1
Měření



Ležíte na pláži u moře. Hladina je úplně klidná a vy pozorujete západ Slunce. Můžete ho dokonce pozorovat dvakrát: poprvé vleže a podruhé, když vstanete. Možná vás překvapí, že z doby, která uplyne mezi těmito dvěma západy, lze odhadnout poloměr Země. Opravdu je možné změřit Zemi tak prostým pozorováním?

1.1 MĚŘENÍ

Základem fyziky je měření. Objevovat fyziku znamená také poznávat možnosti měření veličin, které jsou s ní spjaty. Nazýváme je **fyzikálními veličinami**. Patří k nim například délka, čas, hmotnost, teplota, tlak nebo elektrický odpor.

Abychom mohli fyzikální veličinu popsat, zavedeme nejprve její **jednotku**, tj. takovou míru této veličiny, které přisoudíme číselnou hodnotu přesně 1,0. Poté vytvoříme **standard**, s nímž budeme všechny ostatní hodnoty dané fyzikální veličiny porovnávat. Tak například jednotkou délky je metr. Jeho standard je definován jako vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za přesně definovaný zlomek sekundy. (K definici metru se ještě vrátíme.) Jednotku fyzikální veličiny i její standard můžeme definovat naprosto libovolným způsobem. Důležité je jen to, aby naše definice byla natolik rozumná a praktická, aby mohla být v odborných kruzích všeobecně přijata.

Jakmile jsme definovali standard, řekněme pro délku, musíme ještě vypracovat metody, jak jej používat pro určování různých délek, ať již jde o poloměr atomu vodíku, vzdálenost koleček skateboardu nebo mezihvězdnou vzdálenost. Můžeme například používat pravítka, která přibližně nahrazují standard délky. Často však nelze přímo porovnat měřenou veličinu se standardem. Pravítkem nezměříme ani poloměr atomu, ani mezihvězdnou vzdálenost.

Fyzikálních veličin je takové množství, že není jednoduché je nějakým způsobem uspořádat. Naštěstí však nejsou všechny navzájem nezávislé. Příkladem může být rychlost, kterou lze vyjádřit jako podíl délky a času. Lze tedy vybrat, po mezinárodní dohodě, celkem malý počet fyzikálních veličin, pro něž definujeme jejich vlastní standardy. Délka i čas k nim patří. Všechny ostatní veličiny lze pak vyjádřit pomocí těchto základních veličin a jejich standardů. Tak například rychlost je definována pomocí dvou základních veličin — délky a času — a jim odpovídajících jednotek a standardů.

Standardy základních veličin musí být dostupné a při opakovaném měření neproměnné. Kdybychom třeba definovali jako standard délky starý český sáh, tedy vzdálenost mezi prsty rozpažených rukou (cca 190 cm), získali bychom bezpochyby standard snadno dostupný, avšak pro každého člověka jiný. Věda a technika však vyžadují přesnost, a proto je neproměnnost standardu mnohem důležitější než jeho snadná dosažitelnost. Je tedy třeba mít k dispozici dostatečný počet jeho přesných kopií i za cenu náročnosti jejich zhotovení.

V klasické fyzice (včetně teorie relativity) mlčky předpokládáme, že měření můžeme provádět tak, abychom při něm měřenou hodnotu neovlivnili. (Nebo — realističtěji — tak, že vliv měření je zanedbatelně malý.) Tak např. při měření průměru šroubu mikrometrem stiskneme šroub čelistmi měřidla přesně definovanou silou. Tím jej nepatrně stlačíme a naměříme údaj menší. Tento rozdíl je pro šroub jistě zanedbatelný. Kdybychom však měřili gumový špalík, už by byl vliv patrný. Lze však jistě najít jiný, vhodnější způsob měření, který průměr špalku znatelně neovlivní.

V kvantové fyzice je problém měření mnohem složitější.

1.2 MEZINÁRODNÍ SOUSTAVA JEDNOTEK

V roce 1971 bylo na 14. generální konferenci pro váhy a míry vybráno sedm **základních veličin** a odpovídajících základních jednotek, které se staly základem **Mezinárodní soustavy jednotek** označované zkratkou SI (z francouzského Système International des Unités), nazývané též metrická soustava. V tab. 1.1 jsou uvedeny jednotky tří základních veličin — délky, hmotnosti a času, které používáme už v úvodních kapitolách této knihy. Byly vybrány tak, aby byly blízké „lidským měřítkům".

Tabulka 1.1 **Některé základní jednotky SI**

VELIČINA	NÁZEV JEDNOTKY	SYMBOL
délka	metr	m
čas	sekunda	s
hmotnost	kilogram	kg

Všechny tzv. **odvozené jednotky** soustavy SI jsou definovány pomocí jednotek základních. Například jednotku výkonu **watt** (značka W) lze vyjádřit základními jednotkami hmotnosti, délky a času. V kap. 7 ukážeme, že

$$1\ \text{watt} = 1\ \text{W} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}. \qquad (1.1)$$

Abychom jednoduše a stručně zapsali velmi velké nebo velmi malé hodnoty veličin, používáme tzv. exponenciální tvar zápisu čísel pomocí mocnin čísla 10. Takto vyjádříme například:

$$3\,560\,000\,000\ \text{m} = 3{,}56\cdot10^9\ \text{m} \qquad (1.2)$$

nebo

$$0{,}000\,000\,492\ \text{s} = 4{,}92\cdot10^{-7}\ \text{s}. \qquad (1.3)$$

S rozvojem počítačů se čísla v exponenciálním tvaru začala zapisovat ještě jednodušším způsobem, například 3,56 E9 m nebo 4,92 E−7 s. Písmeno E označuje, že následující číslo má význam mocnitele (exponentu) základu 10. Některé kalkulačky zápis ještě více zjednodušují a písmeno E nahrazují mezerou.

Jinou možností vyjádření velmi velkých a velmi malých hodnot je použití vhodných předpon v názvech jednotek. Jejich seznam uvádí tab. 1.2. Každá předpona zastupuje příslušnou mocninu čísla 10. Předpona u kterékoli z jednotek SI signalizuje, že hodnotu veličiny je třeba vynásobit odpovídajícím koeficientem. Zadanou hodnotu elektrického výkonu nebo délku časového intervalu můžeme zapsat například takto:

$$1{,}27{\cdot}10^{9}\ \text{wattů} = 1{,}27\ \text{gigawattů} = 1{,}27\,\text{GW}, \quad (1.4)$$

$$2{,}35{\cdot}10^{-9}\ \text{s} = 2{,}35\ \text{nanosekundy} = 2{,}35\,\text{ns}. \quad (1.5)$$

Některé jednotky s předponami (např. decilitr, centimetr, kilogram nebo megabajt) se používají zcela běžně.

1.3 PŘEVODY JEDNOTEK

Při výpočtech číselných hodnot fyzikálních veličin často potřebujeme měnit jednotky, v nichž veličinu vyjadřujeme. Tento přepočet nazýváme **převod jednotek**. Převod můžeme snadno provést například tak, že vynásobíme původní zadanou či změřenou hodnotu **převodním koeficientem**. Tento koeficient je ve skutečnosti roven jedné, je však vyjádřen ve tvaru zlomku, jehož čitatel i jmenovatel udávají tutéž hodnotu v různých jednotkách. Uveďme příklad: Údaje 1 min a 60 s představují stejné časové intervaly. Můžeme proto psát

$$\frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}} = 1.$$

Tento zápis *neznamená*, že by snad platilo $\frac{1}{60} = 1$ nebo $60 = 1$. *Číselný údaj* a odpovídající *jednotka* tvoří ve výrazu pro převodní koeficient neoddělitelnou dvojici.

Vzhledem k tomu, že vynásobení libovolné veličiny jedničkou nezmění její hodnotu, můžeme takové převody provádět, kdykoli to považujeme za užitečné. Zbavíme se tak jednotek, které nechceme používat: jednoduše se vykrátí. Chceme-li například převést 2 min na sekundy, píšeme

$$2\,\text{min} = (2\,\text{min})(1) = (2\,\text{min})\left(\frac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}}\right) = 120\,\text{s}. \quad (1.6)$$

Častou chybou při převodu jednotek je záměna čitatele a jmenovatele v převodním koeficientu. V tom případě se nežádoucí jednotky nevykrátí, a tak chybu snadno objevíme. Pro počítání s jednotkami platí stejná algebraická pravidla jako pro proměnné a čísla.

V dod. D a na vnitřní straně zadní obálky této knihy jsou uvedeny koeficienty pro převody mezi soustavou SI a jinými soustavami jednotek. Jednou z mála zemí, které nestanovily zákonem povinnost používat Mezinárodní soustavu jednotek, jsou i Spojené státy americké.

PŘÍKLAD 1.1

Průzkumná ponorka ALVIN se potápí rychlostí 36,5 sáhů za minutu.

(a) Vyjádřete tuto rychlost v metrech za sekundu. Jeden sáh je roven přesně 6 stopám (ft).

ŘEŠENÍ: Jednotky převádíme následujícím způsobem:

$$36{,}5\,\frac{\text{sáhů}}{\text{min}} = \left(36{,}5\,\frac{\text{sáhů}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}}\right)\cdot \left(\frac{6\,\text{ft}}{1\,\text{sáh}}\right)\left(\frac{1\,\text{m}}{3{,}28\,\text{ft}}\right) =$$

$$= 1{,}11\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je tato rychlost v mílích (mi) za hodinu?

Tabulka 1.2 **Předpony jednotek SI**

NÁSOBEK	PŘEDPONA	ZNAČKA	NÁSOBEK	PŘEDPONA	ZNAČKA
10^{24}	yotta-	Y	10^{-24}	yokto-	y
10^{21}	zetta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{12}	tera-	T	$\mathbf{10^{-12}}$	**piko-**	**p**
$\mathbf{10^{9}}$	**giga-**	**G**	$\mathbf{10^{-9}}$	**nano-**	**n**
$\mathbf{10^{6}}$	**mega-**	**M**	$\mathbf{10^{-6}}$	**mikro-**	μ
$\mathbf{10^{3}}$	**kilo-**	**k**	$\mathbf{10^{-3}}$	**mili-**	**m**
10^{2}	hekto-	h	$\mathbf{10^{-2}}$	**centi-**	**c**
10^{1}	deka-	da	10^{-1}	deci-	d

Nejužívanější předpony jsou vytištěny tučně.

ŘEŠENÍ: Stejně jako v předchozím případě dostaneme

$$36{,}5\,\frac{\text{sáhů}}{\text{min}} = \left(36{,}5\,\frac{\text{sáhů}}{\text{min}}\right)\left(\frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}}\right)\cdot \left(\frac{6\,\text{ft}}{1\,\text{sáh}}\right)\left(\frac{1\,\text{mi}}{5\,280\,\text{ft}}\right) = 2{,}49\,\text{mi/h}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Vyjádřete tuto rychlost ve světelných rocích za rok.

ŘEŠENÍ: Jeden světelný rok (ly z angl. light year) je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za jeden rok. Je roven $9{,}46{\cdot}10^{12}$ km.

Užitím výsledku (a) dostaneme

$$1{,}11\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1} = \left(1{,}11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\,\text{ly}}{9{,}46{\cdot}10^{12}\,\text{km}}\right)\cdot \left(\frac{1\,\text{km}}{1\,000\,\text{m}}\right)\left(\frac{3{,}16{\cdot}10^{7}\,\text{s}}{1\,\text{y}}\right) = 3{,}71{\cdot}10^{-9}\,\text{ly/y}. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 1.2

Kolik čtverečných metrů má plocha o obsahu 6,0 km^2?

ŘEŠENÍ: Obsahuje-li údaj mocninu některé jednotky, je vhodné ji nejprve rozepsat jako součin a pak převést každý činitel zvlášť:

$$6{,}0\,\text{km}^2 = 6{,}0\,(\text{km})(\text{km}) = 6{,}0\,(\text{km})(\text{km})\left(\frac{1\,000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right)\left(\frac{1\,000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right) = 6{,}0{\cdot}10^{6}\,\text{m}^2. \quad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 1.1: *Platná místa a desetinná místa*

Při řešení př. 1.1a na kalkulačce se na jejím displeji pravděpodobně zobrazilo číslo 1,112 804 878. Přesnost, se kterou je toto číslo vyjádřeno, však nemá rozumný význam. Proto jsme je rovnou zaokrouhlili na hodnotu 1,11, která odpovídá přesnosti výchozích údajů. Zadaná rychlost 36,5 sáhů za minutu je určena třemi číslicemi. Říkáme, že je dána na tři **platná místa**. Čtvrtou číslici řádu setin již neznáme, a proto při převodu jednotek nemá smysl uvádět více číslic než tři.*

Žádný konečný výsledek by obecně neměl být zapsán číslem s větším počtem platných míst, než měly výchozí údaje.

V průběhu výpočtu vedeného v několika postupných krocích pracujeme s větším počtem platných míst, než měly výchozí údaje. Jakmile však dospějeme ke konečnému výsledku, zaokrouhlíme jej podle výchozích údajů. (Ve výsledcích řešených příkladů v této knize používáme zpravidla rovnítko „=“ i tehdy, byl-li mezivýsledek zaokrouhlen, a symbol „≐“ až u konečného zaokrouhlení.)

Počet platných míst v údajích 3,15 nebo $3{,}15{\cdot}10^3$ je zřejmý. Jak je tomu však u čísla 3 000? Je zadáno pouze na jedno nebo na čtyři platná místa (tedy jako $3{\cdot}10^3$ nebo $3{,}000\cdot 10^3$)? V této knize budeme považovat všechny nuly v číslech typu 3 000 za platná místa. Při studiu literatury je však třeba dát pozor, zda autoři neužívají jinou dohodu.

Nezaměňujme *platná místa* s místy *desetinnými*. Uvažujme například údaje 35,6 mm, 3,56 m a 0,003 56 km. Všechny jsou zadány na tři platná místa, i když první z nich má jedno, druhý dvě a třetí dokonce pět desetinných míst.

1.4 DÉLKA

V roce 1792 byl v mladé Francouzské republice zaveden nový systém měr a vah. Jednotkou délky byl stanoven metr, definovaný jako jedna desetimiliontina vzdálenosti od severního pólu k rovníku. Z praktických důvodů se později od vazby na tento „zemský“ standard upustilo a metr byl definován jako vzdálenost mezi dvěma tenkými vrypy na tyči vyrobené ze slitiny platiny a iridia, tzv. **standardním metru**. Tento standard je dodnes uložen v Mezinárodním úřadu pro váhy a míry v Sèvres u Paříže. Jeho přesné kopie, nazývané **druhotnými standardy**, byly rozeslány do metrologických laboratoří po celém světě a jsou používány při výrobě dalších, mnohem snadněji dostupných, standardů. Každé zařízení pro měření délky poskytuje údaje odvozené od standardního metru.

V roce 1959 byl úředně definován yard jako

$$1\ \text{yard} = 0{,}914\,4\ \text{m (přesně)}. \qquad (1.7)$$

Tato definice je ekvivalentní se vztahem pro palec (inch):

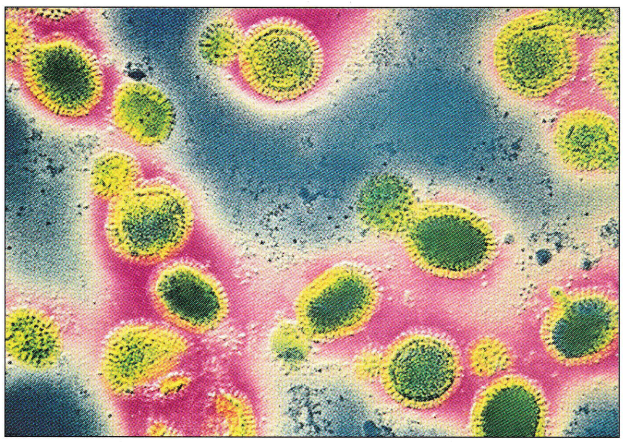
$$1\ \text{in} = 2{,}54\ \text{cm (přesně)}. \qquad (1.8)$$

V tab. 1.3 jsou uvedeny zajímavé údaje o délkových rozměrech některých objektů, včetně velikosti viru, jehož mnohonásobně zvětšený obraz získaný v elektronovém mikroskopu vidíme na obr. 1.1.

* Tento způsob počítání s čísly zadanými s omezenou přesností je jen velmi přibližný. Tak například každé z čísel 11 a 99 je zadáno na dvě platná místa. Nejistota obou údajů je řádu desetin. Jedna desetina (0,1) však představuje zhruba 1 % hodnoty 11 a pouze 0,1 % hodnoty 99. Veličina s hodnotou 99 je zadána přesněji než veličina, jejíž hodnota je 11. V odborné a vědecké práci zásadně opatřujeme hodnotu každé naměřené nebo vypočtené veličiny její *standardní odchylkou* neboli *chybou*, která vyjadřuje kvantitativně přesnost této veličiny.

Tabulka 1.3 **Řádové velikosti a rozměry**

DÉLKA	V METRECH
k nejvzdálenějšímu kvazaru (1996)	$2 \cdot 10^{26}$
k mlhovině v Andromedě	$2 \cdot 10^{22}$
k nejbližší hvězdě (Proxima Centauri)	$4 \cdot 10^{16}$
k nejvzdálenější planetě (Pluto)	$6 \cdot 10^{12}$
poloměr Země	$6 \cdot 10^{6}$
výška Mount Everestu	$9 \cdot 10^{3}$
výška člověka	$2 \cdot 10^{0}$
tloušťka této stránky	$1 \cdot 10^{-4}$
vlnová délka světla	$5 \cdot 10^{-7}$
typická velikost viru	$1 \cdot 10^{-8}$
poloměr atomu vodíku	$5 \cdot 10^{-11}$
poloměr protonu	$1 \cdot 10^{-15}$



Obr. 1.1 Obarvený elektronový obraz chřipkového viru. Lipoproteiny hostitele (obarveny žlutě) obklopují jádro viru (zelené). Celkový průměr útvaru je menší než 50 nm.

Později vyžadovala moderní věda a technika ještě přesnější standard, než je vzdálenost mezi dvěma jemnými vrypy na kovové tyči. Proto byl v roce 1960 přijat nový standard metru, který vycházel z vlnové délky světla. Metr byl definován jako 1 650 763,73 násobek vlnové délky oranžově červeného světla, které při výboji emitují atomy kryptonu 86.* Tento zvláštní počet vlnových délek byl vybrán proto, aby nový standard byl co nejbližší dosavadnímu metru.

Atomy kryptonu 86, použité pro definici standardu délky, jsou dostupné kdekoli, jsou identické a všechny vyzařují světlo přesně stejné vlnové délky. V každém z nich je tak standard uschován lépe a bezpečněji než v Mezinárodním úřadu pro váhy a míry (P. Morrison, MIT). Požadavky na přesnost však stále rostly, až dosáhly takového stupně, že jim už ani kryptonové atomy nedokázaly vyhovět. V roce 1983 byl v historii vývoje standardu délky zaznamenán výrazný pokrok. Metr byl nově definován jako vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu v přesně stanoveném časovém intervalu. Sedmnáctá generální konference pro váhy a míry přijala tuto definici metru:

Jeden metr je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za dobu 1/299 792 458 sekundy.

Tato konkrétní volba délky časového intervalu v definici metru určuje přesně hodnotu rychlosti světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Rychlost světla už dokážeme měřit velmi přesně a také měření časových intervalů patří v současnosti k nejpřesnějším měřením vůbec. Jejich využití pro novou definici metru je proto velmi dobře odůvodněné.

PŘÍKLAD 1.3

Sprinterská trať mívala vedle délky 100 m, běžné v současném atletickém sportu, také délku 110 yardů.

(a) Která trať je delší?

ŘEŠENÍ: Z (1.7) snadno zjistíme, že vzdálenost 110 yardů je 100,58 m. Sprint na 110 yardů je tedy delší.

(b) O kolik stop (ft)?

ŘEŠENÍ: Označme ΔL rozdíl délek běžeckých tratí. (Symbol Δ — velké řecké „delta" — značí rozdíl veličin.) Pak

$$\begin{aligned} \Delta L &= 110 \text{ yardů} - 100 \text{ m} = \\ &= 100{,}584 \text{ m} - 100 \text{ m} = 0{,}584 \text{ m} = \\ &= (0{,}584 \text{ m}) \left(\frac{3{,}28 \text{ ft}}{1 \text{ m}} \right) = \\ &= 1{,}916 \text{ ft} \doteq 1{,}9 \text{ ft}. \end{aligned}$$

(Odpověď)

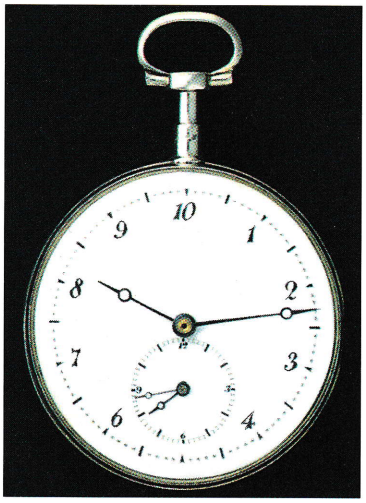
1.5 ČAS

Pojem čas můžeme chápat dvěma různými způsoby. V běžném životě a často i ve vědě potřebujeme znát denní čas (obr. 1.2), abychom mohli popsat sled událostí. Ve vědecké práci je zase většinou důležité, jak dlouho daná událost trvala. Každý standard času tedy musí umožňovat odpověď na dvě otázky: „*Kdy* se to stalo?" a „*Jak dlouho* to trvalo?" tab. 1.4 uvádí přehled některých časových intervalů.

Standardem času může být jakýkoli jev, který se pravidelně opakuje. Po staletí sloužilo tomuto účelu otáčení Země, které určovalo délku dne. I křemenné hodiny, ve kterých osciluje křemenný krystal v elektronickém obvodu, lze

* Číslo 86 v označení atomu (často užívaným označením je i ^{86}Kr nebo $^{86}_{36}\text{Kr}$) identifikuje jeden z pěti stabilních izotopů (stabilních nuklidů) kryptonu a nazývá se *hmotnostním* nebo *nukleonovým* číslem.

pomocí astronomických pozorování cejchovat vzhledem k rotaci Země a používat pak v laboratořích pro měření časových intervalů. Tato kalibrace však nemůže být provedena s přesností odpovídající požadavkům současné vědy a techniky.



Obr. 1.2 V návrhu metrické soustavy z roku 1792 byla hodina definována tak, aby den měl 10 hodin. Tato myšlenka se neujala. Tvůrce těchto desetihodinových hodinek byl prozíravý a opatřil je ještě malým ciferníkem ukazujícím tradiční dvanáctihodinový čas. Ukazují obojí hodinky stejný čas?

Tabulka 1.4 **Řádové doby vybraných dějů**

ČASOVÝ INTERVAL	SEKUNDY
doba života protonu (předpověď)	$1 \cdot 10^{39}$
stáří Vesmíru	$5 \cdot 10^{17}$
stáří Cheopsovy pyramidy	$1 \cdot 10^{11}$
průměrný věk člověka	$2 \cdot 10^{9}$
délka roku	$3 \cdot 10^{7}$
délka dne	$9 \cdot 10^{4}$
tep lidského srdce	$8 \cdot 10^{-1}$
doba života mionu	$2 \cdot 10^{-6}$
nejkratší světelný pulz (r. 1989)	$6 \cdot 10^{-15}$
doba života nejnestabilnějších částic	$1 \cdot 10^{-23}$
Planckův čas*	$1 \cdot 10^{-43}$

* nejkratší doba po Velkém třesku, po které již platí zákony fyziky v takové podobě, v jaké je známe nyní.

Snaha o získání lepšího standardu času vedla ke konstrukci atomových hodin. Na obr. 1.3 vidíme jeden typ takových hodin, umístěný v Národním ústavu pro standardy a technologii (NIST) v USA. Využívá charakteristické frekvence izotopu cesia 133 a určuje jednotný čas UTC. Jeho časové signály je možné získat z krátkovlnného rozhlasového vysílání (stanice WWV a WWVH) nebo telefonicky (v ČR na lince 14 122). (Pokud bychom chtěli seřídit nějaké místní hodiny s mimořádnou přesností, museli bychom uvážit dobu šíření signálu z vysílací stanice k nám.)

Na obr. 1.4 je záznam kolísání délky dne v průběhu čtyřletého období získaný srovnáním s cesiovými hodinami. Zjištěné rozdíly, zřejmě související s ročními obdobími, přisuzujeme nepravidelnosti rotace Země a věříme, že chod cesiových hodin je pravidelnější. Kolísání je pravděpodobně způsobeno slapovými jevy (vliv Měsíce) a rozsáhlým prouděním vzduchu v atmosféře.

Třináctá generální konference pro váhy a míry (1967) přijala standard **sekundy**, odvozený od frekvence kmitů atomů cesiových hodin:

> Jedna sekunda je doba trvání 9 192 631 770 period světelného záření, emitovaného při přechodu atomu cesia 133 mezi dvěma konkrétními hladinami jeho velmi jemné struktury.

Přesnost cesiových hodin je taková, že by trvalo 6 000 let, než by se dvoje hodiny rozešly o více než 1 s. I tato přesnost je však malá ve srovnání s hodinami, které se vyvíjejí v současnosti. Mají dosáhnout přesnosti $1 : 10^{18}$, která odpovídá odchylce pouhé 1 s za 10^{18} s (asi $3 \cdot 10^{10}$ let).

PŘÍKLAD 1.4*

Představme si, že pozorujeme západ Slunce vleže na břehu klidného moře. Spustíme stopky právě v okamžiku, kdy Slunce zcela zmizí. Poté vstaneme a zvýšíme tak polohu svých očí o 1,70 m. Stopky zastavíme v okamžiku, kdy nám Slunce zmizí podruhé. Jaký je poloměr Země, ukazují-li stopky 11,1 s?

ŘEŠENÍ: Z obr. 1.5 vidíme, že při pozorování vleže se zorný paprsek směřující k hornímu okraji slunečního kotouče dotýká povrchu Země v místě, ve kterém se právě nacházíme, tj. v bodě A. Při druhém pozorování západu Slunce je zorný paprsek tečnou v bodě B. Označme symbolem d vzdálenost mezi bodem B a polohou očí stojícího pozorovatele. Vzdálenosti bodů A a B od středu Země jsou rovny poloměru Země r. Z Pythagorovy věty dostaneme

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2,$$

tj.

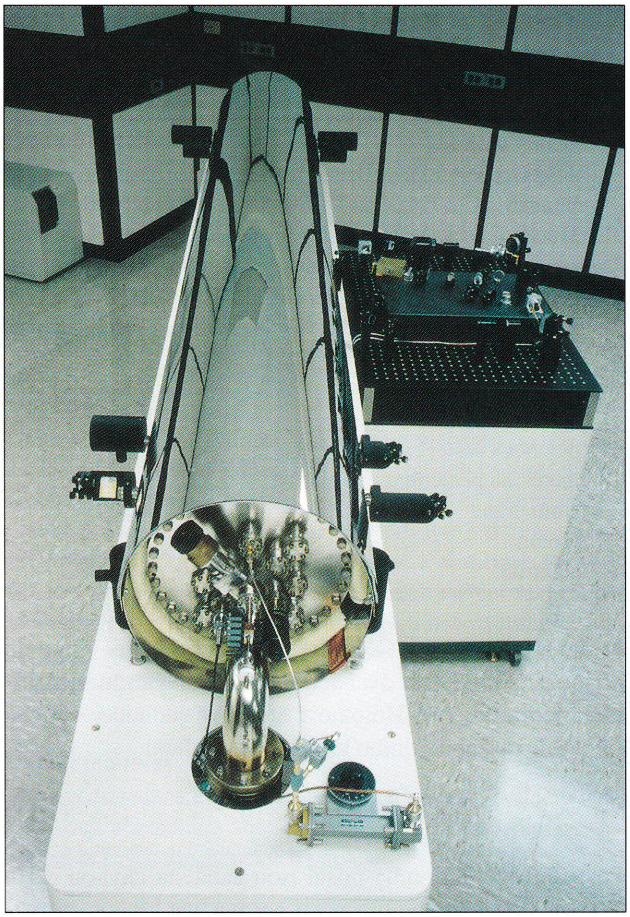
$$d^2 = 2rh + h^2. \qquad (1.9)$$

Výška h je ovšem zanedbatelná vzhledem k poloměru Země r. Proto je člen h^2 mnohem menší než člen $2rh$ a rov. (1.9) lze přepsat ve tvaru

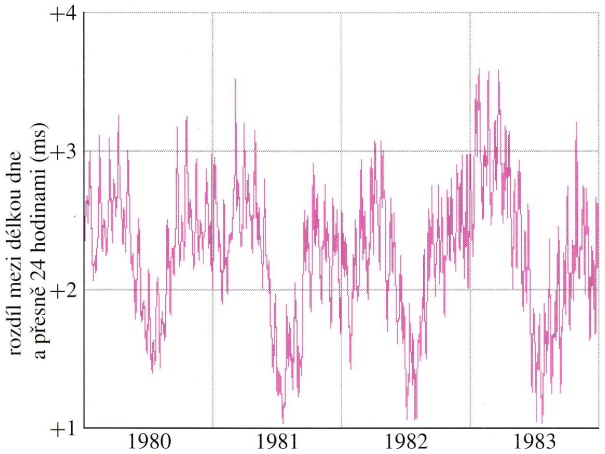
$$d^2 = 2rh. \qquad (1.10)$$

Symbolem θ jsme označili úhel mezi tečnami v bodech A a B (obr. 1.5). O stejný úhel se za změřenou dobu 11,1 s

* Převzato z článku Dennise Rawlinse „Doubling Your Sunsets, or How Anyone Can Measure the Earth's size with a Wristwatch and Meter Stick", *American Journal of Physics*, Feb. 1979, Vol. 47, pp. 126–128. Metoda dává nejlepší výsledky na rovníku.



Obr. 1.3 Cesiový frekvenční normál v Národním ústavu pro standardy a technologii v Boulderu (Colorado). Je standardem jednotky času pro Spojené státy americké. Časové signály Námořní observatoře lze získat na adrese http://tycho.usno.navy.mil /time.html; telefonicky v USA na lince (001)-303-499 7111, v ČR na lince 14 122.



Obr. 1.4 Kolísání délky dne v průběhu čtyřletého období. Všimněte si, že rozsah svislé stupnice je pouhé 3 ms (= 0,003 s).

otočí Slunce na své zdánlivé dráze kolem Země. Za celý den, tj. přibližně za 24 hodin, se Slunce kolem Země otočí o 360°. Pak můžeme psát

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{t}{24\ \mathrm{h}}.$$

Dosadíme-li $t = 11{,}1$ s, dostaneme

$$\theta = \frac{(360^\circ)(11{,}1\ \mathrm{s})}{(24\ \mathrm{h})(60\ \mathrm{min\cdot h^{-1}})(60\ \mathrm{s\cdot min^{-1}})} = 0{,}046\,25^\circ.$$

Z obr. 1.5 vidíme, že $d = r\,\mathrm{tg}\,\theta$. Dosazením do rov. (1.10) dostaneme

$$r^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta = 2rh,$$

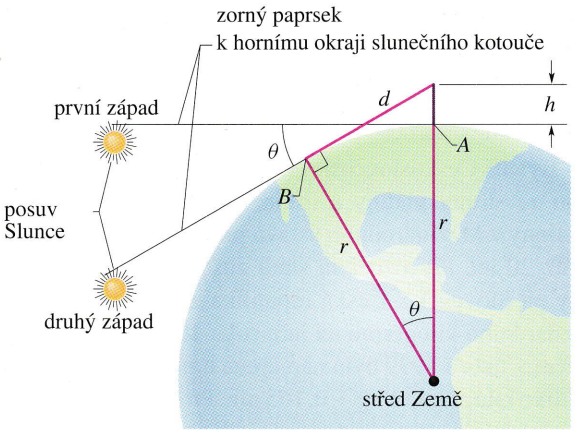
tj.

$$r = \frac{2h}{\mathrm{tg}^2\,\theta}.$$

Pro číselné hodnoty $\theta = 0{,}046\,25^\circ$ a $h = 1{,}70$ m máme konečně

$$r = \frac{2(1{,}70\ \mathrm{m})}{\mathrm{tg}^2\,0{,}046\,25^\circ} = 5{,}22{\cdot}10^6\ \mathrm{m}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek se liší od známé hodnoty poloměru Země ($6{,}378{\cdot}10^6$ m) o 20 %.

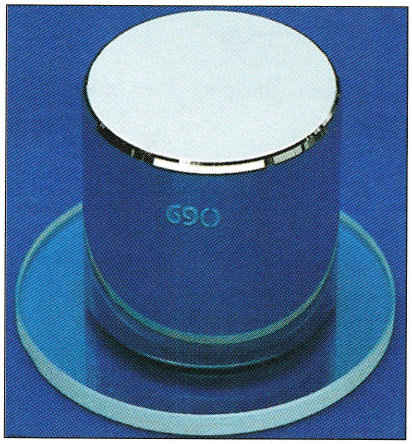


Obr. 1.5 Příklad 1.4. Zvedne-li se pozorovatel z polohy vleže (bod A) a zvýší tak polohu svých očí do výšky h, otočí se zorný paprsek vycházející z horního okraje slunečního kotouče o úhel θ. (Velikosti výšky h i úhlu θ jsou v obrázku mnohem větší, než odpovídá skutečnosti.)

1.6 HMOTNOST

Standardní kilogram

Standardní jednotkou hmotnosti v soustavě SI je **kilogram**. Původně byl definován jako hmotnost jednoho litru (tj. 1 dm^3) vody. Nyní je podle mezinárodní úmluvy určen hmotností válce vyrobeného ze slitiny platiny a iridia (obr. 1.6), který je uložen v Mezinárodním ústavu pro váhy a míry v Sèvres u Paříže. Přesné kopie tohoto etalonu byly rozeslány do laboratoří pro standardy v ostatních zemích. Hmotnost jiných těles pak můžeme měřit porovnáním s hmotností kterékoli z těchto kopií. V tab. 1.5 jsou uvedeny hmotnosti některých objektů.



Obr. 1.6 Mezinárodní hmotnostní standard 1 kg má tvar válce, jehož výška i průměr jsou 39 mm.

Bývalé Československo vlastnilo dva standardy hmotnosti ze slitiny platiny a iridia, které byly porovnávány s etalony v Mezinárodním ústavu pro váhy a míry každých 15 až 20 let. Po rozdělení státu zůstaly oba národní etalony na Slovensku. Česká republika získala vlastní kopii standardního kilogramu na jaře roku 1999. Při posledním vážení v únoru 1999 byla naměřena hmotnost českého národního kilogramu 1 kg + 0,165 mg. Procedury srovnávání národních kilogramů budou jistě jednou nahrazeny spolehlivějším a přesnějším postupem, vycházejícím z hmotnosti atomu jakožto základního standardu.

Jiný standard hmotnosti

Porovnávat hmotnosti atomů mezi sebou dokážeme mnohem přesněji, než je srovnávat přímo se standardním kilogramem. Proto užíváme ještě dalšího standardu hmotnosti.

Tabulka 1.5 **Řádové hmotnosti vybraných objektů**

OBJEKT	KILOGRAMY
známý vesmír	$1 \cdot 10^{53}$
naše Galaxie	$2 \cdot 10^{41}$
Slunce	$2 \cdot 10^{30}$
Měsíc	$7 \cdot 10^{22}$
asteroid Eros	$5 \cdot 10^{15}$
hora	$1 \cdot 10^{12}$
zaoceánský parník	$7 \cdot 10^{7}$
slon	$5 \cdot 10^{3}$
člověk	$1 \cdot 10^{2}$
zrnko hroznu	$3 \cdot 10^{-3}$
prachová částečka	$7 \cdot 10^{-10}$
molekula penicilinu	$5 \cdot 10^{-17}$
atom uranu	$4 \cdot 10^{-25}$
proton	$2 \cdot 10^{-27}$
elektron	$9 \cdot 10^{-31}$

Je jím atom uhlíku $^{12}_{6}C$, jemuž byla mezinárodní úmluvou přisouzena hmotnost dvanácti tzv. **atomových hmotnostních jednotek** (u). Hmotnost atomové jednotky souvisí s hmotností standardního kilogramu vztahem

$$1\,\mathrm{u} = 1{,}660\,540\,2 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}. \qquad (1.11)$$

Poslední dvě desetinná místa jsou zatížena chybou ± 10. Tak lze s přiměřenou přesností porovnávat hmotnosti různých atomů s hmotností atomu uhlíku $^{12}_{6}C$. Zatím nám však chybí spolehlivý způsob, jak dosáhnout stejné přesnosti i při měření běžných hmotností, srovnatelných s hmotností kilogramu.

1.7 MNOŽSTVÍ

Zatímco standardní kilogram je typicky makroskopickou jednotkou, patří atomová hmotnostní jednotka do oblasti mikrosvěta. Při vyjádření makroskopických veličin pomocí mikroskopických jednotek lze použít jednotku **mol**, udávající přesně definovaný počet kusů (například atomů, molekul, apod.). Jeden mol má hodnotu $6{,}022 \cdot 10^{23}$. Původně byl zaveden jako počet atomů v 1 g nejjednoduššího prvku, vodíku. Nyní je definován pomocí izotopu uhlíku $^{12}_{6}C$. I když se ho většinou užívá pro vyjádření látkového množství, může být použitelný i jinak (např. pro počet dvojných vazeb či valenčních elektronů).

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Fyzikální měření

Základem fyziky je měření fyzikálních veličin. Některé fyzikální veličiny byly vybrány za **základní** (například délka, čas a hmotnost). Každá z nich byla definována prostřednictvím **standardu** a dané **základní jednotky** (například metr, sekunda, kilogram). Jednotky ostatních fyzikálních veličin nazýváme **odvozené** a definujeme je pomocí jednotek základních.

Soustava SI

V této knize (až na výjimky v některých úlohách) používáme mezinárodní soustavu jednotek (SI). V úvodních kapitolách vystačíme jen se třemi základními veličinami, které jsou uvedeny v tab. 1.1. Mezinárodní dohodou byly pro tyto veličiny stanoveny standardy, které musí být dostupné a neměnné. Pomocí nich se vyjadřují výsledky všech fyzikálních měření základních i odvozených veličin. Zápis velmi velkých nebo velmi malých hodnot lze zjednodušit použitím předpon (viz tab. 1.2) nebo užitím exponenciálního tvaru.

Převod jednotek

Při převodu jednotek postupně násobíme původní hodnotu jednotkovými převodními koeficienty. Výrazy můžeme upravovat pomocí běžných algebraických pravidel.

Délka

Jednotkou délky je metr. Je definován jako vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za přesně stanovený časový interval. Jiné délkové jednotky, které se v některých zemích stále používají (například míle, yard, palec), jsou nyní definovány pomocí metru (1 míle = 1 609,344 m).

Čas

Jednotkou času je sekunda. Původně byla odvozena z rotace Země. Současná definice využívá frekvence světla vyzářeného atomy cesia $^{133}_{55}$Cs. Přesný časový signál se z laboratoří pro standardy vysílá rádiem do celého světa.

Hmotnost

Jednotkou hmotnosti je kilogram. Je definován pomocí prototypu, vyrobeného ze slitiny platiny a iridia a uloženého v Mezinárodním ústavu pro váhy a míry. Pro měření hmotností elementárních částic, atomů a molekul se obvykle používá atomová hmotnostní jednotka u. Základem její definice je hmotnost atomu uhlíku $^{12}_{6}$C.

Množství

Jeden **mol** je roven počtu $6{,}02 \cdot 10^{23}$ (atomů, molekul, ...). Užívá se zejména pro látkové množství.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 1.2 Mezinárodní soustava jednotek

1C. Přečtěte s použitím předpon z tab. 1.2: (a) 10^{-6}klima, (b) 10^{9}nt, (c) 10^{6}fon, (d) 10^{-12}la, (e) 10^{-3}on, (f) 10^{1}dent, (g) 10^{12}sa, (h) 10^{-6}fon, (i) 10^{15}rda, (j) 10^{2}r, (k) 10^{18}minátor.

2C. (a) Některé předpony soustavy SI se staly součástí hovorového jazyka, i když nejsou vždy používány správně. „Půjč mi tři kila“ (myšlen jistý obnos peněz). Kolik je to korun? V jiných případech používáme pro označení množství jen předponu bez uvedení jednotky. O jakou hodnotu které veličiny se jedná v následujících větách? (b) Kup asi kilo. (c) Dvě deci, prosím. (d) Deset deka bude stačit. (e) Pevný disk počítače má kapacitu 650 mega. Je-li pro uložení jednoho slova potřeba průměrně 8 bajtů, kolik slov může být na tomto pevném disku uloženo? (Zpravidla však *mega* v případě megabajtu znamená 1 048 576 (= 2^{20}), nikoli 1 000 000 a *kilobajt* je 1 024 (2^{10}) bajtů.)

ODST. 1.4 Délka

3C. Raketoplán obíhá kolem Země ve výšce 300 km. Vypočtěte jeho výšku v (a) mílích, (b) milimetrech.

4C. Jaká je vaše výška ve stopách?

5C. (a) Kolik mikrometrů má jeden kilometr? (b) Jakou část centimetru představuje 1 μm? (c) Kolik mikrometrů je jeden yard?

6C. Země má přibližně tvar koule s poloměrem 6 378 km. (a) Vypočtěte její obvod v m. (b) Jaký má povrch v m^2? (c) Jaký je její objem v m^3?

7C. Převeďte 20 mil na km jen s použitím následujících převodních vztahů: 1 míle = 5 280 stop, 1 stopa = 12 palců, 1 palec = 2,54 cm, 1 m = 100 cm a 1 km = 1 000 m.

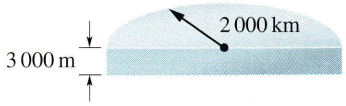
8C. Najděte převodní vztahy mezi (a) čtverečným yardem a čtverečnou stopou, (b) čtverečným palcem a čtverečným centimetrem, (c) čtverečnou mílí a čtverečným kilometrem, (d) krychlovým metrem a krychlovým centimetrem.

9C. Pro určení velikosti pozemků se často používá jednotka plochy zvaná **ar** (zkratka a), který je roven 10^2 m^2, a jednotka **hektar** (zkratka ha), představující 10^2 a. Povrchový uhelný důl odebírá každý rok 75 ha půdy do hloubky 26 m. Jaký objem půdy je každoročně odstraněn? Vyjádřete jej v km^3.

10C. Staročeské látro představovalo podle některých pramenů objem řezaného dřeva srovnaného do tvaru kvádru o délce 8 stop, šířce 4 stopy a výšce rovněž 4 stopy. Kolik láter dřeva je v 1 m^3? Kolik je tisíc láter v SI?

11C. Pokoj je dlouhý 20 stop 2 palce, široký 12 stop 5 palců a vysoký 12 stop 2,5 palce. Jaká je plocha podlahy v (a) čtverečných stopách a (b) čtverečných metrech? Jaký je objem pokoje v (c) krychlových stopách a (d) krychlových metrech?

12C. Antarktida má přibližně půlkruhový tvar o poloměru 2 000 km (obr. 1.7). Je přikryta ledem, jehož průměrná tloušťka je 3 000 m. Kolik krychlových centimetrů ledu je v Antarktidě? (Zakřivení zemského povrchu neuvažujte.)



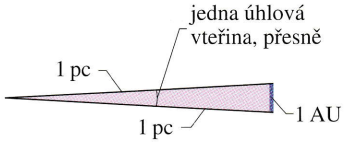
Obr. 1.7 Cvičení 12

13C. Malá kostka cukru má tvar krychle s hranou délky 1 cm. Jaká by musela být délka hrany krychlové krabice, do které bychom chtěli uložit jeden mol kostek cukru?

14C. Meteorologové často vyjadřují množství srážek v milimetrech vodního sloupce. Na město o rozloze 26 km^2 spadlo při silné bouři 50 mm srážek. Vyjádřete objem spadlé vody v litrech.

15C. Výrobce barev udává vydatnost vnějšího laku 11,3 m^2/l. Vyjádřete tuto hodnotu (a) ve čtverečných stopách na galon, (b) v jednotkách SI. (c) Jaký je fyzikální význam převrácené hodnoty tohoto čísla?

16C. Astronomické vzdálenosti jsou v porovnání s pozemskými tak obrovské, že je výhodné pro ně používat jiných délkových jednotek. **Astronomická jednotka** (AU z angl. *Astronomical unit*) je rovna střední vzdálenosti Země od Slunce, tj. $1{,}49 \cdot 10^8$ km. Jeden **parsek** (pc, z angl. *parsec*) je vzdálenost, ze které bychom viděli astronomickou jednotku pod zorným úhlem jedné úhlové vteřiny (obr. 1.8). **Světelný rok** (ly, z angl. *light year*) je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za jeden rok. (a) Vyjádřete vzdálenost Země–Slunce v parsecích a světelných rocích. (b) Vyjádřete 1 pc a 1 ly v kilometrech. I když astronomové dávají přednost jednotce pc, v populární literatuře se častěji používají světelné roky.



