}$ množina všech v takových, že (1) platí pro $n = m + v$. Pak, jak jsme řekli, $1 \in \mathfrak{M}$. Buď $v \in \mathfrak{M}$. Pak $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_{m+v} \subset \mathsf{P}_{(m+v)+1} = \mathsf{P}_{m+(v+1)}$. Stejně $\mathsf{Q}_m \subset \mathsf{Q}_{m+(v+1)}$. Pro $x \in \mathsf{P}_m$ jest $\pi_m(x) = \pi_{m+v}(x) = \pi_{(m+v)+1}(x) = \pi_{m+(v+1)}(x)$. Tedy $x + 1 \in \mathfrak{M}$. Z (E) pak plyne $\mathsf{N} \subset \mathfrak{M}$, t. j., že (1) platí pro všechna v, $n = m + v$.

Buď $\mathfrak{P}$ resp. $\mathfrak{Q}$ množina všech x, která patří aspoň do jednoho P_n resp. Q_n. Je-li $x \in \mathsf{P}_n$, položme $\omega(x) = \pi_n(x)$. Podle (1) je $\omega(x)$ určeno prvkem x a nikterak nezávisí na n. Jest $\omega(x) \in \in \mathsf{Q}_n$ a tedy $\omega(x) \in \mathfrak{Q}$. Je-li naopak $y \in \mathfrak{Q}$, pak $y \in \mathsf{Q}_n$ pro jisté n a tedy $y = \pi_n(x)$ pro jisté $x \in \mathsf{P}_n$, t. j. $y = \omega(x)$ pro jisté $x \in \mathfrak{P}$. Je tedy ω zobrazení množiny $\mathfrak{P}$ na $\mathfrak{Q}$.

(2) ω je podobnost množin $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{Q}$.

[Buď $x \in \mathfrak{P}$, $y \in \mathfrak{P}$, $x < y$ a na př. $x \in \mathsf{P}_m$ a $y \in \mathsf{P}_n$. Buď $r = m + n$; pak $r > m$ a $r > n$ a tedy podle (1) $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_r$, $\mathsf{P}_n \subset \mathsf{P}_r$, tedy $x \in \mathsf{P}_r$, $y \in \mathsf{P}_r$. Jest $\omega(x) = \pi_r(x)$ a $\omega(y) = \pi_r(y)$. Ježto π_r je podobnost, jest $\pi_r(x) < \pi_r(y)$, tedy $\omega(x) < \omega(y)$. Tedy ω je podobnost.]

A teď nám už zbývá dokázat, že $\mathfrak{P} = \mathsf{A}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{F}$ a budeme mít podobnost ω množin A a $\mathfrak{F}$. Ježto $\mathfrak{P} \subset \mathsf{A}$, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{F}$, stačí podle cvičení 1,26 dokázat jen

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = \mathsf{A} + \mathfrak{F}. \tag{3}$$

[Kdyby ne, pak by existoval prvek $h \in (\mathsf{A} + \mathfrak{F}) - (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})$. Volme h tak, aby $r = s(h)$ bylo co nejmenší. Množina N_r všech přirozených $x < r$ je konečná a tedy je konečná množina $s^{-1}(\mathsf{N}_r)$ všech $\xi \in \mathsf{A} + \mathfrak{F}$, $s(\xi) < r$. A podle volby čísla r jest pro taková ξ vždy $\xi \in \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, tedy $\xi \in \mathsf{P}_m$ nebo $\in \mathsf{Q}_m$ pro jisté $m = m(\xi)$. m je zobrazení množiny těch ξ na jistou množinu čísel: na množinu všech $m(\xi)$, která je podle věty 4,9 konečná (neboť množina těch ξ je konečná). Má tedy množina těch $m(\xi)$ podle věty 4,7 poslední prvek n. Jest tedy vždy $m(\xi) \leqq n$, tedy podle (1) $\mathsf{P}_{m(\xi)} \subset \mathsf{P}_n$ a $\mathsf{Q}_{m(\xi)} \subset \mathsf{Q}_n$. Tedy všecka naše ξ (pro která $s(\xi) < r$) patří do $\mathsf{P}_n + \mathsf{Q}_n$. Je tedy h takový prvek, že h non $\in \mathsf{P}_n + \mathsf{Q}_n$ a to s co nejmenším $s(h)$. (Je-li $s(h) = 1$, není takových ξ; tu volíme n libovolně.) Buď $x = n + 1$; je-li $\pi = \pi_n$, $\mathsf{P} = \mathsf{P}_n$, $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_n$, pak podle (0) jest $\mathsf{P}_x + \mathsf{Q}_x = \mathsf{P}' + \mathsf{Q}'$. w byl prvek množiny $\mathsf{A} + \mathfrak{F}$, w non $\in \in \mathsf{P} + \mathsf{Q} = \mathsf{P}_n + \mathsf{Q}_n$ s co nejmenším $s(w)$. To je ale charakteristické pro prvek h. Tedy $w = h$. Avšak $w \in \mathsf{P}' + \mathsf{Q}'$, t. j. podle (0) $h \in \mathsf{P}_x + \mathsf{Q}_x$ a tedy přece jenom $h \in \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ proti předpokladu.]

Tím jsme důkaz věty 7,3 dokončili.

Cvičení 7,16. Je-li A podobná množině $\mathfrak{f}$ (t. j. typ $\mathsf{A} =$ $=$ typ $\mathfrak{f}$), pak A je spočetná hustě uspořádaná; A nemá prvního ani posledního prvku.

Cvičení 7,17. Je-li A uspořádaná spočetná, pak existuje $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{f}$ taková, že typ $\mathsf{A} =$ typ $\mathfrak{Q}$.

[Důkaz pro konečnou A je lehký. Pro nekonečnou A je stejný jako předešlý. Jenomže s bude prosté zobrazení množiny A na N, $w \in \mathsf{A} - \mathsf{P}$ s co nejmenším $s(w)$. Případ (2) tedy padá. A (3) zní: $\mathfrak{P} = \mathsf{A}$. A v posledním odstavci nepřímý důkaz pro (3) začíná takto: Kdyby ne (t. j. kdyby $\mathfrak{P} \neq \mathsf{A}$), pak by existoval prvek $h \in \mathsf{A} - \mathfrak{P}$. Ostatek je stejný.]

[Typy uspořádaných spočetných množin jsou tedy typy částí množiny $\mathfrak{f}$. A $\mathfrak{f}$ je sama uspořádaná spočetná. Říkáme, že $\mathfrak{f}$ je *universální model* uspořádaných spočetných množin.]

[$\mathfrak{f}$ je v jistém smyslu nejmenší hustě uspořádaná množina:]

Věta 7,4. *Buď* C *hustě uspořádaná, pak existuje* $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$, typ $\mathsf{A} =$ typ $\mathfrak{f}$.

Důkaz. F bude množina všech konečných částí množiny C. Buď $\mathsf{P} \in \mathsf{F}$, a první, b poslední prvek množiny P; je-li $x \in \mathsf{P} -$ $- \{b\}$, buď x^* první prvek množiny P takový, že $x < x^*$. (Viz věty 4,5 a 4,5 bis.) Vzhledem k hustotě množiny C existují prvky d a c_x v P, $d < a$, $x < c_x < x^*$, $b < c_b$. Je-li $\varphi(x) = c_x$, je φ zobrazení množiny P na množinu $\mathfrak{C}$ všech c_x; je tedy podle věty 4,9 $\mathfrak{C}$ konečná a podle 4,8 je konečná i $\mathsf{P}' = \mathsf{P} + (\mathfrak{C} + \{d\})$, která vznikne z P přidáním prvků c_x a d. Je-li $z(y) \in \mathsf{F}$ pro $y < x$, $x \in \mathsf{N}$, definuji $g(z)$ takto: Položíme $x = m + 1$ a $z(m) = \mathsf{P}$; pak $g(z) = \mathsf{P}'$. Označme $\wp$ libovolnou část množiny C, pozůstávající ze dvou (různých) prvků. A f budiž zobrazení množiny N do F takové, že $f(1) =$ $= \wp$ a $f(x) = g(f_x)$. Existuje podle ($\mathfrak{E}$). Označme $f(x) = \mathsf{P}_x$.

(1) Je-li $m < n$, jest $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_n$; $\mathsf{P}_{m+1} = \mathsf{P}'_m$. (Neboť pro $n = m + 1$, $z = f_n$ jest $\mathsf{P}_n = f(n) = g(f_n) = g(z) = \mathsf{P}'$, kde $\mathsf{P} = z(m) = f_n(m) = f(m) = \mathsf{P}_m$. Tedy $\mathsf{P}_{m+1} = \mathsf{P}'_m$, tedy $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_{m+1}$ a podle cvičení 7,17 obecně $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_n$.)

Je-li $\mathfrak{J}$ třída všech $f(n)$, pak f je zobrazení množiny N na $\mathfrak{J}$, tedy podle věty 6,6 $\mathfrak{J}$ spočetná a podle věty 6,3 $\mathsf{A} = \Sigma(\mathfrak{J})$ spočetná. Jest $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$. Podle věty 7,3 jde jen o to, že A je hustě uspořádaná.

A obsahuje aspoň dva prvky, neboť $\wp \subset \mathsf{A}$. Buď $x \in \mathsf{A}$, $y \in \mathsf{A}$, $x < y$. Jest na př. $x \in \mathsf{P}_m$, $y \in \mathsf{P}_n$, tedy pro $r = m + n$ podle (1) $x \in \mathsf{P}_r$, $y \in \mathsf{P}_r$. Označme $\mathsf{P}_r = \mathsf{P}$; jest $x < x^* \leq y$ a $d < x < c_x < y < c_b$; při tom prvky d, c_x a c_b patří do P', což je podle (1) rovno P_{r+1}. Tedy patří i do A.

2,8. Kontinuum. [Každé číslo α na ose číselné je přesně určeno, víme-li, která racionální čísla (t. j. zlomky s celým čitatelem a jmenovatelem) jsou $<\alpha$. Je-li A množina racionálních čísel $< \alpha$, pak α určí přesně A a A určí přesně α. Je-li $y \in \mathsf{A}$, $x < y$ a x racionální, je také $x \in \mathsf{A}$. Množina A neobsahuje všecka racionální čísla. (Jsou racionální čísla $>\alpha$.) A množina A nemá posledního prvku. (Žádné racionální číslo nepředchází bezprostředně před α.) To nás vede k následujícím definicím.]

Oddíl uspořádané množiny $\mathfrak{A}(<)$ je taková neprázdná pravá část A množiny $\mathfrak{A}$, která nemá posledního prvku a z $x < y$, $y \in \mathsf{A}$ plyne $x \in \mathsf{A}$.

Cvičení 8,1. Je-li A oddíl množiny $\mathfrak{A}$, x první prvek v $\mathfrak{A} - \mathsf{A}$, pak $\mathsf{A} = \mathfrak{A}_x$.

Buď $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$. Mohou nastat dva případy:

I. Množina $\mathfrak{F} - \mathsf{A}$ má první prvek; je to kladný zlomek, který označíme $\alpha(\mathsf{A})$.

8,2. Množina A je prvkem $\alpha(\mathsf{A})$ přesně určena; jest $\mathsf{A} = \mathfrak{F}_{\alpha(\mathsf{A})}$.

II. Množina $\mathfrak{F} - \mathsf{A}$ nemá prvního prvku. Pak množině A přiřadíme nový symbol $\alpha(\mathsf{A})$ a to různým A různé symboly $\alpha(\mathsf{A})$. Množina A určí přesně $\alpha(\mathsf{A})$ a $\alpha(\mathsf{A})$ zase určí A. Taková $\alpha(\mathsf{A})$ jsou t. zv. ***kladná iracionální čísla***.

Symboly $\alpha(\mathsf{A})$ dohromady (ať už odpovídají případu I nebo II) jsou t. zv. ***kladná čísla***.

Je-li A oddíl množiny $\mathfrak{f}^*$ a nemá-li $\mathfrak{f}^*$ — A prvního prvku, říkáme, že A je *mezera* v $\mathfrak{f}^*$.

Iracionálními čísly jsme zaplnili mezery v množině $\mathfrak{f}$. Označme $\mathfrak{P}$ množinu všech kladných čísel.

Cvičení 8,3. Jsou-li A a B oddíly množiny $\mathfrak{f}$, $\alpha(\mathsf{A})$ a $\alpha(\mathsf{B})$ racionální, pak $\alpha(\mathsf{A}) < \alpha(\mathsf{B})$ když a jen když $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$. (Je-li $\alpha(\mathsf{A}) < \alpha(\mathsf{B})$, dokážeme $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$ snadno. A opak nepřímo: Kdyby $\alpha(\mathsf{B}) \leqq \alpha(\mathsf{A})$, pak by $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$; s inklusí $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ by to dalo spor $\mathsf{A} = \mathsf{B}$.)

8,4. Jsou-li A a B oddíly množiny $\mathfrak{f}$, pak buďto $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ anebo $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. [Je-li $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$ a na př. $x \in \mathsf{B} - \mathsf{A}$, pak pro $a \in \mathsf{A}$ nutně $a < x$ (sic by $x \in \mathsf{A}$) a tedy $a \in \mathsf{B}$.]

Teď definujeme uspořádání $<$ množiny $\mathfrak{P}$. $\alpha(\mathsf{A}) < \alpha(\mathsf{B})$ bude znamenat, že $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$. Podle cvičení 8,3 pro racionální čísla to souhlasí s uspořádáním množiny $\mathfrak{f}$.

Cvičení 8,5. Dokažte trichotomii (podle cvičení 8,4) a transitivitu.

8,6. Je-li x kladné racionální číslo, pak $x < \alpha(\mathsf{B})$, když a jen když $x \in \mathsf{B}$. (Užij cvičení 8,2 a 8,4; $\alpha(\mathsf{A}) = x$, $\mathsf{A} = \mathfrak{f}_x$.)

8,7. Je-li x kladné racionální, pak $\alpha(\mathsf{B}) < x$, když a jen když $x \neq \alpha(\mathsf{B})$, x non $\in \mathsf{B}$.

Je-li $\mathsf{P}(<)$ uspořádaná množina, $\mathsf{F} \subset \mathsf{P}$, pak F je **hustá** (dicht, dense, dense) v P, když ke každým dvěma prvkům x, y množiny P, $x < y$, existují prvky r, s, t množiny F takové, že $r < x < s < y < t$.

Cvičení 8,8. Množina, která má aspoň dva prvky, je hustě uspořádána, když a jen když je hustá sama v sobě.

8,9. Když uspořádaná množina obsahuje hustou část, je hustě uspořádaná.

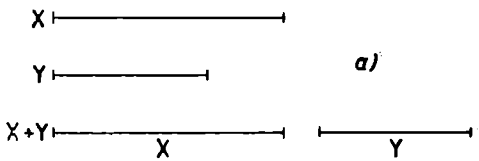
Věta 8,1. *Množina $\mathfrak{f}$ je hustá v $\mathfrak{P}$. Je tedy $\mathfrak{P}$ hustě uspořádaná.*

Důkaz. Pišme $x = \alpha(\mathsf{X})$, $y = \alpha(\mathsf{Y})$, kde X a Y jsou oddíly množiny $\mathfrak{f}$. Jest $\mathsf{X} \subset \mathsf{Y}$, $\mathsf{X} \neq \mathsf{Y}$. Volme $r \in \mathsf{X}$, $s'_1 \in \mathsf{Y} - \mathsf{X}$, $s'_2 \in \mathsf{Y}$, $s'_1 < s'_2$, $t' \in \mathfrak{f} - \mathsf{Y}$. Podle cvičení 8,6 a 8,7 jest $r <$

$< x \leqq s'_1 < s'_2 < y \leqq t'$, tedy $s'_2 < t'$. Z hustého uspořádání množiny $\mathfrak{S}$ plyne tedy existence prvků s a t takových, že $s'_1 < s < s'_2$ a $s'_2 < t' < t$. Pak skutečně $r < x < s <$ $< y < t$.

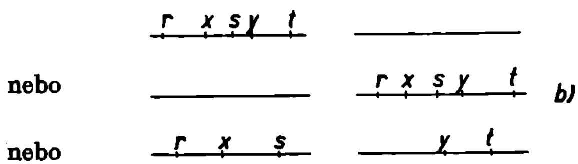
Cvičení 8,10. Je-li A oddíl množiny F, σ_1 podobnost množin F a F', pak $\sigma_1(A)$ je oddíl v množině F'. Je-li σ_2 podobnost množin F' a F, pak $\sigma_2^{-1}(A)$ je oddíl v F'. Je-li A mezera, jsou i $\sigma_1(A)$ i $\sigma_2^{-1}(A)$ mezery.