Obr. 1.8 Cvičení 16

17C. Při úplném zatmění Slunce je sluneční kotouč téměř přesně zakryt Měsícem. (a) Určete poměr průměrů Slunce a Měsíce, víte-li, že Slunce je od Země asi 400krát vzdálenější než Měsíc. (b) V jakém poměru jsou jejich objemy? (c) Přidržujte před očima korunovou minci tak, aby právě zakryla měsíční kotouč, a změřte zorný úhel, pod kterým ji vidíte. Z výsledku měření a ze znalosti vzdálenosti Země–Měsíc ($3{,}8 \cdot 10^5$ km) odhadněte průměr Měsíce.

18Ú*. Standardní kilogram má tvar válce, jehož výška (39 mm) je rovna jeho průměru (obr. 1.6). Ukažte, že válec tohoto tvaru má při daném objemu nejmenší povrch. Tím lze omezit změnu hmotnosti tělesa při jeho otěru nebo znečištění povrchu.

ODST. 1.5 Čas

19C. Vyjádřete rychlost světla $3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$ (a) ve stopách za nanosekundu, (b) v milimetrech za pikosekundu.

20C. Enrico Fermi kdysi poznamenal, že standardní doba vyučovací hodiny (45 min) je přibližně rovna jednomu mikrostoletí. Vyjádřete jedno mikrostoletí v minutách a vypočtěte procentní odchylku výsledku od Fermiho odhadu.

21C. Pro přibližné výpočty se často hodí odhad, že rok (365,25 dne) má asi $\pi \cdot 10^7$ sekund. Jak je tento odhad přesný?

22C. Jisté kyvadlové hodiny (s dvanáctihodinovým ciferníkem) se zrychlují o 1 minutu za den. Nastavíme-li hodiny v určitém okamžiku správně, za jak dlouho ukážou správný čas znovu?

23C. Vyjádřete stáří vesmíru ve dnech (viz tab. 1.4).

24C. (a) Čeho je víc: sekund v týdnu nebo minut v roce? b) Člověk na Zemi existuje přibližně 10^6 let a stáří vesmíru je odhadováno na 10^{10} roků. Kolik „sekund“ by byla Země osídlena člověkem, kdybychom za stáří Vesmíru považovali jeden pomyslný „den“?

25C. Maximální rychlost, které jsou schopna dosáhnout různá zvířata, můžeme vyjádřit v mílích za hodinu takto: (a) hlemýžď: $3{,}0 \cdot 10^{-2}$; (b) pavouk: 1,2; (c) člověk: 23; (d) gepard: 70. Převeďte tyto hodnoty na metry za sekundu. (Pro všechny čtyři výpočty vystačíme s jediným převodním koeficientem. Je výhodné spočítat si jej předem a pro další výpočty uložit do paměti kalkulačky.)

26C. Vyjádřete rychlost světla ($3{,}0 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$) v astronomických jednotkách za minutu (viz cvič. 16).

27C. Až do roku 1883 se každé město ve Spojených státech řídilo svým vlastním časem. Cestujeme-li dnes, posouváme si hodinky jen tehdy, je-li časový posuv roven* celé hodině. Kolik stupňů zeměpisné délky a jakou vzdálenost na 45. rovnoběžce je třeba v průměru překonat, abychom museli posunout své hodinky právě o jednu hodinu?

28C. Délka pozemského dne se rovnoměrně zvyšuje o 0,001 s za každé století. O kolik sekund se prodloužil den za dvacet století uplynulých od začátku našeho letopočtu? (Zpomalování rotace Země bylo zjištěno sledováním zatmění Slunce během posledních dvou tisíciletí.)

29C. Na dvou *různých* stadionech byly pořádány závody v běhu na jednu míli. Vítězové dosáhli časů 3 min 58,05 s a 3 min 58,20 s. Délka běžecké trati však byla změřena jen s omezenou přesností. Jaký může být maximální rozdíl skutečných délek obou tratí, abychom mohli s jistotou tvrdit, že běžec, který dosáhl kratšího času, byl doopravdy rychlejší?

30C. V laboratoři byly testovány patery různé hodiny. V jednom týdnu byly každý den přesně v poledne zaznamenány údaje

* Časová pásma nejsou přesně určena zemskými poledníky, ale z praktických důvodů respektují státní útvary.

všech hodin do následující tabulky. Seřaďte hodiny podle přesnosti jejich chodu, od nejlepších po nejhorší.

HODINY	NE	PO	ÚT	ST	ČT	PÁ	SO
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

31C. **Siderický měsíc** je doba, za kterou Měsíc zaujme při pozorování ze Země tutéž polohu vzhledem k hvězdnému pozadí. **Lunární měsíc** je doba mezi stejnými měsíčními fázemi. Lunární měsíc je delší než siderický. Proč a o kolik?

ODST. 1.6 Hmotnost

32C. S použitím údajů uvedených v textu této kapitoly určete, kolik je atomů v jednom kilogramu vodíku. Hmotnost jednoho atomu vodíku je 1,0 u.

33C. Molekula vody H_2O je tvořena dvěma atomy vodíku a jedním atomem kyslíku. Hmotnost atomu vodíku je 1,0 u a hmotnost atomu kyslíku je přibližně 16 u. (a) Jaká je celková hmotnost molekuly vody? (b) Kolik molekul vody je ve všech světových oceánech, obsahují-li přibližně $1{,}4 \cdot 10^{21}$ kg vody?

34C. Země má hmotnost $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. Průměrná hmotnost atomů, z nichž se skládá, je 40 u. Z kolika atomů je Země složena?

35C. Jaká je hmotnost vody, která napršší na město během silné bouře (viz cvič. 14)?

36C. Při redukční dietě můžeme ztratit za týden až 2,3 kg tělesné hmotnosti. Kolik miligramů v průměru ztrácíme každou sekundu?

37C. (a) Vyjádřete hustotu vody v $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, víte-li, že je rovna $1{,}0\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. (b) Nádrž o objemu $5\,700\ \mathrm{m^3}$ se naplní za 10 h. Přítok vody je stálý. Jaký je hmotnostní průtok vody v přívodním potrubí (v kilogramech za sekundu)?

38C. Jemná křemenná zrnka písku (SiO_2) z kalifornských pláží mají přibližně tvar kuliček o poloměru 50 μm. Hustota křemene je $2\,600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Kolik kg písku má stejný povrch jako krychle o hraně 1 m?

39C. Železo má hustotu $7{,}87\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. Hmotnost jednoho atomu železa je $9{,}27 \cdot 10^{-26}$ kg. (a) Jaký je objem jednoho atomu železa? (b) Jaká je vzdálenost mezi středy sousedních atomů za předpokladu, že atomy jsou krychlové a těsně uspořádané?

2
Přímočarý pohyb



V roce 1977 vytvořila Kitty O'Neilová rekord v závodech dragsterů. Dosáhla tehdy rychlosti 628,85 km/h za pouhých 3,72 s. Jiný rekord tohoto typu zaznamenal v roce 1958 Eli Beeding ml. při jízdě na saních s raketovým pohonem. Po klidovém startu dosáhly saně rychlosti 116 km/h za dobu 0,04 s, která představuje v pravém slova smyslu „okamžik". Je totiž kratší než mrknutí oka. Můžeme nějak porovnat tyto dva výkony, abychom měli představu, který z nich mohl přinést jezdci větší vzrušení nebo dokonce strach? Máme srovnávat dosaženou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?

2.1 POHYB

Celý svět a všechno v něm se pohybuje. Dokonce i věci, které se zdají být v klidu, jako například silnice, se pohybují spolu s otáčením Země, jejím obíháním kolem Slunce, s pohybem Slunce kolem středu naší Galaxie i pohybem celé Galaxie vzhledem ke galaxiím ostatním. Část fyziky, která se zabývá popisem pohybu těles i tříděním a porovnáváním pohybů, se nazývá **kinematika**. Které charakteristiky pohybu vlastně máme měřit a jak je budeme srovnávat?

Než se pokusíme na tyto otázky odpovědět, všimněme si některých obecných vlastností pohybů. Naše úvahy budou prozatím omezeny třemi požadavky:

1. Pohyb se děje vůči Zemi (kterou pokládáme za nehybnou) výhradně po přímce. Ta může být svislá (pád kamene), vodorovná (jízda automobilu po dálnici), nebo libovolně skloněná. Vždy to ale musí být přímka. Takový pohyb nazýváme **přímočarý**. (Zatímco svět kolem nás je trojrozměrný, představuje pohyb po přímce pouze jednorozměrnou úlohu.)

2. Až do kap. 5 se nebudeme zabývat příčinami pohybu, pouze se budeme snažit pohyb *popsat*. Budeme zjišťovat, zda těleso zvyšuje či snižuje svou rychlost, zda se zcela zastavilo, nebo se začalo pohybovat opačným směrem. Půjde prostě o sledování změn pohybu v průběhu času.

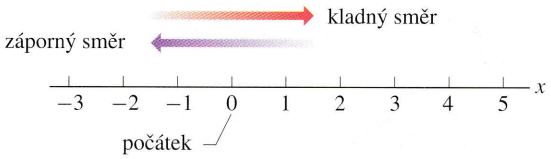
3. Pohybující se těleso nahradíme hmotným bodem. **Hmotný bod** je nejjednodušší myslitelný objekt, který zastupuje skutečné pohybující se těleso v případech, kdy pro popis jeho pohybu nejsou rozhodující jeho vlastní rozměry. Tento případ nastává zejména tehdy, pohybují-li se všechny části tělesa stejně rychle a ve stejném směru. Jako hmotný bod si můžeme představit i dítě, které sjíždí po přímé skluzavce na dětském hřišti. Představa hmotného bodu však již není vhodná pro otáčející se kolotoč, neboť jeho různé části se v daném okamžiku pohybují různě rychle a v různých směrech.

Hmotný bod je často užívaným a velmi funkčním fyzikálním modelem nejen při pouhém popisu pohybu těles, ale i v úvahách o příčinách jeho změn (kap. 5 a 6). Z tohoto obecnějšího pohledu nahrazuje hmotný bod skutečné těleso v případech, kdy je podstatná jeho celková hmotnost a nikoli jeho vlastní rozměry, tvar apod. Výstižnými výrazy zastupujícími pojem *hmotný bod* jsou **částice** nebo **bodový objekt**. Zadání příkladů a úloh v jednotlivých kapitolách jsou většinou formulována nikoli pro abstraktní hmotné body, částice, bodové objekty, ale pro konkrétní tělesa, s nimiž se setkáváme při fyzikálních experimentech i při každodenním dění (kostky, krabice, bedny, zvířata, lidé). V kapitolách 1 až 8, v nichž se jedná výhradně o posuvné pohyby těles, je všechna považujeme za hmotné body. S vědomím, že jsme právě přistoupili na tuto dohodu, se nebudeme úzkostlivě držet terminologické přesnosti a budeme používat jak názvy konkrétních objektů, tak termíny těleso či objekt.

2.2 POLOHA A POSUNUTÍ

Polohu objektu určujeme vždy vzhledem k nějakému vztažnému bodu, nejčastěji **počátku** souřadnicové osy (například osa x na obr. 2.1). Za **kladný směr** osy považujeme směr rostoucí souřadnice. Na obr. 2.1 je kladný směr orientován vpravo. Opačný směr nazýváme **záporný**.

Má-li například hmotný bod souřadnici $x = 5\,\text{m}$, znamená to, že je ve vzdálenosti 5 m od počátku, měřené v kladném směru. Pokud by měl souřadnici $x = -5\,\text{m}$, byl by od počátku stejně daleko, ale na opačné straně. Souřadnice $-5\,\text{m}$ je menší než souřadnice $-1\,\text{m}$ a ta je menší než souřadnice $+5\,\text{m}$.



Obr. 2.1 Polohu bodu na ose zadáváme ve vyznačených délkových jednotkách. Stupnici lze libovolně rozšířit v obou směrech.

Změnu polohy objektu z bodu o souřadnici x_1 do bodu o souřadnici x_2 nazýváme posunutím a značíme Δx. Platí

$$\Delta x = x_2 - x_1. \qquad (2.1)$$

(Podobně jako v př. 1.3 z kap. 1 označujeme symbolem Δ změnu veličiny, definovanou jako rozdíl její koncové a počáteční hodnoty.) Dosadíme-li za x_1 a x_2 konkrétní čísla, pak posunutí v kladném směru (na obr. 2.1 doprava) bude vždy kladné a posunutí v opačném směru (na obr. 2.1 doleva) vždy záporné. Přemístí-li se částice třeba z polohy $x_1 = 5\,\text{m}$ do polohy $x_2 = 12\,\text{m}$, je $\Delta x = (12\,\text{m}) - (5\,\text{m}) = (+7\,\text{m})$. Kladná hodnota posunutí nám říká, že se těleso pohnulo v kladném směru. Vrátí-li se těleso zpět do polohy $x = 5\,\text{m}$, bude celkové posunutí nulové. Při výpočtu posunutí není důležité, kolik metrů těleso skutečně urazilo. Podstatná je pouze výchozí a koncová poloha.

Není-li v dané úloze důležité znaménko (tj. směr) posunutí, hovoříme o **velikosti** posunutí $|\Delta x|$. Ta je vždy nezáporná (tj. kladná anebo nula).

Posunutí je příkladem **vektorové veličiny**, i když zatím jen jednorozměrné. Jako každý vektor je charakterizováno jak velikostí, tak směrem. Vektorům je věnována celá kap. 3. V tuto chvíli postačí, uvědomíme-li si, že posunutí

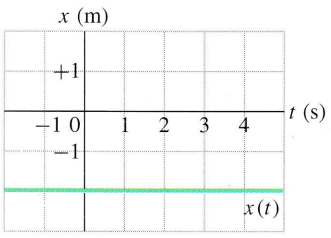
po přímce má dvě charakteristiky: (1) velikost, tj. vzdálenost mezi počátečním a koncovým bodem (například počet metrů) a (2) směr určený souřadnicovou osou orientovaný od počáteční ke koncové poloze a vyjádřený znaménkem plus či minus.

Následuje první z kontrol, jichž v této knize najdete celou řadu. Každá obsahuje jednu nebo více otázek, vyžadujících jednoduchou úvahu či výpočet (často jen „z hlavy"). Můžete si pomocí nich jednoduše ověřit, zda jste probranou látku pochopili. Správné odpovědi jsou uvedeny na konci knihy.

KONTROLA 1: Tři různá posunutí jsou dána následujícími počátečními a koncovými polohami na ose x. (a) -3 m, $+5$ m; (b) -3 m, -7 m; (c) 7 m, -3 m. Která z nich jsou záporná?

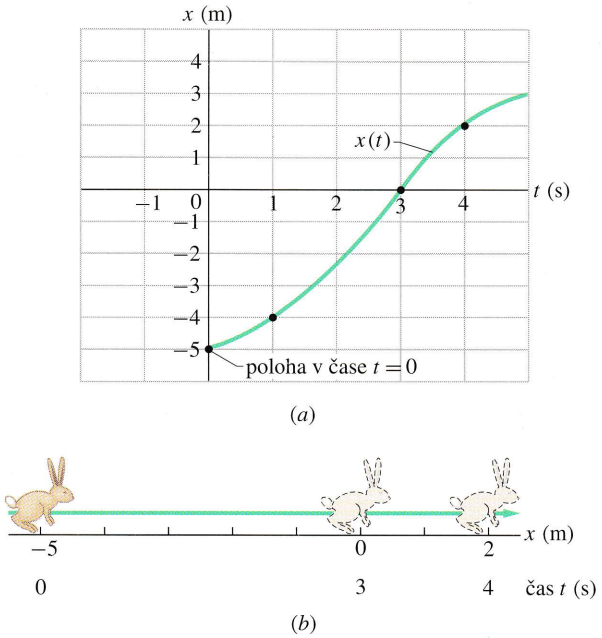
2.3 PRŮMĚRNÁ RYCHLOST

Přehlednou informaci o poloze tělesa získáme, zakreslíme-li do grafu závislost jeho polohy $x(t)$ na čase t. Zvláště jednoduchým příkladem je graf na obr. 2.2, představující závislost $x(t)$ pro králíka,* který sedí v poloze $x = -2$ m. Mnohem zajímavější situaci znázorňuje graf na obr. 2.3a. V tomto případě se totiž králík pohyboval. Poprvé jsme si jej všimli v poloze $x = -5$ m v čase $t = 0$. Pohyboval se směrem k počátku soustavy souřadnic $x = 0$, kterým proběhl v okamžiku $t = 3$ s a pokračoval v běhu v kladném směru osy x.



Obr. 2.2 Graf časové závislosti $x(t)$ polohy králíka sedícího v bodě o souřadnici $x = -2$ m. Jeho poloha se s časem nemění.

* Králíka považujeme za hmotný bod.



Obr. 2.3 (a) Graf časové závislosti polohy $x(t)$ běžícího králíka. (b) Obrázek skutečné dráhy králíka. Na stupnici pod osou x je vždy uveden okamžik, kdy králík dorazil do vyznačené polohy x.

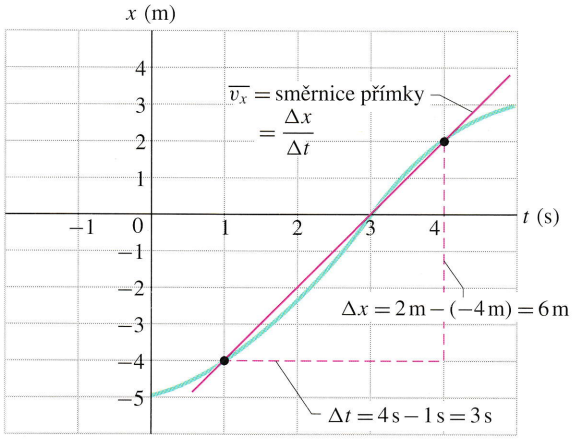
Na obr. 2.3b je zakreslen přímočarý pohyb králíka, jak bychom ho mohli vidět ve skutečnosti. Graf na obr. 2.3a je samozřejmě abstraktní: nic takového nemůžeme přímo pozorovat. Obsahuje však bohatší informaci o pohybu králíka. Umožňuje například zjistit, jak rychle se pohyboval. Ve skutečnosti je s otázkou „jak rychle" spojeno několik různých fyzikálních veličin. Jednou z nich je tzv. **průměrná** neboli **střední rychlost** $\overline{v_x}$, kterou definujeme jako podíl posunutí Δx v určitém časovém intervalu Δt a délky tohoto intervalu:

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \qquad (2.2)$$

Označujeme* ji $\overline{v_x}$. V grafu $x(t)$ je průměrná rychlost $\overline{v_x}$ dána směrnicí přímky, která spojuje dva vybrané body křivky: polohu x_1 v čase t_1 (v grafu bod $[t_1, x_1]$) a polohu x_2 v čase t_2 (bod $[t_2, x_2]$). Podobně jako posunutí má i průměrná rychlost velikost i směr. (Je tedy dalším příkladem vektorové veličiny.) Je-li hodnota $\overline{v_x}$ kladná, pak křivka zleva doprava stoupá (funkce $x(t)$ je rostoucí). Je-li záporná, pak křivka zleva doprava klesá (funkce $x(t)$ je klesající). Průměrná rychlost $\overline{v_x}$ má vždy stejné znaménko jako posunutí, neboť hodnota Δt ve vztahu (2.2) je vždy kladná.

* Pruh nad *libovolnou* veličinou bude všude v této knize znamenat její střední hodnotu.

Obr. 2.4 dává návod, jak určit průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ běžícího králíka z obr. 2.3 v časovém intervalu od $t = 1\,\text{s}$ do $t = 4\,\text{s}$. Její hodnotu $\overline{v_x} = 6\,\text{m}/3\,\text{s} = +2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ jsme vypočetli jako směrnici spojnice dvou bodů na křivce grafu: první odpovídá začátku a druhý konci časového intervalu, během kterého jsme králíka sledovali.*



Obr. 2.4 Výpočet průměrné rychlosti v časovém intervalu od $t = 1\,\text{s}$ do $t = 4\,\text{s}$. Průměrná rychlost je určena jako směrnice přímky spojující dva body grafu, které odpovídají počátečnímu a koncovému okamžiku daného intervalu.

PŘÍKLAD 2.1

Nákladní dodávka jede po přímé silnici stálou rychlostí 86 km/h. Po ujetí 10,4 km náhle dojde palivo. Řidič pokračuje pěšky v původním směru. Po 27 minutách (0,450 h) dojde k čerpací stanici, vzdálené od odstavené dodávky 2,4 km. Jaká je průměrná rychlost řidiče od chvíle, kdy vyjel s dodávkou z výchozího místa, až do okamžiku příchodu k čerpací stanici? Řešte výpočtem i graficky.

ŘEŠENÍ: Pro výpočet průměrné rychlosti $\overline{v_x}$ musíme znát celkové posunutí Δx a dobu Δt. Je výhodné položit počátek souřadnicové osy x do místa, odkud automobil vyrazil (tedy $x_1 = 0$) a orientovat osu tak, aby směr jízdy byl kladný.

Poloha čerpací stanice na takto zvolené ose je $x_2 = 10{,}4\,\text{km} + 2{,}4\,\text{km} = +12{,}8\,\text{km}$, a tedy $\Delta x = x_2 - x_1 = +12{,}8\,\text{km}$. Dobu jízdy $\Delta t'$ určíme z rovnice (2.2), po jejíž úpravě a dosazení dostaneme:

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{\overline{v_{x'}}} = \frac{(10{,}4\,\text{km})}{(86\,\text{km/h})} = 0{,}121\,\text{h},$$

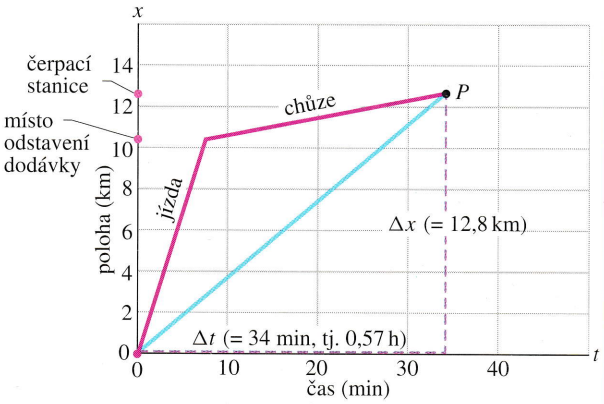
tj. asi 7,3 min. Jako $\Delta x' = 10{,}4\,\text{km}$ jsme označili vzdálenost, kterou dodávka ujela do okamžiku, kdy došlo palivo. Celková doba cesty řidiče (jízda i chůze) je tedy

$$\Delta t = 0{,}121\,\text{h} + 0{,}450\,\text{h} = 0{,}571\,\text{h}.$$

Nakonec dosadíme za Δx a Δt do rovnice (2.2):

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(12{,}8\,\text{km})}{(0{,}571\,\text{h})} = \\ = 22{,}4\,\text{km/h} \doteq 22\,\text{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ zjistíme ještě graficky. Nejprve narýsujeme graf funkce $x(t)$ (obr. 2.5). Výchozí bod grafu splývá s počátkem a koncový bod je označen písmenem P. Průměrná rychlost je směrnicí přímky spojující tyto dva body. Z délek přerušovaných čar je zřejmé, že směrnice má hodnotu $\overline{v_x} = 12{,}8\,\text{km}/0{,}57\,\text{h} = +22\,\text{km/h}$.



Obr. 2.5 Příklad 2.1. Přímkové úseky s označením „jízda" a „chůze" představují grafické znázornění časové závislosti polohy řidiče dodávky během jízdy, resp. během chůze k čerpací stanici. Směrnice přímky spojující počátek soustavy souřadnic s bodem P určuje jeho průměrnou rychlost.

PŘÍKLAD 2.2

Předpokládejme, že návrat k dodávce trvá řidiči 35 min. Musí totiž nést nádobu s palivem, a proto jde pomaleji. Jaká je průměrná rychlost řidiče na celé trati od okamžiku výjezdu z výchozího místa až po návrat od čerpací stanice?

ŘEŠENÍ: Stejně jako v předchozím případě musíme určit celkové posunutí Δx a vydělit je celkovou dobou Δt. Řidičova cesta nyní končí návratem k automobilu. Její počáteční bod má opět souřadnici $x_1 = 0$, koncový bod je dán polohou odstaveného automobilu $x_2 = 10{,}4\,\text{km}$. Dostáváme

* V geometrii je směrnice přímky definována jako tangenta úhlu, který tato přímka svírá s nějakou vztažnou přímkou. Představuje-li však přímka například graf závislosti $x(t)$ polohy tělesa x na čase t, rozumíme směrnicí podíl přírůstku souřadnice Δx a odpovídajícího přírůstku času Δt, včetně uvážení příslušných jednotek. Je-li poloha měřena v metrech a čas v sekundách, vyjde směrnice v jednotkách $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Tangentě úhlu α mezi přímkou grafu a časovou osou (která v tomto případě hraje roli vztažné přímky) bude rovna tehdy, zvolíme-li na osách t a x stejně dlouhé jednotky. Pokud by jedna sekunda na časové ose byla reprezentována třeba úsečkou o délce 1 cm, museli bychom na ose poloh zvolit jako 1 m rovněž úsečku o délce 1 cm.

$\Delta x = 10{,}4\,\text{km} - 0 = 10{,}4\,\text{km}$. Celková doba jízdy a chůze k čerpací stanici a zpět je

$$\Delta t = \frac{(10{,}4\,\text{km})}{(86\,\text{km/h})} + (27\,\text{min}) + (35\,\text{min}) = \\ = 0{,}121\,\text{h} + 0{,}450\,\text{h} + 0{,}583\,\text{h} = 1{,}15\,\text{h}.$$

Je tedy

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(10{,}4\,\text{km})}{(1{,}15\,\text{h})} = \\ = 9{,}04\,\text{km/h} \doteq 9{,}0\,\text{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrná rychlost je v tomto případě menší než v příkladu 2.1. Je to pochopitelné, celkové posunutí je totiž menší a celková doba delší.

KONTROLA 2: Po doplnění paliva se dodávka vrací zpět do bodu x_1 rychlostí 80 km/h. Jaká je průměrná rychlost na celé cestě?

Jinou představu o tom, „jak rychle" se hmotný bod pohybuje, lze získat pomocí tzv. **průměrné velikosti rychlosti** $\overline{v}$. Zatímco pro výpočet průměrné rychlosti $\overline{v_x}$, která je vektorovou veličinou, je rozhodující vektor posunutí Δx, je průměrná velikost rychlosti veličinou skalární a je určena celkovou dráhou, kterou hmotný bod urazí nezávisle na směru pohybu.* Je tedy

$$\overline{v} = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celková doba pohybu}}. \qquad (2.3)$$

Průměrná velikost rychlosti $\overline{v}$ neobsahuje, na rozdíl od průměrné rychlosti $\overline{v_x}$, informaci o směru pohybu. Je vždy nezáporná. V některých případech může být $\overline{v} = |\overline{v_x}|$, obecně to však neplatí. Výsledek následujícího příkladu to jasně dokumentuje.

PŘÍKLAD 2.3

Určete průměrnou velikost rychlosti pohybu v příkladu 2.2.

ŘEŠENÍ: Od počátku jízdy až po návrat zpět k vozu od čerpací stanice urazil řidič celkovou vzdálenost

$$10{,}4\,\text{km} + 2{,}4\,\text{km} + 2{,}4\,\text{km} = 15{,}2\,\text{km}$$

za dobu 1,15 h. Průměrná velikost jeho rychlosti má tedy hodnotu

$$\overline{v} = \frac{(15{,}2\,\text{km})}{(1{,}15\,\text{h})} = 13{,}2\,\text{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.1: *Rozumíme dobře zadanému problému?*

Společným problémem všech, kteří se teprve začínají zabývat řešením fyzikálních úloh, je správně pochopit zadání. Zda jsme zadání skutečně pochopili, si nejlépe ověříme tak, že se je pokusíme vyložit někomu jinému. Vyzkoušejte si to.

Když čteme zadání, zapíšeme si hodnoty známých veličin i s jednotkami a označíme je obvyklými symboly. Rozmyslíme si, kterou veličinu máme spočítat a rovněž ji označíme obvyklým symbolem. V příkladech 2.1 a 2.2 je neznámou veličinou průměrná rychlost, kterou značíme $\overline{v_x}$. Pokusíme se najít fyzikální vztahy mezi neznámou veličinou a veličinami zadanými. V příkladech 2.1 a 2.2 je to definice průměrné rychlosti, zapsaná vztahem (2.2).

Bod 2.2: *Používáme správně jednotky?*

Věnujme vždy pozornost tomu, abychom do vzorců dosadili všechny veličiny v odpovídajících jednotkách. V příkladech 2.1 a 2.2 je přirozené počítat vzdálenost v kilometrech, čas v hodinách a rychlost v kilometrech za hodinu. Někdy musíme před dosazením jednotky převést.

Bod 2.3: *Je získaný výsledek rozumný?*

Nad výsledkem se nakonec zamysleme a zvažujme, dává-li smysl. Není získaná hodnota příliš velká nebo naopak příliš malá? Má správné znaménko a jednotky? Správná odpověď v př. 2.1 je 22 km/h. Kdyby nám vyšlo třeba 0,000 22 km/h, −22 km/h, 22 km/s nebo 22 000 km/h, měli bychom hned poznat, že jsme ve výpočtu udělali chybu.

Bod 2.4: *Umíme dobře číst z grafů?*

Měli bychom být schopni dobře rozumět takovým grafům, jaké jsou například na obr. 2.2, 2.3a, 2.4 a 2.5. U všech vynášíme na vodorovnou osu čas (jeho hodnoty rostou směrem vpravo). Na svislé ose je poloha hmotného bodu x vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Poloha x roste směrem vzhůru.

Pozorně si všímejme jednotek, v nichž jsou veličiny na osách vyjádřeny (sekundy či minuty, metry nebo kilometry), nezapomínejme na znaménka proměnných.

2.4 OKAMŽITÁ RYCHLOST

Poznali jsme již dvě různé veličiny, které popisují, jak rychle se určité těleso nebo částice pohybuje: průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ a průměrnou velikost rychlosti $\overline{v}$. Obě určíme z měření prováděných v časovém intervalu Δt. Otázkou

* Je třeba rozlišovat *velikost vektoru průměrné rychlosti* $|\overline{v_x}|$ a *průměrnou velikost rychlosti* $\overline{v}$. První veličinu určíme prostě jako velikost vektoru definovaného vztahem (2.2) (viz také kap. 3), druhá je výsledkem středování velikosti rychlosti nezávisle na jejím směru, například z údaje rychloměru automobilu.

„jak rychle?“ však máme obvykle na mysli rychlost částice v daném okamžiku. Je popsána veličinou v_x, zvanou **okamžitá rychlost**, nebo jednoduše rychlost.

Okamžitou rychlost získáme z průměrné rychlosti tak, že budeme časový interval (neboli dobu) Δt, měřený od okamžiku t, zmenšovat bez omezení k nule. S poklesem hodnoty Δt se průměrná rychlost měřená v intervalu od t do $t + \Delta t$ blíží jisté limitní hodnotě, která pak definuje rychlost v okamžiku t:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \qquad (2.4)$$

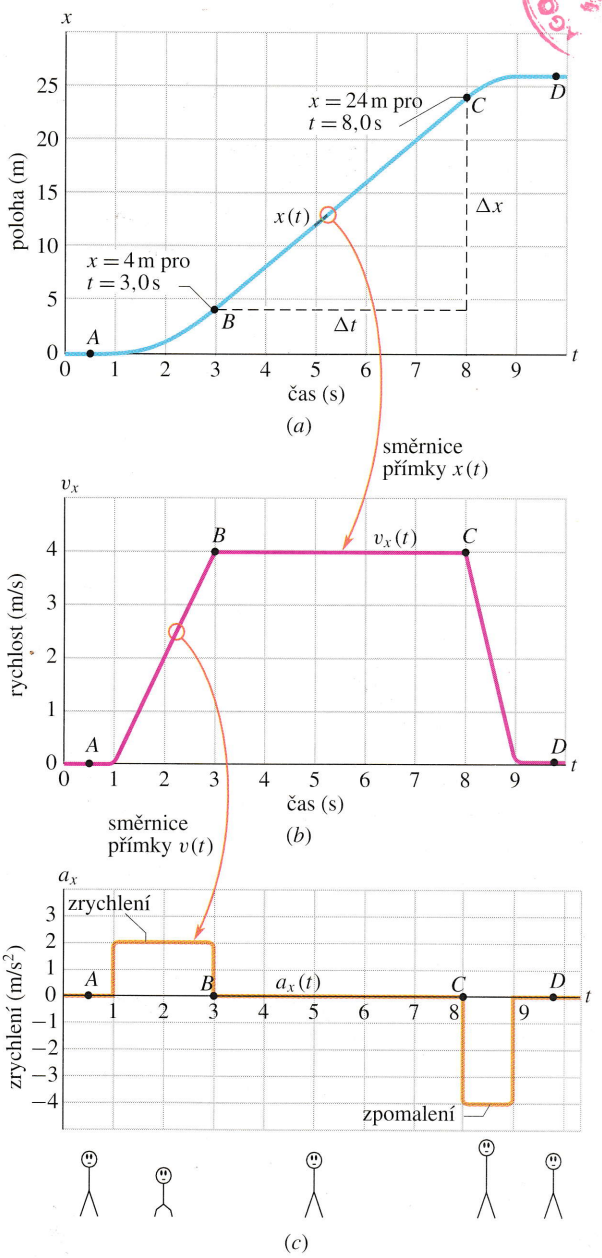
Okamžitá rychlost je další vektorovou veličinou, se kterou se setkáváme. Obsahuje totiž informaci i o směru pohybu částice. Určuje, jak rychle se v daném okamžiku mění poloha částice s časem. Názornou geometrickou představu o limitním přechodu od průměrné k okamžité rychlosti můžeme získat z obr. 2.4. Budeme-li bez omezení přibližovat bod určený koncovým okamžikem uvažovaného časového intervalu Δt k bodu počátečnímu, přejde červená přímka v tečnu ke křivce grafu, vedenou počátečním bodem. Matematicky je okamžitá rychlost rovna směrnici tečny ke grafu funkce $x(t)$.

Velikost okamžité rychlosti neboli **velikost rychlosti** již postrádá informaci o směru pohybu a má vždy nezápornou hodnotu. Rychlosti $+5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $-5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ mají stejnou velikost $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Rychloměr v automobilu měří jen velikost rychlosti, protože není schopen určit směr pohybu.

Angličtí studenti jsou na tom lépe. Obecná čeština užívá slova *rychlost* ve třech různých smyslech, pro které má angličtina tři různá slova, totiž *velocity* (vektor rychlosti), *speed* (velikost vektoru rychlosti) a *rate* (obecná změna v čase, např. rychlost hoření). Všechna tato slova jsou v angličtině zcela běžná. Ve fyzice užíváme slova *rychlost* pro *vektorovou veličinu*. Tam, kde by mohlo dojít k nedorozumění, raději užijeme sousloví, jako je „rychlost o velikosti…“. Slova „rychlost“ namísto „velikost rychlosti“ lze užít pouze tam, kde je *opravdu* zaručeno, že na směru nezáleží (výroky typu „Rychlost světla ve vzduchu je větší než ve vodě.“) anebo kde je směr jasně dán a nemůže se měnit (rychlost vlaku).

PŘÍKLAD 2.4

Na obr. 2.6a je zakreslena časová závislost $x(t)$ polohy kabiny výtahu. Kabina nejprve stojí v dolním patře, pak se začíná pohybovat vzhůru (kladný směr souřadnicové osy) a opět se zastaví. Nakreslete závislost rychlosti kabiny na čase.



Obr. 2.6 Příklad 2.4. (a) Časová závislost $x(t)$ polohy kabiny výtahu pohybující se svisle vzhůru po ose x. (b) Časová závislost její rychlosti $v_x(t)$. Všimněte si, že $v_x(t)$ je derivací funkce $x(t)$, tj. $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$. (c) Časová závislost zrychlení kabiny $a_x(t)$ je derivací funkce $v_x(t)$, tj. $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$. Schematické nákresy postaviček v dolní části obrázku naznačují pocity pasažéra při urychlování kabiny.

ŘEŠENÍ: Úseky grafu obsahující body A a D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu. Grafem funkce $x(t)$ v těchto úsecích jsou přímky rovnoběžné s časovou osou. Směrnice tečen, a tedy i rychlost kabiny, je nulová. V úseku mezi body B a C se sklon křivky nemění a souřadnice kabiny stále roste. Kabina se pohybuje konstantní rychlostí. Směrnici tečny

(tedy rychlost) určíme jako podíl

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x = \frac{(24\,\mathrm{m} - 4{,}0\,\mathrm{m})}{(8{,}0\,\mathrm{s} - 3{,}0\,\mathrm{s})} = +4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Kladné znaménko ukazuje, že se výtah pohybuje v kladném směru. Hodnoty rychlosti $v_x = 0$ a $v_x = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ jsou pro příslušné časové intervaly vyznačeny v grafu na obr. 2.6b. Při rozjezdu a opětovném zastavení, tj. v časových intervalech od 1 s do 3 s a od 8 s do 9 s se rychlost kabiny mění, například podle obr. 2.6b. (K diskusi o obr. 2.6c přistoupíme až v čl. 2.5.)

Můžeme řešit i „obrácenou úlohu", kdy potřebujeme ze znalosti funkce $v_x(t)$ (graf na obr. 2.6b) určit $x(t)$ (obr. 2.6a). Její řešení však není jednoznačné. Graf funkce $v_x(t)$ dává totiž informaci pouze o *změnách* polohy, nikoli o poloze samotné. Abychom určili změnu polohy v libovolném časovém intervalu, vypočteme „obsah plochy pod křivkou" grafu $v_x(t)$ omezenou počátečním a koncovým bodem časového intervalu.* Mezi třetí a osmou sekundou se kabina pohybuje dejme tomu konstantní rychlostí $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Změnu její polohy určíme jako „obsah plochy pod křivkou $v_x(t)$" odpovídající tomuto časovému intervalu:

$$\text{„Obsah plochy pod křivkou"} = (4{,}0)(8{,}0 - 3{,}0) = +20.$$

(Tato hodnota je kladná, protože příslušná část křivky $v_x(t)$ leží nad časovou osou.) Získaný *číselný údaj* opatříme správnou jednotkou**, v tomto případě $(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \cdot \mathrm{s} = \mathrm{m}$. Obr. 2.6a potvrzuje, že hodnota souřadnice určující polohu kabiny se v uvažovaném časovém intervalu skutečně zvětšila o 20 m. Z obr. 2.6b však nemůžeme poznat, jaká byla její poloha na začátku a konci tohoto intervalu. K tomu bychom potřebovali další údaj.

PŘÍKLAD 2.5

Hmotný bod se pohybuje po ose x a jeho poloha je v závislosti na čase určena vztahem

$$x = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3. \qquad (2.5)$$

Jaká je jeho rychlost v okamžiku $t = 3{,}5\,\mathrm{s}$? Je jeho rychlost stálá, nebo se spojitě mění?

ŘEŠENÍ: Zadání pro jednoduchost neobsahuje jednotky. Můžeme si je však k číselným koeficientům doplnit takto: $7{,}8\,\mathrm{m}$, $9{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-3}}$. Rychlost určíme pomocí rovnice (2.4), kde za x na pravé straně dosadíme závislost (2.5):

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3).$$

Dostaneme tak

$$v_x = 0 + 9{,}2 - (3)(2{,}1)t^2 = 9{,}2 - 6{,}3t^2. \qquad (2.6)$$

Pro $t = 3{,}5$ je

$$v_x = 9{,}2 - (6{,}3)(3{,}5)^2 = -68,$$
$$v_x = -68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V okamžiku $t = 3{,}5\,\mathrm{s}$ se hmotný bod pohybuje v záporném směru osy x a má tedy rychlost $-68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (o směru pohybu vypovídá záporné znaménko). Na pravé straně vztahu (2.6) vystupuje čas a rychlost v_x se tedy s časem mění.

KONTROLA 3: Následující čtyři vztahy představují možné případy závislosti polohy částice na čase. V každém z nich je poloha x zadávána v metrech, čas t v sekundách a vždy platí $t > 0$. (1) $x = 3t - 2$, (2) $x = -4t^2 - 2$, (3) $x = 2/t^2$, (4) $x = -2$. (a) Ve kterých z uvedených případů je rychlost v_x částice konstantní? (b) Kdy je záporná? (c) Kdy se pohyb částice zpomaluje?

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.5: *Derivace a sklon křivky*

Derivace funkce je určena sklonem křivky (grafu funkce) v daném bodě. Přesněji vyjádřeno je derivace rovna směrnici tečny ke křivce v tomto bodě. Ukázkou může být příklad 2.4: Okamžitá rychlost výtahu v libovolném okamžiku (vypočtená jako derivace funkce $x(t)$ podle (2.4)) je rovna směrnici tečny ke křivce na obr. 2.6a sestrojené v odpovídajícím bodě. Ukážeme si, jak je možné určit derivaci funkce graficky.

Na obr. 2.7 je graf funkce $x(t)$ pro pohybující se hmotný bod. Při grafickém určení jeho rychlosti v okamžiku $t = 1\,\mathrm{s}$ budeme postupovat takto: Nejprve na křivce označíme bod, který tomuto času odpovídá. V tomto bodě narýsujeme tečnu ke křivce grafu. Pracujeme co nejpečlivěji. Dále sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Jeho konkrétní volba je libovolná, neboť přepony všech takových trojúhelníků mají stejný sklon. Zvolíme tedy trojúhelník co největší, abychom směrnici změřili co nejpřesněji. Pomocí měřítek na souřadnicových osách určíme Δx a Δt. Směrnice tečny ke křivce je dána podílem $\Delta x/\Delta t$. Z obr. 2.7 dostaneme

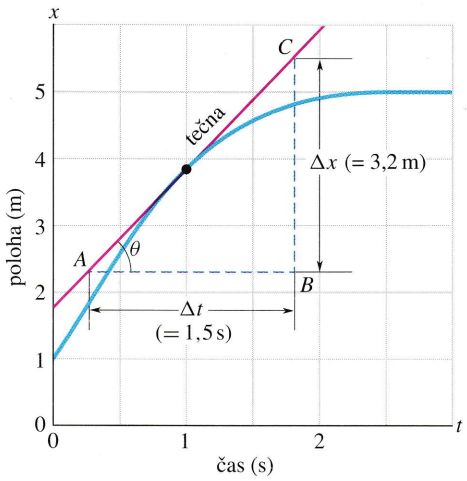
$$\text{směrnice tečny} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(5{,}5\,\mathrm{m} - 2{,}3\,\mathrm{m})}{(1{,}8\,\mathrm{s} - 0{,}3\,\mathrm{s})} = \frac{3{,}2\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{s}} = +2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Podle rovnice (2.4) je tato směrnice rovna rychlosti částice v okamžiku $t = 1\,\mathrm{s}$. Kdybychom změnili měřítko na některé souřadnicové ose, změnil by se sice jak tvar křivky, tak velikost úhlu θ, ale rychlost určená popsaným způsobem

* Tento postup zdůvodníme v článku 2.7.

** Její rozměr je určen součinem veličin na osách grafu.

by byla stejná. Známe-li matematické vyjádření funkce $x(t)$ (příklad 2.5), je vhodnější stanovit rychlost částice přímo, výpočtem její derivace. Grafická metoda je pouze přibližná.



Obr. 2.7 Derivace křivky v libovolném bodě je směrnicí tečny v tomto bodě. Směrnice tečny (a tedy i okamžitá rychlost dx/dt) v čase $t = 1{,}0$ s je $\Delta x/\Delta t = +2{,}1$ m/s.

2.5 ZRYCHLENÍ

Jestliže se vektor rychlosti částice mění, říkáme, že se částice pohybuje se zrychlením. **Průměrné zrychlení** $\overline{a_x}$ v časovém intervalu Δt je definováno podílem

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \qquad (2.7)$$

Okamžité zrychlení (nebo prostě jen **zrychlení**) je určeno derivací rychlosti:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.8)$$

Podle vztahu (2.8) je zrychlení v daném okamžiku rovno směrnici tečny ke křivce $v_x(t)$ v bodě určeném tímto okamžikem. Spojením rovnic (2.8) a (2.4) dostaneme

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (2.9)$$

Zrychlení hmotného bodu je tedy v každém okamžiku dáno druhou derivací polohy $x(t)$ podle času. Nejužívanější jednotkou zrychlení je $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. V příkladech a cvičeních se můžeme setkat i s jinými jednotkami, všechny však budou mít tvar délka·čas^{-2}. Zrychlení má velikost i směr, je tedy další vektorovou veličinou. Při pohybu podél osy x stačí k určení směru zrychlení zadat pouze příslušné znaménko, podobně jako u posunutí a rychlosti.

Na obr. 2.6c je graf časové závislosti zrychlení výtahové kabiny z příkladu 2.4. Porovnejme grafy $a_x(t)$ a $v_x(t)$: každý bod grafu $a_x(t)$ je určen derivací (tj. směrnicí tečny) grafu $v_x(t)$ v odpovídajícím bodě. Je-li rychlost v_x konstantní (buď 0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ nebo 4 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$), je její derivace nulová. Zrychlení kabiny je rovněž nulové. Při rozjezdu kabiny je derivace rychlosti kladná, kladné je tedy i zrychlení $a_x(t)$. Při zpomalování má rychlost zápornou derivaci a zrychlení je záporné. Porovnejme nyní sklon dvou přímých úseků grafu $v_x(t)$, které odpovídají rozjezdu a brzdění výtahu. Sklon křivky odpovídající brzdění je strmější než sklon při rozjezdu. Brzdění totiž trvalo jen polovinu doby potřebné k rozjezdu. Velikost zrychlení výtahu při brzdění byla větší než při rozjezdu, což je zřejmé i z obr. 2.6c.

Jízda výtahem je doprovázena nepříjemnými pocity, jak výmluvně napovídají schematické kresby postaviček v dolní části obr. 2.6. Při rozjezdu kabiny jsme jakoby tlačeni směrem dolů, při zastavování naopak nadlehčováni. V mezidobí nic zvláštního nepociťujeme. Svými smysly můžeme vnímat zrychlení, nikoli rychlost. Jedeme-li autem rychlostí 90 km/h nebo letíme letadlem rychlostí 900 km/h, naše tělo si pohyb vůbec neuvědomuje. Pokud by však náhle auto či letadlo začalo měnit svou rychlost, pociťujeme tuto změnu velmi intenzivně až nepříjemně. Silné vzrušení, které zažíváme při jízdě na horské dráze v lunaparku, je částečně způsobeno právě prudkými změnami rychlosti pohybu našeho těla. Ukázka reakce lidského těla na velké zrychlení je na fotografiích obr. 2.8, které byly pořízeny při prudkém urychlení a následném brzdění raketových saní.

Velká zrychlení někdy vyjadřujeme v tzv. jednotkách „g“, kde

$$1g = 9{,}806\,65\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq$$
$$\doteq 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\ \text{(jednotka } g\text{)}. \qquad (2.10)$$

Tato hodnota byla přijata jako **normální tíhové zrychlení** na 2. generální konferenci pro váhy a míry v r. 1901. Odpovídá severní zeměpisné šířce 45° na úrovni mořské hladiny. (V čl. 2.8 se dovíme, že g je velikost zrychlení tělesa volně padajícího v blízkosti zemského povrchu.) Při jízdě na horské dráze dosahuje velikost zrychlení krátkodobě hodnoty až $3g$, tj. $3 \cdot 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 30\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



Obr. 2.8 Plukovník J. P. Stapp v raketových saních při urychlování na vysokou rychlost (zrychlení směřuje ke čtenáři) a při brzdění (zrychlení směřuje od čtenáře).

PŘÍKLAD 2.6

(a) Kitty O'Neilová vytvořila rekord v závodech dragsterů, když dosáhla největší rychlosti 628,85 km/h v nejkratším čase 3,72 s. Jaké bylo průměrné zrychlení jejího automobilu?

ŘEŠENÍ: Průměrné zrychlení je dáno vztahem (2.7):

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(628{,}85\ \text{km/h} - 0)}{(3{,}72\ \text{s} - 0)} =$$

$$= \frac{174{,}68\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{3{,}72\ \text{s}} = 47\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \doteq$$

$$\doteq 4{,}8g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Předpokládali jsme, že zrychlení má směr kladné osy x.)

(b) Jaké bylo průměrné zrychlení saní při jízdě Eliho Beedinga ml., který dosáhl rychlosti 116 km/h za 0,04 s?

ŘEŠENÍ: Opět použijeme vztahu (2.7):

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(116\ \text{km/h} - 0)}{(0{,}04\ \text{s} - 0)} =$$

$$= \frac{32{,}22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{0{,}04\ \text{s}} = 806\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \doteq 80g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nyní se můžeme vrátit k otázce, kterou jsme si položili v úvodu kapitoly, kde jsme se o obou rekordních výkonech poprvé zmínili: „Jak rozhodneme, která jízda mohla přinést jezdci větší vzrušení? Máme porovnávat výslednou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?" Odpověď již známe: protože lidské tělo vnímá zrychlení a ne rychlost, měli bychom porovnávat právě zrychlení. V tomto srovnání „vítězí" sáňkař Beeding, i když jeho výsledná rychlost byla mnohem menší než rychlost automobilistky O'Neilové. Zrychlení, kterému byl Beeding vystaven, by bylo smrtelné, kdyby trvalo delší dobu.

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.6: *Znaménko zrychlení*

Vraťme se k příkladu 2.6 a všimněme si znaménka vypočteného zrychlení. Ve většině běžných situací mívá znaménko zrychlení následující význam: těleso má kladné zrychlení, jestliže se jeho rychlost zvyšuje, záporné zrychlení odpovídá klesající rychlosti (těleso brzdí). Tento výklad však nemůžeme přijmout bezmyšlenkovitě v každé situaci. Má-li například automobil rychlost $v_x = -27\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $(= -97\ \text{km/h})$ a zcela zastaví za 5 s, je jeho průměrné zrychlení při brzdění $\overline{a_x} = +5{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Toto zrychlení je kladné, i když se pohyb vozu zpomaloval. Rozhodující je, že zrychlení má opačné znaménko než počáteční rychlost.

Správná interpretace znaménka zrychlení je následující:

> Má-li zrychlení částice stejné znaménko jako okamžitá rychlost, roste velikost její rychlosti a její pohyb se zrychluje. Má-li zrychlení opačné znaménko než okamžitá rychlost, klesá velikost rychlosti částice a její pohyb se zpomaluje.

Tato interpretace získá náležitý význam v kap. 4, kde se budeme podrobněji věnovat vektorové povaze rychlosti a zrychlení.

KONTROLA 4: Pes běží podél osy x. Jaké znaménko má jeho zrychlení, pohybuje-li se pes (a) v kladném směru osy x a velikost jeho rychlosti roste, (b) v kladném směru osy x a velikost jeho rychlosti klesá, (c) v záporném směru osy x s rostoucí velikostí rychlosti a (d) v záporném směru osy x s klesající velikostí rychlosti?





PŘÍKLAD 2.7

Poloha částice pohybující se podél osy x (obr. 2.1) závisí na čase takto:

$$x = 4 - 27t + t^3.$$

Číselné koeficienty jsou vyjádřeny v metrech, metrech za sekundu a v metrech za sekundu na třetí.

(a) Určete $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

ŘEŠENÍ: Rychlost $v_x(t)$ určíme jako derivaci polohy $x(t)$ podle času:

$$v_x = -27 + 3t^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zrychlení $a_x(t)$ je časovou derivací rychlosti $v_x(t)$:

$$a_x = 6t. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Je v některém okamžiku rychlost částice nulová?

ŘEŠENÍ: Položíme-li $v_x(t) = 0$, dostaneme rovnici

$$0 = -27 + 3t^2,$$

jejíž řešení je $t = \pm 3\,\text{s}$. (Odpověď)

(c) Popište pohyb částice pro $t \geqq 0$.

ŘEŠENÍ: Provedeme rozbor závislostí $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

V čase $t = 0$ je částice v bodě o souřadnici $x = +4\,\text{m}$ a pohybuje se doleva rychlostí $-27\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Její zrychlení je nulové.

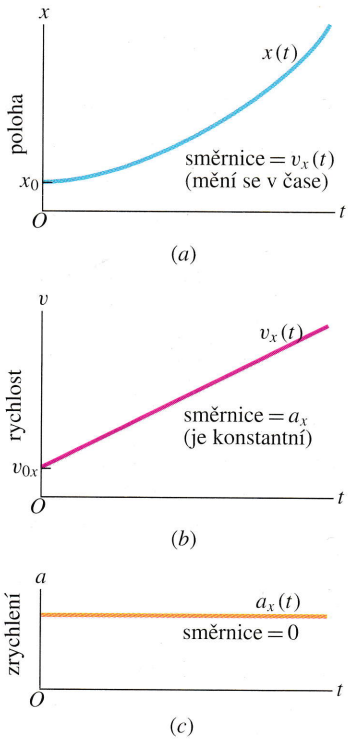
V časovém intervalu $0\,\text{s} < t < 3\,\text{s}$ se částice stále pohybuje doleva, její pohyb se však zpomaluje. Její zrychlení je totiž kladné a směřuje tedy doprava. Toto tvrzení ověříme tak, že do vztahů pro $v_x(t)$ a $a_x(t)$ zkusmo dosadíme některý okamžik ležící v uvedeném časovém intervalu (proveďte např. pro $t = 2\,\text{s}$). Zrychlení částice s časem roste, její pohyb směrem vlevo je čím dál pomalejší.

V okamžiku $t = 3\,\text{s}$ má částice nulovou rychlost ($v_x = 0$). Právě dosáhla nejvzdálenějšího bodu ležícího vlevo od počátku ($x = -50\,\text{m}$). Zrychlení zůstává kladné a jeho velikost neustále roste.

Pro $t > 3\,\text{s}$ narůstá kladné zrychlení. Rychlost, která nyní směřuje doprava, velmi prudce roste. (Všimněme si, že nyní má zrychlení stejné znaménko jako rychlost.) Částice neustále pokračuje v pohybu směrem doprava.

2.6 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ POHYB: SPECIÁLNÍ PŘÍPAD

Velmi často se setkáváme s pohyby, jejichž rychlost se (alespoň přibližně) mění tak, že zrychlení je konstantní. Nazýváme je rovnoměrně zrychlené. Příkladem může být automobil, který se na křižovatce rozjíždí na zelenou. (Grafy časové závislosti polohy, rychlosti a zrychlení, odpovídající takové situaci, jsou schematicky zakresleny na obr. 2.9.) Stejně tak může být zrychlení automobilu konstantní i při brzdění.



Obr. 2.9 (a) Časová závislost polohy $x(t)$ částice pohybující se rovnoměrně zrychleně. (b) Časová závislost její rychlosti $v_x(t)$ je v každém bodě určena směrnicí křivky $x(t)$ na obrázku (a). (c) Zrychlení částice $a_x(t)$ je stálé a je dáno (konstantní) směrnicí grafu $v_x(t)$.

Podobné případy jsou tak časté, že je vhodné mít pro jejich popis zvláštní rovnice. Se dvěma možnými způsoby jejich odvození se postupně seznámíme v tomto a následujícím článku.

Při studiu obou článků i při řešení úloh a cvičení je třeba mít neustále na paměti, že *tyto rovnice platí jen pro případ konstantního zrychlení* (nebo zrychlení, které lze v dobrém přiblížení za konstantní považovat).

Při rovnoměrně zrychleném pohybu je okamžité zrychlení shodné se zrychlením průměrným. S malou změnou označení tak můžeme rovnici (2.7) přepsat do tvaru

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0}.$$

Symbolem v_{0x} je označena rychlost v okamžiku $t = 0$ (počáteční rychlost), a v_x je rychlost v libovolném pozdějším čase t. Rovnici můžeme ještě upravit takto:

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \qquad (2.11)$$

Všimněme si, že pro $t = 0$ vede tento vztah k očekávané rovnosti $v_x = v_{0x}$. Derivováním rovnice (2.11) podle času dostaneme $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = a_x$, v souhlasu s definičním vztahem pro zrychlení a_x. Těmito jednoduchými kontrolními výpočty jsme ověřili správnost odvozené rovnice. Na obr. 2.9b je graf funkce $v_x(t)$ dané rovnicí (2.11).

Obdobně lze přepsat rovnici (2.2):

$$\overline{v_x} = \frac{x - x_0}{t - 0}$$

a odtud

$$x = x_0 + \overline{v_x} t. \qquad (2.12)$$

x_0 je poloha částice v okamžiku $t = 0$ (počáteční poloha), $\overline{v_x}$ je průměrná rychlost v časovém intervalu od $t = 0$ až do obecného okamžiku t.

Snadno zjistíme, že grafem funkce $v_x(t)$ dané vztahem (2.11) je přímka. Průměrná rychlost v libovolném časovém intervalu (a tedy i v intervalu od $t = 0$ po obecný okamžik t) je v tomto případě určena aritmetickým průměrem počáteční a koncové rychlosti (v_{0x} a v_x). Můžeme ji tedy zapsat ve tvaru

$$\overline{v_x} = \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_x). \qquad (2.13)$$

Dosadíme-li za v_x pravou stranu rovnice (2.11), získáme po malých úpravách vztah

$$\overline{v_x} = v_{0x} + \tfrac{1}{2} a_x t. \qquad (2.14)$$

Po dosazení z (2.14) do (2.12) nakonec dostaneme

$$x - x_0 = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2. \qquad (2.15)$$

Pro kontrolu můžeme dosadit $t = 0$ a dostáváme očekávaný výsledek $x = x_0$. Derivací vztahu (2.15) podle času získáme, opět podle očekávání, vztah (2.11). Graf funkce $x(t)$ dané vztahem (2.15) je na obr. 2.9a. Uvědomme si, že funkční předpis (2.15) pro $x(t)$ obsahuje veškeré dostupné informace o rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu. Je-li zadáno zrychlení a_x (stálé v průběhu celého děje) a hodnoty x_0 a v_{0x}, určující počáteční stav částice, je možné určit v libovolném okamžiku t

(1) její polohu x z rovnice (2.15),
(2) její rychlost v_x z rovnice (2.11).

Vztah (2.15) lze z (2.11) jednoduše získat integrací, a obráceně vztah (2.11) vznikne z (2.15) derivováním.

Při řešení některých úloh sloužících k procvičení problematiky rovnoměrně zrychleného pohybu je však výhodnější jiný pohled na vztahy (2.11) a (2.15). Často se objevují zadání, která nesměřují k jejich využití jako předpisů pro *funkce*, ale týkají se jednotlivého okamžiku. V takových případech pak bývá vhodné hledět na tyto vztahy jako na soustavu dvou rovnic, obsahujících šest veličin t, x, x_0, v_x, v_{0x} a a_x. Čtyři z nich musí být zadány, abychom dvě zbývající mohli určit řešením soustavy. Tab. 2.1 shrnuje kromě rovnic (2.11) a (2.15) další tři rovnice, které lze získat jejich úpravou. Společným rysem všech pěti rovnic je nepřítomnost některé z veličin t, $x - x_0$, v_x, v_{0x} a a_x. Soupis může být snad užitečný těm, kteří neradi provádějí algebraické úpravy a dají přednost přímému dosazení zadaných číselných hodnot do rovnice, kterou vhodně vyberou podle typu zadání.

Tabulka 2.1 **Rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb**

ČÍSLO ROVNICE	ROVNICE	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA
(2.11)	$v_x = v_{0x} + a_x t$	$x - x_0$
(2.15)	$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x
(2.16)	$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	t
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	a_x
(2.18)	$x - x_0 = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}

Před použitím tabulky se ujistíme, že se úloha opravdu týká rovnoměrně zrychleného pohybu. Vzpomeňme si, že funkce (2.11) je derivací funkce (2.15). Zbývající tři rovnice vznikly algebraickou úpravou spočívající ve vyloučení některé z vyjmenovaných veličin z rovnic (2.11) a (2.15).

KONTROLA 5: Následující čtyři funkce popisují časovou závislost polohy hmotného bodu $x(t)$: (1) $x = 3t - 4$; (2) $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$; (3) $x = 2/t^2 - 4/t$; (4) $x = 5t^2 - 3$. Ve kterém z těchto případů můžeme použít rovnice z tab. 2.1?

PŘÍKLAD 2.8

Řidič spatří policejní vůz a začne brzdit. Na dráze 88 m zpomalí z rychlosti 75 km/h na 45 km/h.

(a) Určete zrychlení automobilu za předpokladu, že bylo během brzdění konstantní.

ŘEŠENÍ: Veličiny v_{0x}, v_x a $x - x_0$ jsou zadány, potřebujeme určit a_x. Čas se v zadání úlohy neobjevuje. Z tab. 2.1 proto vybereme rovnici (2.16) a vypočteme z ní neznámé zrychlení a_x.

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2(x - x_0)} = \frac{(45\,\text{km/h})^2 - (75\,\text{km/h})^2}{2(0{,}088\,\text{km})} = \\ = -2{,}05{\cdot}10^4\,\text{km/h}^2 \doteq -1{,}6\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(V posledním kroku výpočtu je třeba věnovat pozornost převodu jednotky h^{-2} na s^{-2}.) Všimněme si, že rychlosti jsou kladné a zrychlení záporné. Pohyb automobilu se opravdu zpomaluje.

(b) Jak dlouho řidič v této fázi pohybu brzdil?

ŘEŠENÍ: Nyní je neznámou veličinou čas a zrychlení se naopak v zadání nevyskytuje. Z tab. 2.1 volíme rovnici (2.17) a řešíme ji vzhledem k neznámé t:

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_{0x} + v_x} = \frac{2(0{,}088\,\text{km})}{(75 + 45)\,\text{km/h}} = \\ = 1{,}5{\cdot}10^{-3}\,\text{h} = 5{,}4\,\text{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(c) Řidič dále brzdí se zrychlením určeným v části (a). Za jak dlouho od začátku brzdění se automobil zcela zastaví?

ŘEŠENÍ: Při řešení této části úlohy nepotřebujeme uvažovat o posunutí $x - x_0$. Použijeme tedy rovnici (2.11) a vyjádříme t:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{0 - (75\,\text{km/h})}{(-2{,}05{\cdot}10^4\,\text{km/h}^2)} = \\ = 3{,}7{\cdot}10^{-3}\,\text{h} = 13\,\text{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jakou dráhu urazí vůz od počátku brzdění do úplného zastavení?

ŘEŠENÍ: Hledaná dráha je přímo rovna posunutí. Užijeme rovnici (2.15):

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \\ = (75\,\text{km/h})(3{,}7{\cdot}10^{-3}\,\text{h}) + \\ + \tfrac{1}{2}(-2{,}05{\cdot}10^4\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-2})(3{,}7{\cdot}10^{-3}\,\text{h})^2 = \\ = 0{,}137\,\text{km} \doteq 140\,\text{m}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(Je třeba dbát na to, abychom zrychlení a_x dosazovali se správným znaménkem!)

(e) Při další jízdě řidič opět potřebuje zastavit. Zpomaluje se stejným zrychlením jako v části (a), počáteční rychlost je však nyní taková, že automobil zcela zastaví na dráze 200 m. Jak dlouho trvá brzdění?

ŘEŠENÍ: V úloze nevystupuje počáteční rychlost. Použijeme proto rovnici (2.18). Dosadíme $v_x = 0$ (v okamžiku t automobil zastavil) a rovnici řešíme vzhledem k neznámé t:

$$t = \left(-\frac{2(x - x_0)}{a_x}\right)^{1/2} = \left(-\frac{2(200\,\text{m})}{-1{,}6\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}}\right)^{1/2} = \\ = 16\,\text{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.7: *Rozměrová zkouška*

Jednotkou rychlosti je $\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}$, jednotkou zrychlení $\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}$ apod. Sčítat či odčítat můžeme jen ty členy, které mají stejnou jednotku (stejný fyzikální rozměr). Pokud se chceme ujistit, že jsme při odvozování rovnice neudělali chybu, provedeme tzv. rozměrovou zkoušku, tj. zkontrolujeme fyzikální rozměry všech členů v rovnici.

Například na pravé straně rovnice (2.15) ($x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$) musí mít každý člen rozměr délky, ve shodě s rozměrem posunutí na levé straně. Člen $v_{0x}t$ má jednotku $(\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1})(\text{s}) = \text{m}$ a člen $\frac{1}{2}a_x t^2$ jednotku $(\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2})\,(\text{s}^2) = \text{m}$. Oba členy tedy mají správný rozměr a rovnice je podle rozměrové zkoušky v pořádku. Číselné konstanty, jako například $\frac{1}{2}$ nebo π, jsou bezrozměrové (mají rozměr 1).

2.7 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ POHYB: JINÝ PŘÍSTUP

Článek je určen čtenářům obeznámeným se základy integrálního počtu.

V předchozím článku jsme odvodili vztahy (2.11) a (2.15) na základě skutečnosti, že při rovnoměrně zrychleném pohybu splývá průměrné zrychlení částice v libovolném časovém intervalu s jejím okamžitým zrychlením v libovolném okamžiku. Přesvědčili jsme se, že vztah (2.15) obsahuje úplnou informaci o průběhu rovnoměrně zrychleného pohybu, jsou-li zadány hodnoty x_0, v_{0x} a a_x. Vztah (2.11) je jeho derivací. Závislosti (2.11) a (2.15) lze odvodit i jiným způsobem, jehož předností je možnost zobecnění i na případy pohybu s libovolným zrychlením, závislým na čase. Postup spočívá v integraci zrychlení a_x, které je při rovnoměrně zrychleném pohybu konstantní. Podle definičního vztahu (2.8) platí

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},$$

tj.

$$\mathrm{d}v_x = a_x\,\mathrm{d}t.$$

Integrací obou stran rovnice dostáváme

$$\int \mathrm{d}v_x = \int a_x \,\mathrm{d}t.$$

Zrychlení je konstantní, takže je můžeme vytknout před integrál a píšeme

$$\int \mathrm{d}v_x = a_x \int \mathrm{d}t,$$

tj.

$$v_x = a_x t + C. \tag{2.19}$$

Integrační konstantu C určíme z počáteční podmínky pro rychlost částice: v okamžiku $t = 0$ je rychlost $v_x = v_{0x}$. Dosadíme tyto hodnoty do vztahu (2.19), který platí pro libovolný okamžik, a tedy i pro $t = 0$. Dostaneme

$$v_{0x} = a_x \cdot 0 + C = C.$$

Zjištěnou hodnotu konstanty C dosadíme do (2.19) a získáváme časovou závislost rychlosti (2.11). Stejným postupem odvodíme závislost (2.15). Z definice rychlosti (2.4) přímo plyne

$$\mathrm{d}x = v_x \,\mathrm{d}t.$$

Integrací levé i pravé strany dostaneme

$$\int \mathrm{d}x = \int v_x \,\mathrm{d}t.$$

Z předchozích výsledků víme, že rychlost v_x závisí na čase podle (2.11). Nemůžeme ji tedy vytknout před integrál a přesně zopakovat postup použitý při integraci zrychlení. Místo v_x však dosadíme do integrálu funkci (2.11):

$$\int \mathrm{d}x = \int (v_{0x} + a_x t)\,\mathrm{d}t.$$

Počáteční rychlost v_{0x} je konstantní, takže integrál na pravé straně můžeme rozepsat do tvaru

$$\int \mathrm{d}x = v_{0x} \int \mathrm{d}t + a_x \int t \,\mathrm{d}t.$$

Integrace obou stran rovnice vede k výsledku

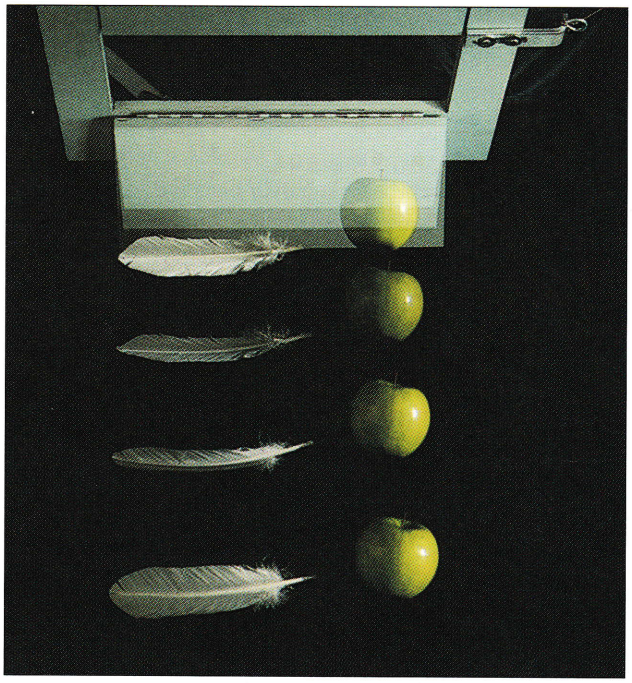
$$x = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 + C', \tag{2.20}$$

kde C' je další integrační konstanta. Určíme ji opět z počáteční podmínky, tentokrát pro polohu částice: v čase $t = 0$ je $x = x_0$. Dosazením do (2.20) zjistíme, že hodnota konstanty C' je $C' = x_0$. Vztah (2.20) tak přejde na tvar (2.15).

2.8 SVISLÝ VRH

Představme si následující pokus: V blízkosti povrchu Země vrháme nějaké těleso svisle vzhůru nebo dolů (svislý směr udává např. volně visící olovnice) a nějak při tom zajistíme, aby se neuplatnil vliv odporu prostředí. Zjistíme, že se těleso s velkou přesností pohybuje se stálým zrychlením, směřujícím svisle dolů. Nazýváme je **tíhové zrychlení** a značíme písmenem g. Z experimentu víme, že tíhové zrychlení nezávisí na vlastnostech tělesa (hmotnosti, hustotě, tvaru, ...) a je pro všechna tělesa stejné.

Zvláštním případem svislého vrhu je **volný pád**, při kterém těleso prostě upustíme. Vypouštíme ho tedy s nulovou počáteční rychlostí. Na obr. 2.10 vidíme fotografický záznam souběžného volného pádu dvou různých těles, pírka a jablka, ve vakuu. (Fotografie byly pořízeny v různých okamžicích s využitím stroboskopického efektu.) Při pádu obou těles se jejich rychlost zvyšuje se stejným zrychlením g.



Obr. 2.10 Pírko a jablko se při volném pádu ve vakuu pohybují se stejným zrychlením g. Nasvědčuje tomu rostoucí vzdálenost po sobě následujících fotografických obrazů objektů, které byly zaznamenány v rovnoměrně rozložených okamžicích.

Tíhové zrychlení se mírně mění se zeměpisnou šířkou a nadmořskou výškou. Při hladině moře ve středních zeměpisných šířkách má hodnotu zhruba $9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, viz vztah (2.10) a text za ním. Budeme jej používat v příkladech a cvičeních.

Rovnice popisující rovnoměrně zrychlený pohyb uvedené v tab. 2.1 platí i pro svislý vrh v blízkosti* zemského povrchu. Můžeme je tedy při řešení úloh o svislém vrhu těles používat, pokud je odpor vzduchu zanedbatelný. Tab. 2.1 přizpůsobíme nové situaci provedením dvou drobných změn: (1) Se svislým směrem, v němž se nyní odehrává pohyb tělesa, spojíme souřadnicovou osu y tak, aby směřovala vzhůru. (Osa x bývá častěji vyhrazena pro popis pohybu ve vodorovném směru.) Pro rychlost budeme používat označení v_y a pro zrychlení a_y. Tato změna usnadní i pozdější popis složitějších pohybů v rovině nebo v prostoru. (2) Tíhové zrychlení je při zvolené orientaci osy y záporné, a tak můžeme ve všech rovnicích zaměnit a_y za $-g$.

Po provedení popsaných úprav získáme obměnu tabulky 2.1 pro svislý vrh. Mějme na paměti:

Při zvolené orientaci osy y je tíhové zrychlení svislého vrhu $a_y = -g = -9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jeho *velikost* je však $g = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Do rovnic (2.21) až (2.25) dosazujeme kladnou hodnotu g.

Dejme tomu, že vyhodíme jablko svisle vzhůru počáteční rychlostí v_{0y} a před dopadem je opět chytíme. Volný let jablka (od vyhození po zachycení) se řídí rovnicemi v tab. 2.2. Zrychlení je konstantní a směřuje dolů, tj. $a_y = -g = -9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Rychlost se během letu mění podle vztahů (2.21) a (2.23). Při stoupání jablka velikost (kladné) rychlosti klesá až k nule. V okamžiku zastavení je jablko ve své nejvyšší poloze. Při pádu velikost (záporné) rychlosti roste.

Tabulka 2.2 **Rovnice pro svislý vrh**

ČÍSLO ROVNICE	ROVNICE	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA
(2.21)	$v_y = v_{0y} - gt$	$y - y_0$
(2.22)	$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$	v_y
(2.23)	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$	t
(2.24)	$y - y_0 = \frac{1}{2}(v_{0y} + v_y)t$	g
(2.25)	$y - y_0 = v_y t + \frac{1}{2}gt^2$	v_{0y}

* Pro ty nejpečlivější čtenáře: do výšek h zanedbatelně malých proti zemskému poloměru, tedy $h \ll 6{\cdot}10^3$ km.

PŘÍKLAD 2.9

Opravář upustil klíč do výtahové šachty vysokého domu.

(a) Jaká bude poloha klíče za 1,5 s?

ŘEŠENÍ: Ze zadání je známa doba t, velikost zrychlení g a počáteční rychlost v_{0y}, o které můžeme předpokládat, že byla nulová. Chceme určit posunutí, chybějící veličinou je tedy rychlost v_y, která není zadána a její zjištění se v zadání nepožaduje. Této situaci odpovídá rovnice (2.22) z tab. 2.2. Počátek souřadnicové osy y zvolme v místě, kde opravář klíč upustil. Do rovnice (2.22) přímo dosadíme $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$ a $t = 1{,}5$ s. Dostaneme

$$y = 0(1{,}5\ \mathrm{s}) - \tfrac{1}{2}(9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(1{,}5\ \mathrm{s})^2 \doteq$$
$$\doteq -11\ \mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

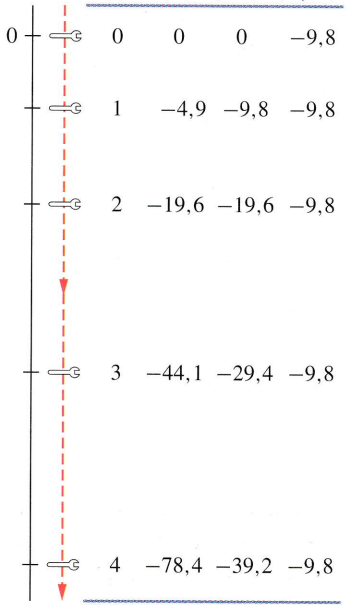
Záporné znaménko výsledku odpovídá očekávané skutečnosti, že se klíč po 1,5 s pádu nachází pod úrovní místa, kde opravář vypadl.

(b) Jaká je rychlost klíče v okamžiku 1,5 s?

ŘEŠENÍ: Rychlost je dána rovnicí (2.21)

$$v_y = v_{0y} - gt = 0 - (9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(1{,}5\ \mathrm{s}) \doteq$$
$$\doteq -15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko ukazuje, že rychlost klíče směřuje dolů. Tento výsledek opět není překvapivý. V obr. 2.11 jsou shrnuty základní údaje o letu klíče až do okamžiku $t = 4$ s.



t (s)	y (m)	v_y (m/s)	a_y (m/s^2)
0	0	0	−9,8
1	−4,9	−9,8	−9,8
2	−19,6	−19,6	−9,8
3	−44,1	−29,4	−9,8
4	−78,4	−39,2	−9,8

Obr. 2.11 Příklad 2.9. Poloha, rychlost a zrychlení volně padajícího tělesa.

PŘÍKLAD 2.10

V roce 1939 se Joe Sprinz z baseballového klubu v San Francisku pokusil překonat rekord v chytání baseballového míče padajícího z co největší výšky. Rok předtím dosáhli hráči klubu Cleveland Indians rekordního výkonu, když chytili baseballový míč po jeho pádu z výšky 210 m. Sprinz se pokusil zachytit míček padající z letadélka letícího přibližně ve výšce 240 m. Budeme předpokládat, že míček padal přesně z výšky 240 m a zanedbáme vliv odporu prostředí.

(a) Určete dobu letu míčku.

ŘEŠENÍ: Zvolme počátek svislé osy y v místě, kde byl míček vypuštěn a orientujme ji směrem vzhůru. Počáteční poloha je $y_0 = 0$, počáteční rychlost $v_{0y} = 0$. V zadání úlohy nevystupuje veličina v_y, použijeme proto rovnici (2.22):

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ -240\,\mathrm{m} &= 0t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})t^2, \\ 4{,}9t^2 &= 240, \\ t &= 7\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

Při výpočtu druhé odmocniny musíme výsledku přiřadit kladné nebo záporné znaménko. Vybrali jsme kladné znaménko, protože míč dopadl *poté*, co byl vypuštěn.

(b) Jaká byla rychlost míče těsně nad zemí?

ŘEŠENÍ: Pro výpočet rychlosti přímo ze zadaných údajů (nikoliv z výsledku příkladu (a)) použijeme rovnici (2.23):

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) = \\ &= 0 - 2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(-240\,\mathrm{m}) = \\ &= 4{,}7{\cdot}10^3\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-2}}, \\ v_y &= -69\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\ (\doteq -250\,\mathrm{km/h}). \end{aligned}$$ (Odpověď)

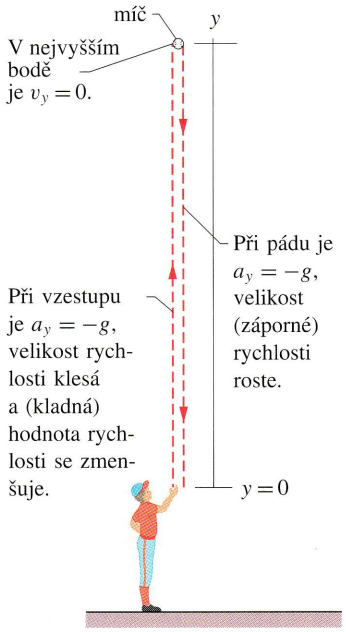
Znaménko výsledku je nyní záporné, neboť míček letí směrem dolů, v záporném směru osy y.

V popisovaném skutečném případě nebyl samozřejmě vliv odporu prostředí zanedbatelný. Kdybychom jej započítali, zjistili bychom, že let míčku trval déle a výsledná rychlost byla menší, než jsme vypočetli pro ideální situaci. I tak však byla rychlost míčku při dopadu značná. Když jej totiž Sprinz při pátém pokusu konečně zachytil do rukavice, byl náraz tak obrovský, že ho ruka s rukavicí udeřila do tváře, zlomila mu horní čelist na dvanácti místech a vyrazila pět zubů. Sprinz upadl do bezvědomí.

PŘÍKLAD 2.11

Nadhazovač vyhodí baseballový míč svisle vzhůru rychlostí $12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (obr. 2.12).

(a) Za jak dlouho dosáhne míč maximální výšky?



Obr. 2.12 Příklad 2.11. Hráč vrhá míč svisle vzhůru. Rovnice pro svislý vrh platí jak pro vzestup míče, tak pro jeho pád za předpokladu, že vliv odporu vzduchu lze zanedbat.

ŘEŠENÍ: V nejvyšším bodě letu je rychlost míče nulová. Z rovnice (2.21) dostaneme

$$\begin{aligned} t &= \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{(12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) - 0}{(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = \\ &= 1{,}2\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

(b) Jaká je maximální výška letu?

ŘEŠENÍ: Počátek osy y položme do místa vyhození míče. Do rovnice (2.23) dosadíme $y_0 = 0$ a vyjádříme z ní y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{(12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 - (0)^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = \\ &= 7{,}3\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

V této části úlohy jsme také mohli s výhodou použít výsledku (a) a maximální výšku určit z rovnice (2.25). Ověřte si to!

(c) Za jak dlouho po vyhození dosáhne míč výšky 5 m?

ŘEŠENÍ: Použijeme rovnici (2.22), která obsahuje pouze zadané veličiny a neznámý čas. Dosazením $y_0 = 0$ dostaneme

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

a tedy

$$5{,}0\,\mathrm{m} = (12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})t^2.$$

Rovnici přepíšeme do tvaru (pro jednoduchost již nebudeme vypisovat jednotky):

$$4{,}9t^2 - 12t + 5{,}0 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice dostaneme*

$$t = 0{,}53\,\text{s} \quad \text{a} \quad t = 1{,}9\,\text{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Existují dvě možná řešení! To nás však nesmí překvapit: Míč skutečně prochází polohou $y = 5{,}0$ dvakrát. Jednou při výstupu a podruhé při pádu.

Provedeme ještě jednoduchou kontrolu získaných výsledků. Okamžik, kdy míč dosáhl maximální výšky, by měl na časové ose ležet právě uprostřed mezi oběma okamžiky, v nichž byla poloha míče určena souřadnicí 5 m. Je tomu skutečně tak. Aritmetický průměr těchto časových údajů

$$t = \tfrac{1}{2}(0{,}53\,\text{s} + 1{,}9\,\text{s}) = 1{,}2\,\text{s}$$

se shoduje s výsledkem příkladu (a).

KONTROLA 6: Jaké je znaménko posunutí míče v příkladu 2.11 (a) při vzestupu míče a (b) při jeho pádu? (c) Jaké je zrychlení v nejvyšším bodě letu?

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.8: *Význam záporného znaménka*

Vzpomeňme si, že některé z hodnot polohy, rychlosti či zrychlení získané při řešení př. 2.9, 2.10 a 2.11 měly záporné znaménko. Je důležité, abychom význam záporného znaménka u těchto veličin uměli správně interpretovat. Při řešení úloh o svislém vrhu jsme svislou souřadnicovou osu y volili vždy tak, aby její kladný směr byl orientován vzhůru. Volba opačné orientace osy by byla stejně dobře možná. Počátek osy y jsme vybírali tak, aby to bylo při řešení konkrétní úlohy výhodné: v př. 2.9 byl počátek umístěn v poloze ruky opraváře, v př. 2.10 v letadélku a v př. 2.11 v ruce nadhazovače. Záporná hodnota souřadnice určující polohu tělesa znamená, že se těleso nachází *pod úrovní* počátku osy y.

Záporná rychlost znamená, že se těleso pohybuje tak, že hodnota jeho y-ové souřadnice klesá, v našich příkladech tedy dolů. Tato interpretace záporného znaménka rychlosti je správná nezávisle na okamžité poloze tělesa.

Ve všech řešených příkladech bylo zrychlení svislého vrhu záporné ($= -9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$), bylo tedy orientováno proti kladnému směru osy y. Význam záporného znaménka zrychlení je v tomto případě následující: pohybuje-li se těleso vzhůru (jeho rychlost je kladná) je vlivem záporného zrychlení brzděno (velikost jeho rychlosti klesá). Naopak, těleso pohybující se dolů (rychlost je záporná) je vlivem záporného zrychlení urychlováno, velikost jeho rychlosti roste. Tato interpretace nezávisí na poloze a rychlosti tělesa.

* Řešení obecné kvadratické rovnice je uvedeno v dod. E.

Bod 2.9: *Neočekávané výsledky*

Stává se, že při výpočtu dostaneme i výsledky, které se na první pohled zdají nesmyslné, jako třeba v př. 2.11c. Získáme-li více výsledků, než jsme očekávali, nezavrhujme hned ty, které jsou zdánlivě nesprávné. Zvažujme je pečlivě a pokusme se nalézt jejich fyzikální význam. Často nějaký mají.

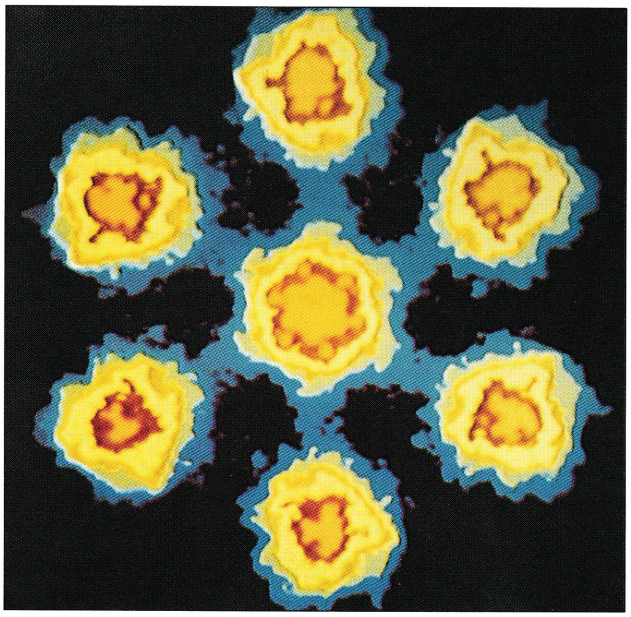
I záporný časový údaj má svůj dobrý smysl. Odpovídá události, která nastala dříve než v okamžiku $t = 0$, kdy jsme se (zcela libovolně) rozhodli spustit stopky.

2.9 ČÁSTICOVÁ FYZIKA

Na různých místech v knize občas odbočíme od popisu velkých objektů našeho světa, se kterými máme každodenní a bezprostřední zkušenosti, a všimneme si objektů mnohem menších. Doposud jsme pracovali s objektem zvaným hmotný bod, který má i přes své zanedbatelné rozměry konečnou hmotnost. Nahrazovali jsme jím reálná tělesa jako například dítě, míč, automobil. Zůstává však otázka, jak malé ve skutečnosti mohou reálné objekty být. Jaké jsou „nejposlednější" částečky přírody? Tímto problémem se zabývá **fyzika elementárních částic**, moderní oblast fyziky, která poutá pozornost celé řady špičkových fyziků.

Poznání, že hmota není spojitá, ale je tvořena velmi malými objekty — atomy, bylo klíčové pro pochopení mnoha zákonitostí nejen ve fyzice, ale i v chemii. Pomocí moderních mikroskopů je možné jednotlivé atomy dokonce i zobrazit. Jedna z ukázek takového zobrazení je na obr. 2.13. Hmota tedy není spojitá, ale „zrnitá". Také veličiny, které její chování popisují, nabývají **diskrétních** — **kvantovaných** hodnot (lat. *quantus* = jak mnoho). Mění se jen po určitých dávkách, zvaných **kvanta**. Kvantování je základní vlastností přírody. V dalším textu knihy poznáme mnohé fyzikální veličiny, které jsou kvantovány, pokud je zkoumáme v dostatečně jemném měřítku. Tato „všudypřítomnost" kvantování dala jméno i fyzikální disciplíně zabývající se zákony mikrosvěta, **kvantové fyzice**.

Mezi světem velkých těles (makrosvětem) a světem kvantovým (mikrosvětem) není ostrá hranice. Zákony mikrosvěta jsou platné všeobecně. Jakmile však přejdeme od atomů k míčům a automobilům, stává se kvantování méně nápadným a nakonec je zcela neměřitelné. Diskrétnost (v matematice a fyzice protiklad spojitosti, nespojitost) se ztrácí a obecné zákony kvantové fyziky směřují ke speciálním limitním tvarům, tzv. zákonům **klasické fyziky**, které dobře popisují pohyb velkých těles.



Obr. 2.13 Šesterečné uspořádání atomů uranu je „zviditelněno" pomocí zobrazení v rastrovacím prozařovacím elektronovém mikroskopu. Barvy jsou jednotlivým částem objektu uměle přiřazeny počítačovým zpracováním obrazu (tzv. „nepravé barvy").

Stavba atomu

Atom je složen z velmi malého, nepředstavitelně hutného **jádra**. V jádru, které je obklopeno jedním nebo více lehkými **elektrony**, je soustředěna prakticky celá hmota atomu. Obvykle předpokládáme, že jádro i celý atom mají kulový tvar. Poloměr atomu je řádově 10^{-10} m, jádro je asi 100 000krát menší, přibližně 10^{-15} m. Soudržnost atomu je zajištěna vzájemným elektrickým přitahováním záporných elektronů v atomovém obalu s jádrem, obsahujícím kladné protony. Zákony popisující tuto přitažlivou interakci budeme studovat později. V této chvíli si pouze uvědomme, že bez ní by nemohly existovat atomy, a tedy ani my sami.

Stavba jádra

Nejmenší jádro, jádro běžného atomu vodíku, je tvořeno jediným protonem. Existují i dvě složitější varianty, zvané **izotopy** neboli **nuklidy** vodíku, jejichž jádro navíc obsahuje jeden nebo dva elektricky neutrální **neutrony**. Tyto izotopy nazýváme **deuterium** a **tritium**.

Vodík, ve všech variantách, je příkladem jednoho **prvku**. Různé prvky se navzájem liší počtem protonů v jádře. Atom s jedním protonem v jádře je vodík, atom se šesti protony v jádře je uhlík. Různé izotopy téhož prvku se liší počtem neutronů v jádře. Protony a neutrony nazýváme společně **nukleony**.

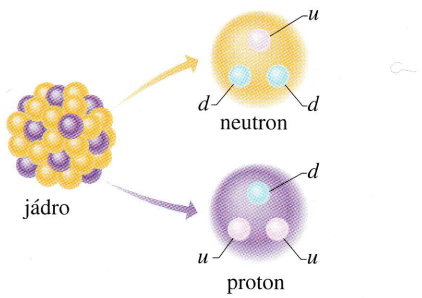
Roli neutronů v jádře lze velmi zhruba charakterizovat tak, že zabezpečují jeho „soudržnost". Protony totiž mají kladný náboj, a elektrickými silami se proto velmi silně odpuzují. Mezi nukleony však při velmi malých vzdálenostech působí i přitažlivá síla, zvaná **silná interakce**. Jediný atom, který nepotřebuje neutrony k zajištění stability svého jádra, je běžný atom vodíku. Jeho jádro je totiž tvořeno jediným protonem. Všechna ostatní jádra by se bez neutronů rozpadla.

Mnoho izotopů běžných prvků je nestabilních. Naštěstí ty, na kterých bytostně závisí naše existence, mají též izotopy stabilní. Například 19 z 21 izotopů mědi je nestabilních, samovolně se rozpadají a mění v jiné prvky.