8,11. Opatřeme si dvě uspořádané disjunktní množiny $X(<)$ a $Y(<)$ podobné množině $\mathfrak{S}$ (srovnej cvičení 7,12). Součet $S = X + Y$ uspořádáme tak, že napřed dáme celou X, pak celou Y a v X a Y prvky uspořádáme tak, jak byly. T. j. je-li $x \in X$, $y \in Y$, jest $x < y$; a je-li x i $y \in X$ (nebo $\in Y$), pak $x < y$ je už definováno uspořádáním množiny X (či Y). Srovnej cvičení 6,2.



Obr. 29a.

Dokažte: X je mezera v S (X ani Y nemají prvních ani posledních prvků). A S je spočetná hustě uspořádaná. Pokyn:



Obr. 29b.

Tedy typ $S =$ typ $\mathfrak{S}$.

Věta 8,2. *V množině $\mathfrak{R}$ jsou mezery. Existují tedy iracionální čísla.*

Důkaz. V množině S ze cvičení 8,11 jsou mezery. Je to množina podobná k $\mathfrak{R}$ a tedy podle cvičení 8,10 jsou mezery i v $\mathfrak{R}$.

Cvičení 8,12. Je-li A oddíl množiny $\mathfrak{P}$, pak průnik $\mathsf{A}\mathfrak{R}$ je oddíl množiny $\mathfrak{R}$.

8,13. Je-li A mezera v $\mathfrak{P}$, pak $\mathsf{A}\mathfrak{R}$ je mezera v $\mathfrak{R}$. (Je-li $a \in \mathfrak{R} - \mathsf{A}\mathfrak{R}$, pak $a \in \mathfrak{P} - \mathsf{A}$, tedy existuje $b < a$, $b \in \mathfrak{P} - \mathsf{A}$. Je-li r racionální, $b < r < a$, jest $r < a$ a $r \in \mathfrak{R} - \mathsf{A}\mathfrak{R}$.)

Věta 8,3. *V množině $\mathfrak{P}$ není mezer.*

Důkaz. Buď A mezera v množině $\mathfrak{P}$. Pak $\mathsf{A}\mathfrak{R}$ je mezera v $\mathfrak{R}$, $\alpha(\mathsf{A}\mathfrak{R})$ iracionální číslo. Kdyby $\alpha(\mathsf{A}\mathfrak{R}) \in \mathsf{A}$, pak by existovalo $\xi \in \mathsf{A}$, $\alpha(\mathsf{A}\mathfrak{R}) < \xi$ a $\eta \in \mathsf{A}$, $\xi < \eta$. Tedy by existovalo racionální r, $\xi < r < \eta$, tedy $r \in \mathsf{A}$, t. j. $r \in \mathsf{A}\mathfrak{R}$, $\alpha(\mathsf{A}\mathfrak{R}) < r$, což odporuje cvičení 8,6. Tedy $\alpha(\mathsf{A}\mathfrak{R}) \in \mathfrak{P} - \mathsf{A}$. Ježto A je mezera, existuje $\xi \in \mathfrak{P} - \mathsf{A}$, $\xi < \alpha(\mathsf{A}\mathfrak{R})$, tedy racionální r, $\xi < r < \alpha(\mathsf{A}\mathfrak{R})$, tedy podle cvičení 8,6 $r \in \mathsf{A}\mathfrak{R}$, tedy $r \in \mathsf{A}$, tedy $\xi \in \mathsf{A}$, což je spor.

Věta 8,4. *Množina $\mathfrak{P}$ je nespočetná.*

Důkaz. Podle věty 8,1 je $\mathfrak{P}$ hustě uspořádaná. Kdyby byla spočetná, byla by podle věty 7,3 podobná množině $\mathfrak{R}$ a podle věty 8,2 a cvičení 8,10 by v ní byly mezery, což odporuje větě 8,3.

Cvičení 8,14. Hustě uspořádaná množina bez mezer je nutně nespočetná.

8,15. Mají-li množiny C_1 a C_2 každá aspoň dva prvky a jsou-li $\mathsf{A}_1 \subset \mathsf{C}_1$ a $\mathsf{A}_2 \subset \mathsf{C}_2$ v nich husté a spočetné, pak existuje podle věty 7,3 podobnost s množin A_1 a A_2.

8,16. Je-li A hustá část množiny C, pak pro $x \in \mathsf{A}$ jest $\mathsf{AC}_x = \mathsf{A}_x$. Pišme tedy $\mathsf{AC}_x = \mathsf{A}_x$ i když $x \in \mathsf{C} - \mathsf{A}$. A_x je oddíl množiny A a jest $x = \sup \mathsf{A}_x$ ve smyslu cvičení 3,8. Jest $x < y$, když a jen když $\mathsf{A}_x \subset \mathsf{A}_y$, $\mathsf{A}_x \neq \mathsf{A}_y$.

Hustě uspořádaná množina, ve které není mezer, se nazývá *spojitá*.

Cvičení 8,17. Je-li D oddíl spojité C, pak $\mathsf{C} - \mathsf{D}$ má první prvek x a jest $\mathsf{D} = \mathsf{C}_x$, $x = \operatorname{supr} \mathsf{D}$.

8,18. Je-li A hustá ve spojité C, D oddíl množiny A, pak existuje přesně jedno $x \in \mathsf{C}$, $\mathsf{D} = \mathsf{A}\mathsf{C}_x = \mathsf{A}_x$, $x = \operatorname{supr} \mathsf{D}$.

Uspořádaná množina nazývá se *kontinuum*, když je spojitá a obsahuje hustou spočetnou část.

Cvičení 8,19. $\mathfrak{P}$ je kontinuum. Obecně: Je-li typ $\mathsf{C} =$ $=$ typ $\mathfrak{P}$, pak C je kontinuum.

A teď uvidíme, že $\mathfrak{P}$ je v podstatě jediné kontinuum:

Věta 8,5. *Je-li* C *kontinuum, pak* typ $\mathsf{C} =$ typ $\mathfrak{P}$.

Dokonce platí víc:

Buďte C_1 *a* C_2 *dvě kontinua,* $\mathsf{A}_1 \subset \mathsf{C}_1$, $\mathsf{A}_2 \subset \mathsf{C}_2$. *Množiny* A_1 *a* A_2 *buďte spočetné,* A_1 *hustá v* C_1, A_2 *hustá v* C_2. *Buď s podobnost množin* A_1 *a* A_2. *Pak existuje jedna jediná podobnost* s *množin* C_1 *a* C_2 *taková, že pro* $x \in \mathsf{A}_1$ *je vždy* $\mathsf{s}(x) = s(x)$.

Důkaz. Užíváme označení a výsledků předchozích cvičení a cvičení 3,7 až 3,9. Je-li $x \in \mathsf{C}_1$, je $\mathsf{A}_1\mathsf{C}_{1x} = \mathsf{A}_{1x}$ oddíl v A_1, $s(\mathsf{A}_{1x})$ oddíl v A_2, tedy $s(\mathsf{A}_{1x}) = \mathsf{A}_{2\xi}$ pro jedno určité $\xi \in \mathsf{C}_2$. Položíme $\mathsf{s}(x) = \xi$.

Je-li $\xi \in \mathsf{C}_2$, je $\mathsf{A}_{2\xi}$ oddíl množiny A_2, $s^{-1}(\mathsf{A}_{2\xi})$ je oddíl množiny A_1 a tedy $s^{-1}(\mathsf{A}_{2\xi}) = \mathsf{A}_{1x}$. A jest $s(\mathsf{A}_{1x}) = \mathsf{A}_{2\xi}$, tedy $\xi =$ $= \mathsf{s}(x)$. Je tedy s zobrazení množiny C_1 na C_2.

Je-li $x < y$, jest $\mathsf{A}_{1x} \subset \mathsf{A}_{1y}$, $\mathsf{A}_{1x} \neq \mathsf{A}_{1y}$, tedy $s(\mathsf{A}_{1x}) \subset s(\mathsf{A}_{1y})$, $s(\mathsf{A}_{1x}) \neq s(\mathsf{A}_{1y})$; pro $\mathsf{s}(x) = \xi$ a $\mathsf{s}(y) = \eta$ tedy $\mathsf{A}_{2\xi} \subset \mathsf{A}_{2\eta}$, $\mathsf{A}_{2\xi} \neq \mathsf{A}_{2\eta}$, tedy $\xi < \eta$. Tedy s je podobnost.

Je-li zvláště $x \in \mathsf{A}_1$, je x první prvek množiny $\mathsf{A}_1 - \mathsf{A}_{1x}$, tedy $s(x)$ první prvek množiny $\mathsf{A}_2 - s(\mathsf{A}_{1x})$. A $s(\mathsf{A}_{1x})$ je oddíl množiny A_2, tedy $s(\mathsf{A}_{1x}) = \mathsf{A}_{2s(x)}$, tedy vskutku $\mathsf{s}(x) = s(x)$.

Buď σ podobnost množin C_1 a C_2, $\sigma(x) = s(x)$ pro $x \in \mathsf{A}_1$. Pro $x \in \mathsf{C}_1$ je A_{1x} oddíl množiny A_1, $\sigma(\mathsf{A}_{1x}) = s(\mathsf{A}_{1x})$ oddíl množiny A_2 a je roven $\mathsf{A}_{2\xi}$, kde $\xi = \mathfrak{s}(x)$. Jest $x = \operatorname{supr} \mathsf{A}_{1x}$, $\xi = \operatorname{supr} \mathsf{A}_{2\xi}$. Tedy podle cvičení 3,8 jest $\xi = \sigma(x)$, t. j. $\sigma(x) = \mathfrak{s}(x)$. Podobnost $\mathfrak{s}$ je tedy jen jedna.

Cvičení 8,20. Je-li B spojitá, pak existuje $\mathsf{C} \subset \mathsf{B}$ taková, že typ C = typ $\mathfrak{P}$.

[Vol podle věty 7,4 $\mathsf{A}_2 \subset \mathsf{B}$, typ A_2 = typ $\mathfrak{J}$; buď $\mathsf{A}_1 = \mathfrak{J}$, $\mathsf{C}_1 = \mathfrak{P}$, $\mathsf{C}_2 = \mathsf{B}$. Pak stačí zopakovat první a třetí odstavec předešlého důkazu: $\mathsf{C} = \mathfrak{s}(\mathsf{C}_1)$.]

[Je tedy kontinuum v jistém smyslu nejmenší spojitá množina.]

8,21. Ještě si uvědomëme toto:

Ke každému $x \in \mathfrak{P}$ existuje přirozené m takové, že $x < \frac{m}{1}$.

(Pro jistý kladný zlomek $\frac{m}{n}$ jest $x < \frac{m}{n} \leqq m$.)

2,9. Arabské číslice. [Nejdříve dvě maličkosti o přirozených číslech. Definici množiny N_0 viz na konci odst. 2,5.

Věta 9,1. *Buď $m \in \mathsf{N}$, $n \in \mathsf{N}$, pak existuje $x \in \mathsf{N}_0$ a $y \in \mathsf{N}_0$, $y < n$ tak, že $m = nx + y$. Čísla x a y jsou čísly m a n jednoznačně určena.*

Důkaz. Je-li $m < n$, stačí zvoliti $x = 0$ a $y = m$. A jiná volba není možná. Kdyby $1 \leqq x$, pak by totiž $n \leqq nx \leqq nx + y = m$. A z $x = 0$ plyne $m = n \cdot 0 + y = 0 + y = y$. Buď tedy $n \leqq m$. Pak množina všech $n\xi$, $\xi \in \mathsf{N}$, $n\xi < m$ je neprázdná (neboť obsahuje $n \cdot 1 = n$). A je konečná, neboť je to část konečné $\mathsf{N}(m)$. Existuje tedy poslední mezi všemi takovými ξ; to označíme x. Označme $y = m - nx$. (Pro $m = nx$ jest $y = 0$.) Pak ovšem $m = nx + y$. A jest $y < n$. (Kdyby totiž $n \leqq y$, pak by $y = n + z$ $(z = y - n)$ a tedy $m = n \cdot (x + 1) + z$ a tedy $n\,(x + 1) \leqq m$ proti definici čísla x.)

Buď nyní $m = nx' + y'$, $y' < n$. Pak $nx + y = nx' + y'$; je-li na př. $x < x'$, jest $x' = x + u$, $u \in \mathsf{N}$. Tedy $nx + y =$

$= nx + nu + y'$, tedy $n \leqq nu \leqq nu + y' = y$, což je spor. Tedy $x' = x$ a z rovnice $nx + y = nx + y'$ plyne též $y' = y$.

Buď $m \in \mathsf{N}$. Každému $i \leqq m$ buď přiřazeno určité číslo $a_i \in \mathsf{N}_0$. Opatřme si po dvou disjunktní množiny A_i tak, aby A_i měla a_i prvků. Je-li $a_i = 0$, bude $\mathsf{A}_i = \emptyset$. Jinak položme $\mathsf{A}_i = \mathsf{N}(a_i) \times \{i\}$. Buď $\mathfrak{J}$ třída všech množin A_i, $i \leqq m$.

Cvičení 9,1. Třída $\mathfrak{J}$ je konečná; je tedy $\sum(\mathfrak{J})$ konečná množina.

Počet prvků množiny $\sum(\mathfrak{J})$ je přirozené číslo nebo nula; označíme jej $\sum\limits_i^m a_i$. Buď $\sum\limits_i^0 a_i = 0$.

Cvičení 9,2. $\sum\limits_i^1 a_i = a_i$; $\sum\limits_i^m a_i = \sum\limits_i^{m-1} a_i + a_m$. Obecně pro $n < m$ jest $\sum\limits_i^m a_i = \sum\limits_i^n a_i + \sum\limits_i^{m-n} a_{i+n}$.

9,3. $\sum\limits_i^m ca_i = c \sum\limits_i^m a_i$. (Dokažte indukcí.)

Ve všech příštích úvahách bude d pevné přirozené číslo $\neq 1$. D bude množina $\{0\} + \mathsf{N}(d - 1)$. Prvkům množiny D budeme říkat *cifry*; ξ (s přídavnými indexy) značí vždy cifry.

Cvičení 9,4. $d^m = \sum\limits_i^m (d - 1)\, d^{m-i} + 1$. (Dokažte indukcí.)

A nyní přejděme k vlastnímu předmětu odstavce 2,9!]

m-člennou řadou cifer rozumím zobrazení f množiny $\mathsf{N}(m)$ do D. T. j.: Každému z čísel $1, 2, \ldots, m$ přiřazuje f jakousi cifru $f(i)$, t. zv. i-tá cifra řady f. $f(1)$ je t. zv. *první* cifra. Označme ${}^m_d\mathsf{N}$ množinu všech m-členných řad cifer, jichž první cifra není nula 0. Buď ${}_d\mathsf{N}$ součet třídy všech ${}^m_d\mathsf{N}$ pro $m \in \mathsf{N}$; $x \in {}_d\mathsf{N}$ tedy značí, že pro jisté $m \in \mathsf{N}$ je x m-členná řada cifer s první cifrou různou od nuly.

[Na př. pro d rovno desíti jsou cifry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$ atd. A na př. čtyrčlennou řadu f cifer, pro kterou $f(1) = 1$, $f(2) = 9$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$ si můžeme znázornit takto:

$$1 \quad 9 \quad 4 \quad 1.$$

A ${}_d\mathsf{N}$ je množina všech takových řad, které nezačínají nulou, ať mají kolik chtějí cifer.]

Je-li $f \in {}_d\mathsf{N}$, pak jest $f \in {}^m_d\mathsf{N}$ přesně pro jedno m; píšeme $m = \pi(f)$; $\pi(f)$ je t. zv. *počet cifer* řady f.

Cvičení 9,5. Množiny ${}^m_d\mathsf{N}$ jsou konečné. Buď (m) množina všech $f \in {}_d\mathsf{N}$ s počtem cifer $\pi(f) \leqq m$. Pak (m) je konečná.

(${}^m_d\mathsf{N} \subset \mathsf{D}^{\mathsf{N}(m)}$. A konečnost množiny (m) plyne indukcí:

$$(m + 1) = (m) + {}^{m+1}_d\mathsf{N}.)$$

Pro $f \in {}_d\mathsf{N}$ a $g \in {}_d\mathsf{N}$ bude nerovnost $f < g$ znamenat, že nastane jeden z obou následujících případů:

I. $\pi(f) < \pi(g)$,

II. $\pi(f) = \pi(g) = m$; zobrazení f a g množiny $\mathsf{N}(m)$ do D jsou různá. Existují tedy taková $x \in \mathsf{N}(m)$, že $f(x) \neq g(x)$. A první z těch x má tu vlastnost, že $f(x) < g(x)$.