Měď, kterou známe jako celkem běžný kov a používáme ji v elektronice i jiných technologiích, je složena ze zbývajících dvou stabilních izotopů.

Struktura subatomárních částic

Elektron si sice někdy počíná velmi neobvykle, ale přesto je to jednoduchá částice. Při detekci se chová tak, jako by neměl žádné rozměry ani vnitřní strukturu. Elektron (značka e, někdy pro upřesnění e^-) patří do skupiny částic zvaných **leptony**. Je jich celkem šest. Vedle elektronu existují ještě dvěstěkrát těžší **mion** (značka μ, dříve nazývaný **mezon** μ) a více než třítisíckrát těžší **tauon** (značka τ). Každý z nich má své **neutrino** ν_e, ν_μ, ν_τ s hmotností téměř nulovou (možná i přesně nulovou). Ke každému leptonu existuje **antičástice**. Antičástici k elektronu nazýváme **pozitron** (značka e^+).



Obr. 2.14 Představa atomového jádra a protonů a neutronů, z nichž je složeno. Protony a neutrony jsou tvořeny kvarky „up" (u) a „down" (d).

Podle současných znalostí se protony a neutrony liší od elektronů a dalších leptonů tím, že se skládají ze tří jednodušších částic zvaných **kvarky**.* Proton se skládá ze dvou u-kvarků (angl. *up* = nahoru) a jednoho d-kvarku (angl. *down* = dolů). Neutron je tvořen jedním u-kvarkem

* Slovo „kvark" pochází ze slovních hříček užitých v básni *Finnegans Wake* od Jamese Joyce.

a dvěma *d*-kvarky (obr. 2.14). I jiné částice, které jsme dříve považovali za elementární, se skládají z kvarků.

Je podivuhodné, že kvarků je známo šest druhů*, tedy stejný počet jako leptonů. Fyziky zajímá, zda má tato shoda hlubší smysl, nebo zda je zcela náhodná. Odpověď prozatím neznáme.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Poloha

Polohu hmotného bodu určujeme souřadnicí x vzhledem k **počátku** souřadnicové osy. Souřadnice může být jak kladná, tak i záporná, podle toho, na které straně od počátku osy se bod nachází. Je-li hmotný bod přímo v počátku, je jeho souřadnice nulová. Kladným směrem osy rozumíme směr, ve kterém souřadnice roste, opačný směr je záporný.

Posunutí

Posunutí Δx hmotného bodu je definováno jako změna jeho polohy:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2.1}$$

Posunutí je vektorová veličina. Při jednorozměrném pohybu je kladné, pokud se hmotný bod posunul v kladném směru osy x, v opačném případě je záporné.

Průměrná rychlost

Při přesunutí hmotného bodu z polohy x_1 do polohy x_2 za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$ je jeho *průměrná rychlost*

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

Znaménko průměrné rychlosti $\overline{v_x}$ určuje směr pohybu ($\overline{v_x}$ je vektorová veličina). Průměrná rychlost nezávisí na trajektorii, kterou hmotný bod při svém pohybu skutečně prošel, ale pouze na výchozí a koncové poloze.

V grafu závislosti polohy na čase $x(t)$ je průměrná rychlost v časovém intervalu Δt rovna směrnici přímky spojující krajní body části křivky vymezené tímto časovým intervalem.

Průměrná velikost rychlosti

Průměrná velikost rychlosti hmotného bodu závisí na skutečně uražené dráze v daném časovém intervalu:

$$\overline{v} = \frac{\text{skutečně uražená dráha}}{\text{celá doba pohybu}}. \tag{2.3}$$

Průměrná velikost rychlosti *není totéž jako* velikost průměrné rychlosti.

Okamžitá rychlost

Budeme-li zmenšovat Δt v rovnici (2.2) bez omezení k nule, bude se průměrná rychlost $\overline{v_x}$ limitně blížit k jisté hodnotě v_x, kterou nazýváme *okamžitá rychlost* (zjednodušeně jen **rychlost**) hmotného bodu v daném okamžiku. Je tedy

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4}$$

Okamžitá rychlost je rovna směrnici tečny vedené ke grafu funkce $x(t)$ v bodě, který odpovídá danému okamžiku t.

Průměrné zrychlení

Průměrné zrychlení je definováno jako poměr změny rychlosti Δv_x a délky časového intervalu Δt, během něhož k uvedené změně došlo:

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \tag{2.7}$$

Znaménko zrychlení $\overline{a_x}$ určuje jeho směr.

Okamžité zrychlení

Okamžité zrychlení (zjednodušeně jen **zrychlení**) získáme ze zrychlení průměrného analogickým limitním přechodem, jako v případě definice okamžité rychlosti:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}. \tag{2.8}$$

Zrychlení je také druhou derivací polohy $x(t)$ podle času:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.9}$$

V grafu závislosti $v_x(t)$ je zrychlení a_x v okamžiku t dáno směrnicí tečny ke grafu sestrojené v bodě, který tomuto okamžiku odpovídá.

Rovnoměrně zrychlený pohyb

Na obr. 2.9 jsou zakresleny závislosti $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$ pro velmi důležitý případ (přímočarého) pohybu, totiž pohybu s konstantním zrychlením a_x. Tento pohyb nazýváme **rovnoměrně zrychlený**. Je popsán pěti rovnicemi shrnutými v tab. 2.1:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \tag{2.11}$$

$$x - x_0 = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2, \tag{2.15}$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0), \tag{2.16}$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t, \tag{2.17}$$

$$x - x_0 = v_x t - \tfrac{1}{2} a_x t^2. \tag{2.18}$$

Není-li zrychlení konstantní, pak tyto rovnice *neplatí*.

---

* Další typy jsou *c* (angl. *charm* = půvabný), *s* (angl. *strange* = podivný), *t* (angl. *top* = vršek) a *b* (angl. *bottom* = spodek).

Tíhové zrychlení

Důležitými a častými případy rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu jsou volný pád a svislý vrh tělesa v blízkosti zemského povrchu. Rovnice popisující obecný rovnoměrně zrychlený pohyb platí i pro tyto případy, je však výhodné je mírně upravit: (1) Polohu tělesa určujeme na svislé souřadnicové ose y orientované kladným směrem vzhůru. (2) Zrychlení a_y nahradíme hodnotou $-g$, kde g je velikost tíhového zrychlení. V blízkosti povrchu Země je $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Svislý vrh je popsán rovnicemi (2.21) až (2.25).

Stavba atomů

Všechny látky se skládají z atomů, které jsou tvořeny velmi hutným **jádrem** obklopeným lehkými **elektrony**. Jádro je složeno z neutronů a protonů. Různé prvky se navzájem liší počtem protonů v jádře. Atomy se stejným počtem protonů, ale odlišným počtem neutronů, se nazývají **izotopy** daného prvku.

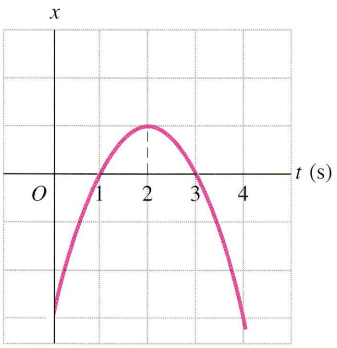
Kvarky a leptony

Elektrony se chovají jako částice bez vnitřní struktury. Protony a neutrony jsou složeny z ještě elementárnějších částic, které nazýváme **kvarky**. V současnosti je známo šest druhů kvarků a ke každému z nich existuje antičástice. Elektrony patří do skupiny **leptonů**, zahrnující rovněž šest druhů. Ke každému leptonu existuje antičástice.

OTÁZKY

1. (a) Může mít těleso současně nulovou rychlost a nenulové zrychlení? (b) Může se těleso pohybovat proměnnou rychlostí, jejíž velikost je konstantní? (c) Je možné, aby se směr pohybu tělesa změnil v opačný, má-li těleso konstantní zrychlení? (d) Může se velikost rychlosti tělesa zvyšovat za současného poklesu velikosti jeho zrychlení?

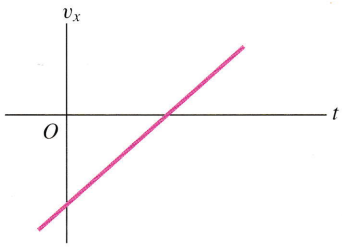
2. Na obr. 2.15 je zakreslen graf časové závislosti polohy tělesa $x(t)$. (a) Jaké je znaménko x-ové souřadnice tělesa v okamžiku $t = 0$? Rozhodněte, zda je v okamžicích (b) $t = 1\,\mathrm{s}$, (c) $t = 2\,\mathrm{s}$ a (d) $t = 3\,\mathrm{s}$ rychlost tělesa kladná, záporná, nebo nulová. (e) Kolikrát (během zobrazeného časového intervalu) prošlo těleso počátkem soustavy souřadnic $x = 0$?



Obr. 2.15 Otázka 2

3. Hmotný bod se pohybuje podél osy x s konstantním zrychlením. V okamžiku $t_0 = 0$ je jeho poloha určena souřadnicí $x_0 = -20\,\mathrm{m}$. Sledujme znaménko jeho počáteční rychlosti v_0 (v čase t_0) a znaménko jeho zrychlení. Mohou nastat čtyři případy: (1) +, +, (2) +, −, (3) −, +, (4) −, −. (a) Ve kterém z nich se rychlost hmotného bodu v jistém okamžiku $t > 0$ anuluje? (b) Ve kterém z případů bod s jistotou projde počátkem soustavy souřadnic? (c) Ve kterém z nich počátkem nikdy neprojde? Ve všech částech úlohy uvažujte pouze o kladných hodnotách časové proměnné t.

4. Na obr. 2.16 je zakreslena časová závislost rychlosti částice pohybující se podél osy x. (a) Jaký je počáteční směr jejího pohybu? (b) Kterým směrem se bude částice pohybovat po velmi dlouhé době? (c) Je v některém okamžiku její rychlost nulová? (d) Určete znaménko jejího zrychlení. (e) Je její zrychlení konstantní nebo proměnné?



Obr. 2.16 Otázka 4

5. V následujících čtyřech situacích je zadána počáteční a výsledná rychlost hmotného bodu: (a) $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (b) $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (c) $-2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; (d) $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Velikost zrychlení je ve všech případech stejná. Uspořádejte situace sestupně podle velikosti posunutí hmotného bodu, ke kterému došlo během sledované změny jeho rychlosti.

6. Následující vztahy popisují čtyři případy časové závislosti rychlosti tělesa: (a) $v_x = 3$; (b) $v_x = 4t^2 + 2t - 6$; (c) $v_x = 3t - 4$; (d) $v_x = 5t^2 - 3$. Ve kterých z nich lze pro popis pohybu tělesa použít vztahů z tab. 2.1?

7. Z horkovzdušného balonu stoupajícího se zrychlením $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ vypadlo jablko. (a) Určete zrychlení jablka vůči Zemi. (b) Jaká je rychlost jablka (velikost a směr) bezprostředně po jeho upuštění, je-li v tom okamžiku rychlost balonu rovna $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

8. (a) Nakreslete závislosti $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$ popisující pohyb jablka, které vyhodíme svisle vzhůru z hrany útesu. Při pádu jablko útes těsně míjí a padá podél něj dolů. (b) Do grafů získaných v části (a) zakreslete tytéž veličiny, tj. $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$, pro případ, že jsme jablko z hrany útesu pouze volně vypustili.

9. Míč, který jsme vyhodili z hrany skalního útesu svisle vzhůru rychlostí o velikosti v_0, dopadl na zem pod úrovní útesu. Rozhodněte, zda by rychlost při dopadu míče byla větší, menší či

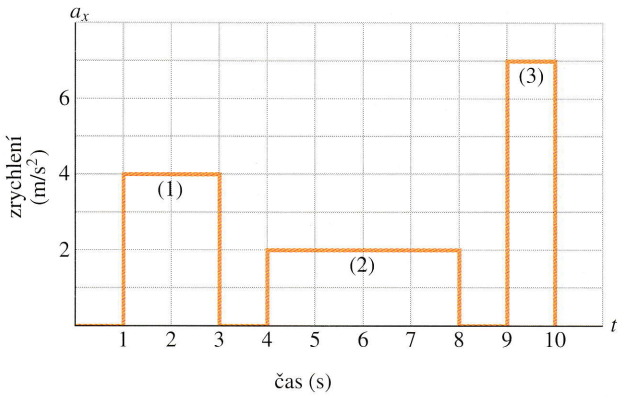
stejná jako v prvém případě, kdybychom jej hodili svisle dolů stejně velkou rychlostí v_0? (*Tip*: Použijte rovnici (2.23).)

10. Řidička jede v autě rychlostí 100 km/h. Náhle si uvědomí, že už už dohání autobus, který jede stejným směrem rychlostí 60 km/h. Musí začít brzdit. Jaká může být nejvyšší rychlost jejího auta v okamžiku, kdy autobus dostihne, nemá-li dojít ke srážce? (Příprava na úlohu 57.)

11. Motocyklista stojící v místě o souřadnici $x = 0$ se začne rozjíždět v okamžiku $t = 0$. Jeho zrychlení má konstantní velikost 2,0 $m \cdot s^{-2}$ a míří podél kladné osy x. O dvě sekundy později projíždí bodem $x = 0$ automobil, který jede stejným směrem. Jeho rychlost má v tomto okamžiku velikost 8 $m \cdot s^{-1}$. Auto zvyšuje svou rychlost s konstantním zrychlením 3,0 $m \cdot s^{-2}$. Zapište dvojici rovnic, jejichž řešením lze určit polohu místa, v němž řidič auta předjede motocyklistu. (Příprava na úlohu 56.)

12. Na obr. 2.17 je znázorněna časová závislost zrychlení částice $a_x(t)$. Částice je postupně urychlována ve třech fázích svého pohybu. Seřaďte jednotlivé fáze sestupně podle přírůstku rychlosti.

13. Dítě upustilo z balkonu dva stejné míče v časovém odstupu 1 s. Rozhodněte, zda se během pádu míčů bude vzdálenost mezi nimi zvětšovat, zmenšovat, nebo zůstane stejná.



Obr. 2.17 Otázka 12

CVIČENÍ & ÚLOHY

Úkolem některých cvičení je nakreslit graf časové závislosti polohy, rychlosti nebo zrychlení. Postačí jen schematický náčrtek, vždy je však třeba pečlivě popsat osy a zřetelně odlišit přímé a zakřivené části grafu. Při kreslení grafu je možné použít počítač nebo programovatelnou kalkulačku.

ODST. 2.3 Průměrná rychlost

1C. Carl Lewis uběhne sprinterskou trať 100 m přibližně za 10 s. Bill Rodgers dokáže absolvovat maraton (42 km 194 m) asi za 2 h 10 min. (a) Jaké jsou průměrné velikosti rychlostí obou běžců? (b) Za jak dlouho by Lewis uběhl maraton, kdyby vydržel po celou dobu sprintovat?

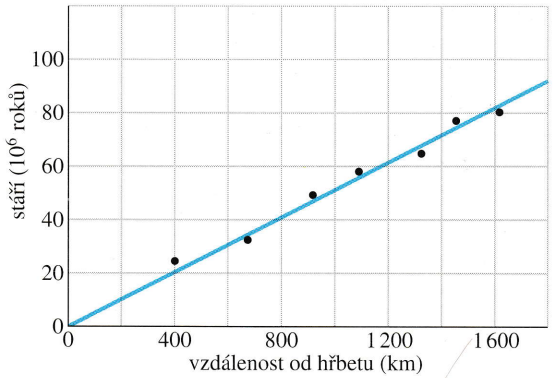
2C. Při silném kýchnutí zavře člověk oči asi na 0,50 s. Jakou vzdálenost urazí za tuto dobu automobil, jede-li rychlostí 90 km/h?

3C. Průměrné mrknutí trvá asi 100 ms. Jakou dráhu urazí stíhačka Mig 25 při mrknutí pilota, letí-li rychlostí 3 380 km/h?

4C. Nadhazovač v baseballu dokáže vyhodit míček vodorovnou rychlostí 160 km/h. Za jak dlouho míček doletí k pálkaři vzdálenému 18,4 m?

5C. Hornina uvolněná z oceánského hřbetu se pomalu vzdaluje od jeho paty přibližně konstantní rychlostí. Graf na obr. 2.18 znázorňuje tuto vzdálenost jako funkci času. Vypočtěte rychlost posuvu horniny v cm za rok.

6C. O kolik minut se zkrátila doba jízdy po dálnici z Prahy do Brna po zvýšení rychlostního limitu ze 110 km/h na 130 km/h? Předpokládejte, že řidič projede celou trasu nejvyšší povolenou rychlostí.



Obr. 2.18 Cvičení 5

7C. S použitím tabulek v dodatku D určete rychlost světla ($3 \cdot 10^8$ $m \cdot s^{-1}$) v mílích za hodinu, stopách za sekundu, světelných rocích za rok.

8C. Automobil jede po rovné silnici rychlostí 30 km/h. Poté, co urazil dráhu 40 km, zvýší rychlost na 60 km/h a pokračuje v jízdě dalších 40 km. (a) Jaká je průměrná rychlost automobilu na celé osmdesátikilometrové trati? (Zvolte soustavu souřadnic tak, aby osa x byla souhlasně rovnoběžná se směrem jízdy automobilu a určete průměrnou rychlost včetně znaménka.) (b) Jaká je průměrná velikost rychlosti automobilu? (c) Určete průměrnou rychlost graficky (pomocí grafu $x(t)$).

9Ú. Vypočtěte průměrnou rychlost pohybu člověka ve dvou případech: (a) Chůze 72 m rychlostí 1,2 $m \cdot s^{-1}$ a běh 72 m rychlostí 3 $m \cdot s^{-1}$. (b) Chůze 1 min rychlostí 1,2 $m \cdot s^{-1}$ a běh 1 min rychlostí 3 $m \cdot s^{-1}$. (c) V obou případech určete průměrnou rychlost graficky (z grafu $x(t)$).

10Ú. Automobil jede do kopce rychlostí 40 km/h. Nahoře ne-

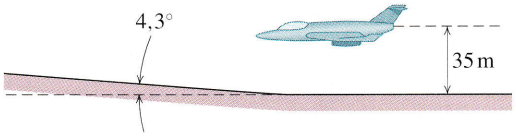
čeká a vrací se stejnou cestou zpět, tentokrát rychlostí 60 km/h. Určete průměrnou velikost rychlosti pro celou trasu.

11Ú. Nákladní automobil jede z Brna do Olomouce (77 km). V první polovině jízdní *doby* udržuje konstantní rychlost o velikosti 56 km/h, ve druhé polovině pak 89 km/h. Na zpáteční cestě projede první polovinu *vzdálenosti* rychlostí o velikosti 56 km/h a druhou rychlostí o velikosti 89 km/h. Jaká je průměrná velikost rychlosti jízdy (a) z Brna do Olomouce, (b) z Olomouce do Brna a (c) na celé cestě? (d) Jaká je průměrná rychlost (vektor) na celé cestě? Zvolte soustavu souřadnic tak, aby trasa z Brna do Olomouce vedla podél kladné osy x. Nakreslete graf $x(t)$ pro tuto část cesty a určete z něj průměrnou rychlost.

12Ú. Poloha tělesa pohybujícího se po ose x je dána vztahem $x = 3t - 4t^2 + t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Jaká je poloha tělesa v okamžicích $t = 1\,\text{s}$, 2 s, 3 s a 4 s? (b) Jaké je posunutí tělesa v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4\,\text{s}$? (c) Jaká je průměrná rychlost v časovém intervalu od $t = 2\,\text{s}$ do $t = 4\,\text{s}$? (d) Nakreslete graf funkce $x(t)$ pro $0 \leqq t \leqq 4\,\text{s}$ a použijte jej pro grafické řešení úkolu (c).

13Ú. Poloha hmotného bodu je dána vztahem $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$, kde x je v centimetrech a t v sekundách. Určete (a) průměrnou rychlost hmotného bodu v časovém intervalu od $t = 2{,}00\,\text{s}$ do $t = 3{,}00\,\text{s}$, okamžitou rychlost v okamžicích (b) $t = 2{,}00\,\text{s}$, (c) $t = 3{,}00\,\text{s}$ a (d) $t = 2{,}50\,\text{s}$, (e) okamžitou rychlost v bodě ležícím uprostřed mezi polohami, v nichž se hmotný bod nachází v okamžicích $t = 2{,}00\,\text{s}$ a $t = 3{,}00\,\text{s}$. (f) Předchozí úkoly vyřešte i graficky. Použijte grafu časové závislosti polohy hmotného bodu $x(t)$.

14Ú. Při testování radarové navigace letí tryskové letadlo ve výšce 35 m nad zemí. Náhle dorazí k místu, kde se terén počíná zvedat s mírným, snadno přehlédnutelným, sklonem 4,3° (obr. 2.19). V jakém nejzazším okamžiku musí být dokončena korekce letu, aby letadlo nenarazilo na zem? Rychlost letounu je 1 300 km/h.



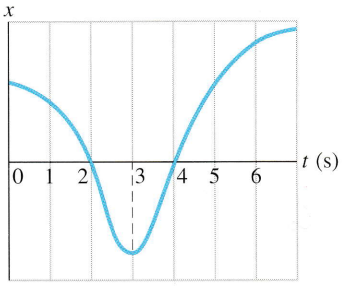
Obr. 2.19 Úloha 14

15Ú. Dva vlaky jedou po přímé trati proti sobě, každý rychlostí 30 km/h. V okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny 60 km, vyletí od jednoho z nich pták rychlostí 60 km/h a zamíří k druhému. Jakmile k němu doletí, obrátí se a vrací se zpět k prvnímu vlaku. Zde se opět obrátí a takto létá, dokud se vlaky nesetkají. Nezabývejte se pohnutkami, které vedou ptáka právě k tomuto pohybu a určete, (a) kolikrát pták přelétne vzdálenost mezi oběma vlaky a (b) jakou celkovou dráhu při tom urazí?

ODST. 2.4 Okamžitá rychlost

16C. (a) Poloha částice je dána rovnicí $x = 4 - 12t + 3t^2$ (kde t je v sekundách a x v metrech). Pro okamžik $t = 1\,\text{s}$ určete (a) rychlost částice, (b) směr jejího pohybu a (c) velikost její rychlosti. (d) Rozhodněte, zda je velikost rychlosti částice pro $t > 1\,\text{s}$ větší či menší než pro $t = 1\,\text{s}$. Následující dvě otázky se pokuste zodpovědět bez výpočtu. (e) Existuje okamžik, ve kterém má částice nulovou rychlost? (f) Nastane pro $t > 3\,\text{s}$ okamžik, kdy se směr pohybu částice obrátí?

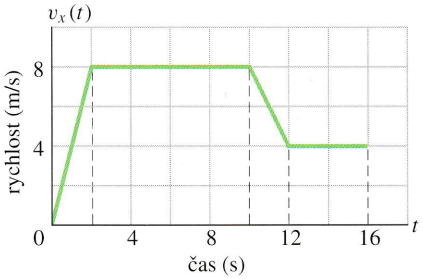
17C. Obr. 2.20 popisuje pohyb pásovce, který běhá podél osy x střídavě doleva (záporný směr) a doprava. (a) Je pásovec v některém okamžiku (kterém) nalevo od počátku osy x? Je v některém okamžiku (kterém) jeho rychlost (b) záporná, (c) kladná, nebo (d) nulová?



Obr. 2.20 Cvič. 17

18C. Myš je uvězněna v úzkém průchodu (osa x) a hledá cestu ven. Při tom zmateně pobíhá sem a tam: (1) běží vlevo (v záporném směru osy) konstantní rychlostí o velikosti $1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, (2) postupně zpomaluje až na rychlost $0{,}6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, (3) opět zrychluje na $2{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ a stále běží doleva. (4) Zpomaluje do zastavení, rozběhne se doprava a dosáhne rychlosti o velikosti $1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Nakreslete graf $x(t)$. Určete časové intervaly, v nichž je sklon křivky grafu největší a nejmenší.

19Ú. Jakou vzdálenost urazí za 16 s běžec, jehož rychlost $v_x(t)$ je v závislosti na čase popsána grafem na obr. 2.21?

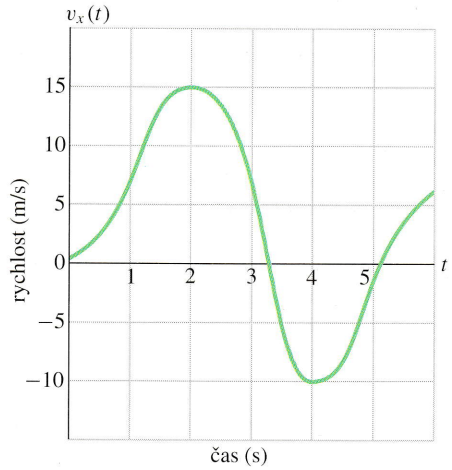


Obr. 2.21 Úloha 19

ODST. 2.5 Zrychlení

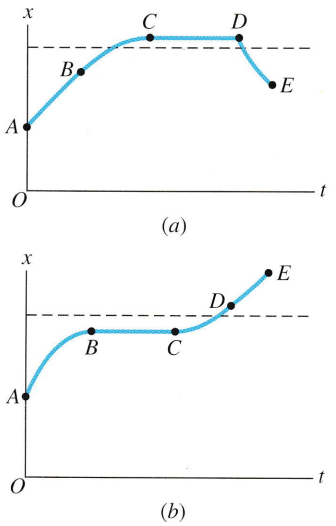
20C. Částice má počáteční rychlost $18\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. V průběhu následujících 2,4 s se její rychlost změní tak, že dosáhne velikosti $30\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, míří však v opačném směru. (a) Jaká je velikost průměrného zrychlení částice v tomto časovém intervalu? (b) Průměrné zrychlení určete také pomocí grafu $v_x(t)$.

21C. Těleso se pohybuje po přímce a jeho rychlost je popsána grafem na obr. 2.22. Načrtněte graf závislosti zrychlení tělesa na čase.



Obr. 2.22 Cvičení 21

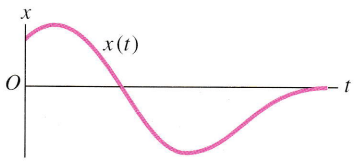
22C. Časová závislost polohy částice pohybující se podél osy x je zadána grafem na obr. 2.23a. (a) Ve kterém z úseků AB, BC, CD a DE je rychlost v_x kladná, záporná, nebo nulová? Ve kterém z nich je zrychlení a_x kladné, záporné, nebo nulové? (Neuvažujte krajní body intervalů). (b) Je v některém ze zmíněných úseků zrychlení tělesa zjevně proměnné? (c) Změní se nějak odpovědi na předchozí otázky, posunou-li se souřadnicové osy tak, že osa t splyne s přerušovanou čarou?



Obr. 2.23
Cvičení 22 a 23

23C. Zodpovězte otázky ze cvičení 22 pro případ pohybu znázorněného na obr. 2.23b.

24C. Částice se pohybuje podél osy x. Časový průběh její polohy $x(t)$ je zadán grafem na obr. 2.24. Nakreslete grafy $v_x(t)$ a $a_x(t)$.



Obr. 2.24
Cvičení 24

25C. Nakreslete schematicky možný tvar grafu časové závislosti polohy hmotného bodu $x(t)$, pohybujícího se podél osy x tak, že v okamžiku $t = 1$ s je (a) jeho rychlost nulová a zrychlení kladné, (b) rychlost nulová a zrychlení záporné, (c) rychlost záporná a zrychlení kladné, (d) rychlost záporná a zrychlení záporné. (e) Ve kterém z těchto případů velikost rychlosti v okamžiku $t = 1$ s roste?

26C. Uvažujme veličiny definované výrazy $(dx/dt)^2$ a d^2x/dt^2. (a) Představují tyto výrazy tutéž veličinu? (b) Jaké jsou jejich jednotky v soustavě SI?

27C. Částice se pohybuje podél osy x. Její poloha je popsána rovnicí $x = 50t + 10t^2$, kde x je zadáno v metrech a t v sekundách. Vypočtěte (a) průměrnou rychlost částice během prvních tří sekund jejího pohybu, (b) rychlost částice v okamžiku $t = 3$ s, (c) zrychlení částice v okamžiku $t = 3$ s. (d) Zodpovězte otázku (a) pouze užitím grafu $x(t)$. (e) Pomocí téhož grafu řešte i úkol (b). (f) Nakreslete graf $v_x(t)$ a použijte jej k řešení úkolu (c).

28C. Poloha hmotného bodu je dána rovnicí $x = 20t - 5t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Je v některém okamžiku rychlost hmotného bodu nulová? V kladném případě tento okamžik určete. (b) Kdy je zrychlení a_x hmotného bodu nulové? (c) Kdy je a_x záporné, kladné? (d) Nakreslete grafy $x(t)$, $v_x(t)$ a $a_x(t)$.

29Ú. Muž čeká na jednom místě od okamžiku $t = 0$ do $t = 5{,}00$ min a potom jde svižným krokem stále jedním směrem. Jeho rychlost je konstantní a má velikost $2{,}20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Chůze trvá 5 minut, tj. od okamžiku $t = 5{,}00$ min do $t = 10{,}0$ min. Určete průměrnou rychlost a průměrné zrychlení pohybu člověka v následujících časových intervalech: (a) od 2,0 min do 8,0 min, (b) od 3,0 min do 9,0 min. (c) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$ a vyřešte úkoly (a) a (b) také graficky.

30Ú. Poloha tělesa závisí na čase vztahem $x = 2{,}0t^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. Určete (a) průměrnou rychlost a (b) průměrné zrychlení tělesa v časovém intervalu od $t = 1{,}0$ s do $t = 2{,}0$ s. Vypočtěte jeho (c) okamžitou rychlost a (d) okamžité zrychlení v okamžicích $t = 1{,}0$ s a $t = 2{,}0$ s. (e) Porovnejte průměrné a okamžité hodnoty odpovídajících si veličin a rozdíly vysvětlete. (f) Řešte úkoly (a) až (d) pomocí grafů $x(t)$ a $v_x(t)$.

31Ú. Při jedné videohře se světelná stopa na monitoru pohybuje podle rovnice $x = 9{,}00t - 0{,}750t^3$, kde x je vzdálenost od levého okraje monitoru měřená v centimetrech a t je čas v sekundách. Jakmile stopa dorazí k levému ($x = 0$) nebo pravému ($x = 15{,}0$ cm) okraji obrazovky, čas t se vynuluje a pohyb stopy se opakuje v souhlasu se zadanou časovou závislostí $x(t)$. (a) Určete, ve kterém okamžiku od počátku pohybu se rychlost stopy anuluje. (b) Ve kterém místě obrazovky k tomu dojde? (c) Jaké je v tom okamžiku zrychlení stopy? (d) Kterým směrem se stopa pohybovala bezprostředně před tím, než dosáhla nulové rychlosti? (e) Kterým směrem potom její pohyb pokračoval? (f) Za jakou dobu od počátku pohybu dorazila stopa poprvé k okraji obrazovky?

32Ú. Poloha částice, pohybující se podél osy x, závisí na čase vztahem $x = at^2 - bt^3$, kde x je v metrech a t v sekundách. (a) Jaký je fyzikální rozměr konstant a a b? Předpokládejme, že tyto konstanty mají v jednotkách SI hodnoty $a = 3{,}0$ a $b = 1{,}0$. (b) Určete okamžik, v němž má souřadnice x částice největší hodnotu. (c) Jakou vzdálenost urazí částice během prvních 4,0 sekund pohybu? (d) Vypočtěte její posunutí v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4{,}0$ s. (e) Určete její rychlost v okamžicích $t = 1{,}0$ s; 2,0 s; 3,0 s a 4,0 s. (f) Jaké je v těchto okamžicích její zrychlení?

ODST. 2.6 Rovnoměrně zrychlený pohyb: speciální případ

33C. Pohyb hlavy útočícího chřestýše je tak prudký, že její zrychlení může dosáhnout až hodnoty 50 $m \cdot s^{-2}$. Představme si, že by takového zrychlení mohl dosáhnout rozjíždějící se automobil. Za jakou dobu by dosáhl rychlosti 100 km/h, pokud by byl zpočátku v klidu?

34C. Těleso se pohybuje s konstantním zrychlením +3,2 $m \cdot s^{-2}$. V jistém okamžiku má rychlost +9,6 $m \cdot s^{-1}$. Zjistěte jeho rychlost o (a) 2,5 s dříve, (b) 2,5 s později.

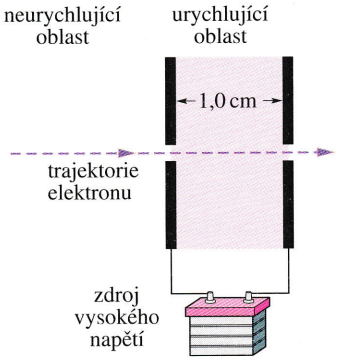
35C. Automobil plynule zvýší svou rychlost z 25 km/h na 55 km/h během 0,50 min. Cyklista se rovnoměrně rozjíždí z klidu a dosáhne rychlosti 30 km/h také za 0,50 min. V obou případech určete zrychlení.

36C. Kosmická loď se pohybuje s konstantním zrychlením 9,8 $m \cdot s^{-2}$, aby se podmínky pro pobyt posádky co nejvíce blížily pozemským. (a) Za jak dlouho dosáhne loď jedné desetiny rychlosti světla ve vakuu, startuje-li z klidu? Jakou dráhu přitom urazí?

37C. Startující tryskové letadlo musí mít před vzlétnutím rychlost nejméně 360 km/h. S jakým nejmenším konstantním zrychlením může startovat na rozjezdové dráze dlouhé 1,8 km?

38C. Elementární částice mion μ^- vlétne do elektrického pole rychlostí $5{,}00 \cdot 10^6$ $m \cdot s^{-1}$. V něm se rovnoměrně zpomaluje se zrychlením o velikosti $1{,}24 \cdot 10^{14}$ $m \cdot s^{-2}$. (a) Jakou dráhu urazí do okamžiku zastavení? (b) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$ charakterizující její pohyb.

39C. Elektron s počáteční rychlostí $1{,}50 \cdot 10^5$ $m \cdot s^{-1}$ je v úseku své trajektorie dlouhém 1,0 cm urychlován elektrickým polem (obr. 2.25). V okamžiku, kdy pole opouští, má rychlost $5{,}70 \cdot 10^6$ $m \cdot s^{-1}$. Určete jeho průměrné zrychlení v poli. (Zadání úlohy odpovídá reálné situaci v elektronových tryskách používaných v televizních obrazovkách a osciloskopech.)



Obr. 2.25 Cvičení 39

40C. Automobil jedoucí rychlostí 100 km/h začne rovnoměrně brzdit a zastaví na dráze 43 m. (a) Určete velikost jeho zrychlení v jednotkách SI a jednotkách g. (b) Jak dlouho trvá brzdění? Kolikrát je doba brzdění delší než reakční doba řidiče, která činí 400 ms?

41C. 19. března 1954 dosáhl plukovník John P. Stapp pozemního rychlostního rekordu při jízdě na raketových saních. Rekordní rychlost měla velikost 1 020 km/h. Poté byly sáně zabrzděny za dobu 1,4 s (obr. 2.8). Jakému zrychlení byl jezdec vystaven? Výsledek vyjádřete v jednotkách g.

42C. Na kvalitní suché silnici může automobil s neopotřebenými pneumatikami brzdit se zrychlením o velikosti 4,92 $m \cdot s^{-2}$. (a) Za jak dlouho automobil zastaví, je-li jeho počáteční rychlost 24,6 $m \cdot s^{-1}$? (b) Jak dlouhá bude brzdná dráha? (c) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ během brzdění.

43C. Při zkoumání fyziologických účinků velkého zrychlení na lidský organismus se používá raketových saní. Saně se pohybují přímočaře a při klidovém startu mohou dosáhnout rychlosti 1 600 km/h za pouhých 1,8 s. Za předpokladu, že se saně pohybují rovnoměrně zrychleně, určete (a) jejich zrychlení v jednotkách g a (b) dráhu potřebnou k dosažení maximální rychlosti.

44C. Automobil může brzdit se zrychlením 5,2 $m \cdot s^{-2}$. (a) Za jak dlouho lze vůz zabrzdit z rychlosti 130 km/h na předepsaný rychlostní limit 90 km/h poté, co řidič zahlédne dopravního policistu? (Výsledek ukáže, že je zcela beznadějné před policejním radarem brzdit.) (b) Nakreslete grafy $x(t)$ a $v_x(t)$, charakterizující pohyb automobilu.

45C. Motocykl se pohybuje rychlostí 30 $m \cdot s^{-1}$ v okamžiku, kdy řidič začne rovnoměrně brzdit. Za 3,0 s se jeho rychlost sníží na 15 $m \cdot s^{-1}$. Jakou dráhu urazí motocykl od počátku brzdění až do úplného zastavení?

46Ú. Sportovní automobil typu „hot rod“* startující z klidu může dosáhnout rychlosti 60 km/h za 5,4 s. (a) Určete odpovídající průměrné zrychlení v $m \cdot s^{-2}$. (b) Jakou dráhu automobil urazí za 5,4 s, je-li jeho zrychlení konstantní? (c) Za jak dlouho by urazil vzdálenost 0,25 km, kdyby jeho zrychlení bylo po celou dobu jízdy konstantní a mělo velikost vypočtenou v části (a)?

47Ú. Rychlík stojí ve stanici. V okamžiku $t = 0$ se začne rozjíždět s konstantním zrychlením a v okamžiku t_1 má rychlost 30 $m \cdot s^{-1}$. Poté, co za dobu τ urazí dalších 160 m, zvýší se jeho rychlost na 50 $m \cdot s^{-1}$. Vypočtěte (a) zrychlení vlaku, (b) dobu τ, (c) dobu t_1, potřebnou k dosažení rychlosti 30 $m \cdot s^{-1}$, a (d) vzdálenost, kterou za tuto dobu urazí. (e) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ od počátku pohybu vlaku.

---

* Výkonný automobil většinou amatérské konstrukce za použití levných dílů z vrakovišť. Cílem konstruktéra je docílit vedle dobrého výkonu motoru i co nejneobvyklejšího vzhledu. Vozy jsou oblíbené téměř výhradně ve Spojených státech, kde se účastní závodů ve zrychlení s pevným startem na vzdálenosti 1/4 míle nebo 1 míle.

48Ú. Automobil jede rychlostí 56,0 km/h. Řidič zpozoruje na silnici překážku a ve vzdálenosti 24,0 m před ní začne rovnoměrně brzdit. Auto narazí do překážky za 2,00 s od tohoto okamžiku. (a) Určete zrychlení automobilu. (b) Jakou rychlostí narazí automobil do překážky?

49Ú. Automobil se pohybuje s konstantním zrychlením a urazí vzdálenost 60,0 m za 6,00 s. Na konci tohoto úseku jede rychlostí 15 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jakou rychlost měl na začátku šedesátimetrového úseku? (b) Jaké je jeho zrychlení? (c) V jaké vzdálenosti před měřeným úsekem se auto začalo rozjíždět? (d) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ od počátku pohybu automobilu.

50Ú. Dvě zastávky metra jsou vzdálené 1 100 m. Souprava se první polovinu cesty rozjíždí s konstantním zrychlením $+1,2\ m \cdot s^{-2}$ a ve druhé polovině brzdí se zrychlením $-1,2\ m \cdot s^{-2}$. (a) Jaký je celkový čas jízdy mezi stanicemi a (b) největší rychlost soupravy? (c) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$ pro celou jízdu.

51Ú. Vyžaduje-li dopravní situace, aby řidič náhle zastavil, nezačne vůz brzdit hned. Od okamžiku, kdy si řidič uvědomí nutnost zabrzdit, uplyne nejprve jistá reakční doba řidiče a brzdového systému a teprve poté automobil rovnoměrně brzdí. Určete (a) celkovou reakční dobu a (b) velikost zrychlení automobilu při rovnoměrném brzdění z těchto údajů: Od okamžiku, kdy si řidič automobilu jedoucího rychlostí 80 km/h uvědomil nutnost zastavit, urazil ještě dráhu 57 m. Při rychlosti 48 km/h mu stačila dráha 24 m.

52Ú. Vůz se blíží ke světelné křižovatce, když se náhle rozsvítí oranžové světlo. Vůz jede největší povolenou rychlostí 50 km/h a může brzdit se zpomalením $5,2\ m \cdot s^{-2}$. Celková reakční doba řidiče a brzdového systému je $T = 0,75$ s. Řidič nechce vjet do křižovatky na červenou. Má začít brzdit nebo pokračovat v jízdě nezměněnou rychlostí? Vzdálenost vozu od křižovatky v okamžiku změny světelné signalizace je (a) 40 m, doba, po kterou svítí oranžové světlo, je 2,8 s, (b) 32 m a 1,8 s.

53Ú. Vzdálenost potřebná pro náhlé zastavení vozidla je dána součtem „reakční vzdálenosti" (součin počáteční rychlosti a reakční doby) a „brzdné vzdálenosti", kterou vozidlo urazí během brzdění. Typické hodnoty těchto veličin jsou uvedeny v následující tabulce:

POČÁTEČNÍ RYCHLOST ($m \cdot s^{-1}$)	REAKČNÍ VZDÁLENOST (m)	BRZDNÁ VZDÁLENOST (m)	CELKOVÁ VZDÁLENOST (m)
10	7,5	5,0	12,5
20	15	20	35
30	22,5	45	67,5

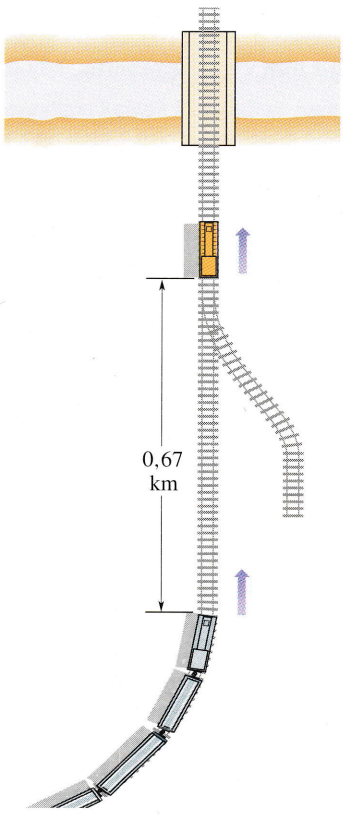
(a) Jaká reakční doba byla použita při výpočtu této tabulky? (b) Jakou celkovou vzdálenost automobil urazí, má-li náhle zastavit při počáteční rychlosti 25 $m \cdot s^{-1}$?

54Ú. Největší povolené zrychlení soupravy podzemní dráhy je $1,34\ m \cdot s^{-2}$. (a) Jaká je nejvyšší rychlost, které smí souprava dosáhnout při jízdě mezi stanicemi vzdálenými 806 m? (b) Jaká je odpovídající doba jízdy? (c) Předpokládejte, že souprava stojí ve stanici 20 s. Určete její maximální průměrnou rychlost v časovém intervalu mezi výjezdy ze dvou sousedních stanic. (d) Nakreslete grafy závislostí $x(t)$ a $v_x(t)$.

55Ú. Délka dráhy kabiny výtahu v newyorském mrakodrapu Marquis Marriott je 190 m. Kabina se pohybuje nejvýše rychlostí 305 $m \cdot min^{-1}$. Její zrychlení při rozjezdu i brzdění má velikost $1,22\ m \cdot s^{-2}$. (a) Jakou vzdálenost urazí kabina od chvíle, kdy se začne rozjíždět, do okamžiku, kdy dosáhne nejvyšší rychlosti? (b) Za jak dlouho vyjede z dolního podlaží až nahoru, započteme-li rozjezd i brzdění?

56Ú. Osobní automobil se začne rozjíždět se zrychlením $a = 2,2\ m \cdot s^{-2}$ přesně v okamžiku, kdy se na semaforech rozsvítí zelená. Ve stejném okamžiku ho ve vedlejším pruhu předjíždí kamion jedoucí konstantní rychlostí 9,5 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jak daleko za semafory automobil opět předjede kamion? (b) Jaké rychlosti v tomto okamžiku dosáhne?

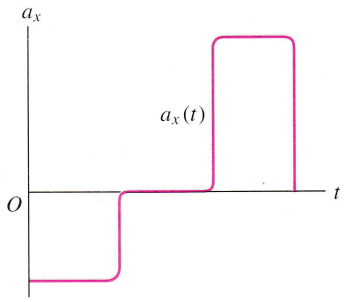
57Ú. Rychlík vyjíždí ze zatáčky rychlostí 160 km/h. Strojvůdce náhle spatří ve vzdálenosti 0,67 km lokomotivu, která jede po téže koleji stejným směrem rychlostí 29 km/h (obr. 2.26). Strojvůdce rychlíku začne okamžitě brzdit. (a) Určete nejmenší možné zpomalení rychlíku, při němž ještě nedojde ke srážce. (b) Okamžiku, kdy strojvůdce rychlíku zahlédl lokomotivu, přisoudíme hodnotu $t = 0$ a počátek osy x (tj. $x = 0$) zvolíme v místě, ve kterém se rychlík v tomto okamžiku nacházel. Nakreslete grafy časových závislostí $x(t)$ obou vlaků pro případ, že se tak tak podařilo srážku odvrátit.



Obr. 2.26 Úloha 57

58Ú. Dva vlaky jedou proti sobě po přímém úseku jednokolejné trati rychlostmi 72 km/h a 144 km/h. V okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny 950 m, spatří oba strojvůdci protijedoucí vlak a začnou okamžitě brzdit se zrychlením o velikosti 1,0 $m \cdot s^{-2}$. Dojde ke srážce?

59Ú. Nakreslete graf $v_x(t)$ odpovídající grafu $a_x(t)$ z obr. 2.27.



Obr. 2.27 Úloha 59

ODST. 2.8 Svislý vrh

60C. Dělníkovi na stavbě spadl nešťastnou náhodou hasák a narazil na zem rychlostí 24 $m \cdot s^{-1}$. (a) Z jaké výšky padal? (b) Jak dlouho trval jeho pád? (c) Nakreslete grafy závislostí $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$.

61C. (a) Jakou rychlostí musíme svisle vyhodit míč, aby dosáhl výšky 50 m? (b) Za jak dlouho dopadne zpět na zem? (c) Nakreslete grafy závislostí $y(t)$, $v_y(t)$ a $a_y(t)$ popisující let míče. V prvních dvou z nich vyznačte okamžik, kdy je míč právě ve výšce 50 m.

62C. Kapka deště dopadne na zem z mraku ve výšce 1 700 m. Jakou rychlostí by dopadla, kdyby její let nebyl brzděn odporem vzduchu? Bylo by v tomto případě bezpečné setrvávat během bouře venku?

63C. Nákladní stavební výtah je upevněn na jediném laně. Lano se náhle přetrhne, když výtah stojí v nejvyšším patře budovy, ve výšce 120 m. (a) Jakou rychlostí dopadne kabina na zem? (b) Jak dlouho poletí? (c) Jakou rychlost bude mít právě v polovině vzdálenosti měřené od výchozího bodu k zemi? (d) Za jak dlouho urazí první polovinu této vzdálenosti?

64C. Zlý výrostek Hugo hází kamením svisle dolů ze střechy budovy vysoké 30 m. Počáteční rychlost kamene má velikost 12,0 $m \cdot s^{-1}$. (a) Za jak dlouho dopadne kámen na zem? (b) Jak velká bude jeho rychlost při dopadu?

65C. Ve výzkumném ústavu pro beztížný stav agentury NASA Lewis Research Center je i 145 m vysoká experimentální věž, z níž je vyčerpán vzduch. Jedním z experimentů, k nimž věž slouží, je volný pád koule o průměru 1 m, ve které jsou umístěny měřicí přístroje. (a) Jak dlouho trvá pád koule? (b) Jaká je její rychlost těsně před dopadem na záchytné zařízení ve spodní části věže? (c) Při záchytu je koule brzděna s průměrným zrychlením o velikosti $25g$ až do úplného zastavení. Jaká dráha je potřebná k zastavení koule?

66C. Model rakety poháněný hořícím palivem startuje svisle vzhůru. Nakreslete schematické grafy časových závislostí její polohy y, rychlosti v_y a zrychlení a_y. V grafech vyznačte, ve kterém místě došlo palivo, kdy model dosáhl největší výšky a kdy dopadl zpátky na zem.

67C. Kámen volně vypustíme z útesu vysokého 100 m. Za jakou dobu urazí (a) prvních 50 m dráhy, (b) druhých 50 m?

68Ú. Vyplašený pásovec vyskočí do výšky 0,544 m za 0,200 s (obr. 2.28). (a) Jaká je jeho počáteční rychlost? (b) Jaká je jeho rychlost v zadané výšce? (c) Jak vysoko ještě vyletí?



Obr. 2.28 Úloha 68

69Ú. Těleso padá z mostu, který je ve výšce 45 m nad hladinou řeky. Spadne přímo do loďky, která pluje pod mostem konstantní rychlostí. V okamžiku uvolnění tělesa na mostě byla loďka vzdálena právě 12 m od místa dopadu. Jaká je její rychlost?

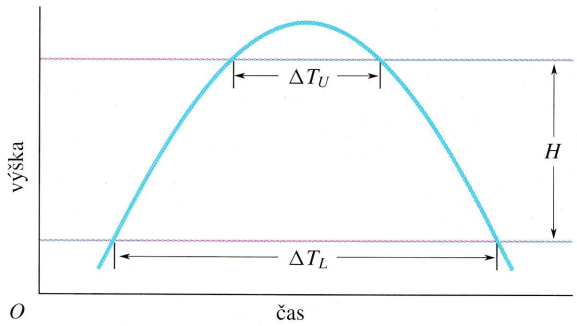
70Ú. Model rakety je odpálen svisle vzhůru a stoupá s konstantním zrychlením 4,00 $m \cdot s^{-2}$ po dobu 6,00 s. Pak dojde palivo a raketa letí bez pohonu. (a) Jaké maximální výšky dosáhne? (b) Jaká je celková doba jejího letu od startu až po pád na zem?

71Ú. Basketbalista, který doskakuje pod košem, vyskočí svisle do výšky 76 cm. Jak dlouho setrvává (a) blíže než 15 cm od nejvyššího bodu své dráhy, (b) blíže než 15 cm od podlahy? Výsledek tohoto výpočtu nám pomůže pochopit, proč se zdá, že basketbalista při výskoku chvíli visí ve vzduchu.

72Ú. V Národní fyzikální laboratoři v Anglii měřili tíhové

zrychlení g pomocí svislého vrhu tělesa ve vyčerpané trubici. Při letu byly registrovány průchody tělesa dvěma body v různých výškách dráhy letu (obr. 2.29). Označme ΔT_L dobu, která uplynula mezi dvěma průchody dolním bodem, ΔT_U dobu mezi průchody horním bodem a H svislou vzdálenost těchto dvou bodů. Ukažte, že

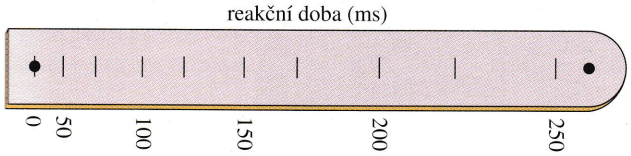
$$g = \frac{8H}{\Delta T_L^2 - \Delta T_H^2}.$$



Obr. 2.29 Úloha 72

73Ú. Koule z vlhké hlíny padá z výšky 15,0 m. Po dopadu na zem se po dobu 20 ms plasticky deformuje, než se její pohyb zcela zastaví. Jaké je průměrné zrychlení koule při této deformaci? (Při řešení nahraďte kouli hmotným bodem.)

74Ú. Z výšky h hodíme svisle *dolů* míč s počáteční rychlostí v_{0y}. (a) Jaká bude rychlost míče těsně před dopadem? (b) Za jak dlouho míč dopadne? (c) Jak se změní odpověď na otázky (a) a (b), vyhodíme-li míč svisle vzhůru z téže výšky stejnou rychlostí? Než začnete řešit příslušné rovnice, rozvažte předem, zda hodnoty získané v části úkolu (c) budou větší, menší či stejné jako výsledky úloh (a) a (b).



Obr. 2.30 Úloha 75

75Ú. Na obr. 2.30 je jednoduché zařízení pro měření reakční doby člověka. Je vyrobeno z pásku lepenky s nakresleným měřítkem a dvěma velkými tečkami. Reakční dobu si můžeme sami změřit takto: Náš pomocník uchopí pásek mezi palec a ukazováček v místě tečky umístěné na obr. 2.30 vpravo a drží jej měřítkem svisle dolů. Přiblížíme ruku k pásku tak, aby procházel mezi palcem a ukazováčkem právě v místě druhé tečky. Je třeba, aby palec a ukazováček byly co nejblíže u sebe, nesmíme se však pásku dotýkat. Náhle náš přítel pásek pustí a my se jej snažíme co nejrychleji chytit. Reakční dobu zjistíme podle značky v místě, kde se nám podaří pásek zachytit. (a) V jaké vzdálenosti od dolní tečky musí být nakreslena značka s údajem 50 ms? (b) V kolikrát větší vzdálenosti od dolní tečky musí být zakresleny značky s údaji 100 ms, 150 ms, 200 ms a 250 ms? (Myslíte, že například značka 100 ms je v dvojnásobné vzdálenosti od dolní tečky než značka 50 ms? Lze v odpovědích na otázku (b) najít nějakou zákonitost?)

76Ú. Žonglér vyhazuje míč do jisté výšky. Kolikrát výše musí míč vyhodit, aby jeho let trval dvojnásobnou dobu?

77Ú. Kámen je vržen svisle vzhůru. Při vzestupu míjí jistý bod A rychlostí v a další bod B rychlostí $\frac{1}{2}v$. Bod B je o 3,00 m výše než bod A. Určete (a) rychlost v a (b) největší výšku, do které kámen vyletí nad úroveň bodu B.

78Ú. Kvalitu tenisového míčku můžeme ověřit například tak, že zjišťujeme, jak skáče. Volně jej upustíme z výšky 4,00 m. Míč se odrazí a vyskočí do výšky 3,00 m. Jaké bylo průměrné zrychlení při odrazu, trval-li 10 ms? Odpor prostředí zanedbejte.

79Ú. Voda kape na podlahu ze sprchové růžice upevněné ve výšce 200 cm. Kapky padají v pravidelných intervalech. Právě v okamžiku dopadu první kapky začíná pád čtvrté. Jaká je poloha druhé a třetí kapky v tomto okamžiku?

80Ú. Olověná koule je vržena do jezera z plošiny umístěné 5,20 m nad hladinou. Koule dopadne na hladinu určitou rychlostí a začne se potápět. Klesá při tom ke dnu stejnou rychlostí, se kterou dopadla na hladinu. Na dno dosedne za 4,8 s od okamžiku, kdy byla z plošiny vypuštěna. (a) Jak je jezero hluboké? (b) Jaká je průměrná rychlost koule? Představme si, že vodu z jezera vypustili. Kouli vyhodíme ze stejné plošiny a požadujeme, aby na dno jezera dopadla opět za 4,8 s. Jaká musí být její počáteční rychlost?

81Ú. Těleso volně padá z výšky h. Za poslední sekundu pádu urazí dráhu $0{,}50h$. Určete (a) dobu pádu a (b) výšku h. Objasněte fyzikální význam obou kořenů kvadratické rovnice, jejíž řešení je součástí výpočtu.

82Ú. Dívka spadla ze střechy budovy vysoké 44 m a dopadla na plechovou konstrukci vzduchotechniky. Stropní stěna konstrukce se při tom promáčkla o 46 cm. Dívka pád přežila bez vážnějšího poranění. Předpokládejte, že její zrychlení v průběhu brzdění pádu bylo konstantní a určete je. Výsledek vyjádřete v jednotkách SI i v násobcích g.

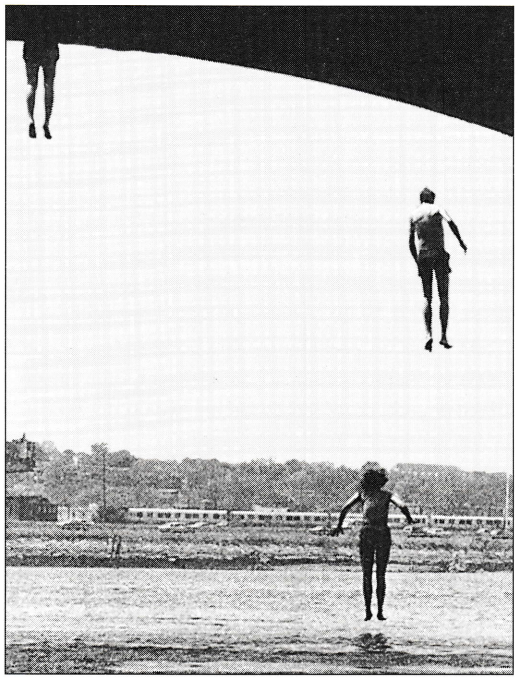
83Ú. Kámen byl volně upuštěn do vody z mostu vysokého 44 m. Za jednu sekundu poté byl svisle dolů hozen druhý kámen. Oba kameny dopadly do vody současně. (a) Jaká byla počáteční rychlost druhého kamene? (b) Nakreslete grafy časové závislosti rychlosti obou kamenů. (Počátek časové osy přisoudíme okamžiku, kdy začal padat první kámen.)

84Ú. Parašutistka padá po výskoku z letadla nejprve volným pádem a urazí 50 m. Poté otevře padák, který zpomaluje její pohyb se zrychlením o velikosti $2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Na zem dopadne rychlostí $3{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jak dlouho trval její let? (b) V jaké výšce nad zemí vyskočila z letadla?

85Ú. Dvě tělesa jsou volně vypuštěna ze stejné výšky v časovém odstupu 1 s a letí volným pádem. Za jak dlouho od okamžiku, kdy začalo padat první z nich, je jejich vzdálenost 10 m?

86Ú. Klára a Jan seskočili těsně po sobě z mostu (obr. 2.31). Za jak dlouho po Kláře seskočil Jan? Předpokládejte, že Jan je

vysoký 170 cm a místo, odkud oba skočili, je právě na horním okraji obrázku. Číselné hodnoty nutné pro výpočet je třeba získat přímo měřením na fotografii.



Obr. 2.31 Úloha 86

87Ú. Horkovzdušný balon stoupá rychlostí 12 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Ve výšce 80 m vyhodí posádka balíček. Určete (a) dobu jeho pádu a (b) jeho rychlost při dopadu.

88Ú. Otevřená výtahová klec stoupá vzhůru konstantní rychlostí 10 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Chlapec jedoucí ve výtahu si hraje s míčem a vyhazuje jej svisle vzhůru. Ve výšce 2 m nad podlahou výtahu má míč vzhledem k výtahu rychlost 20 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V tom okamžiku je podlaha výtahu právě 28 m nad zemí. (a) Do jaké největší výšky nad zemí míč vyletí? (b) Za jak dlouho dopadne zpět na podlahu výtahu?

89Ú. Koule z tvrzené gumy je volně puštěna ze střechy budovy. Při svém pádu míjí okno vysoké 1,20 m a její let podél okna trvá 0,125 s. Dopadne na chodník, kde se pružně odrazí, takže při výstupu prolétne kolem téhož okna opět za dobu 0,125 s. Doba mezi oběma průchody kolem dolního okraje okna je 2,00 s. Jak je budova vysoká?

90Ú. Podřimující kočka zahlédne otevřeným oknem letící květináč, který nejprve stoupá vzhůru a pak opět padá. Celková doba, po kterou je květináč vidět v okně, je 0,50 s. Okno je vysoké 2,00 m. Jak vysoko nad horní okraj okna květináč vyletěl?

PRO POČÍTAČ

Úlohy v této části řešíme pomocí počítače.

91Ú. Zkušební jezdec testuje brzdy automobilu vybaveného systémem ABS, který zajišťuje maximální brzdný účinek bez prokluzu pneumatik. Testovací jízdy probíhají na přímém a suchém úseku zkušební dráhy. Úkolem jezdce je zastavit vůz na nejkratší možné dráze od okamžiku, kdy zahlédne světelný signál. Dráha potřebná k zastavení je pro šest různých počátečních rychlostí uvedena v následující tabulce. (a) Najděte závislost brzdné dráhy d na velikosti počáteční rychlosti $v_{\mathrm{i},x}$, reakční době řidiče T_{R} a velikosti a_x konstantního zrychlení automobilu. Metodou nejmenších čtverců určete (b) a_x a (c) T_{R}.

$v_{\mathrm{i},x}$ ($\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$)	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00
d (m)	4,6	12,1	22,3	35,2	51,0	69,5

92Ú. Motocyklista se rozjíždí (z klidu) po vodorovné přímé silnici, na které jsou v pravidelných desetimetrových rozestupech umístěny fotobuňky. První z nich je právě u startu. (Pomocí fotobuňky je možné měřit okamžik průjezdu motocyklu daným místem.) V následující tabulce jsou shrnuty výsledky měření. (a) Najděte závislost uražené dráhy d na zrychlení a_x. Předpokládejte, že zrychlení je konstantní. (b) Hodnoty z tabulky zakreslete do grafu znázorňujícího závislost dráhy d na druhé mocnině času t^2. (c) Metodou lineární regrese určete ze zadaných údajů zrychlení motocyklu a_x.

Pořadové číslo fotobuňky	1	2	3	4	5	6
Vzdálenost (m)	0	10	20	30	40	50
Čas (s)	0	1,63	2,33	2,83	3,31	3,79

93Ú. Motocyklista z předchozí úlohy se opět rozjíždí s konstantním zrychlením na přímé testovací dráze, na které jsou umístěny měřicí body s rozestupy $d_0 = 10$ m. První bod je v neznámé vzdálenosti d od startu jezdce. V následující tabulce jsou výsledky měření rychlosti motocyklu v těchto bodech. (a) Najděte závislost čtverce rychlosti $v_{j,x}^2$ v j-tém bodě na rychlosti $v_{1,x}$ v prvním bodě, na vzdálenosti d_0, na konstantním zrychlení a_x a na pořadovém čísle měřicího bodu j. (b) Nakreslete graf závislosti $v_{j,x}^2$ na $(j-1)$. Metodou lineární regrese určete (c) zrychlení a_x a (d) vzdálenost d.

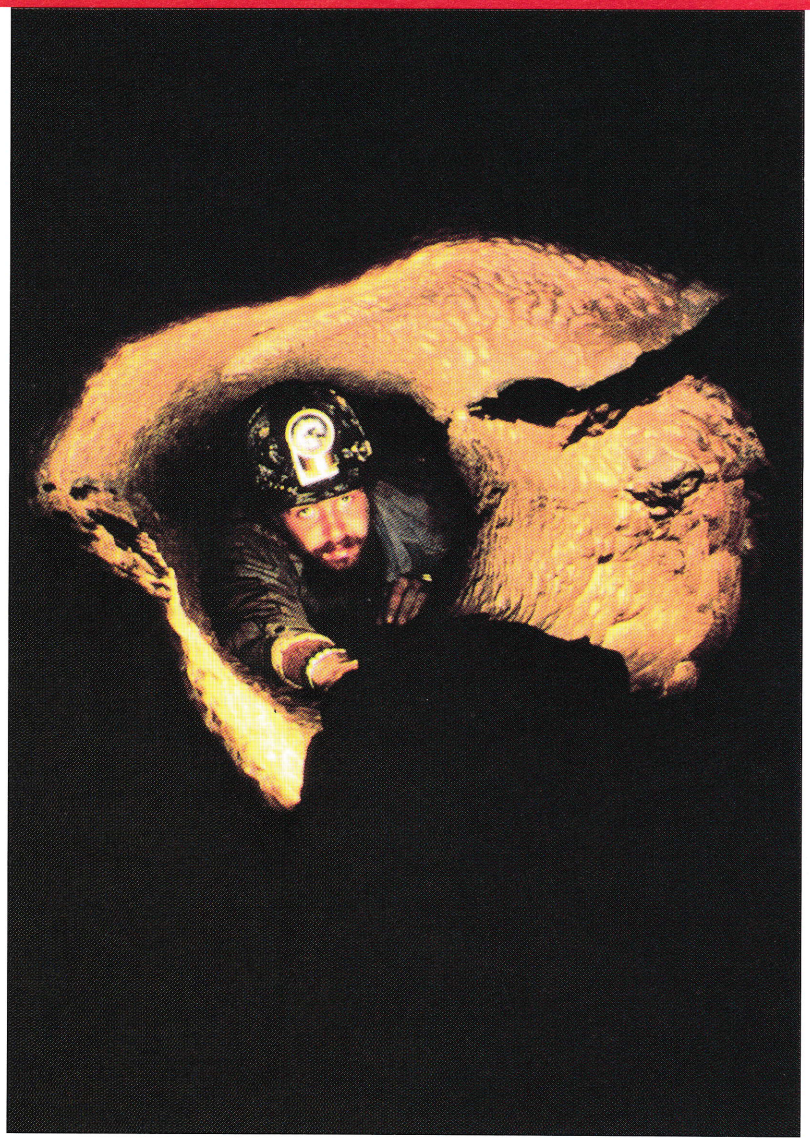
Vztažný bod číslo	1	2	3	4	5	6
Rychlost ($\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$)	14,0	18,3	21,7	24,6	27,5	30,0

94Ú. Předpokládejme, že časová závislost polohy částice při jejím pohybu podél osy x je dána vztahem

$$x(t) = -32{,}0 + 24{,}0t^2\mathrm{e}^{-0{,}0300t},$$

kde x je měřeno v metrech a t v sekundách. (a) Najděte vztahy pro rychlost v_x a zrychlení a_x částice jako funkce času. (b) Nakreslete grafy časových závislostí její polohy, rychlosti a zrychlení pro časový interval od 0 do 100 s. (c) Určete, ve kterém okamžiku je částice v počátku soustavy souřadnic ($x = 0$). Určete její rychlost a zrychlení v tomto okamžiku. (d) Určete, ve kterém okamžiku je její rychlost nulová, a vypočtěte odpovídající polohu a zrychlení.

3
Vektory



Po dvě desetiletí prozkoumávali speleologové 200 km dlouhý systém Mamutí jeskyně a jeskyně Flint Ridge. Věřili, že jsou propojeny, a doufali, že se jim podaří spojovací chodby odhalit. Na fotografii je zachycen jeden z členů úspěšného týmu Richard Zopf, jak spouští batoh průlezem Tight Tube, ležícím hluboko v nitru jeskynního labyrintu Flint Ridge. Po dvanácti hodinách postupu se Zopf a jeho šest druhů protáhli proudem ledové vody a octli se v Mamutí jeskyni. Komplex Mamutí–Flintovy jeskyně se tak stal nejdelší jeskyní na světě. Lze nějak jednoduše charakterizovat vzájemnou polohu východiska a cíle cesty průzkumného družstva, aniž bychom podrobně popisovali celou spletitou trasu?

3.1 VEKTORY A SKALÁRY

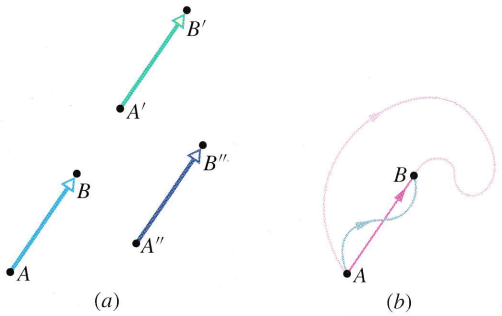
Pohyb částice po přímce se může dít pouze ve dvou směrech. Jeden z nich můžeme označit za kladný, druhý bude záporný. V trojrozměrném prostoru však již pouhé dvě možnosti, odlišené znaménky plus a minus, pro určení směru pohybu nestačí. Je třeba použít vektorů.

Vektor je zadán směrem a velikostí. S vektory lze počítat podle určitých pravidel, jimiž se za chvíli budeme podrobněji zabývat. **Vektorová veličina** má také směr a velikost. K fyzikálním veličinám, které mohou být popsány vektory (mají tzv. vektorový charakter), patří například posunutí, rychlost a zrychlení.

Některým fyzikálním veličinám nelze přisoudit směr. Například teplota, tlak, energie, hmotnost a čas žádný směr nemají. Takovým veličinám říkáme skaláry a při počítání s nimi používáme pravidla běžné algebry. **Skalár** je určen jediným číslem (například 12,3 kg, 25 J, apod.).* Nejjednodušší vektorovou veličinou je posunutí (změna polohy). Nazýváme ji **vektor posunutí**. (Podobně mluvíme i o vektoru rychlosti a vektoru zrychlení.) Přejde-li pohybující se částice z bodu A do bodu B (obr. 3.1a), lze její posunutí znázornit šipkou směřující z A do B. Šipka je grafickým vyjádřením vektoru. Abychom na dalších obrázcích odlišili vektory od šipek s jiným významem, budeme v koncovém bodě každého vektoru kreslit malý trojúhelník.

Šipky z A do B, z A' do B' a z A'' do B'' na obr. 3.1a představují stejnou změnu polohy hmotného bodu a nebudeme je rozlišovat. Všechny mají stejnou velikost a směr a určují tedy stejný vektor posunutí.

Známe-li pouze vektor posunutí částice, nedokážeme určit její skutečnou trajektorii mezi počátečním a koncovým bodem tohoto posunutí. Na obr. 3.1b jsou zakresleny tři různé trajektorie spojující body A a B. Odpovídá jim stejné výsledné posunutí jako na obr. 3.1a. Posunutí nepopisuje detaily pohybu, určuje pouze jeho celkový výsledek.



Obr. 3.1 (a) Všechny vyznačené šipky představují stejné posunutí. (b) Všechny tři trajektorie spojující dva body odpovídají témuž posunutí.

Místo grafického vyjádření lze vektor posunutí zadat velikostí a úhly, které tento vektor svírá se dvěma zvolenými vztažnými směry. Přesvědčíme se o tom při řešení příkladu 3.1.

PŘÍKLAD 3.1

Skupina speleologů, která v roce 1972 objevila spojení mezi Mamutí jeskyní a jeskynním systémem Flint Ridge, absolvovala cestu od Austinova vchodu k řece Echo v Mamutí jeskyni (obr. 3.2a). Ušla při tom 2,6 km západním směrem, 3,9 km na jih a vystoupila o 25 m svisle vzhůru. Jaký vektor posunutí odpovídá této cestě?

ŘEŠENÍ: Nejprve zjistíme velikost posunutí ve vodorovném směru, kterou označíme d_h. Na obr. 3.2b je znázorněn průmět vektoru posunutí do vodorovné roviny (pohled shora). Pomocí Pythagorovy věty dostaneme

$$d_h = \sqrt{(2{,}6\,\mathrm{km})^2 + (3{,}9\,\mathrm{km})^2} = 4{,}69\,\mathrm{km}.$$

Průmět vektoru posunutí do vodorovné roviny svírá se směrem východ-západ úhel θ, určený výrazem

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{(3{,}9\,\mathrm{km})}{(2{,}6\,\mathrm{km})} = 1{,}5,$$

tj.

$$\theta = 56^\circ.$$

Celkové posunutí $\boldsymbol{d}$ již snadno určíme z obr. 3.2c (boční pohled). Má velikost

$$d = \sqrt{(4{,}69\,\mathrm{km})^2 + (0{,}025\,\mathrm{km})^2} = 4{,}69\,\mathrm{km} \doteq 4{,}7\,\mathrm{km}$$

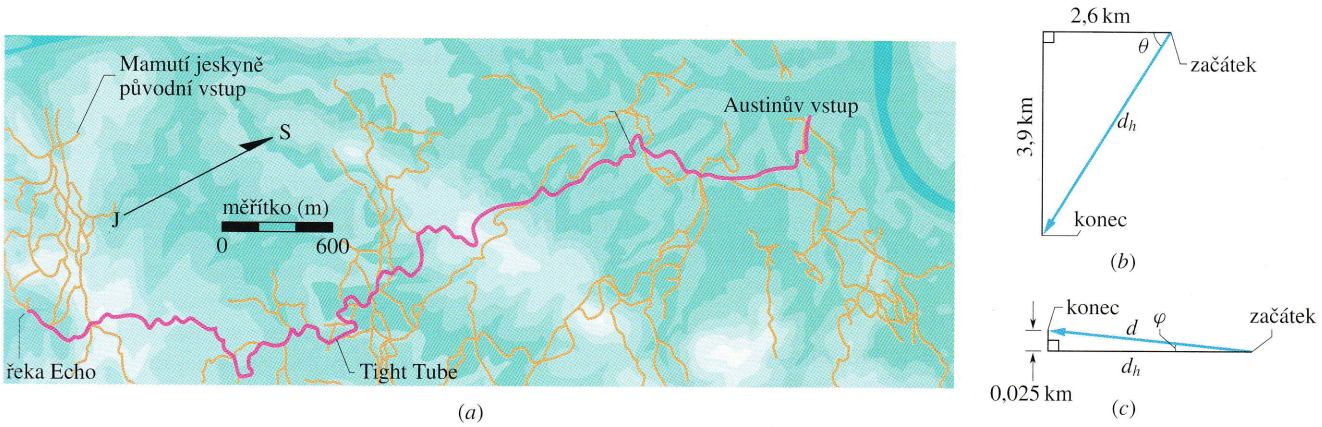
a svírá s vodorovnou rovinou úhel φ,

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{(0{,}025\,\mathrm{km})}{(4{,}69\,\mathrm{km})} = 0{,}005\,3,$$
$$\varphi = 0{,}3^\circ.$$

Vektor posunutí, určující změnu polohy speleologické skupiny, má velikost 4,7 km, svírá se směrem východ-západ

---

* Nezaměňujme skaláry se **souřadnicemi vektorů** na přímce (v jednorozměrném prostoru). Vektor na orientované přímce je číselně reprezentován jedinou souřadnicí. Proto při pevné volbě souřadnicové osy často hovoříme o této souřadnici jako o samotném vektoru, jako tomu bylo v celé kap. 2. Kladné či záporné znaménko souřadnice vektoru rozhoduje o tom, zda je jeho směr souhlasný či nesouhlasný s kladným směrem orientované přímky. Změníme-li orientaci přímky, změní se znaménko souřadnice zadaného vektoru. V případě skaláru patří znaménko k hodnotě. Hodnoty skalárních veličin jsou zcela nezávislé na jakékoli volbě soustavy souřadnic. Při popisu volného pádu tělesa o hmotnosti m v blízkosti povrchu Země máme dvojí možnost volby kladné orientace souřadnicové osy y: nahoru nebo dolů. V případě první volby budou rychlost i zrychlení tělesa (přesněji jejich y-ové souřadnice) v každém okamžiku záporné, v případě druhého způsobu volby budou kladné. Hmotnost tělesa však bude v obou případech stejná.

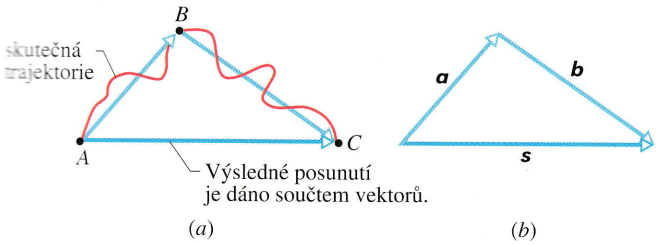


Obr. 3.2 Příklad 3.1. (a) Mapka části systému Mamutí–Flintova jeskyně s vyznačením trasy speleologické skupiny od Austinova vchodu k řece Echo. (b) Průmět posunutí skupiny do vodorovné roviny (nadhled). (c) Boční pohled. (Upraveno podle oficiální mapy.)

úhel 56° a od vodorovné roviny je odkloněn směrem vzhůru o úhel 0,3°. Celkové posunutí ve svislém směru je zanedbatelné v porovnání s pohybem ve vodorovné rovině. Ve skutečnosti však museli průzkumníci nesčetněkrát šplhat nahoru a dolů. Cesta, kterou prošli, se nijak nepodobala vektoru posunutí, který představuje pouze spojnici výchozího a koncového bodu.

3.2 SČÍTÁNÍ VEKTORŮ: GRAFICKÁ METODA

Uvažujme částici, která se pohybuje nejprve z bodu A do bodu B a poté z bodu B do C (obr. 3.3a). Její celkové posunutí je určeno dvěma dílčími posunutími AB a BC bez ohledu na to, jaká byla její skutečná trajektorie. Výsledkem těchto dvou po sobě následujících posunutí je posunutí jediné: z bodu A do bodu C. Posunutí AC nazýváme vektorovým součtem posunutí AB a BC.



Obr. 3.3 (a) AC je vektorovým součtem vektorů AB a BC. (b) Jiné označení vektorů z obrázku (a).

Obr. 3.3b znázorňuje vektory překreslené z obr. 3.3a a označené tučnými písmeny $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{s}$. Tento způsob značení vektorů budeme používat v celém dalším textu. V zápisech psaných ručně značíme vektory šipkou nad příslušným symbolem, např. $\vec{a}$. Pro označení velikosti vektoru používáme obyčejnou kurzívu, např. a, b a s. Tučný symbol zahrnuje tedy úplnou informaci o vektoru, tj. o jeho velikosti i směru. Pro zápis velikosti vektoru, zejména u složitějších výrazů, lze použít i následujícího značení: $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$.

Vztah mezi vektory na obr. 3.3b můžeme zapsat jedinou vektorovou rovnicí

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad \text{(sčítání)}, \tag{3.1}$$

která vyjadřuje skutečnost, že vektor $\boldsymbol{s}$ je součtem vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Uvědomme si, že symbol + a slova „součet" a „sčítat" mají nyní jiný význam, než je běžné v algebře čísel.

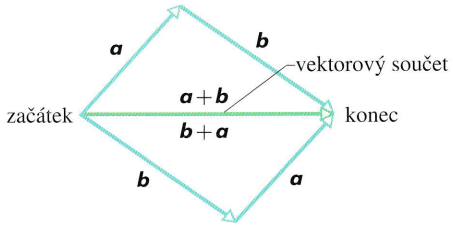
Obr. 3.3 je návodem, jak sečíst dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ graficky. (1) Nejprve narýsujeme vektor $\boldsymbol{a}$ ve vhodném měřítku a odpovídajícím směru. (2) Počáteční bod vektoru $\boldsymbol{b}$ umístíme do koncového bodu vektoru $\boldsymbol{a}$. Dbáme na to, aby oba vektory byly zakresleny ve stejném měřítku a svíraly správný úhel. (3) Vektorový součet $\boldsymbol{s}$ získáme jako spojnici počátečního bodu vektoru $\boldsymbol{a}$ s koncovým bodem vektoru $\boldsymbol{b}$. Všimněte si, že popsaný postup pracuje jak s velikostí, tak se směrem obou vektorů. Jistě jej dokážete snadno zobecnit pro případ součtu většího počtu vektorů.

Právě definovaný vektorový součet má dvě důležité vlastnosti.

(1) Výsledek nezávisí na pořadí sčítanců, tj.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \quad \text{(komutativní zákon)}. \tag{3.2}$$

O platnosti komutativního zákona nás přesvědčí obr. 3.4. Z něj je také zřejmé, proč se někdy mluví o pravidlu rovnoběžníka: součet $\boldsymbol{s}$ tvoří úhlopříčku v rovnoběžníku určeném vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

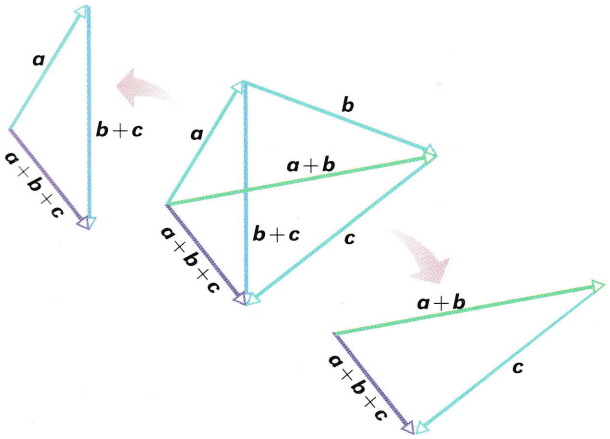


Obr. 3.4 Dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ lze sčítat v libovolném pořadí (vztah (3.2)).

(2) Sčítáme-li několik vektorů, je lhostejné, jak je při tom seskupíme. Máme-li například určit součet vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$, můžeme nejprve sečíst třeba vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a k výsledku pak přičíst vektor $\boldsymbol{c}$. Stejně dobře však můžeme sečíst napřed vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ a k jejich součtu nakonec přičíst vektor $\boldsymbol{a}$. Výsledek bude v obou případech stejný. Matematický zápis tohoto pravidla je následující:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \quad \text{(asociativní zákon).} \quad (3.3)$$

Platnost asociativního zákona ilustruje grafická konstrukce na obr. 3.5.



Obr. 3.5 Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ lze při sčítání libovolně seskupit (viz vztah (3.3)).

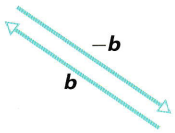
Vektor $\boldsymbol{0}$ nulové velikosti nazýváme **nulový**. Jeho směr není definován. Nulový vektor má mezi vektory stejné postavení jako nula mezi čísly: pro každý vektor $\boldsymbol{b}$ platí $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}$. Symbolem $-\boldsymbol{b}$ rozumíme vektor, který má stejnou velikost jako vektor $\boldsymbol{b}$, avšak **opačný** směr (obr. 3.6). Nazýváme jej **vektorem opačným** k $\boldsymbol{b}$. Vektor opačný k opačnému je opět původní vektor, tj. $-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$. Snadno se přesvědčíme, že součtem navzájem opačných vektorů je nulový vektor:

$$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

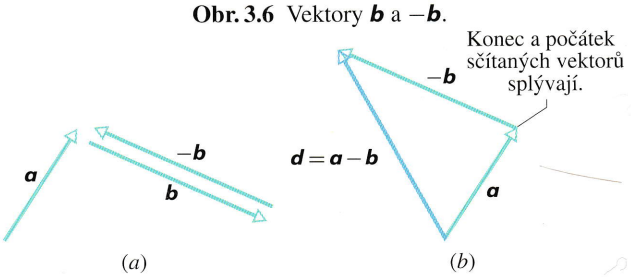
Této vlastnosti využijeme k definici rozdílu dvou vektorů. Rozdílem vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rozumíme vektor

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \quad \text{(odčítání),} \quad (3.4)$$

který označujeme $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Získáme jej tak, že k vektoru $\boldsymbol{a}$ *přičteme* vektor $-\boldsymbol{b}$. Příklad grafické konstrukce je na obr. 3.7.



Obr. 3.6 Vektory $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{b}$.



Obr. 3.7 (a) Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{b}$. (b) Odečtení vektoru $\boldsymbol{b}$ od vektoru $\boldsymbol{a}$ je ekvivalentní sečtení vektorů $\boldsymbol{a}$ a $-\boldsymbol{b}$.

I když jsme pravidla pro sčítání a odečítání vektorů zaváděli pro vektory posunutí, je samozřejmě možné jich použít pro jakékoli vektory, bez ohledu na to, zda představují nějakou fyzikální veličinu (sílu, rychlost apod.), či nikoliv. Tak jako při počítání se skaláry má však smysl sčítat pouze vektory stejného druhu (ve fyzice vektory odpovídající téže fyzikální veličině).

Můžeme sečíst například dvě posunutí nebo dvě rychlosti, nelze však sčítat posunutí a rychlost. Byl by to stejný nesmysl jako chtít sečíst 21 sekund a 12 metrů.

KONTROLA 1: Dvě posunutí $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají velikosti 3 m a 4 m. Označme $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Jak je třeba volit úhel obou posunutí, aby velikost vektoru $\boldsymbol{c}$ byla (a) co největší, (b) co nejmenší? V obou případech velikost vektoru $\boldsymbol{c}$ určete.

PŘÍKLAD 3.2

Při branném závodě je úkolem soutěžícího vzdálit se co možná nejvíce od startu třemi postupnými přímočarými přesuny: (a) $\boldsymbol{a}$: 2,0 km na východ, (b) $\boldsymbol{b}$: 2,0 km severovýchodním směrem, svírajícím s místní rovnoběžkou úhel 30°, (c) $\boldsymbol{c}$: 1,0 km na západ. Pořadí přesunů může závodník volit a kterýkoliv z vektorů $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ může zaměnit vektorem opačným. Do jaké největší vzdálenosti od startu (měřeno vzdušnou čarou) se dokáže dostat?

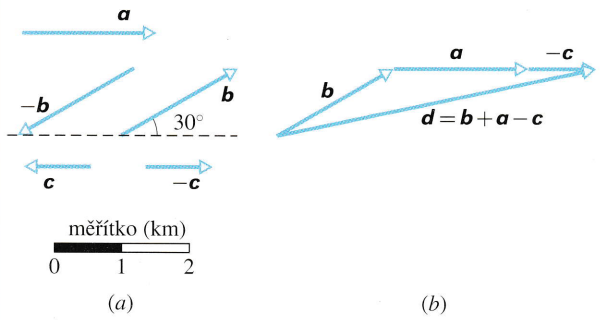
ŘEŠENÍ: Ve vhodném měřítku zakreslíme vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$ (obr. 3.8a). Vybereme některou z povolených trojic posunutí a v souladu s pravidlem pro sčítání vektorů je nakreslíme tak, aby počáteční bod každého následujícího vektoru splynul s koncovým bodem předcházejícího. (Volba pořadí vektorů při sčítání je samozřejmě libovolná, neboť neovlivní výsledek.) Počáteční bod prvního vektoru z vybrané trojice pak označuje místo startu, koncový bod třetího určuje cílovou polohu přesunu. Vektorový součet $\boldsymbol{d}$, spojující tyto dva body, je vektorem výsledného posunutí. Jeho velikost d představuje dosaženou vzdálenost závodníka od startu.

Snadno zjistíme, že největší vzdálenosti lze docílit volbou trojice přesunů určených vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$ (obr. 3.8b):

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}.$$

Změříme-li velikost vektoru $\boldsymbol{d}$ přímo v obrázku a použijeme-li vyznačeného měřítka, dostaneme vzdálenost d v kilometrech:

$$d = 4{,}8\ \text{km}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 3.8 Příklad 3.2. (a) Soubor vektorů pro výběr povolené trojice posunutí. (b) Závodník dosáhne největší vzdálenosti od startu, zvolí-li pro přesun trojici vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$. Obrázek zachycuje jedno z možných pořadí přesunů. Výsledný vektor posunutí je $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$.

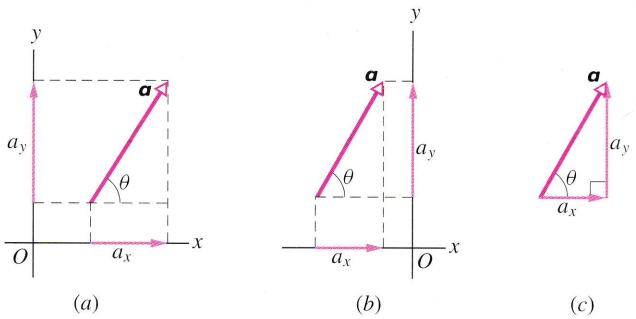
3.3 SLOŽKY VEKTORŮ

Grafické sčítání vektorů je zdlouhavé a málo přesné. Daleko elegantnější a snazší je metoda algebraická, při níž je však třeba vyjádřit vektory v souřadnicích. Pravoúhlou soustavu souřadnic volíme obvykle tak, že osy x a y umístíme do roviny nákresu (obr. 3.9a). Osu z pak vedeme počátkem soustavy souřadnic kolmo k nákresně. Prozatím budeme pracovat pouze s vektory v rovině a osu z nebudeme potřebovat.

Vektor $\boldsymbol{a}$ na obr. 3.9 leží v rovině xy. Vedeme-li jeho počátečním i koncovým bodem kolmice k souřadnicovým osám, vzniknou na osách úseky a_x a a_y. Nazýváme je **složky vektoru** $\boldsymbol{a}$ ve směrech x a y. Tento postup představuje rozklad vektoru do složek. Obecně pracujeme s vektory v trojrozměrném prostoru, kde mají tři složky. Vektor $\boldsymbol{a}$ na obr. 3.9a má v tomto obecném pojetí třetí složku nulovou. Posuneme-li vektor tak, aby jeho směr zůstal zachován, jeho složky se nezmění (obr. 3.9b). Pomocí pravoúhlého trojúhelníka na obr. 3.9a snadno najdeme výrazy pro složky vektoru $\boldsymbol{a}$:

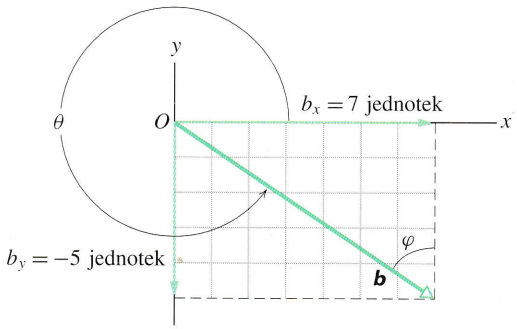
$$a_x = a\cos\theta \quad \text{a} \quad a_y = a\sin\theta, \qquad (3.5)$$

kde θ je úhel, který vektor $\boldsymbol{a}$ svírá s kladným směrem osy x a a je velikost vektoru. Z obr. 3.9c vidíme, že vektor a jeho x-ová a y-ová složka tvoří pravoúhlý trojúhelník. Je také zřejmé, jak sestrojíme vektor pomocí jeho složek: použijeme stejnou geometrickou konstrukci jako při sčítání vektorů.



Obr. 3.9 (a) Složky vektoru $\boldsymbol{a}$. (b) Při posunutí vektoru (při zachování jeho velikosti i směru) se jeho složky nezmění. (c) Složky vektoru $\boldsymbol{a}$ tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, jehož přeponou je vektor $\boldsymbol{a}$.