[Tedy $f < g$ znamená buďto, že řada f je kratší než g, že má méně cifer. Anebo že sice obě ty řady mají stejně mnoho cifer, ale na prvním místě, na kterém se od sebe liší, má f menší cifru než g. Tak uspořádáváme čísla psaná v desítkové soustavě arabským způsobem. $54 < 111$, protože 54 má méně cifer. $1939 < 1941$, protože cifer je stejně mnoho a první cifry, kde se naše čísla liší, jsou $3 < 4$.]

Cvičení 9,6. $<$ je uspořádání množiny ${}_d\mathsf{N}$. Je to uspořádání dobré. (Vyberme z neprázdné $\mathsf{C} \subset {}_d\mathsf{N}$ ty řady, které mají co nejméně cifer, řekněme m cifer. Pak $\mathsf{C} \,.\, {}^m_d\mathsf{N}$ je neprázdná konečná a její první prvek je první v C.)

Cvičení 9,7. Všecky množiny ${}_d\mathsf{N}_x$ jsou konečné.

9,8. Množina ${}_d\mathsf{N}$ je nekonečná. (Každému $n \in \mathsf{N}$ přiřaďme nějakou n-člennou řadu cifer $\in {}_d\mathsf{N}$.)

Podle vět 5,1 a 2,5 existuje tedy jedno jediné čítání ${}_d\mathsf{N}(a, \nu)$ množiny ${}_d\mathsf{N}$, $x < \nu(x)$ pro všechna $x \in {}_d\mathsf{N}$. Podle věty 5,3 pak existuje jedno jediné zobrazení φ množiny N na ${}_d\mathsf{N}$ takové, že $\varphi(1) = a$, $\varphi(x + 1) = \nu[\varphi(x)]$; φ je jediná podobnost množin N a ${}_d\mathsf{N}$. Tedy množiny N a ${}_d\mathsf{N}$ si přesně a to jediným způsobem odpovídají a to tak, že si odpovídají i jejich čítání a uspořádání. Na tom spočívá arabský způsob psaní čísel, rozšířený po celém civilisovaném světě. Arabské číslice jsou vlastně prvky z ${}_d\mathsf{N}$, konečné řady cifer nezačínající nulou. Přesně si odpovídají s přirozenými čísly.

Prvkům množiny ${}_d\mathsf{N}$ říkejme *číslice*; $\varphi(x)$ je číslice příslušná k číslu $x \in \mathsf{N}$.

Cvičení 9,9. Buď $f \in {}_d\mathsf{N}$. Pak $g = \nu(f)$, t. j. první prvek g množiny ${}_d\mathsf{N}$, pro který $f < g$, se dostane takto:

Buď $m = \pi(f)$. I. Všecky cifry $f(x)$ řady f jsou rovny $d - 1$. Pak g má $m + 1$ cifer, první $= 1$ a ostatní $= 0$.

II. Poslední cifra $f(m)$ řady f je různá od $d - 1$. Pak g má m cifer, poslední rovnu $f(m) + 1$ a ostatní stejné jako f.

III. f nemá všecky cifry $= d - 1$, při tom však $f(m) = d - 1$. Pak buď x poslední takové číslo $\in \mathsf{N}(m)$, pro které $f(x) \neq d - 1$, tedy pro $x < y \in \mathsf{N}(m)$ už $f(y) = d - 1$. V tomto případě g má zase m cifer a to pro $y < x$ jest $g(y) = f(y)$, $g(x) = f(x + 1)$ a pro $x < y$ jest $g(y) = 0$.

Cvičení 9,10. Buď $f = \varphi(1)$ číslice příslušná k číslu 1. Pak f má jednu cifru: $\pi(f) = 1$ a jest $f(1) = 1$. (Neboť f je první prvek množiny ${}_d\mathsf{N}$.)

Má-li f m cifer, označme $f' = \sum\limits_i^m f(i)\, d^{m-i}$.

Cvičení 9,11. Případy I, II a III jako cvičení v 9,9, $g = \nu(f)$.

I. $f' = \sum\limits_i^m (d - 1)\, d^{m-i}$, $g' = d^m$;

II. $f' = \sum\limits_i^m f(i)\, d^{m-i}$, $g' = \sum\limits_i^m f(i)\, d^{m-i} + 1$;

III. $f' = \sum_{i}^{x-1} f(i)\, d^{m-i} + f(x)\, d^{m-x} + \sum_{i}^{m-x} (d-1)\, d^{m-(i+x)}$,

$$g' = \sum_{i}^{x-1} f(i)\, d^{m-i} + (f(x)+1)\, d^{m-x}.$$

Podle cvičení 9,4 je v každém případě $g' = f' + 1$.

A teď přijde věta, která nás poučí o „místním" významu cifer v arabské číslici.

Věta 9,2. *Buď x přirozené číslo, $g = \varphi(x)$ příslušná číslice; nechť g má $m = \pi(g)$ cifer. Pak*

$$x = \sum_{i}^{m} g(i)\, d^{m-i}.$$

(Stručně: $x = g'$, kde $g = \varphi(x)$.)

Důkaz. Podle principu indukce stačí to dokázat přímo pro $x = 1$ a pro obecné x jen za předpokladu, že platí obdoba pro $y = x - 1$ $(x = y + 1)$. Je-li $x = 1$, pak podle cvičení 9,10 $m = 1$ a $\sum_{i}^{1} f(i)\, d^{1-i} = f(1)\, d^{1-1} = 1\,.\,1 = 1 = x$.

Obecně označme $y = x - 1$, $f = \varphi(y)$ a předpokládejme už $y = f'$. Označme $g = \nu(f)$. Pak $\varphi(x) = \varphi(y+1) = \nu[\varphi(y)] = \nu(f) = g$ a podle cvičení 9,11 jest $g' = f' + 1 = y + 1 = x$. Tedy $x = g'$, kde $g = \varphi(x)$, c. b. d. $g(i)$ je t. zv. *i-tá cifra* čísla x.

Věta 9,3. *Každé přirozené číslo se dá psát jedním jediným způsobem ve tvaru*

$$\sum \xi_i d^{m-i}, \qquad \xi_1 \neq 0.$$

Důkaz. Je-li $x \in \mathsf{N}$, pak pro $g = \varphi(x)$, $\xi_i = g(i)$ je podle věty 9,2

$$x = \sum_{i}^{m} \xi_i d^{m-i}, \qquad \xi_1 \neq 0.$$

Je-li mimo to $x = \sum_{i}^{m^*} \xi_i^* d^{m^*-i}$, $\xi_1^* \neq 0$, g^* číslice o $m^* = \pi(g^*)$ cifrách, $g^*(i) = \xi_i^*$, pak, ježto φ je zobrazení na ${}_d\mathsf{N}$, existuje $y \in \mathsf{N}$, $g^* = \varphi(y)$. A podle věty 9,2 jest $y = \sum_i^{m^*} \xi_i^* d^{m^*-i} = x$. Tedy $g^* = \varphi(x) = g$, čili $m^* = m$ a $\xi_i^* = g^*(i) = g(i) = \xi_i$ a oba součty se úplně shodují.

[Je-li d deset, f číslice o čtyřech cifrách, $f(1) = 1$, $f(2) = 9$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$, pak f píšeme: 1941. A podle věty 9,2 příslušné přirozené číslo je rovno $1 \,.\, d^3 + 9 \,.\, d^2 + 4 \,.\, d + 1$.]

Cvičení 9,12. Jest $\sum_i^{m} \xi_i^{m-i} < d^r$, když a jen když $m \leqq r$.

2.10. Rozvoje kladných čísel. [Označení a názvosloví jako v 2,9.]

Posloupnost cifer je zobrazení množiny N do D, t. j. prvek množiny D^{N}. $\mathfrak{f}(1)$ resp. $\mathfrak{f}(i)$ je t. zv. první resp. i-tá cifra posloupnosti $\mathfrak{f}$.

Jsou-li $\mathfrak{f}$ a $\mathfrak{g}$ dvě různé posloupnosti cifer, pak existují $x \in \mathsf{N}$ taková, že $\mathfrak{f}(x) \neq \mathfrak{g}(x)$. Je-li x první takové přirozené číslo, pak $\mathfrak{f} < \mathfrak{g}$ znamená, že $\mathfrak{f}(x) < \mathfrak{g}(x)$. Tedy posloupnosti cifer uspořádáme jako shora ve slovníku podle prvního místa, na kterém se liší.

Cvičení 10,1. $<$ je uspořádání množiny D^{N}.

Rozvojem rozumějme pár $\{a; \mathfrak{f}\}$, jehož první člen a je přirozené číslo nebo nula, t. j. $a \in \mathsf{N}_0$ a jehož druhý člen $\mathfrak{f}$ je posloupnost cifer, t. j. $\mathfrak{f} \in \mathsf{D}^{\mathsf{N}}$. Při tom vždy vylučujeme pár $\Theta = \{0; \mathfrak{v}\}$, kde $\mathfrak{v}$ je posloupnost cifer, jejíž všecky cifry jsou rovny nule. Označme ${}_d\mathfrak{R}$ množinu všech rozvojů. $\mathfrak{f}(x)$ je x-tá cifra rozvoje $\{\ldots; \mathfrak{f}\}$.

Cvičení 10,2. ${}_d\mathfrak{R} = \mathsf{N}_0 \times \mathsf{D}^{\mathsf{N}} - \{\Theta\}$.

Jsou-li $\{a; \mathfrak{f}\}$ a $\{b; \mathfrak{g}\}$ dva rozvoje, pak $\{a; \mathfrak{f}\} < \{b; \mathfrak{g}\}$ znamená, že buďto $a < b$ anebo, že $a = b$ a při tom $\mathfrak{f} < \mathfrak{g}$. Zase srovnáváme jako ve slovníku napřed podle prvních členů a potom podle druhých členů.

Cvičení 10,3. $<$ je uspořádání množiny ${}_d\mathfrak{R}$.

[Kladná čísla píšeme ve formě desetinných rozvojů (d = deset). Před desetinnou čárkou je a (přirozené číslo anebo nula) za ní $\mathfrak{f}$ (posloupnost cifer). To odpovídá našim rozvojům $\{a; \mathfrak{f}\}$.] Každému rozvoji $\{a; \mathfrak{f}\}$ patří jakási t. zv. ***kladná číslice*** (v soustavě d). Tu číslici píšeme ve tvaru $a, \mathfrak{f}$.

[Na př. rozvoji $\{5; 876000\ldots\}$ patří číslice $5{,}876000\ldots$ Teď ale některým rozvojům patří stejné číslice. Na př. rozvojům $\{366{,}000\ldots\}$ a $\{365{,}999\ldots\}$ patří číslice $366{,}000\ldots$ a $365{,}999\ldots$ a ty jsou si rovny. A stejně rozvojům $\{8{,}94506000\ldots\}$ a $\{8{,}94505999\ldots\}$ patří stejné číslice $8{,}94506000\ldots =$ $= 8{,}94505999\ldots$].

Označme $\mathfrak{G}$ množinu rozvojů $\{a; \mathfrak{f}\}$ takových, že pro jisté $l \in \mathsf{N}$ jest vždy $\mathfrak{f}(x) = 0$ pro $l \leqq x$. (T. j. od l-té cifry počínaje jsou v posloupnosti $\mathfrak{f}$ samé nuly.)

Podobně označme $\mathfrak{G}^*$ množinu rozvojů $\{b; \mathfrak{g}\}$ takových, že pro jisté $l \in \mathsf{N}$ jest vždy $\mathfrak{g}(x) = d - 1$ pro $l \leqq x$. (T. j. od l-té cifry počínaje jsou v posloupnosti $\mathfrak{g}$ samé „devítky" $d - 1$.)

A teď každému rozvoji $\mathfrak{a} = \{a; \mathfrak{f}\} \in \mathfrak{G}$ bude patřit jakýsi rozvoj $\mathfrak{b} = \{b; \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{G}^*$; označíme $\mathfrak{b} = \tau(\mathfrak{a})$.

I. Jsou-li *všecky* cifry $\mathfrak{f}(x)$ nuly, pak ($a \neq 0$ a) $b = a - 1$ a všecky cifry $\mathfrak{g}(x)$ jsou $d - 1$.

Cvičení 10,4. Nejsou-li všecky cifry $\mathfrak{f}(x)$ nuly, pak existuje jedno jediné $k \in \mathsf{N}$ takové, že $\mathfrak{f}(k) \neq 0$ a pro $k < x$ je už vždy $\mathfrak{f}(x) = 0$. ($k = l - 1$, kde l je první takové, že pro $l \leqq x$ vždy $f(x) = 0$.) k-tá cifra je „poslední od nuly různá".

II. Buď k-tá cifra $\mathfrak{f}(k)$ poslední od nuly různá. Pak $b = a$, pro $x < k$ bude $\mathfrak{g}(x) = \mathfrak{f}(x)$, $\mathfrak{g}(k) = \mathfrak{f}(k) - 1$ a pro $k < x$ všecky cifry $\mathfrak{g}(x)$ jsou $d - 1$.

Cvičení 10,5. τ je *prosté zobrazení* množiny $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. A teď každému rozvoji $\{a; \mathfrak{f}\}$, pokud nepatří ani do $\mathfrak{G}$, ani do $\mathfrak{G}^*$ (t. j. nemá-li za desetinnou čárkou skoro samé nuly, nebo skoro samé „devítky"), patří číslice $a, \mathfrak{f}$. Patří-li $\mathfrak{a} = \{a; \mathfrak{f}\}$

do $\mathfrak{S}$, pak mu v $\mathfrak{S}^*$ patří jistý rozvoj $\tau(\mathfrak{a}) = \{b; \mathfrak{g}\}$; a těm dvěma rozvojům patří číslice $a, \mathfrak{f}$ a $b, \mathfrak{g}$, které považujeme za sobě rovné: $a, \mathfrak{f} = b, \mathfrak{g}$. A dán-li rozvoj $\{b; \mathfrak{g}\}$ v $\mathfrak{S}^*$, pak mu podle cvičení 10,5 patří v $\mathfrak{S}$ právě rozvoj $\{a; \mathfrak{f}\}$ a číslice $b, \mathfrak{g}$ možno psát též ve tvaru $a, \mathfrak{f}$. Ty kladné číslice, které mají dva rozvoje (jeden v $\mathfrak{S}$ a druhý v $\mathfrak{S}^*$), dáme do množiny ${}_d\mathfrak{F}$ a ostatní do ${}_d\mathfrak{J}$. Označíme-li ${}_d\mathfrak{P}$ množinu všech kladných číslic (v soustavě d), pak ${}_d\mathfrak{P} = {}_d\mathfrak{F} + {}_d\mathfrak{J}$. Každá číslice z ${}_d\mathfrak{F}$ má dva rozvoje: jeden patří do $\mathfrak{S}$; je to t. zv. rozvoj *prvního druhu* a druhý patří do $\mathfrak{S}^*$, t. zv. rozvoj *druhého druhu*. Číslice z ${}_d\mathfrak{J}$ mají každá jen jeden rozvoj.

[5,876000... a 5,875999... je záhodno považovat za tutéž číslici. Číslicemi totiž budeme označovat kladná čísla. A víme, že mezi dvěma kladnými čísly je vždy nějaké kladné číslo. Avšak mezi rozvoji {5,876000...} a {5,875999...} není už žádného jiného rozvoje, $\tau(\mathfrak{a})$ je totiž podle cvičení 10,6 poslední rozvoj, který je před $\mathfrak{a}$. Takový „skok“ musíme odstranit; odstraníme ho tím, že $\mathfrak{a}$ a $\tau(\mathfrak{a})$ stáhneme dohromady, číslice určené rozvoji $\mathfrak{a}$ a $\tau(\mathfrak{a})$ považujeme za sobě rovné.]

[A teď chceme ${}_d\mathfrak{P}$ uspořádat. K tomu cíli předešleme:]

Cvičení 10,6. Buď $\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}$. Pak při uspořádání rozvojů je $\tau(\mathfrak{a})$ poslední prvek v ${}_d\mathfrak{R}$, který je $< \mathfrak{a}$. Podobně: $\mathfrak{a}$ je první prvek v ${}_d\mathfrak{R}$, který je $> \tau(\mathfrak{a})$. Toho užijte ve cvičení

10,7. Buďte $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ dva různé rozvoje. Je-li $\mathfrak{b} \in \mathfrak{S}$, pak: $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, když a jen když $\mathfrak{a} \leqq \tau(\mathfrak{b})$; je-li $\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}$, pak: $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, když a jen když $\tau(\mathfrak{a}) < \mathfrak{b}$; je-li $\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}$ i $\mathfrak{b} \in \mathfrak{S}$ pak: $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, když a jen když $\tau(\mathfrak{a}) < \tau(\mathfrak{b})$.

Množinu ${}_d\mathfrak{P}$ uspořádáme pravidlem $<$ takto: Jsou-li $a, \mathfrak{f}$ a $a', \mathfrak{f}'$ dvě různé kladné číslice, pak $a, \mathfrak{f} < a', \mathfrak{f}'$ značí, že pro příslušné rozvoje $\{a; \mathfrak{f}\} < \{a'; \mathfrak{f}'\}$.

[Je v tom háček: některým číslicím patří dva rozvoje a musíme se tedy přesvědčiti, že je jedno, kterého z obou rozvojů užijeme. K tomu slouží cvičení 10,8, ve kterém užijeme výsledků cvičení 10,7.]

Cvičení 10,8. Jsou-li $a, \mathfrak{f} = \mathfrak{b}, \mathfrak{g}$ a $a', \mathfrak{f}' = b', \mathfrak{g}'$ dvě různé kladné číslice, pak $\{a; \mathfrak{f}\} < \{b; \mathfrak{g}\}$, když a jen když $\{a'; \mathfrak{f}'\} < < \{b'; \mathfrak{g}'\}$. Ať užijeme těch či oněch rozvojů, je uspořádání $<$ stejné.

10,9. $<$ je uspořádání množiny ${}_d\mathfrak{P}$.

10,10. Buďte α a β kladné číslice, $\alpha < \beta$, $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ příslušné rozvoje; pro číslice z ${}_d\mathfrak{F}$ berme pro určitost rozvoje prvního druhu. Jest $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. A možno nalézt rozvoje prvního druhu $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ a $\mathfrak{t}$ tak, že $\mathfrak{r} < \mathfrak{a} < \mathfrak{s} < \mathfrak{b} < \mathfrak{t}$. Značíme-li příslušné číslice řecky, bude $\varrho < \alpha < \sigma < \beta < \tau$; ϱ, σ i τ patří do ${}_d\mathfrak{F}$.

Věta 10,1. *Množina ${}_d\mathfrak{F}$ je hustá v ${}_d\mathfrak{P}$.*

Důkaz. Je-li $\alpha < \beta$, pak sestrojme ϱ, σ a τ podle cvičení 10.

Je-li C uspořádaná, $\emptyset \neq \mathsf{A} \subset \mathsf{C}$, pak podle cvičení 3,8 jest nejvýš jeden *první* prvek α v C takový, že pro všechna $\beta \in \mathsf{A}$ jest $\beta \leqq \alpha$. Značíme $\alpha = \operatorname{supr} \mathsf{A}$ (*supremum* či *horní hranice* množiny A). Neprázdná $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$ je v C *shora ohraničená*, když existuje *vůbec nějaké* takové α, že pro všechna $\beta \in \mathsf{A}$ jest $\beta \leqq \alpha$.

Cvičení 10,11. Buď $\emptyset \neq \mathsf{A} \subset {}_d\mathfrak{P}$; buď $\mathfrak{A}$ množina všech rozvojů číslic $\in \mathsf{A}$. Je-li A shora ohraničená, je též $\mathfrak{A}$ shora ohraničená. Je-li $\mathfrak{a} = \operatorname{supr} \mathfrak{A}$ a jestli α je číslice určená rozvojem $\mathfrak{a}$, pak $\alpha = \operatorname{supr} \mathsf{A}$.

10,12. Je-li $\emptyset \neq \mathfrak{Q} \subset {}_d\mathfrak{R}$, $x \in \mathsf{N}$, pak existuje cifra r_x taková, že $r_x = \mathfrak{f}(x)$ pro jistý rozvoj $\{\ldots; \mathfrak{f}\}$ a při tom vždy $\mathfrak{g}(x) \leqq r_x$, když $\{\ldots; \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{Q}$. ($r_x$ je největší, t. j. poslední z x-tých cifer rozvojů patřících do $\mathfrak{Q}$.)

Věta 10,2. *Každá shora ohraničená neprázdná množina v ${}_d\mathfrak{P}$ má horní hranici.*

Důkaz. Buď $\mathfrak{A}$ množina všech rozvojů čísel $\in \mathsf{A}$, kde A je v ${}_d\mathfrak{P}$ shora ohraničená. Pak podle cvičení 10,11 je $\mathfrak{A}$ v ${}_d\mathfrak{R}$ shora ohraničená a jde jen o existenci rozvoje $\operatorname{supr} \mathfrak{A}$. Buď $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a} = \{a, \ldots\}$ pro všechna $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$. Pak je $\mathfrak{a} \leqq \{a + 1, \mathfrak{v}\}$ a tedy $\mathfrak{x} \leqq \{a + 1, \mathfrak{v}\}$ pro všechna $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$. Je-li tedy $\mathfrak{x} =$

$= \{x, \ldots\}$, pak $x \leqq a + 1$. Je-li X množina všech x, pro která existuje $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{x} = \{x, \ldots\}$, pak je tedy $\emptyset \neq \mathsf{X} \subset \subset \mathsf{N}(a + 1)$ a tedy X konečná množina $\subset \mathsf{N}_0$. Má tedy X poslední prvek r.

V principu definice indukcí položme $\mathsf{M} = \mathsf{N}$, $\mathsf{F} = \mathsf{D}$. Buď $\mathfrak{Q}_1$ množina všech $\mathfrak{x} = \{r, \ldots\} \in \mathfrak{A}$; ježto $r \in \mathsf{X}$, tak taková $\mathfrak{x}$ existují a $\mathfrak{Q}_1 \neq \emptyset$. Podle cvičení 10,12 buď $\wp$ největší z prvních cifer rozvojů $\in \mathfrak{Q}_1$.

Je-li $x \in \mathsf{N}$ a $z(y) \in \mathsf{D}$ pro $y < x$, označme $\mathfrak{Q}_x$ množinu všech $\mathfrak{x} = \{r, \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{A}$ takových, že pro $y < x$ vždy $\mathfrak{g}(y) = z(y)$. Je-li $\mathfrak{Q}_x \neq \emptyset$, buď $g(z)$ největší z x-tých cifer rozvojů $\in \mathfrak{Q}_x$. Jinak $g(z) = 0$. Podle principu definice indukcí sestrojíme zobrazení $\mathfrak{f}$ množiny N do D (tedy posloupnost cifer) tak, že $f(1) = \wp$ a $\mathfrak{f}(x) = g(\mathfrak{f}_x)$ pro $x > 1$. Buď $\mathfrak{a} = \{r, \mathfrak{f}\}$. Tvrdím: $\mathfrak{a} = \operatorname{supr} \mathfrak{A}$.

Stačí tedy dokázat:

(1) Je-li $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$, pak $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a}$.

(2) Je-li $\mathfrak{y} < \mathfrak{a}$, pak existuje $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{y} < \mathfrak{x}$.

(3) $\mathfrak{a} \in {}_d\mathfrak{R}$, t. j.: je-li $r = 0$, pak $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{v}$.

Označme teď $\mathfrak{Q}_x$ množinu všech $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{x} = \{r, \mathfrak{g}\}$, $\mathfrak{g}(y) = \mathfrak{f}(y)$ pro $y < x$. T. j. volili jsme $z = \mathfrak{f}_x$. Především:

(4) Jest vždy $\mathfrak{Q}_x \neq \emptyset$.

(Pro $x = 1$ to je pravda. Nechť $\mathfrak{Q}_x \neq \emptyset$. Podle (E) jde jen o to, že $\mathfrak{Q}_{x+1} \neq \emptyset$. Jest $\mathfrak{f}(x) = g(\mathfrak{f}_x)$ největší z x-tých cifer rozvojů $\in \mathfrak{Q}_x$ a tedy existují rozvoje $\mathfrak{x} = \{r, \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{Q}_x$ takové, že $\mathfrak{g}(x) = \mathfrak{f}(x)$. Jest $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_{x+1}$.)

[Důkaz tvrzení (1): Buď $\mathfrak{x} = \{r', \mathfrak{g}\}$. Jest $r' \in \mathsf{X}$ a tedy $r' \leqq r$. Kdyby $\mathfrak{a} < \mathfrak{x}$, pak by též $r \leqq r'$, tedy $r' = r$. Tedy $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_1$ a tedy $\mathfrak{g}(1) \leqq \mathfrak{f}(1)$ a z $\mathfrak{a} < \mathfrak{x}$ a $r' = r$ plyne $\mathfrak{f}(1) \leqq \mathfrak{g}(1)$, tedy $\mathfrak{f}(1) = \mathfrak{g}(1)$. Buď x první přirozené číslo, pro které $\mathfrak{f}(x) \neq \mathfrak{g}(x)$. Pak tedy $\mathfrak{f}(x) < \mathfrak{g}(x)$ a $\mathfrak{f}(y) = \mathfrak{g}(y)$ pro $y < x$. Označíme-li $z = \mathfrak{f}_x$, pak tedy $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_x$ a tedy $\mathfrak{g}(x) \leqq g(z) = g(\mathfrak{f}_x) = \mathfrak{f}(x)$, což je spor, který ukazuje, že nutně $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a}$.

Důkaz tvrzení (2): Je-li $\gamma = \{r', \mathfrak{g}\} < \mathfrak{a}$, pak buďto $r' < r$ a pak $\gamma < \mathfrak{x}$ pro $\mathfrak{x} \in \mathsf{X}$. Anebo $r' = r$. Pak buďto $\mathfrak{g}(1) < \mathfrak{f}(1) = \wp$ a pak $\gamma < \mathfrak{x}$ pro $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_1$. Anebo $\mathfrak{g}(1) = \mathfrak{f}(1)$.

V tom případě ($r' = r$ a $\mathfrak{g}(1) = \mathfrak{f}(1)$) buď x první přirozené číslo, pro které $\mathfrak{g}(x) \neq \mathfrak{f}(x)$. Pak tedy $\mathfrak{g}(x) < \mathfrak{f}(x)$ a pro $y < x$ vždy $\mathfrak{g}(y) = \mathfrak{f}(y)$. Podle (4) možno volit $\mathfrak{x} = \{r, \mathfrak{h}\} \in \mathfrak{Q}_{x+1}$. Jest $\mathfrak{h}(y) = \mathfrak{f}(y)$ pro $y \leqq x$. Tedy pro $y < x$ jest $\mathfrak{g}(y) = \mathfrak{h}(y)$ a $\mathfrak{g}(x) < \mathfrak{h}(x)$. Tedy vskutku $\gamma < \mathfrak{x}$.

Důkaz tvrzení (3): Je-li $r \neq 0$ nebo $\mathfrak{f}(1) \neq 0$, jsme hotovi. Buď $\mathfrak{a} = \{0, \mathfrak{v}\}$. Podle (4) existuje $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{x} = \{0; \mathfrak{g}\}$, $\mathfrak{g}(1) = 0$. Existují přirozená x taková, že $\mathfrak{g}(x) \neq 0$. Buď x první takové. Pro $y < x$ jest $\mathfrak{g}(y) = 0 = \mathfrak{v}(y)$, čili $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_x$. A teď je $0 = \mathfrak{v}(x) = \mathfrak{f}(x) = \mathfrak{g}(\mathfrak{f}_x)$ největší z x-tých cifer rozvojů $\in \mathfrak{Q}_x$, tedy $\mathfrak{g}(x) \leqq 0$, což je spor. Tím je vše dokázáno.]

Cvičení 10,14. Je-li A oddíl v ${}_d\mathfrak{P}$, pak existuje $x = \operatorname{supr} \mathsf{A}$. x je první prvek množiny ${}_d\mathfrak{P} - \mathsf{A}$. Tedy v ${}_d\mathfrak{P}$ není mezer.

10,15. ${}_d\mathfrak{P}$ *je spojitá.*

[Chceme dokázat, že ${}_d\mathfrak{P}$ je kontinuum. Za tím účelem najdeme v ${}_d\mathfrak{P}$ hustou spočetnou část. To bude ${}_d\mathfrak{F}$. A sestrojíme dokonce podobnost množiny ${}_d\mathfrak{F}$ a jisté množiny kladných zlomků, která má základní důležitost pro vztahy množiny kladných čísel $\mathfrak{P}$ a množiny kladných číslic ${}_d\mathfrak{P}$.

Je-li d deset, pak číslu $\dfrac{8754060}{d^9}$ patří číslice

0,00875406000... a podobně. To formalisujeme.]

Buď $\mathfrak{Z}_1$ množina všech zlomků $\dfrac{a}{d^r}$, $a < d^r$. Jest $a = \sum\limits_i^m \xi_i d^{m-i}$ ($\xi_1 \neq 0$) a podle věty 8,3 jsou cifry ξ_i jednoznačně určeny; $m \leqq r$ podle cvičení 8,11. Buď $\delta = r - m$.

[Z čísla $\dfrac{a}{d^r}$ uděláme číslici tak, že před desetinnou čárkou je nula $\left(\text{neboť } \dfrac{a}{d^r} < \dfrac{1}{1}\right)$ a za ní cifry ξ_i, ale posunuté tak, aby poslední cifra ξ_m byla na r-tém místě, t. j. posuneme o δ napravo; ξ_1 bude $(\delta + 1)$-tá cifra, ξ_2 bude $(\delta + 2)$-tá cifra atd. V hořejším případě $a = 8754060$, $r = 9$, $m = 7$, $\delta = 2$ a $\xi_1 = 8$ je za desetinnou čárkou na třetím, $\xi_2 = 7$ na čtvrtém místě atd.]

Zlomku $z = \dfrac{a}{d^r}$, $a = \sum\limits_i^m \xi_i d^{m-i}$ přiřadíme číslici $s(z) = 0, \mathfrak{f}$, kde pro $x \leqq \delta$ jest $\mathfrak{f}(x) = 0$, potom pro $\delta < x \leqq r$ jest $\mathfrak{f}(x) = \xi_{x-\delta}$ (tedy cifra ξ_y stojí na místě $(y + \delta)$-tém: $\xi_y = \mathfrak{f}(y + \delta)$ a pro $r < x$ vždy $\mathfrak{f}(x) = 0$.

[Je v tom malý háček. Zlomek z se dá psát všelijak; na př. $\dfrac{3650}{d^6} = \dfrac{365}{d^5}$ a pod. Je otázka, zda $s(z)$ vyjde vždy stejně, bez ohledu na způsob psaní zlomku z. Že ano, ukáže se v následujících cvičeních.]

Cvičení 10,17. Je-li $\dfrac{a}{d^r} = \dfrac{a'}{d^{r'}}$, pak $a < d^r$, když a jen když $a' < d^{r'}$. Je-li $r = r'$, pak též $a = a'$; je-li $a = a'$, pak též $r = r'$. Je-li $r < r'$, pak $a' = ad^{r'-r}$.

Označme $\varrho = r' - r$; $r' = r + \varrho$; $\varrho \in \mathrm{N}_0$.

10,18. V témže označení jest $a' = \sum\limits_i^m \xi_i d^{(m+\varrho)-i}$.

10,19. Buď $\xi_i = 0$ pro $m < i$, $m' = m + \varrho$. Jest $a' = \sum\limits_i^{m'} \xi_i d^{m'-i}$ a $m' \leqq r'$.

10,20. Je-li $\delta' = r' - m'$, jest $\delta' = \delta$.

10,21. $s\left(\dfrac{a'}{d^{r'}}\right) = 0$, $\mathfrak{f}'$ se dostane takto: Pro $x \leqq \delta'$ jest $\mathfrak{f}'(x) = 0$, pro $\delta' < x \leqq r'$ jest $\mathfrak{f}'(x) = x_{x-\delta}$ a jinak $\mathfrak{f}'(x) = 0$.

10,22. $s\left(\dfrac{a'}{d^{r'}}\right) = s\left(\dfrac{a}{d^r}\right)$, c. b. d.

A teď studujme zobrazení s.

Buď ${}_d\mathfrak{F}_1$ množina takových $a, \mathfrak{f} \in {}_d\mathfrak{F}$, pro které $a = 0$ v rozvoji prvního druhu $\{a; \mathfrak{f}\}$.

Cvičení 10,23. s je zobrazení množiny $\mathfrak{Z}_1$ na ${}_d\mathfrak{F}_1$.