V závislosti na hodnotě úhlu θ mohou být složky vektorů kladné, záporné nebo nulové. Pro vyznačení znaménka složek používáme v obrázcích malých plných šipek. Podle běžné dohody je šipka orientována v kladném směru osy, je-li příslušná složka vektoru kladná a naopak. Vektor $\boldsymbol{b}$ na obr. 3.10 má složku b_x kladnou a složku b_y zápornou.



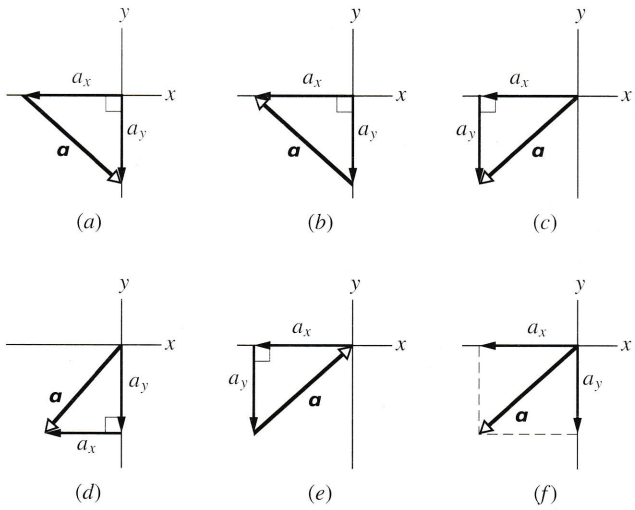
Obr. 3.10 Složka vektoru $\boldsymbol{b}$ ve směru osy x je kladná, složka ve směru osy y je záporná.

Vektor je svými složkami jednoznačně zadán stejně dobře jako svou velikostí a směrem. Všimněme si znovu obr. 3.9a. Vektor $\boldsymbol{a}$, ležící v rovině tvořené osami x a y, je v každém případě plně určen dvojicí čísel: velikostí a a úhlem θ, nebo složkami a_x a a_y. Každá z těchto dvojic obsahuje tutéž výslednou informaci. Podle potřeby můžeme přecházet od jednoho způsobu vyjádření vektoru k druhému. Známe-li např. složky a_x a a_y, vypočteme velikost a a úhel θ takto (obr. 3.9c):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}. \qquad (3.6)$$

Při řešení úloh můžeme vektor vyjadřovat *jak* pomocí jeho složek a_x a a_y, *tak* i pomocí dvojice a a θ.

KONTROLA 2: Který z následujících obrázků představuje správný rozklad vektoru $\boldsymbol{a}$ do složek?



PŘÍKLAD 3.3

Malé letadlo odstartovalo za nevlídného počasí. Později bylo spatřeno ve vzdálenosti 215 km od výchozího letiště v severovýchodním směru, svírajícím s místním poledníkem úhel 22°. Jaká byla jeho vzdálenost od letiště v severním a východním směru?

ŘEŠENÍ: Na obr. 3.11 je situace zakreslena v pravoúhlé soustavě souřadnic xy, jejíž počátek jsme pro jednoduchost umístili do polohy letiště. Osa x směřuje na východ, osa y na sever. Vektor $\boldsymbol{d}$ spojuje počátek soustavy souřadnic s místem, kde byl letoun opět spatřen.

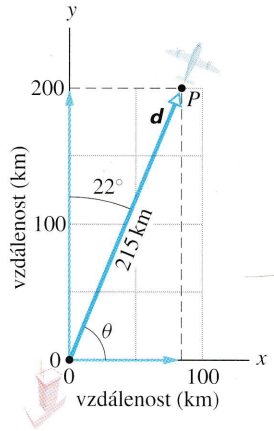
Na otázku položenou v zadání úlohy snadno odpovíme, určíme-li složky vektoru $\boldsymbol{d}$. Použijeme rov. (3.5), kam dosadíme $\theta = 68°$ $(= 90° - 22°)$. Dostaneme

$$d_x = d\cos\theta = (215\,\text{km})(\cos 68°) = \\ = 81\,\text{km} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$d_y = d\sin\theta = (215\,\text{km})(\sin 68°) = \\ = 199\,\text{km}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Letadlo bylo spatřeno 199 km severně a 81 km východně od letiště.



Obr. 3.11 Příklad 3.3. Letadlo odstartovalo z počátku soustavy souřadnic O a později bylo spatřeno v bodě P.

RADY A NÁMĚTY

Bod 3.1: *Úhly — stupně a radiány*

Měříme-li úhel od kladného směru osy x, považujeme jeho hodnotu měřenou proti směru otáčení hodinových ručiček za kladnou, hodnotu měřenou po směru hodinových ručiček za zápornou.* Tak například hodnoty 210° a −150° udávají stejný směr. Proto velmi často nerozlišujeme mezi úhly, které se liší o 360°, tj. o plný úhel — např. právě úhel 210° a −150°.

Většina kalkulaček připouští při výpočtu goniometrických funkcí úhlů obě možnosti. (Vyzkoušejte si tu svou.) Nejběžnějšími jednotkami pro měření úhlů jsou stupně (°) a radiány (rad). Jejich vzájemné přepočty jsou velmi snadné. Stačí si zapamatovat, že plný úhel je roven 360° a 2π rad. Potřebujeme-li například převést 40° na radiány, píšeme

$$40° \frac{2\pi\,\text{rad}}{360°} = 0{,}70\,\text{rad}.$$

Zkusme rychle ověřit, je-li získaný výsledek v pořádku. 40° je jedna devítina plného úhlu 2π rad ($\doteq 6{,}3$ rad). Výsledkem přepočtu by tedy měla být hodnota $\frac{1}{9} \cdot 6{,}3$. Vidíme, že jsme přepočet provedli správně. Správnost převodu můžeme velmi snadno posoudit také tehdy, zapamatujeme-li si přibližný vztah 1 rad $\doteq 57°$.

Kalkulačky jsou po zapnutí většinou automaticky nastaveny tak, že počítají úhly ve stupních. Chceme-li zadávat úhly

* Jen tak budou rov. (3.5) v souladu s přijatou konvencí pro znaménka složek vektorů. Viz také bod 3.4.

v radiánech, je třeba kalkulačku přepnout do příslušného pracovního režimu. Vyzkoušejte si to, než začnete řešit konkrétní úlohy.

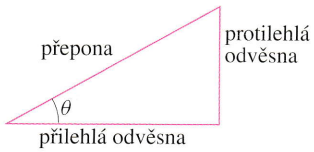
Bod 3.2: *Goniometrické funkce*

Nejužívanější goniometrické funkce sinus, kosinus a tangens je nutno dobře ovládat. Vědecké a technické výpočty se bez nich totiž neobejdou. Definice těchto funkcí jsou shrnuty v obr. 3.12. Označení jednotlivých stran pravoúhlého trojúhelníka není rozhodující a hodnoty $\sin\theta$, $\cos\theta$ a $\mathrm{tg}\,\theta$ nezávisí ani na jeho „velikosti". Pro všechny tzv. podobné trojúhelníky jsou stejné.

$$\sin\theta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$$



Obr. 3.12 Definice goniometrických funkcí. Viz též dod. E.

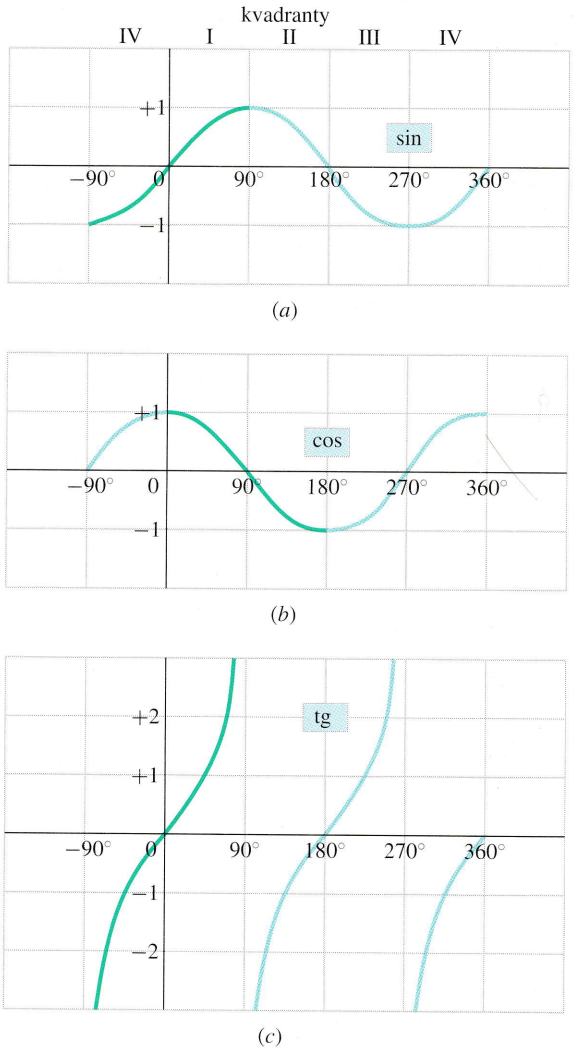
V případě potřeby bychom také měli umět hbitě si vybavit grafy goniometrických funkcí (obr. 3.13). Je výhodné si pamatovat, jaká jsou znaménka hodnot goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech.

Bod 3.3: *Cyklometrické funkce*

Cyklometrickými funkcemi rozumíme funkce inverzní ke goniometrickým. Nejdůležitější z nich jsou arcsin, arccos a arctg. Používáme-li pro jejich výpočet opět kalkulačku, musíme vždy dobře uvážit, je-li získaný výsledek v pořádku. Kalkulačka totiž zobrazí pro zadanou hodnotu y vybrané goniometrické funkce $f(x)$ (například sin) jen jedno z možných řešení x rovnice $y = f(x)$ ($y = \sin x$). Intervaly, v nichž leží řešení získaná na kalkulačce, jsou pro funkce $\sin x$, $\cos x$ a $\mathrm{tg}\,x$ vymezeny v obr. 3.13 zesílením odpovídající části grafu. Rovnici $0{,}5 = \sin x$ vyhovují hodnoty 30° a 150° a všechny další, které se od nich liší o celočíselný násobek plného úhlu. (O existenci různých řešení se můžeme snadno přesvědčit, najdeme-li průsečíky přímky $y = 0{,}5$ s grafem funkce sinus.) Při výpočtu na kalkulačce se však na displeji objeví právě výsledek 30°, který leží ve vyznačeném intervalu. Jak poznáme, které z možných řešení odpovídá zadané úloze? Vraťme se k příkladu 3.1, kde jsme mj. zjišťovali úhel θ na základě znalosti jeho tangenty, $\mathrm{tg}\,\theta = 1{,}5$. Na kalkulačce dostaneme hodnotu $\theta = 56°$. Snadno však zjistíme, že také tangenta úhlu $\theta = 236°$ ($= 180° + 56°$) má požadovanou hodnotu 1,5. Který z obou úhlů je správný? Z fyzikální úvahy je zřejmé, že zadání úlohy vyhovuje hodnota 56° (obr. 3.2b).

Bod 3.4: *Měření úhlů mezi vektory*

Vztahy (3.5) a (3.6) platí v případě, že je symbolem θ označen úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy x. Je-li v úloze zadán úhel vektoru s jiným vztažným směrem, nemůžeme jej do vztahů (3.5) a (3.6) bezmyšlenkovitě dosadit. Pokud by byl například písmenem θ označen úhel vektoru $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy y, museli bychom goniometrické funkce sin a cos ve vztazích (3.5) mezi sebou vyměnit a zlomek ve vztahu (3.6) převrátit. Možné chybě se snadno vyhneme tím, že pomocí zadaného úhlu určujícího směr vektoru vypočteme úhel θ sevřený vektorem a kladným směrem osy x. Přesně tak jsme to provedli při řešení příkladu 3.3.

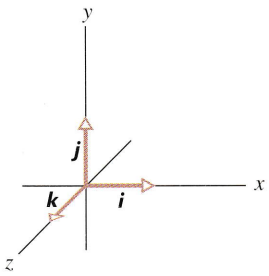


Obr. 3.13 Grafy tří nejužívanějších goniometrických funkcí. Část křivky určující obor hodnot odpovídající *cyklometrické* funkce je v každém grafu zvýrazněna. Vyznačené obory splývají s rozmezím hodnot cyklometrických funkcí běžných kalkulaček.

3.4 JEDNOTKOVÉ VEKTORY

Jako **jednotkový** je definován každý vektor, který má přesně jednotkovou velikost, bez ohledu na směr. Nepřisuzujeme mu fyzikální rozměr, a tedy ani jednotku. (Říkáme

také, že jeho fyzikální rozměr je 1.) Má jediný význam: určuje směr. Jednotkové vektory určující kladné směry souřadnicových os x, y a z označujeme často $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ (obr. 3.14).* Orientace souřadnicových os na obr. 3.14 je volena tak, aby tvořily **pravotočivou soustavu** (odpovídá po řadě palci, ukazováku a prostředníku na pravé ruce, když prsteník a malík jsou v dlani). Při jejím libovolném otočení zůstane tato vlastnost zachována. Pravotočivou soustavu souřadnic určenou navzájem kolmými jednotkovými vektory nazýváme zkráceně **kartézskou**. V dalším textu budeme používat výhradně kartézských souřadnicových soustav.



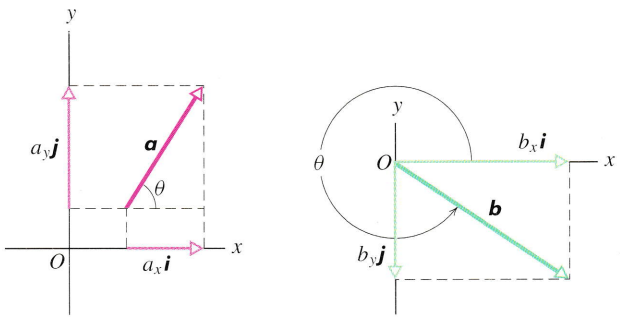
Obr. 3.14 Jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ definují kartézskou soustavu souřadnic.

Pomocí kolmých jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ můžeme velmi snadno vyjádřit každý další vektor. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ z obr. 3.9 a 3.10 zapíšeme například takto:

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}, \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}. \tag{3.8}$$

Geometrický význam těchto rovnic ilustruje obr. 3.15. Vektory $a_x\boldsymbol{i}$ a $a_y\boldsymbol{j}$ jsou tzv. **pravoúhlé průměty** vektoru $\boldsymbol{a}$ do směru vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$. Rozlišujme mezi *složkami* (a_x, a_y) a *průměty* $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$.



Obr. 3.15 (a), (b) Pravoúhlé průměty vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

* Dalšími užívanými symboly pro jednotkový vektor příslušný vektoru $\vec{a}$ jsou $\hat{a}$, $\vec{a}_0$, a^0 apod.

Vraťme se ještě na chvíli k popisu cesty speleologické skupiny v příkladu 3.1. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby její počátek splýval s polohou Austinova vchodu, vektory $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$ směřovaly východním a severním směrem a vektor $\boldsymbol{k}$ svisle vzhůru. Vyjádření vektoru posunutí $\boldsymbol{d}$ od Austinova vchodu k řece Echo je při této volbě soustavy souřadnic velmi přehledné:

$$\boldsymbol{d} = -(2{,}6\,\text{km})\,\boldsymbol{i} - (3{,}9\,\text{km})\,\boldsymbol{j} + (0{,}025\,\text{km})\,\boldsymbol{k}.$$

3.5 SČÍTÁNÍ VEKTORŮ: ALGEBRAICKÁ METODA

Při grafické konstrukci součtu vektorů jsme si mohli všimnout, že je poměrně pracná a nepříliš přesná. V trojrozměrném prostoru je navíc takřka neschůdná. Přímá *algebraická metoda* sčítání vektorů, s níž se seznámíme v tomto článku, je při praktických výpočtech velmi účelná. Využívá vyjádření vektorů pomocí jejich složek ve vhodně zvolené soustavě souřadnic.

Uvažujme o vektorovém součtu tvaru

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}. \tag{3.9}$$

Podle tohoto vztahu je vektor $\boldsymbol{r}$ shodný s vektorem $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. Jeho složky r_x, r_y a r_z musí být tedy shodné s odpovídajícími složkami součtu $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$:

$$r_x = a_x + b_x, \tag{3.10}$$

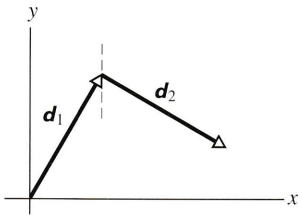
$$r_y = a_y + b_y, \tag{3.11}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3.12}$$

Stručněji, dva vektory jsou si rovny právě tehdy, jsou-li jejich stejnojmenné složky shodné. Rov. (3.10) až (3.12) přímo obsahují návod pro výpočet složek součtu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$: (1) Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rozložíme do složek. (2) Sečtením stejnojmenných složek získáme odpovídající složky vektorového součtu $\boldsymbol{r}$ a (3) vektor $\boldsymbol{r}$ pomocí nich v případě potřeby zapíšeme. Můžeme zvolit dvojí způsob zápisu vektoru $\boldsymbol{r}$: pomocí jednotkových vektorů nebo zadáním velikosti a směru. Směr vektoru v dvojrozměrném prostoru je určen jedním úhlem (například obr. 3.9), v trojrozměrném prostoru je třeba zadat dvojici úhlů.* Často se spokojíme jen se zápisem složek vektoru, nejlépe ve tvaru (a_x, a_y, a_z).

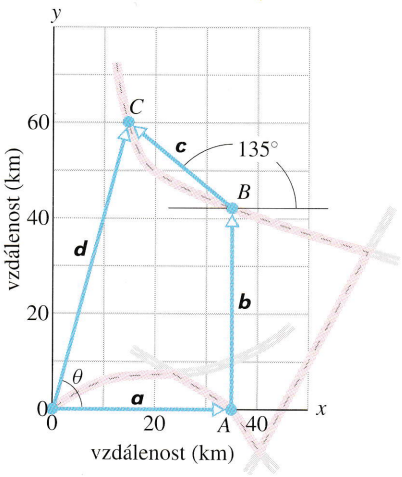
* Nejčastěji volíme zadání směru vektoru $\boldsymbol{r}$ pomocí úhlu θ, který vektor $\boldsymbol{r}$ svírá s kladným směrem osy z (tzv. **sférický úhel**) a úhlu φ mezi průmětem vektoru $\boldsymbol{r}$ do souřadnicové roviny (xy) a osou x (**azimutální úhel**).

KONTROLA 3: (a) Jaká znaménka mají x-ové a (b) y-ové složky vektorů $\boldsymbol{d}_1$ a $\boldsymbol{d}_2$ v následujícím obrázku? (c) Jaká jsou znaménka x-ové a y-ové složky vektoru $(\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2)$?



PŘÍKLAD 3.4

Trasa mototuristické soutěže je vymezena následujícími pokyny: Od místa startu jeďte po nejbližší silnici ke kontrolnímu stanovišti A, které je od startu vzdáleno 36 km východním směrem. Další kontrola B leží 42 km severně od A. Cíl C je od stanoviště B vzdálen 25 km na severozápad. (Silnice s kontrolními stanovišti jsou zakresleny na obr. 3.16.)



Obr. 3.16 Příklad 3.4. Plánek trasy mototuristické soutěže s vyznačením kontrolních stanovišť A, B a C a vhodnou volbou soustavy souřadnic.

(a) Určete velikost a směr vektoru posunutí $\boldsymbol{d}$ od startu do cíle C.

ŘEŠENÍ: Zvolme soustavu souřadnic v rovině trasy (souřadnicová rovina (xy)) co nejvhodnějším způsobem. Příklad vhodné volby je zachycen na obr. 3.16. V obrázku jsou vyznačeny i vektory posunutí příslušné třem přesunům popsaným v pokynech soutěže. Vektor $\boldsymbol{d}$ má složky

$$d_x = a_x + b_x + c_x = 36\,\text{km} + 0 + (25\,\text{km})(\cos 135°) =$$
$$= (36 + 0 - 17{,}7)\,\text{km} = 18{,}3\,\text{km}$$

a

$$d_y = a_y + b_y + c_y = 0 + 42\,\text{km} + (25\,\text{km})(\sin 135°) =$$
$$= (0 + 42 + 17{,}7)\,\text{km} = 59{,}7\,\text{km}.$$

Velikost a směr vektoru $\boldsymbol{d}$ určíme pomocí vztahu (3.6).

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(18{,}3\,\text{km})^2 + (59{,}7\,\text{km})^2} =$$
$$= 62\,\text{km}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d_y}{d_x} = \frac{(59{,}7\,\text{km})}{(18{,}3\,\text{km})} = 3{,}26,$$
$$\theta = 73°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Význam úhlu θ je zřejmý z obr. 3.16.

(b) Vyjádřete vektor $\boldsymbol{d}$ pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$.

ŘEŠENÍ: Vektor $\boldsymbol{d}$ zapíšeme jednoduše ve tvaru

$$\boldsymbol{d} = (x\text{-ová složka})\boldsymbol{i} + (y\text{-ová složka})\boldsymbol{j} =$$
$$= (18{,}3\,\text{km})\boldsymbol{i} + (59{,}7\,\text{km})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 3.5

Vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ ležící v souřadnicové rovině (xy) jsou zadány takto:

$$\boldsymbol{a} = 4{,}2\boldsymbol{i} - 1{,}6\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{b} = -1{,}6\boldsymbol{i} + 2{,}9\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{c} = -3{,}7\boldsymbol{j}.$$

Určete jejich vektorový součet $\boldsymbol{r}$. Pro jednoduchost nepracujeme s jednotkami, pro pořádek je však možné si představit, že složky vektorů jsou zadány v metrech.

ŘEŠENÍ: Uvědomme si nejprve, že z-ové složky vektorů ležících v souřadnicové rovině (xy) jsou nulové, proto vektor $\boldsymbol{k}$ v jejich zápisech chybí. Podle rov. (3.10) až (3.12) platí

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4{,}2 - 1{,}6 + 0 = 2{,}6,$$
$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1{,}6 + 2{,}9 - 3{,}7 = -2{,}4$$

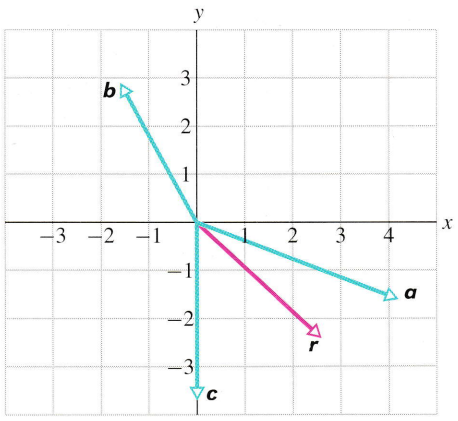
a

$$r_z = a_z + b_z + c_z = 0 + 0 + 0 = 0,$$

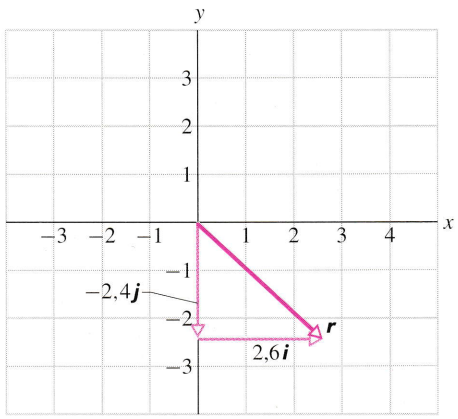
tj.

$$\boldsymbol{r} = 2{,}6\boldsymbol{i} - 2{,}4\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} =$$
$$= 2{,}6\boldsymbol{i} - 2{,}4\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zadání příkladu i jeho výsledek vidíme na obr. 3.17a. Rozklad vektoru $\boldsymbol{r}$ do složek je na obr. 3.17b.



(a)



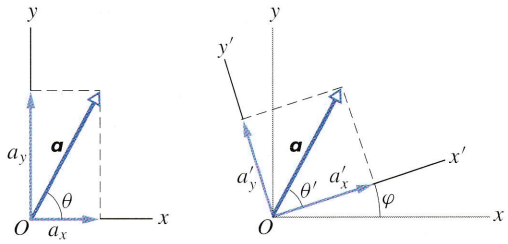
(b)

Obr. 3.17 Příklad 3.5. Vektor **r** je součtem tří vektorů

3.6 VEKTORY A FYZIKÁLNÍ ZÁKONY

Ve všech obrázcích jsme doposud kreslili osy soustavy souřadnic rovnoběžně s okraji stránky. Složky a_x a a_y vektoru **a** byly tedy rovněž měřeny podél těchto okrajů (například obr. 3.18a). Tato volba však nemá žádné hlubší matematické či fyzikální opodstatnění, jedinou její předností je pěkný vzhled obrázků. Klidně bychom mohli soustavu souřadnic otočit o úhel φ podle obr. 3.18b (vektor **a** neotáčet!). V nové soustavě souřadnic budou mít složky vektoru pochopitelně jiné hodnoty. Označme je a'_x a a'_y. Různých otočení soustavy souřadnic φ je ovšem nekonečně mnoho, a tak může být jeden a týž vektor **a** zadán nekonečným počtem různých dvojic svých složek.

Která z nich je ta pravá? Odpověď je jednoduchá: Všechna zadání jsou rovnocenná, neboť reprezentují týž vektor v různých soustavách souřadnic. Každou dvojici údajů (a_x, a_y) je však třeba spojit s informací, k *jaké*



(a) (b)

Obr. 3.18 (a) Vektor **a** a jeho složky ve zvolené soustavě souřadnic. (b) Složky téhož vektoru v soustavě souřadnic otočené o úhel φ.

soustavě souřadnic jsou údaje vztaženy. Výpočet velikosti a směru vektoru pomocí kterékoli z rovnocenných dvojic složek vede ke stejnému výsledku (obr. 3.18):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}, \tag{3.13}$$

$$\theta = \theta' + \varphi. \tag{3.14}$$

Předchozí úvahy jsou dokladem značné libovůle při výběru soustavy souřadnic. Vztahy pro vektory i vektorové součty (rov. (3.1)), jsou totiž nezávislé jak na poloze jejího počátku, tak na orientaci souřadnicových os. Totéž platí i pro fyzikální vztahy a zákony: jsou nezávislé na volbě soustavy souřadnic. Připojme k tomu jednoduchost a bohatost vektorové algebry a pochopíme, proč je řada fyzikálních zákonů vyjádřena vektorovými rovnicemi: jediná vektorová rovnice (3.9) zastupuje hned tři rovnice skalární, (3.10), (3.11) a (3.12).

3.7 NÁSOBENÍ VEKTORŮ*

Existuje více různých způsobů násobení vektorů.

Násobení vektoru skalárem

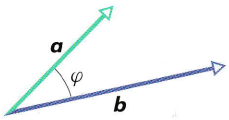
Výsledkem násobení vektoru **a** skalárem s je opět vektor. Jeho velikost je součinem velikosti vektoru **a** a absolutní hodnoty skaláru s. Je-li hodnota s kladná, je směr výsledného vektoru shodný se směrem vektoru **a**, pro zápornou hodnotu s je opačný. Dělením vektoru **a** nenulovým skalárem s rozumíme násobení jeho převrácenou hodnotou $1/s$.

Skalárem s může být jak číslo (fyzikálně bezrozměrová konstanta), tak fyzikální veličina. V druhém případě je výsledkem násobení vektorová fyzikální veličina jiné povahy než **a**.

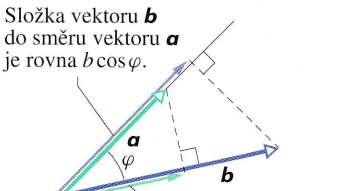
* Pojmy vyložené v tomto článku budeme potřebovat až v pozdějších kapitolách (skalární součin v kapitole 7 a vektorový součin v kapitole 12). Studium článku lze v tuto chvíli ještě odložit.

Skalární součin vektorů

V matematice jsou definovány dvě různé operace, které mohou být nazývány násobením dvou vektorů. Výsledkem prvé z nich je skalár, výsledkem druhé je další vektor. Studenti tyto operace často zaměňují, a tak je budeme od prvopočátku pečlivě rozlišovat.



(a)



(b)

Obr. 3.19 (a) Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ svírají úhel φ. (b) Složka vektoru $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{b}$ je $a\cos\varphi$, složka vektoru $\boldsymbol{b}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{a}$ je $b\cos\varphi$.

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (zapisujeme $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) je definován vztahem (obr. 3.19a)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi, \qquad (3.15)$$

kde a a b jsou velikosti vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, φ je úhel mezi nimi.* Všimněme si, že na pravé straně rovnice (3.15) vystupují pouze skaláry (a, b a $\cos\varphi$). Výraz $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ na levé straně je tedy rovněž *skalární* veličinou. Přepíšeme-li definiční rovnici (3.15) do tvaru

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a\cos\varphi)(b) = (a)(b\cos\varphi), \qquad (3.16)$$

vidíme, že skalární součin je možné interpretovat i jako součin (1) velikosti prvého z obou vektorů a (2) složky druhého z nich ve směru prvého. Výsledek je samozřejmě na pořadí vektorů nezávislý. Na obr. 3.19b jsou znázorněny obě možnosti: Složka vektoru $\boldsymbol{a}$ ve směru $\boldsymbol{b}$ má hodnotu $a\cos\varphi$. Určíme ji tak, že koncovým bodem vektoru $\boldsymbol{a}$ vedeme kolmici k přímce určující směr vektoru $\boldsymbol{b}$. Podobně lze zjistit, že složka vektoru $\boldsymbol{b}$ do směru $\boldsymbol{a}$ má hodnotu $b\cos\varphi$. Pro $\varphi = 0°$ (resp. $\varphi = 180°$) má průmět kteréhokoli z obou vektorů do směru druhého největší možnou velikost a skalární součin nabývá své největší (resp. nejmenší) hodnoty.

Pro $\varphi = 90°$ jsou oba průměty nulové a odpovídající hodnota skalárního součinu je tedy rovněž nulová. Pro skalární součin platí komutativní zákon

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

Při zápisu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ pomocí jednotkových vektorů můžeme skalární součin vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \qquad (3.17)$$

a při další úpravě použít distributivního zákona: každý sčítanec v prvé závorce skalárně vynásobíme postupně všemi sčítanci ve druhé závorce a výsledky sečteme.* Dostaneme poměrně složitý výraz s devíti sčítanci, který však vzápětí dokážeme opět zjednodušit:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = {} & (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) + \\ & + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) + \\ & + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_z\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

Uvažujme například první z těchto devíti skalárních součinů. Vektory $(a_x\boldsymbol{i})$ a $(b_x\boldsymbol{i})$ mají stejný směr. V souhlasu s obr. 3.19 má jejich skalární součin hodnotu a_xb_x. Obdobně je $(a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) = a_yb_y$ a $(a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) = a_zb_z$. V ostatních případech jde o skalární součin kolmých vektorů, který je nulový. Skalární součin vektorů lze tedy pomocí jejich složek v *kartézské* soustavě souřadnic vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

KONTROLA 4: Vektor $\boldsymbol{C}$ má velikost 3 jednotky, vektor $\boldsymbol{D}$ 4 jednotky. Jaký úhel tyto vektory svírají, má-li jejich skalární součin $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}$ hodnotu (a) nulovou, (b) 12 jednotek, (c) -12 jednotek?

* Úhlem mezi dvěma vektory rozumíme úhel mezi jejich *orientovanými* směry. V případě vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ na obr. 3.18 je jím úhel φ, nikoli $360° - \varphi$.

* Zatímco komutativnost skalárního součinu je okamžitě zřejmá hned z definičního vztahu (3.15), u distributivního zákona tomu tak není. Pomocí přímých, i když poměrně pracných výpočtů využívajících elementárních vztahů z trigonometrie by však bylo schůdné jeho platnost dokázat (dobří počtáři se o to mohou pokusit).

PŘÍKLAD 3.6

Jaký úhel svírají vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -2{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{k}$?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (3.15) má skalární součin zadaných vektorů hodnotu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= ab\cos\varphi = \\ &= \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2}\sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2}\cos\varphi = \\ &= 18{,}0\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Podle rov. (3.17) je současně

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (3{,}0\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{k}).$$

Užitím distributivního zákona dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (3{,}0\boldsymbol{i})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i}) + (3{,}0\boldsymbol{i})\cdot(3{,}0\boldsymbol{k}) + \\ + (-4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i}) + (-4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(3{,}0\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

Každý ze skalárních součinů na pravé straně předchozí rovnosti vyčíslíme pomocí rov. (3.15). Vektory $3{,}0\boldsymbol{i}$ a $-2{,}0\boldsymbol{i}$ v prvém z nich svírají úhel $0°$, ve všech ostatních případech jde o skalární součin kolmých vektorů. Dostáváme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0) = \\ &= -6{,}0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Výsledek můžeme ověřit vyjádřením skalárního součinu vektorů pomocí jejich složek:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (3{,}0)(-2{,}0) + (-4{,}0)(0) + (0)(3{,}0) = -6{,}0.$$

Získaná hodnota se ovšem musí shodovat s pravou stranou rovnice (3.18), tj.

$$18{,}0\cos\varphi = -6{,}0$$

a odtud

$$\cos\varphi = \frac{-6{,}0}{18{,}0} = -0{,}333,$$

$$\varphi = 109° \doteq 110°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektorový součin

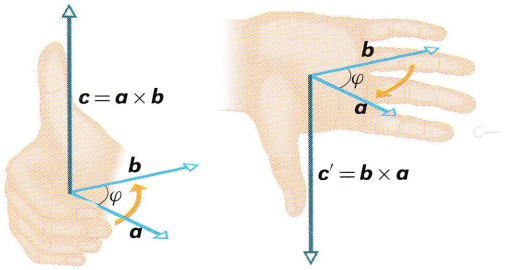
Vektorový součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ značíme $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Výsledkem je vektor $\boldsymbol{c}$, který je kolmý k $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Jeho velikost je definována vztahem

$$c = ab\sin\varphi, \tag{3.20}$$

kde a a b jsou opět velikosti vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a φ je úhel mezi nimi. Jsou-li vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rovnoběžné, ať již souhlasně či nesouhlasně, je $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (píšeme $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$) nabývá největší možné hodnoty, jsou-li vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ kolmé.

Výsledný vektor $\boldsymbol{c}$ je definován jako vektor kolmý k rovině určené vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Jeho orientace je určena tzv. pravidlem pravé ruky, které je znázorněno na obr. 3.20a:

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ umístíme do společného počátečního bodu. Zachováme přitom jejich směry. Společným počátkem vedeme kolmici k rovině určené oběma vektory. Kolmici „uchopíme“ *pravou* rukou tak, aby prsty ukazovaly od vektoru $\boldsymbol{a}$ k $\boldsymbol{b}$ „cestou“ menšího z obou úhlů (úhel φ v obr. 3.20). Vztyčený palec ukazuje správně orientovaný směr vektoru $\boldsymbol{c}$.



(a) (b)

Obr. 3.20 Pravidlo pravé ruky pro vektorový součin. (a) Natočte pravou ruku tak, aby vektor $\boldsymbol{a}$ byl ve směru ukazováčku a $\boldsymbol{b}$ ve směru prostředníku. Pak palec ukazuje směr $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. (b) Vidíme, že $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

Na rozdíl od skalárního součinu je pořadí činitelů při vektorovém násobení důležité. Obr. 3.20b ukazuje použití pravidla pravé ruky při určení směru vektoru $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. Prsty nyní směřují od $\boldsymbol{b}$ k $\boldsymbol{a}$ a palec ukazuje opačným směrem, než na obr. 3.20a. Vektor $\boldsymbol{c}'$ je tedy opačný k vektoru $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}' = -\boldsymbol{c}$. Platí tedy

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{3.21}$$

Pro vektorový součin neplatí komutativní zákon.

Pomocí jednotkových vektorů můžeme psát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times \\ \times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Při úpravě opět použijeme distributivní zákon: každý člen první závorky vektorově vynásobíme každým sčítancem ve druhé závorce a výsledky sečteme.* Roznásobte závorky na pravé straně rov. (3.22) a porovnejte výsledek se vztahy v dod. E.

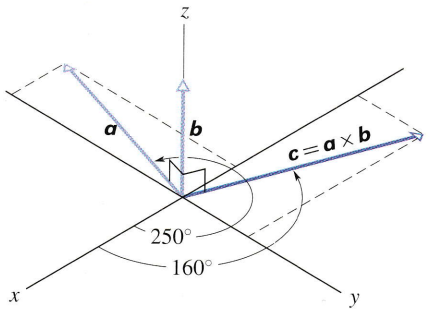
Pomocí vektorového součinu lze snadno rozhodnout, zda je zvolená soustava souřadnic pravotočivá. V kladném případě musí být splněna rovnost $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$. Ověřte její platnost pro souřadnicovou soustavu na obr. 3.14.

* Platnost distributivního zákona pro vektorový součin lze opět dokázat užitím pravidel elementární geometrie a užitím skalárního součinu.

KONTROLA 5: Vektor $\boldsymbol{C}$ má velikost 3 jednotky a vektor $\boldsymbol{D}$ 4 jednotky. Jaký úhel tyto vektory svírají, (a) je-li vektor $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$ nulový, (b) má-li vektor $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$ velikost 12 jednotek?

PŘÍKLAD 3.7

Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině xy (obr. 3.21). Má velikost 18 jednotek a s kladným směrem osy x svírá úhel 250°. Vektor $\boldsymbol{b}$ má velikost 12 jednotek a je souhlasně rovnoběžný s kladným směrem osy z.



Obr. 3.21 Příklad 3.7. Vektorové násobení

(a) Vypočtěte skalární součin zadaných vektorů.

ŘEŠENÍ: Vektory svírají úhel $\varphi = 90°$. Podle rov. (3.15) tedy platí

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\varphi = (18)(12)(\cos 90°) = 0. \quad \text{(Odpověď)}$$

Skalární součin kolmých vektorů má vždy nulovou hodnotu. Odpovídá to skutečnosti, že průmět kteréhokoli z nich do směru druhého je nulový.

(b) Vypočtěte vektorový součin $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

ŘEŠENÍ: Velikost vektorového součinu určíme z definičního vztahu (3.20).

$$ab \sin\varphi = (18)(12)(\sin 90°) = 216. \quad \text{(Odpověď)}$$

Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na rovinu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Je tedy kolmý k ose z, neboť vektor $\boldsymbol{b}$ v ní leží. Vektor $\boldsymbol{c}$ tedy leží v souřadnicové rovině (xy). Pomocí obr. 3.21 určíme ještě jeho směr: Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý i k vektoru $\boldsymbol{a}$. S kladným směrem osy x tedy svírá úhel buď $250° - 90° = 160°$, nebo $250° + 90° = 340°$. Užitím pravidla pravé ruky se snadno přesvědčíme, že správná je první možnost (obr. 3.21).

PŘÍKLAD 3.8

Určete $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, je-li $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$.

ŘEŠENÍ: Dosazením do rov. (3.22) dostaneme výraz

$$\boldsymbol{c} = (3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}) \times (-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}),$$

který rozepíšeme pomocí distributivního zákona:

$$\boldsymbol{c} = -(3\boldsymbol{i} \times 2\boldsymbol{i}) + (3\boldsymbol{i} \times 3\boldsymbol{k}) + (4\boldsymbol{j} \times 2\boldsymbol{i}) - (4\boldsymbol{j} \times 3\boldsymbol{k}).$$

Pro každý z těchto čtyř vektorových součinů vypočteme podle rov. (3.20) jeho velikost a užitím pravidla pravé ruky určíme jeho směr. U prvého z nich je $\varphi = 0°$, u ostatních $\varphi = 90°$. Nakonec dostaneme

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} - 9\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k} - 12\boldsymbol{i} =$$
$$= -12\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}. \quad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 3.5: *Časté chyby při výpočtu vektorového součinu*

Při výpočtu vektorového součinu se můžeme snadno dopustit některé z následujících chyb. (1) Je-li grafické zadání úlohy nevhodné pro výpočet vektorového součinu (vektory jsou zakresleny například tak, že počáteční bod jednoho z nich splývá s koncovým bodem druhého) potřebujeme umístit vektory do společného počátečního bodu. Někdy přitom zapomeneme, že nesmíme změnit směr vektorů. (2) Stane se, že chybně použijeme pravidlo pravé ruky, třeba když v ní současně držíme kalkulačku nebo pero. (3) K omylu může snadno dojít i tehdy, je-li potřeba při použití pravidla pravé ruky ruku nepřirozeně zkroutit, nebo když se snažíme směr výsledného vektoru jen odhadnout. (4) Výsledek bude chybný, nepracujeme-li v pravotočivé soustavě souřadnic (obr. 3.14).

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Skaláry a vektory

Skaláry (skalární veličiny) jsou jednoznačně určeny jediným číslem a příslušnou jednotkou (například teplota 82 °C). Při počítání se skaláry používáme běžných pravidel aritmetiky a algebry čísel. *Vektory* mají velikost a směr (například posunutí 5 m severně). Při výpočtech platí zvláštní pravidla vektorové algebry.

Grafická metoda sčítání vektorů

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ narýsujeme ve vhodném měřítku tak, že počáteční bod kteréhokoli z nich umístíme do koncového bodu druhého. Jejich součtem je vektor $\boldsymbol{s}$ spojující počáteční bod prvého vektoru s koncovým bodem druhého (obr. 3.3). Tvoří úhlopříčku v rovnoběžníku určeném vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ podle obr. 3.4. Při odečítání vektoru $\boldsymbol{b}$ od vektoru $\boldsymbol{a}$ změníme směr vektoru $\boldsymbol{b}$ a získáme tak vektor opačný $-\boldsymbol{b}$, který přičteme k $\boldsymbol{a}$ (obr. 3.7). Pro vektorové sčítání platí komutativní a asociativní zákon.

Složky vektoru

Složky vektoru v rovině jsou určeny jeho kolmými průměty do směrů souřadnicových os x a y. Složky a_x a a_y vektoru $\boldsymbol{a}$ jsou dány vztahy

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{a} \quad a_y = a\sin\theta, \tag{3.5}$$

kde θ je úhel vektoru $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy x. Znaménko složky určuje orientaci odpovídajícího průmětu vektoru vzhledem ke kladnému směru souřadnicové osy. Pomocí složek vektoru můžeme určit jeho velikost i směr

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

Jednotkové vektory

Vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jsou definovány jako navzájem kolmé vektory jednotkové velikosti, jejichž směry jsou souhlasně rovnoběžné s osami x, y a z pravotočivé soustavy souřadnic. Libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ můžeme pomocí nich zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{3.7}$$

kde $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$ a $a_z\boldsymbol{k}$ jsou kolmé průměty vektoru $\boldsymbol{a}$ do souřadnicových os a a_x, a_y a a_z jsou jeho složky.

Algebraická metoda sčítání vektorů

Algebraická metoda výpočtu součtu $\boldsymbol{r}$ vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je založena na použití pravidla „sčítání po složkách“:

$$r_x = a_x + b_x, \tag{3.10}$$

$$r_y = a_y + b_y, \tag{3.11}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3.12}$$

Vektory a fyzikální zákony

Při řešení fyzikálních problémů vyžadujících vektorový popis lze použít kteroukoli z mnoha přípustných souřadnicových soustav. Její výběr většinou podřizujeme požadavku co největšího zjednodušení formulace a řešení dané úlohy. Vztahy mezi vektorovými veličinami i fyzikální zákony samy jsou na volbě soustavy souřadnic nezávislé.

Násobení vektoru skalárem

Výsledkem násobení vektoru $\boldsymbol{v}$ skalárem s je vektor o velikosti $|s|\,|\boldsymbol{v}|$. Pro $s > 0$ je jeho směr souhlasný se směrem vektoru $\boldsymbol{v}$, pro $s < 0$ je opačný. Vektor $\boldsymbol{v}$ dělíme skalárem $s \neq 0$, násobíme-li jej jeho převrácenou hodnotou $1/s$.

Skalární součin

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (značíme $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) je *skalární* veličina, definovaná vztahem

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi, \tag{3.15}$$

kde φ je úhel sevřený vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. V závislosti na hodnotě φ může být skalární součin kladný, záporný nebo nulový. Z obr. 3.19b je zřejmé, že skalární součin vektorů lze získat vynásobením velikosti kteréhokoli z nich složkou druhého vektoru ve směru vektoru prvého. Při zápisu pomocí jednotkových vektorů píšeme

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \tag{3.17}$$

a při úpravě použijeme distributivního zákona. Skalární součin je komutativní, tj. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

Vektorový součin

Vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ značíme $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Je to vektor $\boldsymbol{c}$ o velikosti

$$c = ab\sin\varphi, \tag{3.20}$$

kde φ je úhel vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (menší z obou úhlů sevřených přímkami, v nichž vektory leží). Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na rovinu určenou vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a jeho směr je dán pravidlem pravé ruky (obr. 3.20). Platí $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$. Při zápisu pomocí jednotkových vektorů je vektorový součin dán výrazem

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}), \tag{3.22}$$

který lze ještě upravit užitím distributivního zákona, viz úlohu 49.