(Je-li $\mathfrak{f}(\delta + 1)$ první od nuly různá cifra v $0, \mathfrak{f}$ a pro $r < x$ vždy $\mathfrak{f}(x) = 0$, pak $0, \mathfrak{f} = s\left(\dfrac{a}{d^r}\right)$, kde $a = \sum_i^m \xi_i d^{m-i}$, $m = r - \delta$, $\xi_i = \mathfrak{f}(i + \delta)$.)

10,24. s je podobnost množin $\mathfrak{Z}_1$ a ${}_d\mathfrak{F}_1$. (Buď $\dfrac{a}{d^r} < \dfrac{b}{d^r}$. (Jmenovatele možno vždy brát stejné.) Pak $a < b$, $a = \sum_i^m \xi_i d^{m-i}$, $b = \sum_i^m \eta_i d^{m-i}$. Je-li $m = n$, pak pro první i, kde se ξ_i a η_i liší, jest $\xi_i < \eta_i$. A je-li $m < n$, $s\left(\dfrac{a}{d^r}\right) = 0, \mathfrak{f}$, $s\left(\dfrac{b}{d^r}\right) = 0, \mathfrak{g}$ (s rozvoji prvního druhu), pak $\mathfrak{f}(r - n + 1)$ je nula, kdežto $\mathfrak{g}(r - n + 1) = \eta_1$.)

Dosud jsme se omezovali na „pravé" zlomky, t. j. $< \dfrac{1}{1}$. Teď rozšíříme s na množinu $\mathfrak{Z}$ všech zlomků $\dfrac{a}{d^r}$ (ať už $a < d^r$ či $d^r \leqq a$). Zlomek $\dfrac{a}{b}$ se dá psát jako „součet celého čísla x a pravého zlomku $\dfrac{y}{b}$" a to jediným způsobem takto: Podle věty 8,1 určeme $x \in \mathsf{N}_0$, $y \in \mathsf{N}_0$ tak, aby $a = bx + y$, $y < b$. Pak $\dfrac{a}{b} = \dfrac{bx + y}{b}$ a čísla x a $\dfrac{y}{b}$ jsou zlomkem $\dfrac{a}{b}$ přesně určena podle

Cvičení 10,25. Je-li $\dfrac{bx + y}{b} = \dfrac{b'x' + y'}{b'}$, $y < b$, $y' < b'$, pak $x = x'$ a $\dfrac{y}{b} = \dfrac{y'}{b'}$.

($bb'x + b'y = bb'x' + by'$, $b'y < bb'$, $by' < bb'$, tedy podle věty 8,1.)

10,26. $\frac{bx + y}{b} < \frac{b'x' + y'}{b'}$ znamená, že buďto $x < x'$, anebo $x = x'$ a $\frac{y}{b} < \frac{y'}{b'}$.

(Z těch podmínek odvoďte napřed nerovnost daných zlomků. A je-li naopak splněna daná nerovnost, pak musí být ty podmínky splněny, neboť z opačných podmínek by plynula opačná nerovnost daných zlomků.)

Zlomku $\frac{a}{d^r}$ tedy jednoznačně patří číslo $x \in \mathsf{N}_0$ a zlomek $\frac{y}{d^r} \in \mathfrak{Z}_1$ tak, že $a = d^r x + y$.

Nahraďme teď ty pravé zlomky $\frac{y}{d^r}$ číslicemi $s\left(\frac{y}{d^r}\right) = 0, \mathfrak{f}$. (Je-li $y = 0$, pak položme $s\left(\frac{y}{d^r}\right) = 0, \mathfrak{f}$, kde $\mathfrak{f} = \mathfrak{v}$, t. j. $\mathfrak{f}(k) = 0$ pro všecka $k \in \mathsf{N}$. Zlomku $\frac{a}{d^r}$ přiřaďme číslici $x, \mathfrak{f}$ (rozvoje jsou prvního druhu). Označme $\mathfrak{s}\left(\frac{a}{d^r}\right) = x, \mathfrak{f}$.

[Na př. $\frac{2947}{d^2} = \frac{29 \,.\, d^2 + 47}{d^2}$, $x = 29$, $y = 47$; pravému zlomku $\frac{y}{d^2} = \frac{47}{d^2}$ patří číslice $s\left(\frac{47}{d^2}\right) = 0{,}47000\ldots$ a tedy číslu $\frac{2947}{d^2}$ patří $x, 47000\ldots = 29{,}47000\ldots$; x je počet „celků" a $\frac{y}{d^r}$ udává to, co přebývá na celky; je to pravý zlomek a ten určí místa za desetinnou čárkou.]

Cvičení 10,27. $\mathfrak{s}$ je zobrazení množiny $\mathfrak{Z}$ na ${}_d\mathfrak{F}$. [K číslici $x,\mathfrak{f}$ (rozvoj prvního druhu) určeme především pravý zlomek $\frac{y}{d^r}$, $s\left(\frac{y}{d^r}\right) = 0{,}\mathfrak{f}$ a pak $x,\mathfrak{f} = \mathfrak{s}\left(\frac{a}{d^r}\right)$, kde $a = d^r x + y$.]

10,28. $\mathfrak{s}(x) = s(x)$ pro $x \in \mathfrak{Z}_1$.

10,29. $\mathfrak{s}$ je podobnost množin $\mathfrak{Z}$ a ${}_d\mathfrak{F}$ (podle cvičení 10,26 a 10,24: $x,\mathfrak{f}$ se uspořádá napřed podle x a pak podle $\mathfrak{f}$ čili podle $\frac{y}{d^r}$. A to odpovídá uspořádání v $\mathfrak{Z}$.)

$\mathfrak{s}$ nám umožnilo každému zlomku $z \in \mathfrak{Z}$ přiřadit číslici $\mathfrak{s}(z) \in {}_d\mathfrak{F}$. Jde nám teď o to, rozšířit toto přiřazení tak, aby každému kladnému číslu x patřila kladná číslice $\sigma(x)$; aby $\sigma(x)$ všecky číslice vyčerpalo, aby se zachovalo uspořádání (t. j. σ byla podobnost) a pro $x \in \mathfrak{Z}$, aby $\sigma(x) = \mathfrak{s}(x)$. Ve větě 10,3 se ukáže, že jest přesně jedno takové σ; tak budeme umět psát kladná x ve tvaru kladných číslic $\sigma(x)$. Předešleme:

Cvičení 10,30. Pro $n \in \mathsf{N}$ jest $n < d^n$. (Pro $n = 1$ to platí. Nechť $n < d^n$. Pak $n + 1 < d^n + 1 \leqq d^n + (d - 1)\, d^n = d^{n+1}$. Indukcí tedy plyne $n < d^n$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$.)

10,31. Množina $\mathfrak{Z}$ je hustá v $\mathfrak{P}$. ($\mathfrak{Z}$ je hustá v $\mathfrak{F}$: Pro $ab' < a'b$ volme $n = bb'$ a x největší přirozené, pro které $xb' < a'd^n$. Pak $a'd^n \leqq (x + 1)\, b'$. Kdyby $bx \leqq ad^n$, pak by (ježto $bb' < d^n$) bylo $(x + 1)\, bb' < (ab' + 1)\, d^n \leqq a'bd^n$, tedy $(x + 1)\, b' < a'd^n$. Tedy $\frac{a}{b} < \frac{x}{d^n} < \frac{a'}{b'}$.

10,32. ${}_d\mathfrak{F}$ je spočetná (podle cvičení 10,29).

10,33. ${}_d\mathfrak{P}$ je kontinuum; ${}_d\mathfrak{F}$ je hustá v ${}_d\mathfrak{P}$.

Věta 10,3. *Existuje jedna jediná podobnost σ množin $\mathfrak{P}$ a ${}_d\mathfrak{P}$ taková, že pro $x = \frac{a}{d^r}$ (a a r přirozená), jest $\sigma(x) = \mathfrak{s}\left(\frac{a}{d^r}\right)$.*

Každému kladnému číslu x patří kladná číslice $\sigma(x)$.

Důkaz. Plyne z předchozích cvičení a věty 8,5: $\mathsf{C}_1 = \mathfrak{P}$, $\mathsf{A}_1 = \mathfrak{Z}$, $\mathsf{C}_2 = {}_d\mathfrak{P}$, $\mathsf{A}_2 = {}_d\mathfrak{F}$; místo s a s je tu $\mathfrak{s}$ a σ. A teď pro jednoduchost nebudeme mezi číslem x a číslicí $\sigma(x)$ vůbec rozeznávat. Bude nám na př. jedno $\frac{365}{d^8}$ (d je deset) anebo 0,00000365000... Množina $\mathfrak{P}$ a ${}_d\mathfrak{P}$ bude jedno a totéž. To smíme udělat vzhledem k větě 10,3. Uspořádání a tedy i vše, co je definováno na základě uspořádání (první prvek, horní hranice a pod.) je stejné v $\mathfrak{P}$ a ${}_d\mathfrak{P}$. Zatím jsme mluvili jen o uspořádání a proto jsme klidně mohli zrušit rozdíl mezi kladnými čísly a kladnými číslicemi (v soustavě d). Zvláště také $\mathfrak{Z}$ a ${}_d\mathfrak{f}$ je jedno a totéž.

Je-li $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}(<)$ a existuje-li $\alpha \in \mathsf{C}$ takové, že pro všecka $a \in \mathsf{A}$ jest $\alpha \leqq a$, pak je A *zdola ohraničená*. Je-li mezi těmi α nějaké největší, je to t. zv. *infimum* či *dolní hranice* množiny A; píšeme $\alpha = \inf \mathsf{A}$.

Cvičení 10,34. Každá zdola ohraničená množina $\emptyset \neq$ $\neq \mathsf{A} \subset \mathfrak{P}$ má (jednu jedinou) dolní hranici.

(Zkus to udělat na $\mathfrak{P}_d$, což je jedno, přizpůsobením důkazu věty 10,1.)

Z toho plyne: Každá neprázdná zdola ohraničená část kontinua má (jednu jedinou) dolní hranici.

2,11. Reálná čísla. [Nejdřív si řekneme, co je to součet, rozdíl, součin a podíl kladných zlomků; $a, a', b, b', x, x', y, y'$ budou přirozená čísla:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'};$$

$$\text{je-li } \frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}, \text{ pak } \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - a'b}{bb'};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}; \qquad \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{a'b}.$$

Je-li α kladný zlomek nebo 0, pak $\alpha + 0 = \alpha - 0 = 0 +$ $+ \alpha = \alpha$, $0 \,.\, \alpha = \alpha \,.\, 0 = 0$, $\alpha - \alpha = 0$; dělení nulou: $\alpha : 0$ vůbec nezavádíme.

Cvičení 11,1. Součet, rozdíl, součin a podíl jsou jednoznačně určeny danými zlomky. (Na př. pro součet: Je-li $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{x'}{y'} = \dfrac{a'}{b'}$, t. j. $bx = ay$, $b'x' = a'y'$, pak

$$\frac{xy' + x'y}{yy'} = \frac{(xy' + x'y)\,bb'}{yy'bb'} = \frac{(ab' + a'b)\,yy'}{bb'yy'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}.)$$

Jest $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1}$, $\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1}$; je-li $b < a$, pak $\frac{b}{1} < \frac{a}{1}$ a $\frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a-b}{1}$. To nám dává právo ve jmenovateli jedničku vynechávat a psát prostě a místo $\frac{a}{1}$.]

Teď si rozšíříme obor čísel. Každému kladnému číslu α bude odpovídat určité t. zv. *záporné* číslo $-\alpha$; pro zřetelnost se místo α psává $+\alpha$. *Reálná* čísla jsou jednak kladná čísla, jednak záporná čísla, jednak číslo $0 = +0 = -0$. Číslo 0 má rozvoj $0,\mathfrak{v}$ ($\mathfrak{v}(x) = 0$ pro všecka x). Označme $\mathfrak{R}$ množinu reálných čísel a $\mathfrak{N}$ množinu záporných čísel; $\mathfrak{P}$ je množina kladných čísel.

Početní operace si zavedeme nejdříve pro *racionální* čísla; jsou to čísla $+\alpha$ a $-\alpha$, kde α je kladný zlomek, $\alpha \in \mathfrak{F}$, a mimo to číslo 0. Množinu všech racionálních čísel označíme *Rac*.

[Jsou-li α a β kladné zlomky nebo nula, pak definujeme:

1. $(+\alpha) + (+\beta) = +(\alpha + \beta)$; $(-\alpha) + (-\beta) = -(\alpha + \beta)$; je-li $\beta < \alpha$, pak $(+\alpha) + (-\beta) = (-\beta) + (+\alpha) = +(\alpha - \beta)$, a $(-\alpha) + (+\beta) = (+\beta) + (-\alpha) = -(\alpha - \beta)$;

2. $(\pm\alpha) - (+\beta) = (\pm\alpha) + (-\beta)$; $(\pm\alpha) - (-\beta) = (\pm\alpha) + (+\beta)$;

3. $(+\alpha) \cdot (+\beta) = (-\alpha) \cdot (-\beta) = +\alpha\beta$; $(+\alpha) \cdot (-\beta) = (-\alpha) \cdot (+\beta) = -\alpha\beta$;

4. $(+\alpha) : (+\beta) = (-\alpha) : (-\beta) = +(\alpha : \beta)$; $(+\alpha) : (-\beta) = (-\alpha) : (+\beta) = -(\alpha : \beta)$; při tom $\beta \neq 0$; nulou nedělíme.]

Cvičení 11,2. Jsou-li $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{c}$ racionální čísla, pak

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c});\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a};$$
$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{b});\ \mathfrak{a} + 0 = \mathfrak{a};\ \mathfrak{a} - \mathfrak{a} = 0;$$

$$(ab)c = a\,(bc);\ ab = ba;\ a : b = a \,.\, b^{-1},\ (b \neq 0);$$
$$a \,.\, 1 = a;\ a \,.\, a^{-1} = 1;$$
$$a\,(b + c) = ab + ac.$$

(Při tom označujeme $-b = 0 - b$ a $b^{-1} = 1 : b$ pro $b \neq 0$.) Množinu $\mathfrak{R}$ si uspořádáme. Jsou-li α a β kladná čísla, pak $-\alpha < 0$; $0 < +\beta$; $-\alpha < +\beta$; je-li $\alpha < \beta$, pak ovšem $+\alpha < +\beta$, avšak $-\beta < -\alpha$.

Cvičení 11,3. $<$ je uspořádání množiny $\mathfrak{R}$.

Označme ${}_dRac$ množinu všech $+\alpha$ a $-\alpha$, kde $\alpha \in {}_d\mathfrak{F} + \{0\}$. Tedy ${}_dRac$ je množina těch reálných čísel, jichž číslice v soustavě d má za („desetinnou“) čárkou od jistého místa samé nuly: $\pm\, x,\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}(y) = 0$ pro $y > r$.

Cvičení 11,4. ${}_dRac \subset Rac$. Množiny ${}_dRac$ a Rac jsou spočetné a husté v $\mathfrak{R}$.

11,5. $\mathfrak{R}$ je kontinuum. (Každá shora ohraničená část má horní hranici.)

Každé reálné $a \neq 0$ se dostane z určitého kladného α, tak, že opatříme znaménkem $+$ či $-$. To α označujeme $|a|$ a říkáme mu *absolutní hodnota* čísla a. Pro $a = 0$ klademe: $|0| = 0$.

Cvičení 11,6. Pro racionální a a b, $a < b$ jest $b - a$ kladné a $a - b$ záporné číslo.

Jest $a < b$, když a jen když existuje kladné racionální u, $b = a + u$.

Cvičení 11,7. Pro racionální a a b jest:

$$|a + b| \leqq |a| + |b|;\quad |a - b| \leqq |a| + |b|;$$
$$||a| - |b|| \leqq |a - b|;\quad |ab| = |a| \,.\, |b|;$$
$$|a : b| = |a| : |b|;\quad |a - b| = |b - a|.$$

(Na př. první vzorec: Buď $|a| = \alpha$, $|b| = \beta$. Podle 1 jest $|a + b|$ rovno buď $\alpha + \beta$ nebo $\alpha - \beta$ nebo $\beta - \alpha$ a to je vždy $\leqq \alpha + \beta$.)

[Z pravidel ve cvičeních 11,2, 11,6, (a 11,7) plynou všecka ostatní pravidla o počítání s racionálními čísly. S racionálními čísly budu počítat jako se známou věcí: čtenář si sám v každém jednotlivém případě ověří správnost na základě udaných pravidel. „Racionální" zkracuji „rac".]

Cvičení 11,8. Buď d přirozené > 1 a užívejme označení minulého odstavce. Buď $d^{-x} = 1 : d^x$. Ke každému $\varepsilon \in \mathfrak{P}$ možno nalézt $r \in \mathsf{N}$ takové, že $d^{-r} < \varepsilon$. Pro $r < x$ jest $d^{-x} < d^{-r}$, tedy $d^{-x} < \varepsilon$.

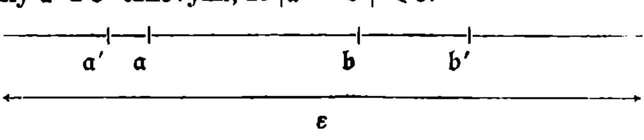
(Buď η kladný zlomek $< \varepsilon$, $1 : \eta = x,\mathfrak{f}$; pak $1 : \eta < x + 2 = u$. Kdyby $d^r < u$ pro všecka r, pak by jedno d^r bylo největší (poslední), což není možné, neboť $d^r < d^{r'}$, když $r < r'$. Tedy pro jisté r jest $u \leqq d^r$, tedy $1 : \eta < d^r$, tedy $d^{-r} < \eta < \varepsilon$.

11,9. Ke každému $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ a $\eta \in \mathfrak{P}$ možno nalézt racionální $\underline{\mathfrak{a}}$ a $\overline{\mathfrak{a}}$ taková, že $\underline{\mathfrak{a}} < \mathfrak{a} < \overline{\mathfrak{a}}$, $\overline{\mathfrak{a}} - \underline{\mathfrak{a}} < \eta$.

(Pišme $\mathfrak{a} = \pm\, x,\mathfrak{f}$; označme $\alpha_s = x,\mathfrak{f}'$, kde $\mathfrak{f}'(y) = \mathfrak{f}(y)$ pro $y \leqq s$, $\mathfrak{f}'(y) = 0$ pro $y > s$. Možno psát $\alpha_s = a_s d^{-s}$, $a_s \in \mathsf{N}_0$. Jest $a_s d^{-s} \leqq \alpha \leqq (a_s + 1)\, d^{-s}$; $\alpha = |\mathfrak{a}| = x,\mathfrak{f}$. Buď $d^{-r} < \eta$, $r > 1$, $s = r - 1$, $\mathfrak{a}' = (a_s d - 1)\, d^{-r}$, $\mathfrak{a}'' = [(a_s + 1)\, d + 1]\, d^{-r}$. Pak $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{a}''$ jsou racionální, $\mathfrak{a}' < \alpha < \mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}'' - \mathfrak{a}' < d^{2-r} < \eta$. Je-li $\mathfrak{a}$ kladné nebo nula, volme $\underline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}'$, $\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}''$; je-li $\mathfrak{a}$ záporné, volme $\underline{\mathfrak{a}} = -\,\mathfrak{a}''$, $\overline{\mathfrak{a}} = -\,\mathfrak{a}'$.)

[Malá řecká písmena budou vždy kladná čísla a malá německá budou reálná čísla.]

$\mathfrak{x}$ je mezi $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$, když buďto $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{b}$ anebo $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a}$. Říkáme, že $\mathfrak{a}$ *je rovno* $\mathfrak{b}$ *s chybou menší než* ε a píšeme $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}\,(< \varepsilon)$, když čísla $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ jsou obě mezi dvěma racionálními čísly $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$ takovými, že $|\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}'| < \varepsilon$:



Cvičení 11,10. Jsou-li $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ racionální, pak $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$, když a jen když $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| < \varepsilon$.

(Je-li $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| < \varepsilon$, volme $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$ a vyjde $\mathfrak{a} \equiv \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$. A je-li naopak $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$ a na př. $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \leqq \leqq \mathfrak{b}'$, $|\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}'| < \varepsilon$, pak $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} = (\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}') - - (\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}) \leqq \mathfrak{b}' - \mathfrak{a}' < \varepsilon$.)

11,11. Je-li $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$, $\mathfrak{a}^*$ a $\mathfrak{b}^*$ racionální mezi $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$, pak $|\mathfrak{a}^* - \mathfrak{b}^*| < \varepsilon$. Obecněji totiž platí:

Je-li $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$, $\mathfrak{a}^*$ a $\mathfrak{b}^*$ reálná mezi $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$, pak $\mathfrak{a}^* \equiv \mathfrak{b}^*(< \varepsilon)$.

Cvičení 11,12. $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}(< \eta)$ pro každé η. ($\mathfrak{a}$ je mezi $\underline{\mathfrak{a}}$ a $\overline{\mathfrak{a}}$ podle cvičení 11,9.)

Je-li $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \eta)$, pak také $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}(< \eta)$; je-li $\eta_1 < \eta_2$, $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \eta_1)$, pak $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \eta_2)$.

Buďte η_1 a η_2 kladné zlomky; je-li $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \eta_1)$, $\mathfrak{b} \equiv \equiv \mathfrak{c}(< \eta_2)$, pak $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{c}(< \eta_1 + \eta_2)$.

(Buď na př. $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$. Čárkovaná písmena budou rac. čísla. $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ buď mezi $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}' < \eta_1$; podobně $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{c}$ buď mezi $\mathfrak{b}''$ a $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{b}'' \leqq \mathfrak{c}''$, $\mathfrak{c}'' - \mathfrak{b}'' < \eta_2$. Pak $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ jsou mezi $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{a}' < \mathfrak{c}''$. — A $\mathfrak{c}'' - \mathfrak{a}' = (\mathfrak{c}'' - \mathfrak{b}'') - - (\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}'') + (\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}') < \eta_1 + \eta_2$.)

Malá latinská písmena budou vždy přirozená čísla. Platí-li nějaký výrok pro všecka x, která jsou větší než jisté r (t. j. $r < x$), pak říkáme, že ten výrok platí pro *dost velká* x.

Cvičení 11,13. Mám-li dva výroky (a obecněji konečnou množinu výroků), které platí každý pro dost velká x, pak pro dost velká x platí všecky ty výroky zároveň.

(Ze všech r (jichž je konečně mnoho) vezmeme poslední. Pro x větší než to největší r, platí všecky naše výroky.)

Posloupnost je zobrazení f množiny N do $\mathfrak{R}$; $f(x)$ je x-tý člen posloupnosti f. Jsou-li členy $f(x)$ racionální, nazývá se f *racionální*. Posloupnost f nazývá se *konvergentní* (nebo *Cauchyova*), když pro dost velká x a y jsou si členy $f(x)$ a $f(y)$

libovolně blízko, t. j. když pro libovolné ε platí $f(x) \equiv f(y)$ $(< \varepsilon)$ pro dost velká x a y.

Číslo a je *limita* posloupnosti f ($a = \lim f$ nebo $f \to a$), když pro dost velká x jsou členy $f(x)$ libovolně blízko k a, t. j. když pro libovolně zvolené ε platí $f(x) \equiv a (< \varepsilon)$ pro dost velká x.

Cvičení 11,14. Když je f konvergentní, pak množina $f(\mathsf{N})$ je (shora i zdola) ohraničená.

(Kdyby nebyla shora ohraničená, pak by ke každému n bylo možné najíti x_n tak, aby $n < f(x_n)$. Pro dost velká x a y, řekneme větší než r, jest $f(x) \equiv f(y)$ (< 1). Buď $f(r + 1) < < m$. Volme $n > r + m$. Jest

$$f(r + 1) < m < n < f(x_n);$$

je-li $x_n > r$, pak $f(r + 1) \equiv f(x_n)$ (< 1), tedy $m \equiv n (< 1)$, což není možné. Tedy pro $n > r + m$ jest $x_n \leqq r$. Tedy všech x_n je jen konečně mnoho: jsou to jednak x_n pro $n \leqq r + m$, jednak jakási $x_n \leqq r$. Tedy i členů $f(x_n)$ je jen konečně mnoho. Je-li $f(x_m)$ největší z nich, pak volme $k > f(x_m)$; pak $f(x_m) < k < f(x_k)$ a to je spor. Obdobně se vidí, že $f(\mathsf{N})$ je zdola ohraničená. Existuje kladný zlomek μ takový, že $|f(x)| < \mu$ pro všecka x.)

Cvičení 11,15. Je-li $a' < a$, $f \to a$, pak pro dost velká x jest $a' < f(x)$.

(Volme rac. a'' a a''', $a' < a'' < a''' < a$, $a''' - a'' = \eta$. Pro dost velká x jest $f(x) \equiv a (< \eta)$. Podle cvičení 11,9 volme $\underline{a}$ a $\overline{a}$. Kdyby $f(x) \leqq a'$, pak by $f(x) < a'' < a''' < a$ a tedy podle cvičení 11,11 by bylo $a''' - a'' < \eta$.)

Podobně: Je-li $a < a''$, $f \to a$, pak pro dost velká x jest $f(x) < a''$.

[Lze tedy říci, že $f \to a$ znamená toto:

Ať zvolíme a' a a'' jakkoliv, $a' < a < a''$, pak pro dost velká x jest $a' < f(x) < a''$.

(Je-li $f(x) \to a$, pak to plyne z právě dokázaného. Nechť naopak jest $a' < f(x) < a''$ pro skoro všecka x, ať zvolím

$\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{a}''$ jakkoliv, $\mathfrak{a}' < \mathfrak{a} < \mathfrak{a}''$. Dáno-li ε, volme $\mathfrak{a}' = \underline{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{a}'' = \overline{\mathfrak{a}}$ podle cvičení 11,9 pro $\eta = \varepsilon$. Pak $\mathfrak{a}$ a $f(x)$ je obojí mezi $\underline{\mathfrak{a}}$ a $\overline{\mathfrak{a}}$ a tedy $f(x) \equiv \mathfrak{a}(< \varepsilon)$ pro dost velká x, tedy $f \to \mathfrak{a}$.)

Cvičení 11,16. Posloupnost má nejvýš jednu limitu. (Buď $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2$, $f \to \mathfrak{a}_1$, $f \to \mathfrak{a}_2$; volme $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}' < \mathfrak{a}_2$. Pak pro dost velká x je jednak $f(x) < \mathfrak{a}'$, jednak $\mathfrak{a}' < f(x)$, což není možné.)

Věta 11,1. *Posloupnost má limitu, když a jen když je konvergentní. A ta limita je jediná.*

Důkaz. Je-li $f \to \mathfrak{a}$, ε libovolné, volme kladný zlomek $\varepsilon' < \varepsilon$, $\eta = \varepsilon' : 2$. Pro dost velká x a y je pak $f(x) \equiv \mathfrak{a}(<\eta)$ a $f(y) \equiv \mathfrak{a}(< \eta)$. Podle cvičení 11,12 tedy $f(x) \equiv f(y)$ $(< \eta + \eta)$, t. j. $f(x) \equiv f(y)$ $(< \varepsilon')$ tedy $f(x) \equiv f(y)$ $(< \varepsilon)$. Tedy je f konvergentní.

Za druhé buď f konvergentní. Máme najít limitu posloupnosti f. Podle cvičení 11,14 existují čísla $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{n}$ taková, že pro všecka x jest $\mathfrak{m} < f(x) < \mathfrak{n}$. Buď A množina všech reálných $\mathfrak{x}$ takových, že pro dost velká x jest $f(x) < \mathfrak{x}$. Taková $\mathfrak{x}$ existují, na př. $\mathfrak{n} \in \mathsf{A}$. Buď $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{m}$. Pak pro všecka x platí $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{m} < f(x)$ a tedy $\mathfrak{x}$ non ε A. Pro všecka $\mathfrak{x} \in \mathsf{A}$ tedy $\mathfrak{m} < \mathfrak{x}$ a A je zdola ohraničená část kontinua $\mathfrak{R}$ a má tedy podle cvičení 10,34 dolní hranici $\mathfrak{a}$. Tvrdím: $f \to \mathfrak{a}$.

[Dáno-li η, volme $\underline{\mathfrak{a}}$ a $\overline{\mathfrak{a}}$ podle cvičení 11,9. Pak existuje $\mathfrak{x} \in \mathsf{A}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{x} \leqq \overline{\mathfrak{a}}$. (Kdyby nebylo takového $\mathfrak{x}$, pak by pro všecka $\mathfrak{x} \in \mathsf{A}$ bylo $\overline{\mathfrak{a}} < \mathfrak{x}$; ale $\mathfrak{a}$ je *poslední* takový prvek, pro který $\mathfrak{a} < \mathfrak{x}$ pro všecka $\mathfrak{x} \in \mathsf{A}$.) Pro dost velká x jest $f(x) < \mathfrak{x}$ (neboť $\mathfrak{x} \in \mathsf{A}$) a tedy $f(x) < \overline{\mathfrak{a}}$. Volme kladný zlomek $\varepsilon' < \varepsilon$, $\eta = \varepsilon' : 3$. Pro dost velká x a y jest $f(x) \equiv f(y)$ $(<\eta)$ a mimo to $f(x) < \overline{\mathfrak{a}}$. Jelikož $\underline{\mathfrak{a}} < \mathfrak{a}$, jest $\underline{\mathfrak{a}}$ non $\in$ A a tedy mezi našimi y se dá najít takové, pro které $\underline{\mathfrak{a}} \leqq f(y)$. Jest dále $\underline{\mathfrak{a}} - \eta < f(x)$. (Kdyby $f(x) \leqq \underline{\mathfrak{a}} - \eta < \underline{\mathfrak{a}} \leqq f(y)$, pak by podle cvičení 11,11 z $f(x) \equiv f(y)$ $(<\eta)$ plynulo $\eta = \underline{\mathfrak{a}} - (\underline{\mathfrak{a}} - \eta) < \eta$.) Tedy pro naše dost velká x jest $\underline{\mathfrak{a}} - \eta < f(x) < \overline{\mathfrak{a}}$. Čísla $\mathfrak{a}$

a $f(x)$ jsou mezi $\mathfrak{a} - \eta$ a $\bar{\mathfrak{a}}$ a jest $\bar{\mathfrak{a}} - (\mathfrak{a} - \eta) = (\bar{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}) + \eta \leqq \eta + \eta = 2\eta < 3\eta = \varepsilon' < \varepsilon$. Tedy $f(x) \equiv \mathfrak{a} (< \varepsilon)$ a $f \to \mathfrak{a}$.]

[Některé výroky platí pro všecky čtyři úkony početní. Abychom je neopakovali čtyřikrát, zavedeme si znak $\circ$, který bude zastupovat $+$ nebo $-$ nebo . nebo :; $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ znamená $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ nebo $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ nebo $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ nebo $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$. (Při dělení se předpokládá $\mathfrak{b} \neq 0$.)]

Cvičení 11,16 bis. Je-li $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \varepsilon, \eta$ racionální a $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}' (< \varepsilon)$, $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}' (< \eta)$, je $\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}' \pm \mathfrak{b}' (< \varepsilon + \eta)$. Je-li kromě toho ještě α racionální, $|\mathfrak{a}| < \alpha$, $|\mathfrak{a}'| < \alpha$, $|\mathfrak{b}| < \alpha$, $|\mathfrak{b}'| < \alpha$, je $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}'\mathfrak{b}' (< (\varepsilon + \eta)\,\alpha)$. Je-li kromě toho β racionální, $|\mathfrak{b}| > \beta$, $|\mathfrak{b}'| > \beta$, je $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}' : \mathfrak{b}' (< \alpha(\varepsilon + \eta) : \beta^2)$. [Plyne ihned z cvičení 11,10 a 11,7: $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}' (< \varepsilon)$ značí $|\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'| < \varepsilon$, $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}' (< \eta)$ značí $|\mathfrak{b} - \mathfrak{b}'| < \eta$, tedy $|(\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}' \pm \mathfrak{b}')| \leqq |\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'| + |\mathfrak{b} - \mathfrak{b}'| < \varepsilon + \eta$. $|\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'| = |\mathfrak{a}(\mathfrak{b} - \mathfrak{b}') + \mathfrak{b}'(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}')| < \alpha(\varepsilon + \eta)$. $|(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}' : \mathfrak{b}')| = |(\mathfrak{a}(\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}')) : (\mathfrak{b}\mathfrak{b}')| < \alpha(\varepsilon + \eta) : \beta^2$.]

Buďtež f a g dvě posloupnosti racionální. Pak $f \circ g$ je posloupnost, jejíž x-tý člen je $f(x) \circ g(x)$. [Značí-li $\circ$ dělení, budeme vždy předpokládat $g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathsf{N}$ a $\lim g \neq 0$.]