OTÁZKY

1. Vektor posunutí $\boldsymbol{N}$ ležící v rovině xy spojuje body o souřadnicích (5 m, 3 m) (počáteční bod) a (7 m, 6 m) (koncový bod). Z následujících posunutí vyberte ta, která jsou ekvivalentní vektoru $\boldsymbol{N}$: vektor $\boldsymbol{A}$ směřující z bodu (−6 m, −5 m) do bodu (−4 m, −2 m); vektor $\boldsymbol{B}$ z bodu (−6 m, 1 m) do bodu (−4 m, 4 m); vektor $\boldsymbol{C}$ z bodu (−8 m, −6 m) do bodu (−10 m, −9 m).

2. Vektor $\boldsymbol{d}$ je definován vztahem $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{c})$. Rozhodněte, zda platí i následující vztahy (a) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{b})$, (b) $\boldsymbol{a} = (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}$, (c) $\boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

3. Rovnost (3.2) je vyjádřením komutativního zákona pro sčítání vektorů. Rozhodněte, zda je komutativní i odečítání vektorů, tj. platí-li $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

4. Ve hře s trojrozměrným bludištěm je třeba přesunout hrací kámen z výchozího bodu o souřadnicích $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ do cílového bodu (−2 cm, 4 cm, −4 cm). Pro pohyb kamene povolují pravidla hry pouze posunutí $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$,

$$\boldsymbol{p} = -7\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{s} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

Souřadnice jsou uváděny v centimetrech. Ocitne-li se kámen při hře v polohách (−5 cm, −1 cm, −1 cm) nebo (5 cm, 2 cm, −1 cm), je hra prohraná. Jaký výběr přípustných vektorů posunutí a jejich pořadí vede k výhře?

5. Co dokážeme říci o vektorech $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, pro něž platí
(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ a $a + b = c$,
(b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$,
(c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ a $a^2 + b^2 = c^2$?

6. (a) Může mít vektor současně nulovou velikost a nenulovou některou ze svých složek? (b) Můžeme sečtením dvou vektorů různé velikosti dostat nulový vektor? Může být součet tří vektorů nulový, jestliže tyto vektory (c) leží, (d) neleží v jedné rovině?

7. Může být velikost rozdílu dvou vektorů větší než (a) velikost některého z nich, (b) velikost každého z nich, (c) velikost jejich součtu?

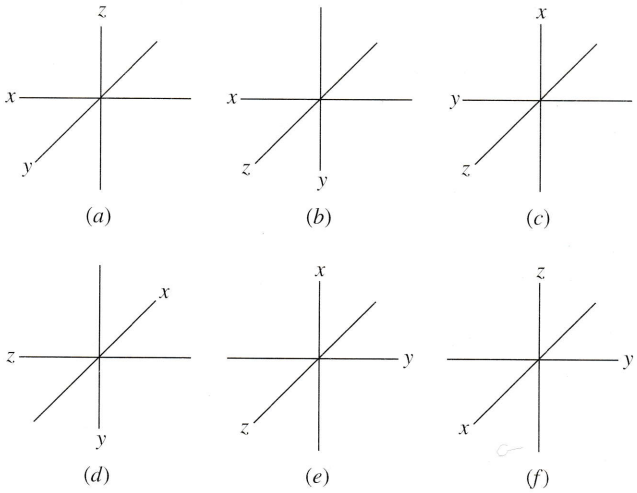
8. Může být součet velikostí dvou vektorů roven velikosti jejich součtu? Pokud ne, proč? Pokud ano, kdy?

9. Která ze souřadnicových soustav na obr. 3.22 je pravotočivá? Kladný směr každé souřadnicové osy je označen jejím popisem.

10. Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ jsou zadány svými složkami:

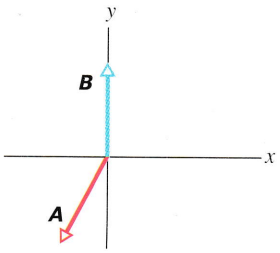
$$a_x = 3; \quad a_y = 3; \quad c_x = -3; \quad c_y = -3;$$
$$b_x = -3; \quad b_y = 3; \quad d_x = 3; \quad d_y = -3.$$

K výpočtu úhlu θ mezi každým z nich a osou x používáme vztah (3.6). Výpočty provádíme na kalkulačce. Pro které ze zadaných vektorů se na displeji kalkulačky přímo objeví správný výsledek? K odpovědi použijte nejprve obr. 3.13 a teprve pak ověřte její správnost výpočtem na kalkulačce.



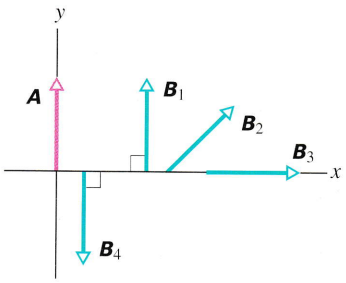
Obr. 3.22 Otázka 9

11. Vektory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou zadány na obr. 3.23. Jaká jsou znaménka x-ových a y-ových složek vektorů (a) $\boldsymbol{A}$ a (b) $\boldsymbol{D}$, kde $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$?



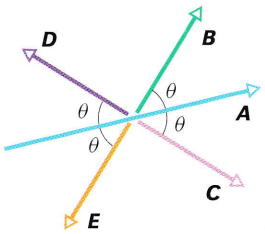
Obr. 3.23 Otázka 11

12. Na obr. 3.24 je nakreslen vektor $\boldsymbol{A}$ a čtyři různé možnosti volby vektoru $\boldsymbol{B}$, lišící se pouze směrem. Seřaďte vektory $\boldsymbol{B}$ podle velikosti absolutní hodnoty součinu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. (Zvolte sestupné řazení.)



Obr. 3.24 Otázka 12

13. Na obr. 3.25 je zadán vektor $\boldsymbol{A}$ a čtyři další vektory $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{E}$ shodných velikostí. (a) Pro které z vektorů $\boldsymbol{B}$ až $\boldsymbol{E}$ je jejich skalární součin s vektorem $\boldsymbol{A}$ stejný? (b) Pro které z vektorů $\boldsymbol{B}$ až $\boldsymbol{E}$ je jejich skalární součin s vektorem $\boldsymbol{A}$ záporný?

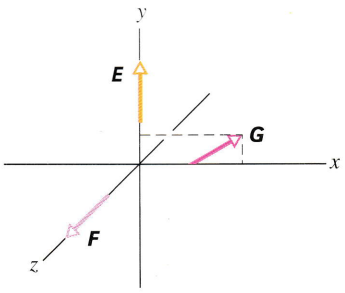


Obr. 3.25 Otázka 13

14. Jsou dány vektory $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{B} = 7\boldsymbol{k}$. Určete $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

15. Předpokládejme, že platí $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$. Znamená to, že jsou vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ stejné?

16. Vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ jsou zadány na obr. 3.26. Vektor $\boldsymbol{G}$ leží v rovině xy. Určete směry vektorů (a) $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, (b) $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{E}$ a (c) $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{E}$. Změní se odpověď na otázku (c), posuneme-li vektor $\boldsymbol{G}$ rovnoběžně s osou z beze změny jeho směru?



Obr. 3.26 Otázka 16

17. Je dán vektor $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$. Určete $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, je-li (a) $\boldsymbol{B} = 8\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}$ a (b) $\boldsymbol{B} = -8\boldsymbol{i} - 16\boldsymbol{j}$. (Odpovědi lze vyslovit i bez výpočtu.)

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 3.2 Sčítání vektorů: grafická metoda

1C. Dva vektory posunutí mají velikosti 3 m a 4 m. Jak je třeba volit jejich směry, má-li mít výsledné posunutí velikost (a) 7 m, (b) 1 m a (c) 5 m?

2C. Žena ušla 250 m severovýchodním směrem svírajícím s místním poledníkem úhel 30°. Poté zamířila přímo na východ a ušla dalších 175 m. (a) Grafickou metodou určete její celkové posunutí. (b) Porovnejte velikost tohoto posunutí se skutečnou délkou chůze.

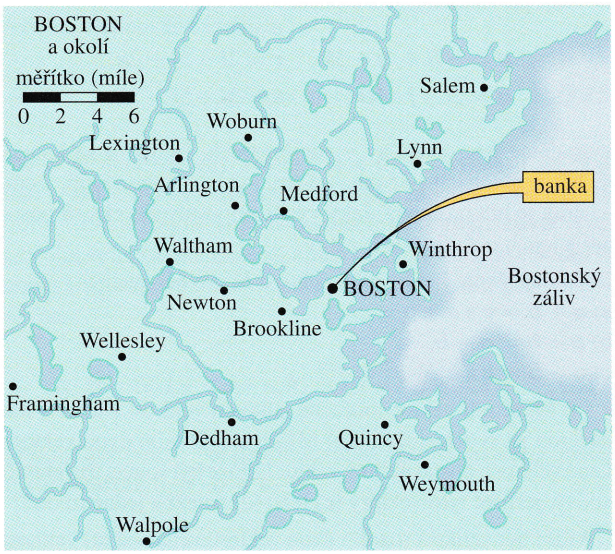
3C. Turista ušel 3,1 km na sever, pak 2,4 km na západ a nakonec 5,2 km na jih. (a) Sestrojte vektorový diagram popisující jeho pohyb. (b) Jak daleko a v jakém směru by musel letět pták, aby ze stejného výchozího místa doletěl do stejného cíle? Let ptáka je přímočarý.

4C. Automobil jede 50 km východním směrem, poté 30 km severně a dále 25 km na severovýchod pod úhlem 30° vzhledem k místnímu poledníku. Sestrojte vektorový diagram pohybu a určete celkové posunutí automobilu.

5Ú. Vektor $\boldsymbol{a}$ má velikost 5,0 jednotek a směřuje přímo na východ. Vektor $\boldsymbol{b}$ je odkloněn od severního směru na západ o 35° a jeho velikost činí 4,0 jednotky. Určete graficky $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Z nákresu odhadněte velikosti a směry výsledných vektorů.

6Ú. V jedné z bostonských bank došlo k loupeži (mapka na obr. 3.27). Při útěku použili lupiči vrtulník a letěli po trase tvořené třemi po sobě následujícími přímými úseky: 20 mil přesně na jihovýchod, 33 mil na severozápad, 26° od místní rovnoběžky, 16 mil na jihovýchod, 18° od místního poledníku. Při posledním přistání byli dopadeni. Ve kterém městě to bylo? (Vektory posunutí sčítejte grafickou metodou přímo v mapě.)

7Ú. Tři vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ mají stejnou velikost 50 jednotek a leží v rovině xy. S kladnou částí osy x svírají postupně úhly 30°, 195° a 315°. Určete graficky velikosti a směry vektorů (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ a (c) vektor $\boldsymbol{d}$ tak, aby $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}$.



Obr. 3.27 Úloha 6

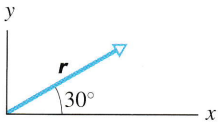
ODST. 3.3 Složky vektorů

8C. (a) Převeďte úhly 20,0°, 50,0° a 100° na radiány. (b) Převeďte úhly 0,330 rad, 2,10 rad a 7,70 rad na stupně.

9C. Určete x-ovou a y-ovou složku vektoru $\boldsymbol{a}$, který leží v rovině xy a svírá s kladnou částí osy x úhel 250° měřený proti směru otáčení hodinových ručiček. Velikost vektoru je 7,3 jednotek.

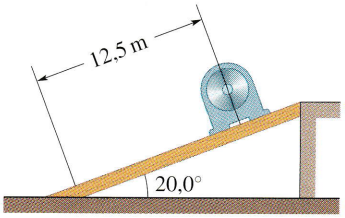
10C. Vektor v rovině xy má složky $a_x = -25{,}0$ jednotek a $a_y = +40{,}0$ jednotek. (a) Jakou má velikost? (b) Jaký úhel svírá s kladným směrem osy x?

11C. Vektor posunutí $\boldsymbol{r}$ leží v rovině xy a má velikost 15 m (obr. 3.28). Určete jeho složky.



Obr. 3.28 Cvičení 11

12C. Těžkou strojní součástku zvedali v dílně tak, že ji vlekli vzhůru po desce odkloněné od vodorovné roviny o úhel 20,0° (obr. 3.29). Součástku se podařilo posunout po desce o 12,5 m. (a) Jak vysoko se při tom zvedla? (b) Jaké bylo její posunutí ve vodorovném směru?



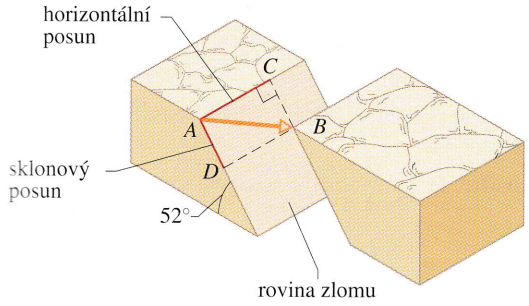
Obr. 3.29 Cvičení 12

13C. Minutová ručička nástěnných hodin měří od osy otáčení po špičku 10 cm. Jaký je vektor posunutí špičky (a) od čtvrt na čtyři do půl čtvrté, (b) za další půlhodinu a (c) za další hodinu?

14C. Loď se chystá na cestu dlouhou 120 km severním směrem. Náhlá bouře ji zanese 100 km východně od výchozího bodu. Jak musí kapitán změnit pokyny k plavbě (vzdálenost a směr), aby loď dosáhla původně plánovaného cíle?

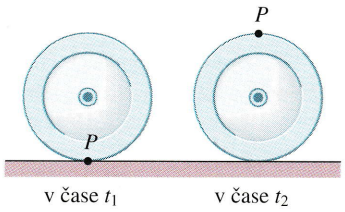
15Ú. Dvě kontrolní stanoviště A a B orientačního běhu jsou od sebe vzdálena 3,40 km. Stanoviště B leží severovýchodně od A ve směru svírajícím s místní rovnoběžkou úhel 35,0°. Pravidla závodu dovolují postupovat pouze severojižním nebo východozápadním směrem. Jakou nejmenší vzdálenost musí závodník uběhnout ze stanoviště A do B?

16Ú. Tektonickým zlomem se nazývá vzájemné posunutí dvou sousedních skalních bloků (obr. 3.30). Před skluzem body A a B splývaly. Celkové posunutí AB leží v rovině zlomu. Vodorovný průmět AC celkového posunutí se nazývá *horizontální posun*, průmět směřující dolů podél roviny zlomu AD je tzv. *sklonový posun*. (a) Jaká je celková délka posunutí AB, je-li horizontální posun 22,0 m a sklonový posun 17,0 m? (b) Jak velká je svislá složka posunutí AB, je-li rovina zlomu skloněna o 52° vzhledem k vodorovné rovině?



Obr. 3.30 Úloha 16

17Ú. Kolo o poloměru 45,0 cm se valí bez prokluzu po vodorovné podlaze (obr. 3.31). Na obvodu kola označíme bod P, který se v okamžiku t_1 právě dotkne podlahy. V pozdějším okamžiku t_2 je kolo otočeno o polovinu otáčky. Jaké je posunutí bodu P za dobu od t_1 do t_2?



Obr. 3.31 Úloha 17

18Ú. Místnost má půdorysné rozměry 3,7 m × 4,3 m a výšku 3,3 m. Moucha vyletí z jednoho rohu místnosti, chvíli poletuje a skončí v protilehlém rohu. (a) Jaká je velikost s jejího posunutí? (b) Může být dráha jejího letu kratší než s? Může být delší? Může být stejná? (c) Zaveďte vhodnou soustavu souřadnic a vyjádřete v ní složky vektoru posunutí. (d) Jakou nejkratší dráhu by moucha musela urazit, kdyby jen lezla po zdi? (Na tuto otázku lze odpovědět i bez výpočtu).

ODST. 3.5 Sčítání vektorů: algebraická metoda

19C. Určete složky vektoru $\boldsymbol{r}$, který je součtem dvou posunutí $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ se složkami $c_x = 7{,}4\,\text{m}$, $c_y = -3{,}8\,\text{m}$, $c_z = -6{,}1\,\text{m}$, $d_x = 4{,}4\,\text{m}$, $d_y = -2{,}0\,\text{m}$, $d_z = 3{,}3\,\text{m}$.

20C. (a) Pomocí jednotkových vektorů zapište součet vektorů $\boldsymbol{a} = 4{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -13\boldsymbol{i} + 7{,}0\boldsymbol{j}$. (b) Určete jeho velikost a směr.

21C. Určete složky, velikost a směr vektorů (a) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ a (b) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, je-li $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 5{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j}$.

22C. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Určete (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. (c) Najděte vektor $\boldsymbol{c}$, pro který je $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

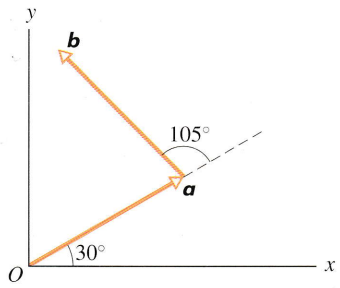
23C. Jsou dány dva vektory $\boldsymbol{a} = 4{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 6{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j}$. Určete velikosti a směry vektorů (a) $\boldsymbol{a}$, (b) $\boldsymbol{b}$, (c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (d) $\boldsymbol{b} - -\boldsymbol{a}$ (e) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Jaký je vztah mezi vektory vypočtenými v části (d) a (e)?

24Ú. Určete vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, je-li $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$.

25Ú. Přičteme-li vektor $\boldsymbol{B}$ k vektoru $\boldsymbol{A}$, dostaneme vektor $6{,}0\boldsymbol{i} + + 1{,}0\boldsymbol{j}$. Pokud vektor $\boldsymbol{B}$ od vektoru $\boldsymbol{A}$ odečteme, je výsledkem vektor $-4{,}0\boldsymbol{i} + 7{,}0\boldsymbol{j}$. Jaká je velikost vektoru $\boldsymbol{A}$?

26Ú. Součet vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ je $3{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ má směr souhlasný s osou y a velikost shodnou s vektorem $\boldsymbol{C}$. Jaká je velikost vektoru $\boldsymbol{B}$?

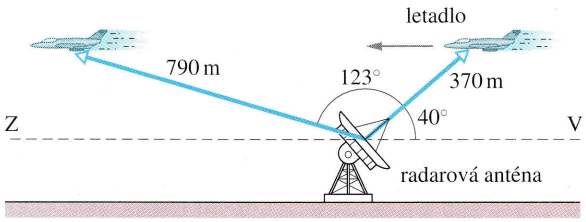
27Ú. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají stejnou velikost 10,0 jednotek. Jejich směry jsou zakresleny v obr. 3.32. Označme jejich součet symbolem $\boldsymbol{r}$. Určete (a) x-ovou a y-ovou složku vektoru $\boldsymbol{r}$, (b) jeho velikost a (c) úhel, který svírá s kladným směrem osy x.



Obr. 3.32 Úloha 27

28Ú. Golfista umístil míček do jamky třemi údery. První směřoval na sever a měřil 3,7 m, druhý byl dlouhý 1,8 m a byl veden jihovýchodním směrem, třetí mířil na jihozápad a měl délku 0,9 m. Kterým směrem a do jaké vzdálenosti by hráč musel vyslat míček, aby trefil jamku napoprvé?

29Ú. Radarová stanice zaznamenala letoun, který se k ní blížil přesně z východu. V té chvíli byl letoun ve vzdálenosti 370 m od stanice a byl vidět pod elevačním úhlem 40° (nad vodorovnou rovinou). Radar sledoval letoun až do okamžiku, kdy byl od stanice vzdálen 790 m na západ a velikost pozorovacího úhlu činila 123° (obr. 3.33). Určete posunutí letounu během doby sledování.



Obr. 3.33 Úloha 29

30Ú. (a) Turista šel ze stanového tábora nejprve 1000 m na východ a pak 2 000 m na sever. Při krátkém odpočinku na skalním útesu vysokém 500 m vyndal z kapsy minci a pohrával si s ní. Ve chvíli nepozornosti mu mince upadla a letěla s útesu svisle dolů. Zvolte vhodnou kartézskou soustavu souřadnic a pomocí jejích jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ vyjádřete vektor výsledného posunutí mince od výchozího stanoviště turisty až k místu jejího dopadu pod útesem. (b) Turista se vrátil do tábora jinou cestou. Určete jeho celkové posunutí během výletu.

31Ú. Částice vykoná tři následující přesuny: 4,00 m jihozápadně, 5,00 m východně a 6,00 m severovýchodním směrem svírajícím úhel 60° s místní rovnoběžkou. Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby osa y směřovala na sever a osa x na východ. Určete (a) složky každého ze tří uvedených posunutí, (b) složky celkového posunutí částice, (c) velikost a směr celkového posunutí a (d) velikost a směr vektoru posunutí, při kterém by se částice vrátila do výchozího bodu.

32Ú. Ověřte následující tvrzení: Je-li součet dvou vektorů kolmý na jejich rozdíl, mají oba vektory stejnou velikost.

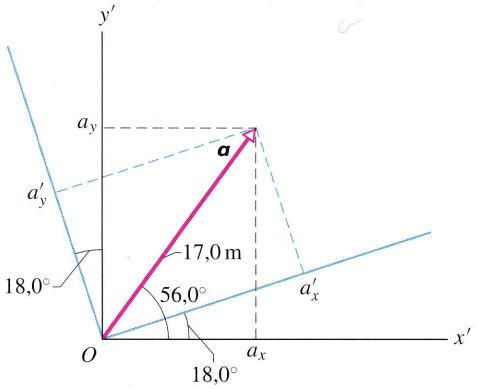
33Ú. Dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ s velikostmi a a b jsou umístěny tak, že jejich počáteční body splývají. Vektory svírají úhel θ. Rozkladem vektorů do složek ukažte, že jejich součet $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ má velikost

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}.$$

34Ú. (a) Pomocí jednotkových vektorů vyjádřete tělesovou úhlopříčku krychle v závislosti na velikosti její strany a. (b) Určete úhly, které svírá tělesová úhlopříčka s hranami krychle, které ji protínají. (c) Určete délku tělesové úhlopříčky.

ODST. 3.6 Vektory a fyzikální zákony

35C. Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině xy, má velikost 17,0 m a od osy x je odkloněn proti směru otáčení hodinových ručiček o 56,0° (obr. 3.34). (a) Určete jeho složky a_x a a_y. Druhá (čárkovaná) soustava souřadnic je vzhledem k první (nečárkované) otočena o úhel 18,0°. Určete složky a'_x a a'_y vektoru $\boldsymbol{a}$ v čárkované soustavě souřadnic.



Obr. 3.34 Cvičení 35

ODST. 3.7 Násobení vektorů

36C. Vektor $\boldsymbol{d}$ má velikost 2,5 m a směřuje na sever. Určete velikost a směr vektorů (a) $4{,}0\boldsymbol{d}$ a (b) $-3{,}0\boldsymbol{d}$.

37C. Vektor $\boldsymbol{a}$ je souhlasně rovnoběžný s osou x soustavy souřadnic, vektor $\boldsymbol{b}$ s osou y. Dále je zadán skalár d. Jaký směr má vektor $\boldsymbol{b}/d$ je-li hodnota d (a) kladná, (b) záporná? Vypočtěte (c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ a (d) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/d$. Určete směr vektoru (e) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ a (f) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. (g) Určete velikosti vektorových součinů z části (e) a (f)? (h) Určete velikost a směr vektoru $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}/d$.

38C. Ukažte, že v pravotočivé soustavě souřadnic platí

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0.$$

Změnily by se předchozí vztahy, kdyby soustava souřadnic nebyla pravotočivá?

39C. Ukažte, že v pravotočivé soustavě souřadnic platí

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}.$$

Změnily by se předchozí vztahy, kdyby soustava souřadnic nebyla pravotočivá?

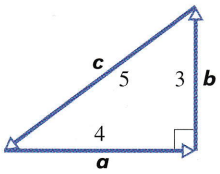
40C. Ukažte, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ platí $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2$ a $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

41C. Určete následující součiny jednotkových vektorů: (a) „sever × západ“, (b) „dolů · jih“, (c) „východ × nahoru“, (d) „západ · západ“ a (e) „jih × jih“.

42C. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají velikosti $a = 10$ jednotek, $b = 6{,}0$ jednotek a svírají úhel 60°. Určete (a) jejich skalární součin a (b) velikost jejich vektorového součinu $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

43C. Vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$ leží v rovině xy. Vektor $\boldsymbol{r}$ má velikost 4,50 jednotek a svírá s kladným směrem osy x úhel 320° (měřeno proti směru otáčení hodinových ručiček). Vektor $\boldsymbol{s}$ má velikost 7,30 jednotek a je od kladného směru osy x odkloněn o úhel 85,0°. Určete (a) $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}$ a (b) $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}$.

44C. Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ jsou zadány podle obr. 3.35. Vypočtěte (a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ a (c) $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$.



Obr. 3.35 Cvičení 44 a 45

45C. Pro vektory z obr. 3.35 určete součiny (a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ a (c) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

46Ú. *Výpočet skalárního součinu vektorů pomocí složek.* Ukažte, že pro skalární součin vektorů

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

platí

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

47Ú. (a) Určete složky a velikost vektoru $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, je-li $\boldsymbol{a} = 5{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j} - 6{,}0\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -2{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{c} = 4{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$. (b) Vypočtěte úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{r}$ s kladným směrem osy z.

48Ú. Užitím definice skalárního součinu $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta$ a vztahu $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (úloha 46) vypočtěte úhel mezi vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$.

49Ú. *Výpočet vektorového součinu vektorů pomocí složek.* Ukažte, že pro vektorový součin vektorů

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

platí

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}.$$

50Ú. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$. Určete (a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ a (c) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$.

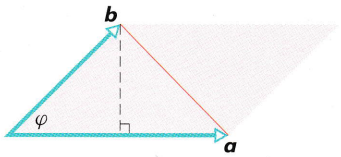
51Ú. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou zadány svými složkami (v libovolných jednotkách): $a_x = 3{,}2$, $a_y = 1{,}6$, $b_x = 0{,}50$, $b_y = 4{,}5$. (a) Určete úhel těchto vektorů. (b) Vypočtěte složky vektoru $\boldsymbol{c}$, který je kolmý k $\boldsymbol{a}$, leží v rovině xy a má velikost 5,0 jednotek.

52Ú. Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině yz, svírá s kladným směrem osy y úhel 63°, má kladnou z-ovou složku a jeho velikost je 3,20 jednotek. Vektor $\boldsymbol{b}$ leží v rovině xz, svírá s kladným směrem osy x úhel 48°, má kladnou z-ovou složku a velikost 1,40 jednotek. Určete (a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ a (c) úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

53Ú. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j} - 2{,}0\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -1{,}0\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{c} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j} + 1{,}0\boldsymbol{k}$. Určete (a) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, (b) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ a (c) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

54Ú. Vypočtěte úhly mezi tělesovými úhlopříčkami krychle s délkou hrany a (úloha 34).

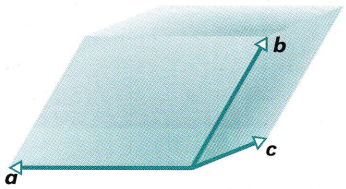
55Ú. Ukažte, že trojúhelník určený vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (obr. 3.36) má obsah $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.



Obr. 3.36 Úloha 55

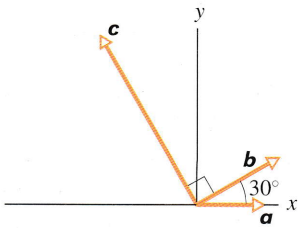
56Ú. (a) Ukažte, že výraz $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$ je nulový pro libovolné vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. (b) Označte φ úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a určete $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$.

57Ú. Ukažte, že výraz $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ určuje objem rovnoběžnostěnu tvořeného vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ podle obr. 3.37.



Obr. 3.37 Úloha 57

58Ú. Vektory na obr. 3.38 mají velikosti $a = 3{,}00$, $b = 4{,}00$ a $c = 10{,}0$. (a) Vypočtěte jejich x-ové a y-ové složky. (b) Určete čísla p a q tak, aby platilo $\boldsymbol{c} = p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}$.



Obr. 3.38 Úloha 58

4
Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb



Cirkusové umění odjakživa přitahovalo pozornost diváků. Proto také bylo ve své době velmi rozšířené po celém světě a ve známých artistických rodinách se dědilo z generace na generaci. V roce 1922 užaslo obecenstvo nad číslem rodiny Zacchiniových, při kterém se jeden z nich nechal vystřelit z děla. Přeletěl celou cirkusovou arénu a dopadl do záchranné sítě. Divácky úspěšný kousek se v průběhu dalších let postupně zdokonaloval. Až nakonec, někdy kolem roku 1939 nebo 1940, se podařilo Emanuelu Zacchiniovi překonat vzdálenost 68,6 m a přeletět tři ruská kola v zábavním parku. Jak ale mohl vědět, kam je třeba umístit záchrannou síť? Kde získal jistotu, že dosáhne takové výšky, aby obrovská kola bez úhony přeletěl?

4.1 DVOJROZMĚRNÝ A TROJROZMĚRNÝ POHYB

V této kapitole rozšíříme dosavadní úvahy na případ pohybu, který již nebude omezen pouze na přímku. Budeme sledovat pohyb částice v rovině i v prostoru. Nejdůležitější pojmy týkající se popisu pohybu (poloha, rychlost, zrychlení) převezmeme z kap. 2. Vícerozměrné definice a vztahy budou sice poněkud složitější než u přímočarého pohybu, avšak pomocí vektorové algebry z kap. 3 bude možné je vyjádřit velmi přehledně. Při studiu této kapitoly se občas vraťte ke kapitolám předchozím a osvěžte si potřebné znalosti.

4.2 POLOHA A POSUNUTÍ

Polohu částice nejčastěji popisujeme jejím **polohovým vektorem** $\boldsymbol{r}$, který spojuje předem zvolený vztažný bod (obvykle počátek soustavy souřadnic) s touto částicí. V kartézské soustavě souřadnic zapisujeme vektor $\boldsymbol{r}$ ve tvaru

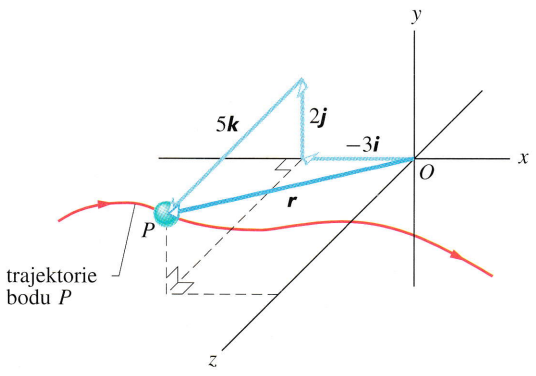
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{4.1}$$

kde $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ a $z\boldsymbol{k}$ jsou jeho průměty do souřadnicových os a x, y a z jsou jeho složky. (Nové značení se poněkud liší od zápisů v kap. 3. Snadno se však můžete přesvědčit, že oba způsoby jsou ekvivalentní.)

Koeficienty x, y a z udávají polohu částice vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic, zadané osami a počátkem. Říkáme, že částice má **kartézské souřadnice** (x, y, z). Poloha malého tělíska P na obr. 4.1 je zadána polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}.$$

Jeho kartézské souřadnice jsou $(-3, 2, 5)$. Znamená to, že tělísko P najdeme ve vzdálenosti tří jednotek od počátku proti směru osy x, tj. ve směru vektoru $-\boldsymbol{i}$, dvou jednotek ve směru osy y (ve směru vektoru $+\boldsymbol{j}$) a pěti jednotek ve směru osy z (ve směru vektoru $+\boldsymbol{k}$).



Obr. 4.1 Polohový vektor částice P je vektorovým součtem svých průmětů do souřadnicových os.

Při pohybu částice se mění i její polohový vektor. Jeho koncový bod se pohybuje spolu s částicí a počáteční bod trvale splývá s počátkem soustavy souřadnic. Složky polohového vektoru $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ jsou tedy funkcemi času, polohový vektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ je *vektorovou funkcí času*. Je-li poloha částice v okamžiku t_1 určena vektorem $\boldsymbol{r}_1$ a v následujícím okamžiku $t_1 + \Delta t$ vektorem $\boldsymbol{r}_2$, je *posunutí* $\Delta\boldsymbol{r}$ částice v časovém intervalu Δt dáno rozdílem

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{4.2}$$

Pomocí vztahu (4.1) lze posunutí zapsat také ve tvaru

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}),$$

tj.

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \tag{4.3}$$

Souřadnice (x_1, y_1, z_1) určují polohový vektor $\boldsymbol{r}_1$ a souřadnice (x_2, y_2, z_2) polohový vektor $\boldsymbol{r}_2$. Ve vztahu pro posunutí často označujeme $\Delta x = (x_2 - x_1)$, $\Delta y = (y_2 - y_1)$ a $\Delta z = (z_2 - z_1)$.

PŘÍKLAD 4.1

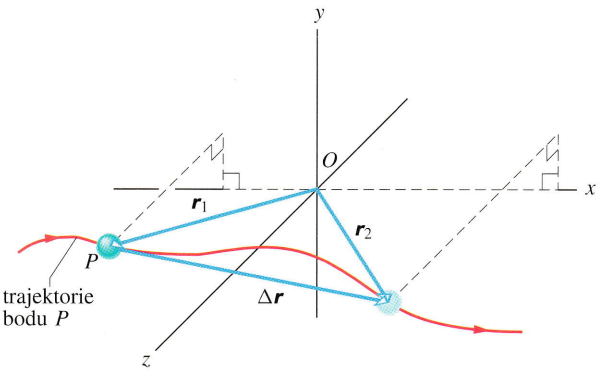
Počáteční poloha částice je dána polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_1 = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k},$$

koncová poloha je určena vektorem

$$\boldsymbol{r}_2 = 9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

(obr. 4.2). Určete posunutí částice.



Obr. 4.2 Příklad 4.1. Posunutí $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ spojuje koncové body vektorů $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$.

ŘEŠENÍ: Vektory sčítáme (nebo odečítáme) po složkách, přesně podle pravidel uvedených v kap. 3. Užitím vztahu (4.2) dostaneme

$$\Delta\boldsymbol{r} = (9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) - (-3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}) = \\ = 12\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektor posunutí je rovnoběžný se souřadnicovou rovinou xz, neboť jeho y-ová složka je nulová. Uvědomme si, že z číselného zápisu vektoru posunutí je tato skutečnost patrná mnohem lépe než z grafického znázornění situace na obr. 4.2.

KONTROLA 1: (a) Netopýr vyletěl z místa o souřadnicích (−2 m, 4 m, −3 m) a po chvíli opět usedl, tentokrát v místě (6 m, −2 m, −3 m). Určete jeho vektor posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$ a vyjádřete jej pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$. (Údaje jsou vztaženy ke kartézské soustavě souřadnic.) (b) Zjistěte, zda je vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ rovnoběžný s některou souřadnicovou rovinou či osou.

4.3 PRŮMĚRNÁ A OKAMŽITÁ RYCHLOST

Průměrná rychlost částice v časovém intervalu Δt měřeném od okamžiku t do okamžiku $t + \Delta t$ je definována jako podíl odpovídajícího vektoru posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$ a délky časového intervalu Δt:

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}. \qquad (4.4)$$

Po rozepsání pomocí složek dostaneme

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}}{\Delta t} = \\ = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}. \qquad (4.5)$$

Okamžitá rychlost (zkráceně rychlost) $\boldsymbol{v}$ je limitou průměrné rychlosti $\bar{\boldsymbol{v}}$ pro $\Delta t \to 0$, tj. derivací polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ podle času

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \qquad (4.6)$$

Dosazením polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ z rovnice (4.1) dostaneme

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

a přepíšeme ve tvaru

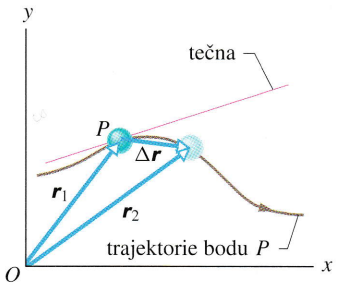
$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \qquad (4.7)$$

kde

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad (4.8)$$

jsou složky rychlosti $\boldsymbol{v}$.

Na obr. 4.3 je zakreslena trajektorie částice P, jejíž pohyb je omezen na souřadnicovou rovinu xy. Při pohybu částice po křivce směrem vpravo se v tomtéž směru odklání i její polohový vektor. V okamžiku t_1 je její poloha určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_1$ a v okamžiku $t_1 + \Delta t$ polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_2$. Vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ představuje *posunutí částice* v časovém intervalu Δt. Průměrná rychlost $\bar{\boldsymbol{v}}$ v intervalu od t_1 do $t_1 + \Delta t$ je dána rovnicí (4.4) a má stejný směr jako posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$.



Obr. 4.3 Trajektorie částice P s vyznačením její polohy v okamžicích t_1 a $t_1 + \Delta t$. Vektor $\Delta\boldsymbol{r}$ představuje posunutí částice v tomto časovém intervalu. Červeně je znázorněna tečna k trajektorii v okamžiku t_1.

Při poklesu délky časového intervalu Δt k nule si můžeme všimnout následujícího chování vektorů charakterizujících pohyb částice: (1) vektor $\boldsymbol{r}_2$ se přibližuje vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a $\Delta\boldsymbol{r}$ vektoru nulovému, (2) směr vektoru $\Delta\boldsymbol{r}$ a s ním i směr průměrné rychlosti $\bar{\boldsymbol{v}}$ se sklánějí ke směru tečny k trajektorii v bodě $\boldsymbol{r}_1$ a konečně (3) průměrná rychlost $\bar{\boldsymbol{v}}$ se blíží k okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$.

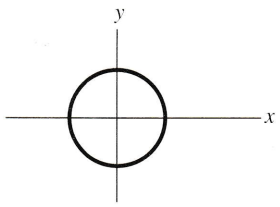
Pro $\Delta t \to 0$ je $\bar{\boldsymbol{v}} \to \boldsymbol{v}$. Vektor okamžité rychlosti je tedy tečný k trajektorii v bodě $\boldsymbol{r}_1$.

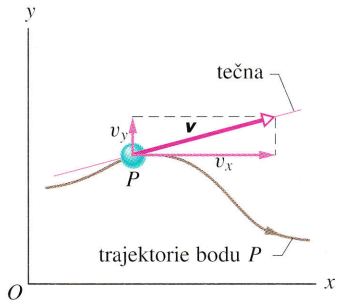
Okamžitá rychlost částice $\boldsymbol{v}$ má vždy směr tečny k trajektorii.

V obr. 4.4 je zakreslen vektor okamžité rychlosti částice P a jeho rozklad do složek. Úvahy o rychlosti lze zobecnit i na případ pohybu částice v trojrozměrném prostoru, bez jakýchkoli omezení: Vektor okamžité rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ je vždy tečný k její trajektorii.

KONTROLA 2: Částice se pohybuje po kružnici (viz obrázek) a v jistém okamžiku má rychlost $\boldsymbol{v} = (2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} - (2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Určete, ve kterém kvadrantu částici v tomto okamžiku najdeme, pohybuje-li

se (a) ve směru otáčení hodinových ručiček, (b) proti směru otáčení hodinových ručiček.





Obr. 4.4 Rychlost částice P a její rozklad do složek. Rychlost má směr tečny k trajektorii.

4.4 PRŮMĚRNÉ A OKAMŽITÉ ZRYCHLENÍ

Předpokládejme, že v průběhu časového intervalu od t_1 do $t_1 + \Delta t$ dojde ke změně rychlosti částice z $\boldsymbol{v}_1$ na $\boldsymbol{v}_2$. Podíl

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad (4.9)$$

nazýváme **průměrným zrychlením** v tomto časovém intervalu. Při přechodu $\Delta t \to 0$ se průměrné zrychlení blíží svému limitnímu případu, takzvanému **okamžitému zrychlení** $\boldsymbol{a}$ (zkráceně *zrychlení*):

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \qquad (4.10)$$

Nenulové zrychlení signalizuje, že se mění velikost nebo směr rychlosti částice. (Obě změny mohou samozřejmě probíhat současně.) Dosazením rychlosti $\boldsymbol{v}$ ze vztahu (4.7) do (4.10) dostaneme

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},$$

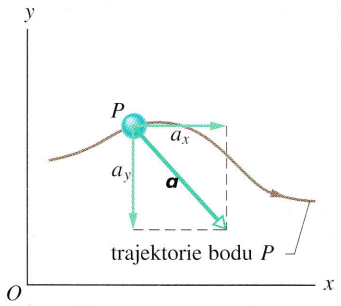
tj.

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \qquad (4.11)$$

kde

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \qquad (4.12)$$

jsou složky zrychlení $\boldsymbol{a}$. Pohyb částice P na obr. 4.5 je omezen na rovinu xy. V obrázku je zakreslen vektor zrychlení částice a jeho rozklad do složek.



Obr. 4.5 Rozklad zrychlení částice do složek

PŘÍKLAD 4.2

Králík vběhl na parkoviště, kde si předtím hrály děti a nakreslily tam křídou dvě kolmé přímky. Můžeme je považovat za osy x a y soustavy souřadnic. Okamžitá poloha králíka vzhledem k této soustavě je popsána funkcemi

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28,$$
$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30.$$

Čas t je měřen v sekundách a souřadnice x a y v metrech. Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ je tedy tvaru

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}.$$

(a) Určete velikost a směr polohového vektoru v okamžiku $t = 15$ s.

ŘEŠENÍ: V okamžiku $t = 15$ s má polohový vektor $\boldsymbol{r}$ složky

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66$$

a

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57.$$

Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ a jeho rozklad do složek znázorňuje obr. 4.6a. Vektor $\boldsymbol{r}$ má velikost

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66\,\mathrm{m})^2 + (-57\,\mathrm{m})^2} = 87\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro úhel vektoru $\boldsymbol{r}$ s kladným směrem osy x platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \left(\frac{-57\,\mathrm{m}}{66\,\mathrm{m}}\right) = -0{,}864,$$
$$\theta = -41^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Stejnou hodnotu tangenty má i úhel $\theta = 139°$, který však neodpovídá znaménkům složek vektoru $\boldsymbol{r}$.)

(b) Určete polohu králíka v okamžicích $t = 0\,\text{s}$, $5\,\text{s}$, $10\,\text{s}$, $20\,\text{s}$ a $25\,\text{s}$ a schematicky nakreslete jeho trajektorii.

ŘEŠENÍ: Pro každý ze zadaných okamžiků zopakujeme výpočet podle (a) a získáme následující hodnoty x, y, r a θ:

t/s	x/m	y/m	r/m	θ
0	28	30	41	+47°
5	56	−10	57	−10°
10	69	−39	79	−29°
15	66	−57	87	−41°
20	48	−64	80	−53°
25	14	−60	62	−77°

Trajektorie králíka je znázorněna na obr. 4.6b.

PŘÍKLAD 4.3

Určete velikost a směr rychlosti králíka z příkladu 4.2 v okamžiku $t = 15\,\text{s}$.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (4.8) je x-ová složka vektoru rychlosti

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28) = -0{,}62t + 7{,}2.$$

Pro $t = 15\,\text{s}$ dostaneme

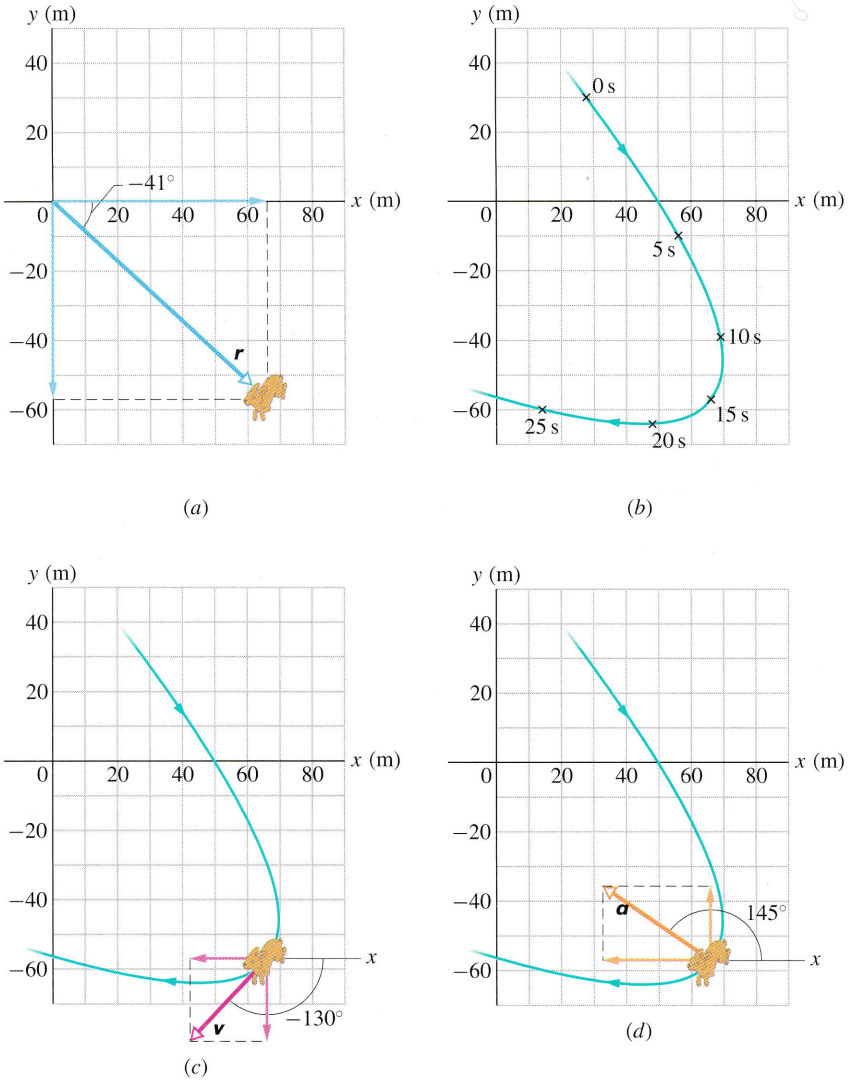
$$v_x = (-0{,}62)(15) + 7{,}2 = -2{,}1\,\text{m·s}^{-1}.$$

Obdobně je

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30) = 0{,}44t - 9{,}1$$

a pro $t = 15\,\text{s}$

$$v_y = (0{,}44)(15) - 9{,}1 = -2{,}5\,\text{m·s}^{-1}.$$



Obr. 4.6 Příklady 4.2, 4.3 a 4.4. (a) Vektor $\boldsymbol{r}$ a jeho složky v okamžiku $t = 15\,\text{s}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{r}$ je 87 m. (b) Trajektorie pohybu králíka po parkovišti s vyznačením poloh v okamžicích uvedených v zadání úlohy. (c) Rychlost $\boldsymbol{v}$ králíka v okamžiku $t = 15\,\text{s}$ má směr tečny k trajektorii v bodě určujícím polohu králíka v okamžiku $t = 15\,\text{s}$. (d) Zrychlení $\boldsymbol{a}$ v okamžiku $t = 15\,\text{s}$. Zrychlení je konstantní, tj. stejné ve všech bodech trajektorie.