Věta 11,2. *Nechť racionální posloupnosti f a g jsou konvergentní. Pak též posloupnost $f \circ g$ je konvergentní.*

Důkaz. I. Nechť $\circ$ značí $+$ nebo $-$. Budiž ε libovolné a $\varepsilon' < \varepsilon$, ε' racionální. Pak pro dosti velká x a y platí $f(x) \equiv f(y) (< \frac{1}{2}\varepsilon')$, $g(x) \equiv g(y) (< \frac{1}{2}\varepsilon')$ a tedy dle cvičení 11,16 bis je $f(x) \circ g(x) \equiv f(y) \circ g(y) (< \varepsilon')$, tedy $f(x) \circ g(x) \equiv f(y) \circ g(y) (< \varepsilon)$ tedy $f \circ g$ je konvergentní.

II. Nechť $\circ$ značí násobení. Dle cvičení 11,14 je množina $f(\mathsf{N})$ i $g(\mathsf{N})$ ohraničená, tedy $|f(x)| < \alpha$, $|g(x)| < \alpha$ pro jisté racionální α a pro všechna x. Budiž ε libovolné, $\varepsilon' < \varepsilon$, ε' racionální. Pak pro dosti velká x a y je $f(x) \equiv f(y) (< \varepsilon' : (2\alpha))$,

$g(x) \equiv g(y)$ $(< \varepsilon' : (2\alpha))$ a tedy dle cvičení 11,16 bis $f(x)$ . . $g(x) \equiv f(y)\, g(y)$ $(< \varepsilon')$ tedy $f \circ g$ je konvergentní.

III. Nechť $\circ$ značí dělení. Dle cvičení 11,14 je množina $f(\mathsf{N})$ i $g(\mathsf{N})$ ohraničená, tedy $|f(x)| < \alpha$, $|g(x)| < \alpha$ pro jisté racionální α a pro všechna x. Ježto $g(x) \neq 0$ a $\lim g \neq 0$, je $|g(x)| > \beta$ pro jisté racionální β a všechna x. [Ukáže se podobně jako ve cvičení 11,14.] Budiž ε libovolné, $\varepsilon' < \varepsilon$, ε' racionální. Pak $f(x) \equiv f(y)$ $(< \varepsilon'\beta^2 : (2\alpha))$, $g(x) \equiv g(y)$ $(< \varepsilon'\beta^2 :$ $: (2\alpha))$ pro dosti velká x, y a tedy dle cvičení 11,16 bis $f(x) :$ $: g(x) \equiv f(y) : g(y)$ $(< \varepsilon')$ tedy $f \circ g$ je konvergentní.

Cvičení 11,17. Každé přirozené číslo se dá psát přesně jedním způsobem ve tvaru $2k$ (pak se mu říká *sudé*) nebo $2k - 1$ (pak je *liché*), $k \in \mathsf{N}$.

(Z věty 7,1 plyne tvar $2k'$ a $2k' + 1$, kde $k' \in \mathsf{N}_0$, ale $k' = 0$ se nehodí dobře, neboť $2 \,.\, 0 = 0$. Tedy místo k' vezmeme $k = k' + 1$; to už bude $k \in \mathsf{N}$ a $2k = 2\,(k' + 1)$ a $2k - 1 =$ $= 2k' + 1$.)

Věta 11,3. *Nechť racionální posloupnosti f a f' mají stejnou limitu; nechť racionální posloupnosti g a g' mají stejnou limitu; pak posloupnosti $f \circ g$ a $f' \circ g'$ mají stejnou limitu.*

Důkaz. Z posloupností f a f' sestrojme novou posloupnost f'' takto: $f''(2k) = f(k)$, $f''(2k - 1) = f'(k)$. Je-li $f \to \mathfrak{a}$, $f' \to \mathfrak{a}$, pak tvrdím: $f'' \to \mathfrak{a}$.

[Pro $k > r$ buď $f(k) \equiv \mathfrak{a}(< \varepsilon)$ a $f'(k) \equiv \mathfrak{a}(< \varepsilon)$. Je-li $x > 2r$, pak $x = 2k$ nebo $x = 2k - 1$, $k > r$ a tedy $f''(x) \equiv$ $\equiv \mathfrak{a}(< \varepsilon)$.] Obdobně buď $g''(2k) = g(k)$, $g''(2k - 1) = g'(k)$. Je-li $g \to \mathfrak{b}$, $g' \to \mathfrak{b}$, pak zase též $g'' \to \mathfrak{b}$.

Označíme-li $h = f \circ g$, $h' = f' \circ g'$, $h'' = f'' \circ g''$, pak podle věty 11,2 jest h'' konvergentní. Jest ovšem $h''(2k) =$ $= h(k)$, $h''(2k - 1) = h'(k)$. Označíme $\mathfrak{c} = \lim h''$. Dáno-li ε, pak pro jisté r platí: je-li $x > r$, jest $h''(x) \equiv \mathfrak{c}(< \varepsilon)$. Pro $x > r$ je tedy $h(x) = h''(2x) \equiv \mathfrak{c}(< \varepsilon)$ (neboť $2x > r$) a podobně $h'(x) = h''(2x - 1) \equiv \mathfrak{c}(< \varepsilon)$ (neboť $2x - 1 > r$) a tedy $h \to \mathfrak{c}$ a $h' \to \mathfrak{c}$. Tedy h a h' mají stejnou limitu.

Cvičení 11,18. Je-li $\mathfrak{a} = \lim f$ racionální, $\mathfrak{b} = \lim g$ racionální, f a g racionální, pak $f \circ g \to \mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}$.

(f' buď posloupnost, jejíž všecky členy jsou $\mathfrak{a}$; g' buď posloupnost, jejíž všecky členy jsou $\mathfrak{b}$. Pak $f' \odot g'$ má všecky členy rovny $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$. Jest $f' \to \mathfrak{a}$, $g' \to \mathfrak{b}$, $f' \odot g' \to \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ a tedy podle věty 11,3 též $f \circ g \to \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$.)

Cvičení 11,19. Ke každému $\mathfrak{a}$ se dá najít racionální posloupnost $f \to \mathfrak{a}$; možno voliti všecky členy $f(x) \neq 0$. Dokonce tu posloupnost lze volit tak, aby $f(x) \in {}_d Rac$. (Ke každému δ existuje $\mathfrak{a}' \in {}_d Rac$ takové, že $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a} (< \delta)$.)

(Ke každému $\eta = d^{-x}$ volme $\underline{\mathfrak{a}}$ a $\overline{\mathfrak{a}}$ podle cvičení 11,13. Mezi $\underline{\mathfrak{a}}$ a $\overline{\mathfrak{a}}$ volme od nuly různé racionální číslo a to označme $f(x)$.)

To nás vede k možnosti zavést početní úkony pro všecka reálná čísla. K $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ zvolíme racionální posloupnosti $f \to \mathfrak{a}$, $g \to \mathfrak{a}$, $g(x) \neq 0$ (k vůli dělení). Podle věty 11,1 a 11,2 má $f \circ g$ limitu a tu označíme $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$. Podle cvičení 11,18 to souhlasí se starou definicí pro racionální $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$.

Náš přítel si zvolí místo f a g jiné posloupnosti $f' \to \mathfrak{a}$ a $g' \to \mathfrak{a}$ a pro něho $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ bude limita posloupnosti $f' \circ g'$; podle věty 11,3 mu ale vyjde totéž jako nám.

Cvičení 11,20. Platí pravidla ze cvičení 11,2, i když $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{c}$ jsou libovolná reálná čísla.

(Volme $f \to \mathfrak{a}$, $g \to \mathfrak{b}$, $h \to \mathfrak{c}$; f, g, h racionální. Pak na př. $(f + g) + h = f + (g + h)$ podle cvičení 11,2 a v limitě $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$. Atd.)

11,21. Je-li $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, jest $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ kladné a $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ záporné. (Vol $\mathfrak{a} < \mathfrak{c} < \mathfrak{b}$; racionální f a g, $f \to \mathfrak{a}$, $g \to \mathfrak{b}$, $f(x) < \mathfrak{c} < g(x)$ pro všecka x; $g(x) - f(x) > 0$ a limita $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ tedy nemůže být záporná. A nula to též není, sic by bylo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.)

Jest $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, když a jen když existuje kladné $\mathfrak{u}$ takové, že $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{u}$.

11,22. Platí cvičení 11,7 pro libovolná reálná $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$.

11,23. Jest $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(<\varepsilon)$, když a jen když $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| < \varepsilon$. (Je-li $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| < \varepsilon$ a na př. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$; buď $\eta = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon - (\mathfrak{b} - \mathfrak{a}))$; buď $\mathfrak{a}' < \mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$ racionální, $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a}(<\eta)$, $\mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{b}(<\eta)$. Pak $\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}' < \varepsilon$ a tedy $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(<\varepsilon)$. Je-li $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(<\varepsilon)$, pak se $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| < \varepsilon$ dokáže jako ve cvičení 11,10.)

11,24. Jestli f a g konverguje, pak $f \circ g$ konverguje. (Důkaz jako věty 11,2; teď už umíme to udělat pro libovolná reálná čísla.)

11,25. Mají-li f a f' stejnou limitu a g a g' stejnou limitu, pak $f \circ g$ a $f' \circ g'$ mají stejnou limitu. (Srovnej větu 11,3.)

11,26. Je-li $f \to \mathfrak{a}$ a $g \to \mathfrak{b}$, pak $f \circ g \leftarrow \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$. (Srovnej cvičení 11,18.)

[To, co jsme nahoře mohli dělat jen pro racionální čísla, umíme už udělat pro libovolná reálná a to stejnou methodou, protože pravidla ze cvičení 11,2, 11,6 a 11,7 zůstala v platnosti.]

Princip aproximace. Dána reálná čísla $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ a kladné číslo ε. Pak lze najít kladné δ takové, že pro každá dvě čísla $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a}(<\delta)$ a $\mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{b}(<\delta)$ jest $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}(<\varepsilon)$.

Důkaz. Nechť tomu tak není. Je-li $\delta = d^{-x}$, volme $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a}(<\delta)$ a $\mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{b}(<\delta)$ tak, aby $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}'$ nebylo rovno $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ s chybou menší než ε a označme $f(x) = \mathfrak{a}'$, $g(x) = \mathfrak{b}'$. Pak $f \to \mathfrak{a}$ a $g \to \mathfrak{b}$.

[Dáno-li totiž η, pak pro dost velká x jest $d^{-x} < \eta$ a tedy $f(x) \equiv \mathfrak{a}(<\eta)$ a $g(x) \equiv \mathfrak{b}(<\eta)$.] Tedy $f \circ g \to \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$. Pro dost velká x tedy $f(x) \circ g(x) \equiv \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}(<\varepsilon)$, tedy přece jen $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}(<\varepsilon)$.

A to je důležitá věc. Abychom vypočetli $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ přibližně, a to s chybou menší než dané ε, nemusíme znát $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ přesně. Stačí místo $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ vzít jakási jiná čísla $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$ lišící se od $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ o méně než jakési δ. Místo $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ vypočteme prostě $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}'$. Chyba, které jsme se tím dopustili, je menší než ε. A to přibližná čísla $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$, možno volit racionální anebo dokonce tak, aby za desetinnou čárkou měla od jistého místa počínaje samé nuly. (Viz cvičení 11,19.)

A to je obvyklý způsob počítání. Výsledek chceme jen na jistý počet desetinných míst; a v daných číslech se omezujeme také na jistý počet míst. Stejně při měření. Jistou veličinu chceme znát s chybou menší než ε; počítáme ji z naměřených veličin. K tomu ε si určíme napřed δ, které nám udává, jak přesně musíme dané veličiny naměřit, aby počítaná veličina byla zatížena chybou menší než ε.

Cvičení 11,27. Princip aproximace nám může $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ definovat: Buď $\mathfrak{s}$ číslo takové, že pro každé ε existuje δ takové, že je-li $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a}(< \delta)$, $\mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{b}(< \delta)$, pak $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{s}(< \varepsilon)$; při tom $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$ bereme z *Rac* (nebo ${}_d$*Rac*). Pak $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$.

(Volme $f \to \mathfrak{a}$, $g \to \mathfrak{b}$, $f(x)$ a $g(x) \in$ *Rac* (nebo ${}_d$*Rac*); pak se dokáže, že $f \circ g \to \mathfrak{s}$ a tedy vskutku $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}$.)

Tedy $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ je to jediné číslo, které je aproximováno součty $\mathfrak{a}' \odot \mathfrak{b}'$.

2,12. Kardinální čísla. U konečných množin jsme si už počet prvků definovali. Bylo to přirozené číslo (nebo 0 pro množinu $\emptyset$). Teď budem mluvit o počtu prvků i ostatních, t. j. nekonečných množin. Stejný počet prvků budou mít dvě množiny, když budou ekvivalentní, což u konečných množin klape podle cvičení 5,2 a 5,3:

Buď $\mathfrak{a}$ počet prvků množiny A, $\mathfrak{b}$ počet prvků množiny B. Pak $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, když a jen když $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$.

Cvičení 12,1. Tato rovnost splňuje všecky požadavky na rovnost kladené:

(reflexivita) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$;

(symetrie) je-li $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, pak také $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$;

(transitivita) je-li $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, pak také $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

Symbolům $\mathfrak{a}$ říkáme *kardinální čísla*. [Malá německá písmena budou značit kardinální čísla.]

Nechť A má $\mathfrak{a}$ prvků (t. j. počet prvků množiny A je $\mathfrak{a}$); nechť B má $\mathfrak{b}$ prvků.

Je-li $\mathsf{AB} = \emptyset$, pak počet prvků množiny $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ označíme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

$\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ je počet prvků množiny $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$.

$\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ je počet prvků množiny B^{A}.

Cvičení 12,2. Čísla $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ jsou čísly $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ přesně určena. (Můj přítel, který užívá k jich výpočtu jiných množin A a B než já, přec jen dostane stejné výsledky. Srovnej cvičení 5,4, 5,5 a 5,6.)

12,3. Ke každým dvěma kardinálním $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ skutečně čísla $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ lze nalézt. Jsou to zas kardinální čísla. (Má-li A' $\mathfrak{a}$ prvků a B' $\mathfrak{a}$ prvků, volme $\mathsf{A} = \mathsf{A}' \times \{1\}$, $\mathsf{B} = \mathsf{B}' \times \{2\}$; srovnej cvičení 5,3.)

12,4. Volíce A a B jako ve 12,3 a $\mathsf{C} = \mathsf{C}' \times \{3\}$, kde C' má $\mathfrak{c}$ prvků, odvodíme jako ve cvičení 5,8:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} &= \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}),\\
\mathfrak{a} + \mathfrak{b} &= \mathfrak{b} + \mathfrak{a},\\
(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} &= \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}),\\
\mathfrak{a}\mathfrak{b} &= \mathfrak{b}\mathfrak{a},\\
1 \,.\, \mathfrak{a} &= \mathfrak{a},\\
\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) &= \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c},\\
\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} &= \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} \,.\, \mathfrak{c}^{\mathfrak{b}},\\
\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} &= (\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{a}},\\
\mathfrak{c}^{1} &= \mathfrak{c}
\end{aligned}$$

a dále $0 + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $0 \,.\, \mathfrak{a} = 0$.

Dále definujme nerovnost $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ takto: Především $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, za druhé, má-li B $\mathfrak{b}$ prvků, pak existuje $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, která má $\mathfrak{a}$ prvků.

Cvičení 12,5. Je-li $\mathsf{B} \sim \mathsf{B}'$, $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, pak existuje $\mathsf{A}' \sim \mathsf{A}$, $\mathsf{A}' \subset \mathsf{B}'$. Tedy k rozhodnutí, zda $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, možno užít libovolné množiny B s $\mathfrak{b}$ prvky.

12,6. Nechť A má $\mathfrak{a}$ prvků; nechť B má $\mathfrak{b}$ prvků. Pak $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ znamená: A není ekvivalentní s B, ale A je ekvivalentní s jistou částí množiny B.

$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ pak znamená: A je ekvivalentní s jistou částí množiny B. Je-li zvláště $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, jest $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$. Má-li B $\mathfrak{b}$ prvků, pak $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ znamená, že jistá část množiny B má $\mathfrak{a}$ prvků.

12,7. Nechť A má $\mathfrak{a}$ prvků; nechť B má $\mathfrak{b}$ prvků. Pak $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ znamená: Existuje prosté zobrazení množiny A do B. Ze cvičení 8,20 tedy plyne:

Nechť spojitě uspořádaná B *má* $\mathfrak{b}$ *prvků, pak* $\aleph \leqq \mathfrak{b}$, *kde* $\aleph$ *je počet prvků kontinua* $\mathfrak{P}$.

Transitivita. *Je-li* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, *pak* $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$.

Důkaz. Nechť C má $\mathfrak{c}$ prvků, $\mathsf{B} \subset \mathsf{C}$ a nechť B má $\mathfrak{b}$ prvků, $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ a nechť A má $\mathfrak{a}$ prvků. A není ekvivalentní s B a B není ekvivalentní s C.

Jest $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$ a tedy stačí dokázat, že A není ekvivalentní s C. Budeme naopak předpokládat, že $\mathsf{A} \sim \mathsf{C}$ a jde o to dostat spor. Buď tedy φ prosté zobrazení množiny C na A.

Ježto $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$ a $\mathsf{B} \neq \mathsf{C}$, jsou množiny $\omega_1 = \mathsf{A}$, $\omega_2 = \mathsf{B} - \mathsf{A}$, $\omega_3 = \mathsf{C} - \mathsf{B}$ neprázdné (ω_1 proto, že $\mathsf{A} \sim \mathsf{C}$). Aplikujeme princip definice indukcí. F bude množina všech částí množiny C.

Buď $z(y) \in \mathsf{F}$ pro $y < x$. Označíme $g(z) = \varphi[z(x-1)]$. Je to část množiny A, tedy množiny C.

A podle toho volíme-li v kapitole 3 za $\wp$ postupně ω_1, ω_2 a ω_3, dostáváme zobrazení f_1, f_2 a f_3 množiny N do F takové, že ($i = 1, 2, 3$).

(1) $f_i(1) = \omega_i$, $f_i(x) = \varphi[f_i(x-1)]$.

Položme ještě $f_1(0) = \mathsf{C}$. Jest

(2) $f_1(x-1) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$; při tom sčítanci jsou množiny po dvou disjunktní.

[Pro $x = 1$ to je pravda: $\mathsf{C} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Nechť (2) už platí pro dané x. Podle cvičení 1,25 z toho plyne

$$\varphi[f_1(x-1)] = \varphi[f_1(x)] + \varphi[f_2(x)] + \varphi[f_3(x)]$$

se sčítanci po dvou disjunktními. Podle (1) tedy

$$f_1(\overline{x+1}-1) = f_1(x+1) + f_2(x+1) + f_3(x+1).$$

Tedy podle (E) platí (2) všeobecně.

(3) Každé dvě z množin $f_2(m)$ a $f_3(n)$ jsou disjunktní.

[Jest vždy podle (2): $f_i(n+1) \subset f_1(n)$ a tedy pro $u = 1$ platí

(3′) $f_i(n+u) \subset f_1(n)$ pro každé n.

Platí-li teď (3′) pro jisté u, pak $f_i(\overline{n+1}+u) \subset f_1(n+1) \subset$ $\subset f_1(n)$ podle (2), t. j. $f_i(\overline{n+u+1}) \subset f_1(n)$. Tedy podle principu indukce (E) platí (3′) pro každé u.

Pro $m = n$ jest $f_2(m) . f_3(n) = \emptyset$ podle (2). Je-li na př. $n < m$, pak podle (3′) $f_2(m) \subset f_1(n)$. Podle (2) však $f_1(n) .$ $. f_3(n) = \emptyset$ a tedy i $f_2(m)\, f_3(n) = \emptyset$. Pro $m < n$ to plyne stejně výměnou indexů 2 a 3.]

Pro pevné i označme J_i třídu všech množin $f_i(n)$.

(4) Jest vždy $f_2(n) . \Pi(\mathsf{J}_1) = f_3(n) . \Pi(\mathsf{J}_1) = \emptyset$.

[Je-li totiž $x \in f_2(n)$ nebo $x \in f_3(n)$, pak podle (2) x non $\in$ $\in f_1(n)$.]

(5) Jest $\mathsf{C} = \Pi(\mathsf{J}_1) + \Sigma(\mathsf{J}_2) + \Sigma(\mathsf{J}_3)$.

[Nechť totiž $x \in \mathsf{C} - \Pi(\mathsf{J}_1)$. Pak existuje *první* n takové, že x non $\in f_1(n)$. Pak $x \in f_1(n-1)$ a tedy z (2) plyne $x \in f_2(n)$ anebo $x \in f_3(n)$.] Z (3) a (4) plyne:

(6) Sčítanci v (5) jsou po dvou disjunktní.

Je-li $x \in \Pi(\mathsf{J}_1) + \Sigma(\mathsf{J}_2)$, položme $\psi(x) = x$. Je-li $x \in \Sigma(\mathsf{J}_3)$, budiž $\psi(x) = \varphi(x)$. ψ je zobrazení množiny C do C. Označím-li $\mathsf{U} = \Pi(\mathsf{J}_1) + \Sigma(\mathsf{J}_2)$, pak ovšem:

(7) $\psi(\mathsf{U}) = \mathsf{U}$.

Je-li $x \in \Sigma(\mathsf{J}_3)$, na př. tedy $x \in f_3(n)$, pak $\psi(x) = \varphi(x) \in$ $\in \varphi[f_3(n)] = f_3(n+1)$ podle (1). A je-li $y \in f_3(n+1)$, pak podle (1) $y = \psi(x)$, kde $x = \varphi^{-1}(y) \in f_3(n) \in \Sigma(\mathsf{J}_3)$. Tedy $\psi(x)$ jsou právě prvky množin $f_3(n+1)$, t. j. množin $f_3(m)$, kde $m > 1$. Buď J'_3 systém takových $f_3(m)$. Jest

(8) $\psi(\Sigma(\mathsf{J}_3)) = \Sigma(\mathsf{J}'_3)$.

Tedy z (5), (7) a (8) plyne

(9) $\psi(\mathsf{C}) = \mathsf{U} + \Sigma(\mathsf{J}'_3)$.

Dále jest podle (2) $f_1(1) . f_3(1) = \emptyset$ a podle (3′) tedy $f_3(m) . . f_3(1) = \emptyset$ pro $m > 1$. Tedy $\Sigma(\mathsf{J}'_3) . f_3(1) = \emptyset$ a $\Sigma(\mathsf{J}_3) = = \Sigma(\mathsf{J}'_3) + f_3(1)$, tedy $\Sigma(\mathsf{J}'_3) = \Sigma(\mathsf{J}_3) - f_3(1)$. Podle (9) tedy $\psi(\mathsf{C}) = \mathsf{U} + [\Sigma(\mathsf{J}_3) - f_3(1)] = \mathsf{C} - f_3(1) = \mathsf{B}$. Je tedy ψ zobrazení množiny C na B.

A ψ je zobrazení prosté. Neboť je-li $\psi(x) = \psi(y) = z$, je buďto $z \in \mathsf{U}$ a pak $z = x = y$. Anebo $z \in \Sigma(\mathsf{J}'_3)$, a pak $z = = \varphi(x) = \varphi(y)$, tedy zase $x = y$.

Celkem tedy $\mathsf{C} \sim \mathsf{B}$ a $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$, což je spor.

Máme-li dokázat, že $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, *pak stačí dokázat dvě věci: jednak že* $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, *jednak že* $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$.

[Kdyby totiž $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, pak by z $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ plynulo $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ a tedy podle transitivity $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}$, tedy $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$, což je spor. Podle cvičení 12,7 to znamená:

Nechť A *má* $\mathfrak{a}$ *prvků; nechť* B *má* $\mathfrak{b}$ *prvků; pak* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *bude dokázáno, podaří-li se udat jednak prosté zobrazení množiny* A *do* B, *jednak prosté zobrazení množiny* B *do* A.

Počet prvků množiny N je zvykem označovat $\aleph_0$; počet prvků kontinua $\mathfrak{P}$ se značí $\aleph$.

Cvičení. 12,8. Množina má $\aleph_0$ prvků, když a jen když je nekonečná spočetná.

12,9. $\mathfrak{a} < \aleph_0$ když a jen když $\mathfrak{a}$ je počet prvků konečné množiny, t. j. $\mathfrak{a} = 0$ nebo $\mathfrak{a}$ přirozené.

12,10. Pro $n \in \mathsf{N}$ buď $f(n) = n/1 \in \mathfrak{P}$. Pak f je prosté zobrazení množiny N do $\mathfrak{P}$. Podle cvičení 12,7 tedy $\aleph_0 \leqq \aleph$.

Ježto pak $\mathfrak{P}$ je nespočetná, jest $\aleph_0 \neq \aleph$. Tedy

$$\aleph_0 < \aleph.$$

12,11. Množina C nechť obsahuje dva prvky: nulu a $d-1$ $(d > 2)$. Je-li $\mathfrak{f} \in \mathsf{C}^{\mathsf{N}}$, označme $\varphi(\mathfrak{f}) = 1,\mathfrak{f}$. Pak φ je prosté zobrazení množiny C^{N} do $\mathfrak{P}$.

(φ je prosté proto, že rozvoje $1,\mathfrak{f}$, kde $\mathfrak{f}(x)$ jsou nuly a „devítky" $d-1$, jsou jednoznačné: Při přechodu k jinému rozvoji téhož čísla se některá cifra $\mathfrak{f}(x)$ změní o 1 a to už za předpokladu $d > 2$ nebude ani 0 ani $d-1$.)

12,12. Buď f prosté zobrazení množiny N na $\mathfrak{R}$. Je-li $\alpha \in \mathfrak{P}$, pak buď $\mathfrak{g} = \psi(\alpha) \in \mathsf{C}^{\mathsf{N}}$ a to $\mathfrak{g}(x) = 0$, když $f(x) < \alpha$; jinak $\mathfrak{g}(x) = d-1$. Pak ψ je prosté zobrazení množiny $\mathfrak{P}$ na C^{N}.

(ψ je prosté vzhledem k hustotě množiny $\mathfrak{R}$. Je-li $\alpha < \alpha'$, $\mathfrak{g}' = \psi(\alpha')$, pak je jisté racionální $f(x)$ taková, že $\alpha < f(x) < \alpha'$; pak $\mathfrak{g}(x) = d-1$ a $\mathfrak{g}'(x) = 0$, tedy $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$.)

$\mathfrak{P}$ má $\aleph$ prvků, C^{N} má $2^{\aleph_0}$ prvků; tedy z 12,11 a 12,12 plyne:

$$\aleph = 2^{\aleph_0}.$$

[Nechť $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{A}', \mathsf{B}'$ mají vždy resp. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ prvků; nechť $\mathsf{A}' \subset \mathsf{A}$, $\mathsf{B}' \subset \mathsf{B}$.]

Cvičení 12,13. (1) Je-li $\mathsf{AB} = \emptyset$, pak $\mathsf{A}'\mathsf{B}' = \emptyset$ a $\mathsf{A}' + \mathsf{B}' \subset \mathsf{A} + \mathsf{B}$.

(2) $\mathsf{A}' \times \mathsf{B}' \subset \mathsf{A} \times \mathsf{B}$.

(3) Existuje prosté zobrazení φ množiny $\mathsf{B}'^{\mathsf{A}'}$ do B^{A}.

(Je-li $f' \in \mathsf{B}'^{\mathsf{A}'}$, buď $f = \varphi(f') \in \mathsf{B}^{\mathsf{A}}$ tak zvolené, že $f(x) = f'(x)$ pro $x \in \mathsf{A}$ a $f(x) = \omega$ pro $x \in \mathsf{A} - \mathsf{A}'$. Přitom ω je pevný, jednou pro vždy zvolený prvek množiny B.)

Ze cvičení 12,13 plyne ihned:

Je-li $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{b}$, *pak*

$$\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{a}\mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{b}'^{\mathfrak{a}'} \leqq \mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}.$$

Cvičení 12,14. $\mathsf{N}^{\mathsf{N}(n)}$ má $\aleph_0$ prvků, tedy $\aleph_0^n = \aleph_0$ pro $n \in \mathsf{N}$.

Z toho plyne ($n \in \mathsf{N}$):

$$\aleph_0 = 1 + \aleph_0 = n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = n\,.\,\aleph_0 = \aleph_0\,.\,\aleph_0 = \aleph_0^{\,n}.$$

[Pro $n > 1$ platí totiž nerovnosti $\leqq$; kdyby někde platila ostrá nerovnost $<$, bylo by $\aleph_0 < \aleph_0^{\,n}$ proti cvičení 12,14. Pro $n = 1$ se nic nového neříká.]

Podobně

$$\aleph = 1 + \aleph = n + \aleph = \aleph_0 + \aleph = \aleph + \aleph = n\,.\,\aleph =$$
$$= \aleph_0\,.\,\aleph = \aleph\,.\,\aleph = \aleph^n = \aleph^{\aleph_0}.$$

[Pro $n > 1$ zase platí nerovnosti $\leqq$. Kdyby někde bylo $<$, pak by $\aleph < \aleph^{\aleph_0}$. Avšak $\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 . \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$. Pro $n = 1$ se nic nového neříká.]

Pro $n \geqq 2$ jest

$$2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\,\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0}.$$

[Platí zas nerovnosti $\leqq$; kdyby někde bylo $<$, pak by $2^{\aleph_0} < \aleph^{\aleph_0}$, což není možné, neboť obě ta čísla jsou rovna $\aleph$.]

Cvičení 12,15. Vždy jest $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

(A měj $\mathfrak{a}$ prvků. Je-li $a \in \mathsf{A}$, buď $\varphi(a) = f_a \in \mathsf{N}(2)^{\mathsf{A}}$, $f_a(a) = 1$ a jinak $f_a(x) = 2$. Pak φ je prosté zobrazení množiny A do $\mathsf{N}(2)^{\mathsf{A}}$, tedy $\mathfrak{a} \leqq 2^{\mathfrak{a}}$.

Kdyby $\mathfrak{a} = 2^{\mathfrak{a}}$, pak by existovalo prosté zobrazení φ množiny A na $\mathsf{N}(2)^{\mathsf{A}}$. $\varphi(x)$ jsou prvky množiny $\mathsf{N}(2)^{\mathsf{A}}$; jsou to tedy zobrazení množiny A do $\mathsf{N}(2)$. Buď $f \in \mathsf{N}(2)^{\mathsf{A}}$, $f(x) = 1$, když pro $f_x = \varphi(x)$ jest $f_x(x) = 2$ a buď $f(x) = 2$, když $f_x(x) = 1$. Jest $f = \varphi(a) = f_a$ pro jisté $a \in \mathsf{A}$. Jest $f(a) = f_a(a) \neq f(a)$ a to je spor.

Cvičení 12,16. Buď J libovolná množina kardinálních čísel. Pak existuje $\mathfrak{a}$ takové, že pro $\mathfrak{x} \in \mathsf{J}$ vždy $\mathfrak{x} < \mathfrak{a}$.

[Pro každé $\mathfrak{x}$ volme množinu X mající $\mathfrak{x}$ prvků. Buď J třída všech X. Pak vždy $\mathsf{X} \subset \Sigma(\mathsf{J})$. Má-li $\Sigma(\mathsf{J})$ $\mathfrak{s}$ prvků, je tedy vždy $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{s}$; je-li $\mathfrak{a} = 2^{\mathfrak{s}}$, pak tedy vždy $\mathfrak{x} < \mathfrak{a}$.

Ke každé množině kardinálních čísel tedy možno nalézt kardinální číslo, které v ní není. Žádná množina neobsahuje všecka kardinální čísla. Taková je spousta kardinálních čísel.]

Poznámka. Pro uspořádání kardinálních čísel jsme dokázali podle F. Bernsteina zákon transitivity. Bez zavádění dalších principů nelze tvrdit, že by platil zákon trichotomie. O dvou různých kardinálních číslech nemůžeme tvrdit, že by některé z nich musilo být menší než druhé.

A na konec:

Cvičení 12,17. *Intervalem* s koncovými body a a b rozumíme neprázdnou množinu všech reálných čísel x takových, že $a < x < b$. Interval je vždy kontinuum.

12,18. Každé kontinuum a tedy každý interval má $\aleph$ bodů (prvků). (Viz větu 8,5.)

Z toho znovu plyne, že úsečka má vždy $\aleph$ bodů. (Otevřená úsečka je interval a přidáním koncových bodů se počet bodů zvětší o 1 nebo o 2, t. j. zůstane roven $\aleph$.)

12,19. Každá spojitá uspořádaná množina obsahuje (podle cvičení 8,20) kontinuum a tedy má aspoň $\aleph$ bodů.

OBSAH

Spisovatel	*RNDr Bedřich Pospíšil*
Název díla	*Nekonečno v matematice*
Vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1949*
V edici	*Cesta k vědění, svazek 48*
Za redakce	*Dra R. Brdičky, Dra M. A. Valoucha, Dra F. Vyčichla a Dra O. V. Zicha*
Stran	*156*
Vytiskla	*Knihtiskárna Prometheus v nár. správě, Praha VIII*
Vydání	*první*
Náklad	*3300 výtisků*
Cena	*Kčs 60,—*