Vektor rychlosti a jeho složky jsou zakresleny v obr. 4.6c.

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{v}$ a úhel θ určující jeho směr platí

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 + (-2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2} = 3{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \quad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = \left(\frac{-2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{-2{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}\right) = 1{,}19,$$

tj.

$$\theta = -130^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

(Stejná hodnota tangenty odpovídá i úhlu 50°. V souhlasu se znaménky složek rychlosti však správný úhel θ leží ve třetím kvadrantu, tj. $\theta = 50^\circ - 180^\circ = -130^\circ$.) Rychlost je tečným vektorem k trajektorii a určuje směr, kterým králík běží v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$ (obr. 4.6c).

PŘÍKLAD 4.4

Určete velikost a směr zrychlení $\boldsymbol{a}$ králíka z příkladu 4.2 v okamžiku $t = 15\,\mathrm{s}$.

ŘEŠENÍ: Složky zrychlení jsou dány vztahem (4.12):

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62$$

a

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0{,}44t + 30) = 0{,}44.$$

Vidíme, že zrychlení nezávisí na čase, je konstantní. Dvojím derivováním časová proměnná zmizela. Zrychlení a jeho složky jsou vyznačeny v obr. 4.6d pro okamžik $t = 15\,\mathrm{s}$. Jeho velikost a směr jsou určeny vztahy

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})^2 + (0{,}44\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})^2} = 0{,}76\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \quad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x} = \left(\frac{0{,}44\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}{-0{,}62\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}\right) = -0{,}710,$$

tj.

$$\theta = 145^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

Velikost ani směr vektoru zrychlení se podél trajektorie králíka nemění. Těžko říci, co bylo příčinou toho, že králík neustále „urychloval“ svůj běh severozápadním směrem. Můžeme si myslet, že třeba vál silný jihovýchodní vítr.

KONTROLA 3: Následující vztahy popisují čtyři možnosti pohybu hokejového kotouče po ledové ploše, ležící v souřadnicové rovině xy (poloha je zadána v metrech):

(1) $x = -3t^2 + 4t - 2$ a $y = 6t^2 - 4t$,
(2) $x = -3t^3 - 4t$ a $y = -5t^2 + 6$,
(3) $\boldsymbol{r} = 2t^2\boldsymbol{i} - (4t + 3)\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{r} = (4t^3 - 2t)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.

V jednotlivých případech rozhodněte, zda je některá ze složek vektoru zrychlení konstantní. Je v některém z nich konstantní vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$?

PŘÍKLAD 4.5

Částice se pohybuje v souřadnicové rovině xy s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a}$. Vektor zrychlení má velikost $a = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ a s kladným směrem osy x svírá úhel $\theta = 130^\circ$. V okamžiku $t = 0$ se částice pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ (v metrech za sekundu). Určete její rychlost v okamžiku $t = 2\,\mathrm{s}$ a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$. Určete i její velikost a směr.

ŘEŠENÍ: Při řešení této úlohy si připomeneme výsledky odvozené v kap. 2 pro přímočarý pohyb s konstantním zrychlením. Opravdu jich budeme moci využít? V našem případě je sice zrychlení stálé, pohyb částice však není přímočarý (počáteční rychlost má jiný směr než zrychlení). Díky pravidlům vektorové algebry můžeme úlohu řešit „po složkách“ a vztah (2.11) ($v_x = v_{0x} + a_x t$), platný pro rychlost přímočarého pohybu se stálým zrychlením, použít pro každou ze složek v_x a v_y vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Lze tedy psát

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{a} \quad v_y = v_{0y} + a_y t,$$

kde v_{0x} ($= -2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) a v_{0y} ($= 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) jsou složky počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_0$. Složky vektoru zrychlení $\boldsymbol{a}$, a_x a a_y, určíme užitím vztahů (3.5):

$$a_x = a\cos\theta = (3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\cos 130^\circ = -1{,}93\,\mathrm{m\cdot s^{-2}},$$
$$a_y = a\sin\theta = (3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\sin 130^\circ = +2{,}30\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnic pro složky rychlosti v_x a v_y dostaneme

$$v_x = -2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} + (-1{,}93\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}0\,\mathrm{s}) = -5{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}},$$
$$v_y = 4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} + (+2{,}30\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}0\,\mathrm{s}) = 8{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Zapíšeme-li výsledky pomocí rozkladu (4.7), dostáváme rychlost částice v okamžiku $t = 2\,\mathrm{s}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = (-5{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} + (8{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Pro velikost a směr rychlosti platí

$$v = \sqrt{(-5{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 + (8{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2} = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \left(\frac{8{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{-5{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}\right) = -1{,}458,$$

tj.

$$\theta = 124^\circ \doteq 120^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Poslední výsledek přepočtěte na kalkulačce. Co myslíte? Zobrazí se na displeji hodnota 124° nebo −55,5°? Nakreslete vektor $\boldsymbol{v}$ a jeho složky a rozhodněte, která z obou hodnot představuje správné řešení úlohy. Proč někdy získáme na kalkulačce matematicky správný, ale fyzikálně nepřijatelný výsledek? Vysvětlení viz bod 3.3.

RADY A NÁMĚTY

Bod 4.1: *Goniometrické funkce a úhly*

V příkladu 4.3 bylo třeba určit úhel θ z rovnice $\mathrm{tg}\,\theta = 1{,}19$. Zopakujme si použitý postup: Při výpočtu pomocí kalkulačky se na jejím displeji téměř jistě zobrazí hodnota $\theta = 50^\circ$. V grafu na obr. 3.13c si můžeme všimnout, že stejnou hodnotu tangenty má i úhel $\theta = 230^\circ$ ($= 50^\circ + 180^\circ$). Pomocí znamének složek vektoru rychlosti v_x a v_y (obr. 4.6c) dokážeme rozhodnout, že správným řešením úlohy je druhá z obou hodnot úhlu θ. (Některé dokonalejší kalkulačky umožňují rovnou získat správný výsledek.)

Nakonec je třeba zvolit pro zápis výsledku jednu ze dvou možností, 230° nebo −130°. Obě hodnoty představují týž směr (bod 3.1). Výběr zápisu záleží na tom, pracujeme-li raději s úhly v intervalu od 0° do 360° nebo v intervalu od −180° do +180°. V příkladu 4.3 jsme si vybrali druhou možnost, tj. $\theta = -130^\circ$.

Bod 4.2: *Grafický záznam vektorů*

Při kreslení vektorů můžeme užít následujícího postupu (např. obr. 4.6): (1) Určíme počáteční bod vektoru. (2) Vedeme jím přímku souhlasně rovnoběžnou s osou x. (3) Od jejího kladného směru odměříme úhloměrem zadaný úhel θ. Je-li úhel θ kladný, měříme jej proti směru otáčení hodinových ručiček a naopak.

Vektor $\boldsymbol{r}$ v obr. 4.6a je zakreslen přesně v měřítku použitém pro popis souřadnicových os. Délka šipky znázorňující tento vektor tak skutečně odpovídá jeho velikosti. Pro grafické znázornění rychlosti (obr. 4.6c) ani zrychlení (obr. 4.6d) jsme žádnou stupnici nezvolili, a tak je můžeme kreslit libovolně dlouhé.

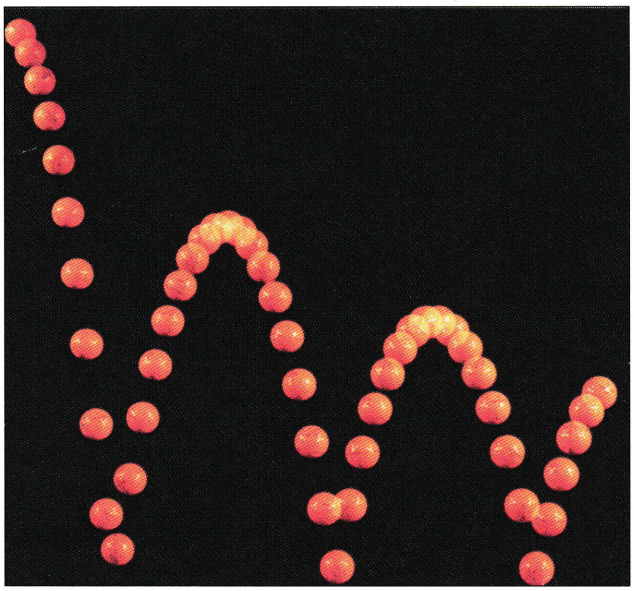
Nemá smysl přemýšlet o tom, zda má být například vektor rychlosti delší či kratší než vektor posunutí. Jde o různé fyzikální veličiny s odlišnými jednotkami. Volba společného měřítka pro jejich grafický záznam by neměla žádné fyzikální opodstatnění.

KONTROLA 4: Poloha kuličky je dána vektorem $\boldsymbol{r} = (4t^3 - 2t)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ (poloha je zadána v metrech a čas v sekundách). V jakých jednotkách jsou zadány koeficienty 4, −2 a 3?

4.5 ŠIKMÝ VRH

V čl. 2.8 jsme se poměrně podrobně zabývali zvláštním případem pohybu částice s konstantním zrychlením, tzv. *svislým vrhem*. Pozornost věnovaná této speciální situaci nebyla přehnaná. Odpovídající experimenty totiž můžeme velmi pohodlně realizovat v „pozemských podmínkách" s minimálním přístrojovým vybavením. Připomeňme si jen stručně hlavní výsledky, k nimž jsme v článku 2.8 dospěli: těleso volně vypuštěné v blízkosti povrchu Země padá se stálým zrychlením, podaří-li se v dostatečné míře omezit vliv odporu prostředí. Toto *tíhové* zrychlení $\boldsymbol{g}$ je pro všechna tělesa stejné. Trajektorií padajícího tělesa je přímka definující *svislý směr*. Udělíme-li tělesu na počátku experimentu nenulovou rychlost ve svislém směru (vzhůru či dolů), pohybuje se opět se zrychlením $\boldsymbol{g}$ a jeho pohyb je také opět přímočarý.

Experimenty ukazují víc. Ať je totiž při vrhu udělena tělesu počáteční rychlost *v jakémkoliv směru* — nejen svislém — letí těleso vždy se stejným zrychlením $\boldsymbol{g}$. Jeho trajek-



Obr. 4.7 Stroboskopický záznam pohybu golfového míčku při odrazech na tvrdém podkladu. Mezi jednotlivými odrazy se pohyb blíží šikmému vrhu. Odchylky jsou způsobeny vlivem odporu prostředí, který v reálných situacích pochopitelně nelze odstranit.

torie nyní leží ve svislé rovině určené vektorem tíhového zrychlení a směrem počáteční rychlosti tělesa. Tento pohyb nazýváme **šikmý vrh**. Jeho příkladem je let golfového míčku (obr. 4.7), tenisového či fotbalového míče, dělové střely apod. V dalších úvahách se budeme zabývat podrobným rozborem tohoto pohybu. Pro úplnost dodejme, že zanedbáváme odpor vzduchu, vlastní rotaci Země a předpokládáme, že změny výšky tělesa nad povrchem Země jsou zanedbatelné vůči jejím rozměrům.

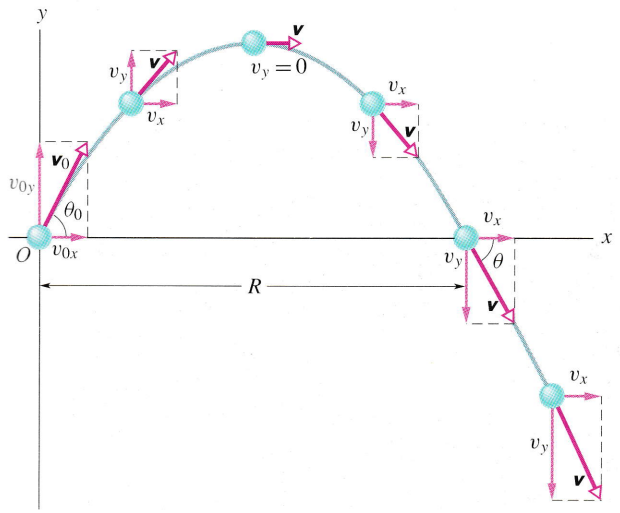
Řekněme, že sledovaným tělesem je podle obr. 4.8 kulka vystřelená počáteční rychlostí

$$\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j}. \qquad (4.13)$$

Složky v_{0x} a v_{0y} této rychlosti lze zapsat pomocí její velikosti v_0 a úhlu θ_0 (tzv. elevační úhel), který svírá vektor $\boldsymbol{v}_0$ s kladným směrem osy x:

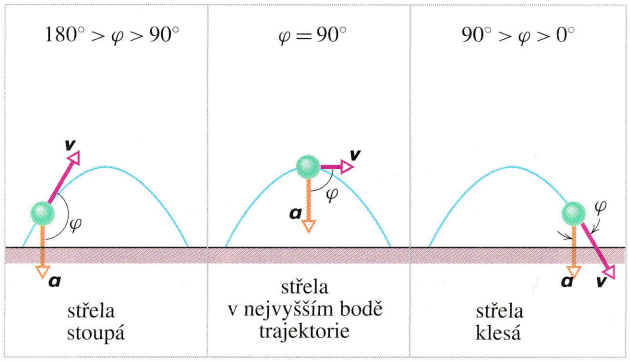
$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{a} \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta_0. \qquad (4.14)$$

Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ i rychlost střely $\boldsymbol{v}$ se při jejím pohybu ve svislé rovině neustále mění. Její zrychlení $\boldsymbol{a}$ je však stálé a *vždy* míří svisle dolů. (Vodorovná složka zrychlení je nulová.) Na obr. 4.9 je vidět, jak se mění i úhel mezi zrychlením a rychlostí.



Obr. 4.8 Střela vyletí z počátku soustavy souřadnic v okamžiku $t = 0$ rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. V jednotlivých bodech trajektorie jsou zakresleny vektory rychlosti a jejich rozklad do složek. Všimněte si, že vodorovná složka rychlosti se v průběhu pohybu nemění, na rozdíl od složky svislé. *Doletem* R rozumíme vodorovnou vzdálenost střely od místa výstřelu měřenou v okamžiku, kdy střela projde bodem ležícím *v téže výšce nad povrchem Země* jako ústí hlavně.

I když pohyb těles na obr. 4.7 až 4.9 může někomu připadat docela složitý, bude jeho matematický popis velmi prostý. Zjednodušení je dáno jednak vektorovým charakterem veličin popisujících pohyb (poloha, rychlost a zrychlení), s nimiž tak lze nakládat podle pravidel vektorové algebry, jednak neměnností zrychlení při pohybu těles. Obojí souhlasí s výsledky experimentů.



Obr. 4.9 Rychlost a zrychlení střely v různých fázích jejího pohybu. Úhel mezi rychlostí a zrychlením může být v daném okamžiku libovolný.

Vodorovné a svislé složky veličin popisujících vrh jsou na sobě nezávislé. Neovlivňují se navzájem.

Pohyb částice v rovině můžeme tedy získat složením dvou pohybů přímočarých, vodorovného a svislého.

Nezávislost vodorovných a svislých složek veličin popisujících šikmý vrh nyní doložíme ukázkou dvou jednoduchých experimentů.

Dva golfové míčky

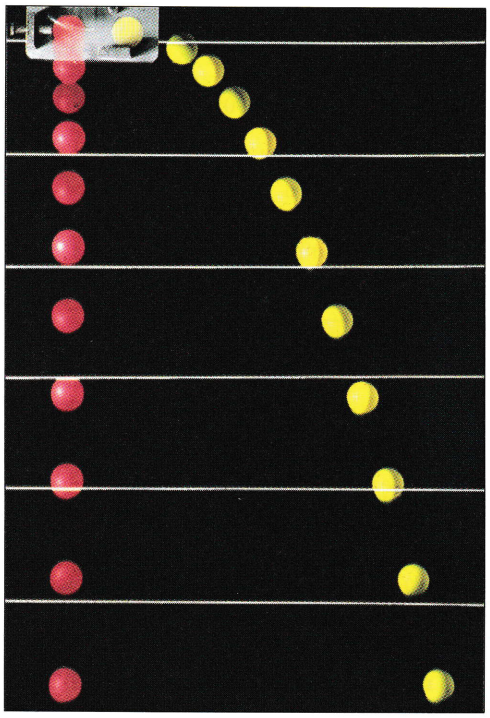
Sledujme stroboskopický záznam pohybu dvou golfových míčků na obr. 4.10. Jeden z nich vypustili experimentátoři volně, druhý vystřelili ve vodorovném směru pomocí pružiny. Všímáme-li si pohybu míčků pouze ve svislém směru, vidíme, že se oba záznamy shodují. Ve stejných časových intervalech urazily míčky stejnou svislou vzdálenost.

Skutečnost, že se jeden z míčků současně pohybuje i ve vodorovném směru, nijak neovlivňuje průmět jeho pohybu do svislého směru. Experiment můžeme domýšlet až k extrémním situacím: střela z pušky, vystřelená vodorovně vysokou rychlostí, dopadne (při zanedbatelném odporu vzduchu) na zem *současně* s kuličkou, kterou jsme ve stejném okamžiku volně vypustili z dlaně ve stejné výšce.

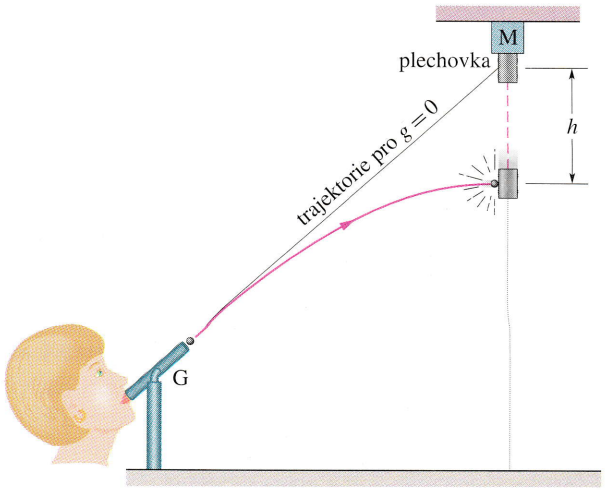
Přesný zásah

Pokus na obr. 4.11 už jistě napomohl oživit řadu fyzikálních přednášek. Vyzkoušejme si jej také. Potřebujeme foukačku G s malými kuličkami jako střelivem. Terčem může být plechovka zavěšená na magnetu M. Trubici foukačky

namíříme přesně na plechovku. Ještě je třeba zařídit, aby magnet uvolnil plechovku přesně v okamžiku, kdy střela vyletí z trubičky a můžeme střílet.



Obr. 4.10 Jeden z míčků je volně vypuštěn, druhý je vystřelen vodorovným směrem. Průměty jejich pohybu do svislého směru jsou totožné.



Obr. 4.11 Kulička vždy zasáhne padající plechovku. V časovém intervalu mezi výstřelem a zásahem obě klesnou o stejnou svislou vzdálenost h měřenou od místa, ve kterém by došlo k jejich srážce v tzv. beztížném stavu ($\boldsymbol{g = 0}$).

Při nulovém tíhovém zrychlení (tzv. stav beztíže) by střela letěla po přímce (obr. 4.11). Plechovka by se vznášela stále na místě i po uvolnění od magnetu a kulička by ji zcela jistě neminula.

Při skutečném experimentu je ovšem tíhové zrychlení *nenulové*. *A přesto* kulička cíl zasáhne! V obr. 4.11 je vyznačena svislá vzdálenost h, o kterou kulička i plechovka při pokusu poklesnou vzhledem k místu pomyslné srážky při $g = 0$. K zásahu dojde při libovolně silném fouknutí: při silnějším dostane kulička větší počáteční rychlost, zkrátí se doba letu a zmenší se vzdálenost h.

4.6 ŠIKMÝ VRH: MATEMATICKÝ POPIS

Výsledky předchozích úvah nyní uplatníme při důsledném matematickém rozboru šikmého vrhu. Víme již, že při něm můžeme využít zjednodušení spočívající v možnosti rozkladu skutečného pohybu na dva nezávislé pohyby, ve vodorovném a svislém směru.



Obr. 4.12 Svislý průmět rychlosti skatebordisty se mění. Její vodorovný průmět je však trvale shodný s vodorovnou rychlostí skateboardu. Při výskoku je sportovec neustále nad skateboardem a bez problémů na něj opět doskočí.

Pohyb ve vodorovném směru

Vodorovná složka tíhového zrychlení je *nulová*. Vodorovná složka rychlosti šikmého vrhu se tedy s časem nemění. Neustále si udržuje svou počáteční hodnotu v_{0x} (obr. 4.12). Posunutí částice ve vodorovném směru $x - x_0$ je dáno

vztahem (2.15) pro $a_x = 0$:

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Po dosazení $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, dostaneme

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t. \tag{4.15}$$

Pohyb ve svislém směru

Průmětem pohybu částice do svislého směru je svislý vrh. Pro jeho popis použijeme rovnice (2.21) až (2.25), které jsme odvodili již v článku 2.8. Z rovnice (2.22) například rovnou dostaneme vztah pro svislou složku vektoru posunutí

$$y - y_0 = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = \\ = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4.16}$$

Svislou složku počáteční rychlosti v_{0y} jsme nahradili ekvivalentním výrazem $v_0 \sin\theta_0$. Využít můžeme i rovnic (2.21) a (2.23), když je nejprve vhodně upravíme:

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \tag{4.17}$$

a

$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.18}$$

Z rovnice (4.17) je zřejmé (a obr. 4.12 to intuitivně potvrzuje), že časová závislost svislé složky rychlosti je naprosto stejná jako závislost rychlosti míče vyhozeného svisle vzhůru. Na počátku letu je kladná a její velikost postupně klesá k nule. V okamžiku, kdy je $v_y = 0$, je těleso *ve vrcholu své trajektorie*. Znaménko svislé složky rychlosti se obrací a její velikost s časem opět roste.

Rovnice trajektorie

Vztahy (4.15) a (4.16) představují tzv. parametrické rovnice trajektorie částice při šikmém vrhu. (Parametrem je zde čas t.) Její kartézskou rovnici získáme tak, že z rovnic (4.15) a (4.16) tento parametr vyloučíme. Nejjednodušší je vyjádřit čas z rovnice (4.15) a dosadit jej do (4.16). Po malých úpravách dostaneme

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} \quad \text{(trajektorie)}. \tag{4.19}$$

Získali jsme rovnici trajektorie znázorněné na obr. 4.8. Při výpočtu jsme ve vztazích (4.15) a (4.16) pro jednoduchost zvolili $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Veličiny g, θ_0 a v_0 jsou konstanty, a tak lze rovnici (4.19) zapsat ve tvaru $y = ax + bx^2$, kde a a b jsou rovněž jisté konstanty. Poznáváme v něm rovnici paraboly s koeficienty a a b. Částice se tedy pohybuje po *parabole*, má parabolickou dráhu.

Dolet

Dolet R definujeme jako vodorovnou vzdálenost, kterou střela urazí od okamžiku výstřelu do okamžiku návratu do počáteční výšky nad povrchem Země. V tomto okamžiku je poloha střely dána souřadnicemi $x = R$ a $y = y_0$. Jejich dosazením do rovnic (4.15) a (4.16) můžeme dolet snadno určit:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t = R$$

a

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0.$$

Vyloučíme čas a dostaneme

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0.$$

(Totéž bychom získali dosazením $x = R$ a $y = 0$ do (4.19).) Užitím identity $\sin 2\theta_0 = 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0$ z dod. E nakonec upravíme výsledek do tvaru

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \tag{4.20}$$

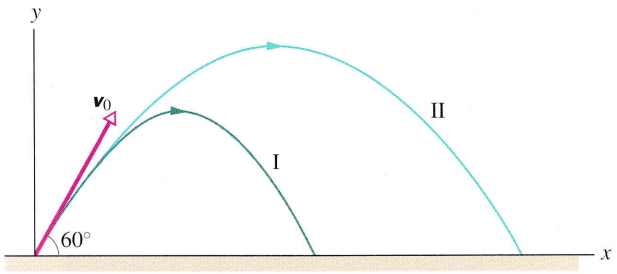
Můžeme si všimnout, že při pevně zvolené velikosti počáteční rychlosti docílíme největšího doletu při elevačním úhlu θ, který splňuje podmínku $\sin 2\theta_0 = 1$, tj. $2\theta_0 = 90°$ a $\theta_0 = 45°$.

Dolet R nabývá největší hodnoty, je-li elevační úhel roven 45°.

Vliv odporu prostředí

Do této chvíle jsme předpokládali, že vliv okolního vzduchu na pohyb tělesa je zanedbatelný. Tento předpoklad může být celkem dobře splněn při nízkých rychlostech. Ve skutečnosti však okolní prostředí klade pohybu tělesa jistý odpor, který může vést ke značným odchylkám idealizovaných výpočtů od skutečnosti, zejména při vyšších rychlostech. Jako příklad porovnání pohybu ve vakuu a skutečného letu tělesa vzduchem poslouží obr. 4.13. Jsou v něm schematicky znázorněny trajektorie dvou tenisových míčků odpálených úderem rakety. Velikost počáteční rychlosti je v obou případech 160 km/h a elevační úhel 60°. Trajektorie I odpovídá skutečnému pohybu míčku, trajektorie II je vypočtena pro případ jeho pohybu ve vakuu. Číselné hodnoty uvedené v tab. 4.1 jsme převzali z článku „The Trajectory of a Fly Ball" publikovaného v časopisu *The Physics Teacher* v lednu 1985. Pohybu v odporujícím prostředí se budeme podrobněji věnovat v kap. 6.

KONTROLA 5: Jak se mění (a) vodorovná a (b) svislá složka rychlosti šikmo vrženého míče? Určete (c) vodorovnou a (d) svislou složku jeho zrychlení ve vzestupné i sestupné části trajektorie i v jejím vrcholu. Odpor vzduchu zanedbejte.



Obr. 4.13 (I) Dráha tenisového míčku vypočtená (na počítači) s uvážením odporu vzduchu. (II) Dráha míčku ve vakuu, vypočtená pro stejnou počáteční rychlost pomocí vztahů odvozených v této kapitole. Důležité číselné údaje o obou trajektoriích jsou shrnuty v tab. 4.1.

Tabulka 4.1 Dva míčky v letu

	DRÁHA I (VZDUCH)	DRÁHA II (VAKUUM)
dolet	98,5 m	177 m
největší výška	53,0 m	76,8 m
doba letu	6,6 s	7,9 s

Elevační úhel je 60° a počáteční rychlost má velikost 160 km/h (obr. 4.13).

PŘÍKLAD 4.6

Záchranný letoun letí na pomoc tonoucímu. Pilot udržuje stálou výšku 1 200 m nad hladinou a směřuje přímo nad hlavu člověka (obr. 4.14). Rychlost letadla má velikost 430 km/h. Při jakém zorném úhlu φ musí pilot uvolnit záchranný vak, aby dopadl co nejblíže k tonoucímu?

ŘEŠENÍ: Počáteční rychlost vaku $\boldsymbol{v}_0$ je shodná s rychlostí letadla. Má tedy velikost 430 km/h a vodorovný směr. Poněvadž víme, v jak velké výšce je vak vypuštěn, můžeme snadno určit dobu jeho pádu na hladinu. Do rovnice (4.16), zapsané ve tvaru

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

dosadíme $y - y_0 = -1\,200$ m (záporné znaménko je dáno orientací osy y) a $\theta_0 = 0$:

$$-1\,200\text{ m} = 0 - \tfrac{1}{2}(9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})t^2.$$

Řešením této rovnice vzhledem k neznámé t dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{2(1\,200\text{ m})}{(9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}} = 15{,}65\text{ s}.$$

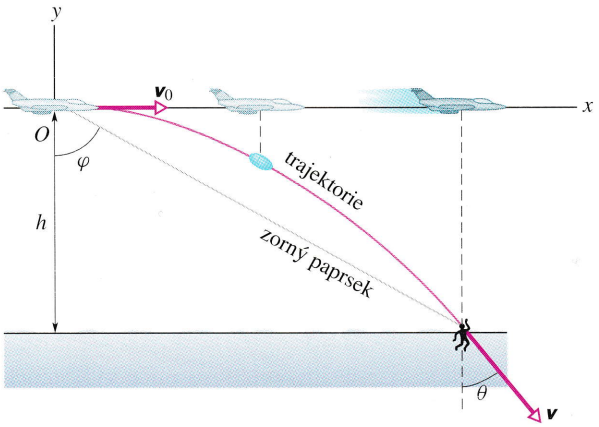
Za tuto dobu urazí vak i letadlo ve vodorovném směru vzdálenost určenou vztahem (4.15):

$$x - x_0 = (v_0\cos\theta_0)t = \\ = (430\text{ km}\cdot\text{h}^{-1})(\cos 0°)(15{,}65\text{ s})\left(\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}}\right) = \\ = 1{,}869\text{ km} = 1\,869\text{ m}.$$

Pro $x_0 = 0$ je tedy $x = 1\,869$ m. Výpočet zorného úhlu φ je již zřejmý z obr. 4.14.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{h} = \left(\frac{1\,869\text{ m}}{1\,200\text{ m}}\right) = 1{,}558,$$
$$\varphi = 57°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vodorovný průmět rychlosti vaku je v každém okamžiku shodný s rychlostí letadla, takže pilot vidí letící vak neustále pod sebou.



Obr. 4.14 Příklad 4.6. Letadlo letí ve vodorovném směru stálou rychlostí. Během letu vyhodí pilot záchranný vak. Vodorovný průmět rychlosti padajícího vaku je v každém okamžiku shodný s rychlostí letadla. Vak dopadne na hladinu rychlostí $\boldsymbol{v}$, která svírá se svislým směrem úhel θ.

PŘÍKLAD 4.7

Při filmování honičky na ploché střeše má kaskadér přeskočit na střechu sousední budovy (obr. 4.15). Ještě předtím ho prozíravě napadne, zda vůbec může tento úkol zvládnout, běží-li po střeše nanejvýš rychlostí 4,5 m·s^{-1}. Poradíme mu?

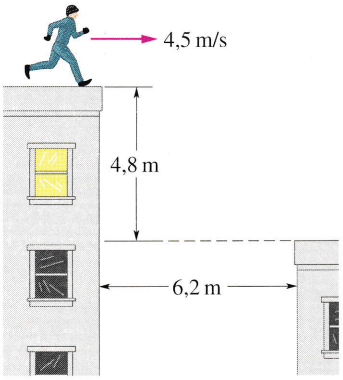
ŘEŠENÍ: Skok z výšky 4,8 m trvá po dobu t, kterou určíme z rovnice (4.16). Dosadíme $y - y_0 = -4{,}8$ m (pozor na znaménko) a $\theta_0 = 0$ a po drobné úpravě dostaneme

$$t = \sqrt{-\frac{2(y - y_0)}{g}} = \sqrt{-\frac{2(-4{,}8\text{ m})}{(9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}} = 0{,}990\text{ s}.$$

Nyní je třeba určit, jak daleko doletí kaskadér za tuto dobu ve vodorovném směru. Odpověď získáme z rovnice (4.15):

$$x - x_0 = (v_0\cos\theta_0)t = \\ = (4{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})(\cos 0°)(0{,}990\text{ s}) = 4{,}5\text{ m}.$$

Sousední budova je však ve vzdálenosti 6,2 m. Rada je jasná: neskákat.



Obr. 4.15 Příklad 4.7. Má kaskadér skočit?

PŘÍKLAD 4.8

Pirátská loď je zakotvena 560 m od pobřežní pevnosti, která chrání vjezd do ostrovního přístavu (obr. 4.16). Obránci mají k dispozici dělo umístěné v úrovni mořské hladiny, které může vystřelit náboj rychlostí 82 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

(a) Pod jakým elevačním úhlem musí být nastavena hlaveň, aby náboj pirátskou loď zasáhl?

ŘEŠENÍ: Hledaný úhel θ_0 zjistíme přímo z rovnice (4.20):

$$\sin 2\theta_0 = \frac{gR}{v_0^2} = \frac{(9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(560\ \mathrm{m})}{(82\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2} = \\ = 0{,}816.$$

Této hodnoty nabývá funkce sin pro dva různé úhly z intervalu od 0° do 360°: 54,7° a 125,3°. Získáváme tedy dvě hodnoty elevačního úhlu,

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(54{,}7°) \doteq 27° \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(125{,}3°) \doteq 63°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zvolí-li velitel pevnosti kteroukoli z nich, bude pirátská loď zničena (za předpokladu, že pohyb střely není ovlivněn odporem vzduchu).

(b) Pro oba elevační úhly vypočtené v části (a) určete dobu letu střely.

ŘEŠENÍ: Dobu t vyjádříme z rovnice (4.15) a postupně dosadíme oba úhly. Pro $\theta_0 = 27°$ dostaneme

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} = \frac{(560\ \mathrm{m})}{(82\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\cos 27°} = \\ = 7{,}7\ \mathrm{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

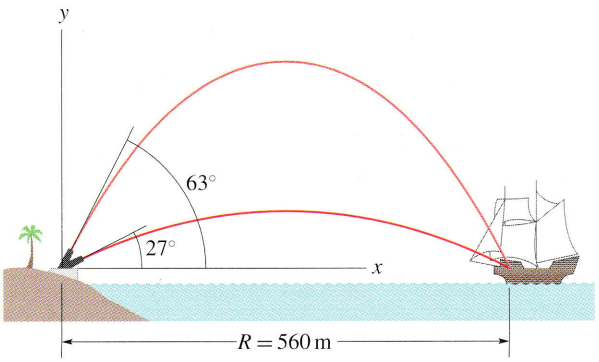
Pro $\theta_0 = 63°$ vychází $t = 15$ s. Podle očekávání trvá let střely při větším elevačním úhlu déle.

(c) V jaké vzdálenosti od pevnosti již bude pirátská loď mimo dostřel?

ŘEŠENÍ: Víme, že dolet střely je největší při elevačním úhlu $\theta_0 = 45°$. Dosazením této hodnoty do rovnice (4.20) dostaneme

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0 = \frac{(82\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{(9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}\sin(2\cdot 45°) = \\ = 690\ \mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

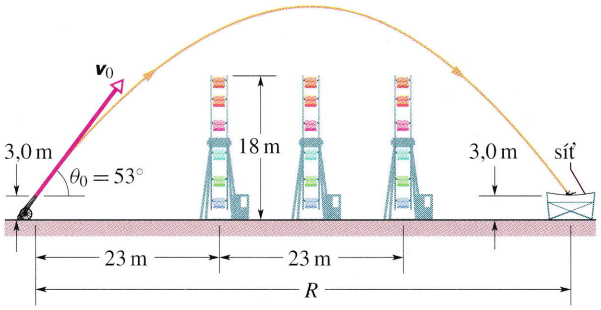
Vydá-li se pirátská loď na ústup, začnou se hodnoty obou elevačních úhlů postupně sbližovat a splynou v okamžiku, kdy bude loď od pevnosti vzdálena 690 m. Jejich společná hodnota je $\theta_0 = 45°$. Ve vzdálenosti větší než 690 m jsou již piráti v bezpečí.



Obr. 4.16 Příklad 4.8. Náboj vystřelený z děla v přístavní pevnosti zasáhne pirátskou loď, míří-li hlaveň ve směru určeném kterýmkoli ze dvou možných elevačních úhlů.

PŘÍKLAD 4.9

Obr. 4.17 znázorňuje historický přelet Emanuela Zacchiniho nad třemi ruskými koly vysokými 18 m. Jejich rozmístění je z obrázku zřejmé. Zacchini byl vystřelen ze speciálního děla rychlostí o velikosti 26,5 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem $\theta_0 = 53°$. Ústí hlavně i záchranná síť byly ve výšce 3,0 m nad zemí.



Obr. 4.17 Příklad 4.9. Let „lidské střely" nad ruskými koly v zábavním parku. Umístění záchranné sítě.

(a) Ověřte si, že artista skutečně přeletěl nad prvním kolem.

ŘEŠENÍ: Počátek soustavy souřadnic zvolme v ústí hlavně. Při této volbě je $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Abychom zodpověděli položenou otázku, musíme určit y-ovou souřadnici artisty pro $x = 23\,\text{m}$. Použijeme k tomu rovnici (4.19):

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2} =$$
$$= (\operatorname{tg}53^\circ)(23\,\text{m}) - \frac{(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(23\,\text{m})^2}{2(26{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2(\cos 53^\circ)^2} =$$
$$= 20{,}3\,\text{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výška artisty nad zemí je však v tomto okamžiku 23,3 m, neboť počátek soustavy souřadnic je umístěn ve výšce 3,0 m. Artista proletí $23{,}3 - 18 = 5{,}3\,\text{m}$ nad prvním kolem.

(b) Předpokládejme, že vrchol trajektorie leží právě nad prostředním kolem. Jak vysoko nad ním artista proletí?

ŘEŠENÍ: Ve vrcholu trajektorie je $v_y = 0$ a rovnice (4.18) nabude tvaru

$$v_y^2 = (v_0\sin\theta_0)^2 - 2gy = 0.$$

Jejím řešením vzhledem k neznámé y dostaneme

$$y = \frac{(v_0\sin\theta_0)^2}{2g} = \frac{(26{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2(\sin 53^\circ)^2}{2(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})} = 22{,}9\,\text{m}.$$

Výšková „rezerva" při průletu artisty nad prostředním kolem činí 7,9 m.

(c) Určete dobu celého letu.

ŘEŠENÍ: Dobu letu můžeme určit několika způsoby. Jednu z možností nabízí rovnice (4.16) s uvážením skutečnosti, že při dopadu je $y = 0$. Dostáváme

$$y = (v_0\sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

tj.

$$t = \frac{2v_0\sin\theta_0}{g} = \frac{2(26{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\sin 53^\circ}{(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})} =$$
$$= 4{,}3\,\text{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jak daleko od děla je třeba umístit záchrannou síť?

ŘEŠENÍ: Dolet R získáme například z rov. (4.15) pro $x_0 = 0$, do níž dosadíme dobu letu.

$$R = (v_0\cos\theta_0)t =$$
$$= (26{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})(\cos 53^\circ)(4{,}3\,\text{s}) =$$
$$= 69\,\text{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nyní již umíme zodpovědět úvodní otázku celé kapitoly: Jak Zacchini zjistil, kam je třeba umístit záchrannou síť? Kde získal jistotu, že ruská kola skutečně přeletí? Ať již to byl on sám nebo kdokoli jiný, musel provést stejné výpočty jako my před chvílí. Složitými úvahami, které by umožnily respektovat vliv prostředí, se Zacchini pochopitelně nezabýval. Věděl však, že odpor vzduchu jeho let zbrzdí a zmenší tak skutečný dolet ve srovnání s hodnotou vypočtenou z jednoduchých vztahů. Proto použil rozměrnou síť a posunul ji o něco blíže k dělu. Zabezpečil si tak poměrně dobrou bezpečnost letu v různých konkrétních situacích, lišících se především podmínkami určujícími vliv okolního prostředí. Tak jako tak musela být nepředvídatelnost vlivu prostředí zdrojem určitého pocitu nejistoty a napětí před každou reprízou tohoto odvážného kousku.

Při podobných pokusech jsou artisté vystaveni ještě jinému nebezpečí. I při kratších letech je totiž zrychlení v hlavni děla tak velké, že způsobí krátkou ztrátu vědomí. Kdyby artista dopadl do sítě ještě v bezvědomí, mohl by si zlomit vaz. Artisté proto absolvují speciální trénink, aby se dokázali včas probrat. Lety předváděné v cirkusové manéži jsou podstatně kratší než let Emanuela Zacchiniho. Navíc jsou dnes daleko lépe technicky zabezpečeny. Problém bezvědomí tak prakticky představuje jejich jediné riziko.

RADY A NÁMĚTY

Bod 4.3: *Číselný a algebraický výpočet*

Zaokrouhlovacím chybám při číselném výpočtu se můžeme vyhnout tak, že problém řešíme nejprve obecně (algebraicky) a číselné hodnoty dosadíme až do výsledného vztahu. Při řešení př. 4.6 až 4.9 by takový postup byl celkem snadný a zkušenější řešitelé úloh by jej jistě použili. V úvodních kapitolách však raději volíme postupné numerické řešení, abychom získali jasnější představu o hodnotách mezivýsledků. Později dáme přednost řešení algebraickému.

4.7 ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

Pohyb částice po kružnici nebo jejím oblouku nazýváme **rovnoměrným pohybem po kružnici**, je-li velikost rychlosti částice konstantní. Možná nás překvapí, že i když se velikost rychlosti nemění, je *zrychlení částice nenulové*. Zrychlení totiž často spojujeme se změnou velikosti rychlosti a zapomínáme, že rychlost $\boldsymbol{v}$ je vektorovou veličinou, a má tedy i směr. Při jakékoli změně rychlosti, i kdyby šlo pouze o změnu směru, je zrychlení částice nenulové. Právě takovým případem je rovnoměrný pohyb po kružnici.

Velikost a směr jeho zrychlení určíme pomocí obr. 4.18. Částice na obrázku se pohybuje po kružnici o poloměru r a její rychlost má konstantní velikost v. Ve dvou bodech P

a Q umístěných symetricky vzhledem k ose y jsou zakresleny vektory rychlostí $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$. Tyto vektory mají sice stejnou velikost, ale liší se směrem. Jsou proto různé. Jejich x-ové a y-ové složky jsou

$$v_{Px} = +v\cos\theta, \quad v_{Py} = +v\sin\theta$$

a

$$v_{Qx} = +v\cos\theta, \quad v_{Qy} = -v\sin\theta.$$

Částice, jejíž rychlost má stálou velikost, přejde z bodu P do bodu Q za dobu

$$\Delta t = \frac{\text{arc}(PQ)}{v} = \frac{r(2\theta)}{v}, \tag{4.21}$$

kde $\text{arc}(PQ)$ označuje délku kruhového oblouku spojujícího body P a Q.

Nyní již dokážeme určit složky průměrného zrychlení částice $\bar{\boldsymbol{a}}$ v časovém intervalu Δt. Pro x-ovou složku dostáváme

$$\bar{a}_x = \frac{v_{Qx} - v_{Px}}{\Delta t} = \frac{v\cos\theta - v\cos\theta}{\Delta t} = 0.$$

Tento výsledek není nikterak překvapivý a je zřejmý ze symetrie obr. 4.18. V bodě P je x-ová složka rychlosti stejná jako v bodě Q.

Složku $\bar{a}_y$ určíme z rovnice (4.21):

$$\bar{a}_y = \frac{v_{Qy} - v_{Py}}{\Delta t} = \frac{-v\sin\theta - v\sin\theta}{\Delta t} = \\ = -\frac{2v\sin\theta}{2r\theta/v} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right).$$

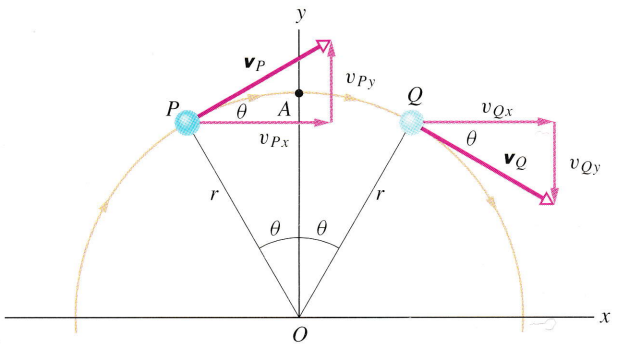
Záporné znaménko znamená, že průmět zrychlení $\bar{\boldsymbol{a}}$ do osy y v obr. 4.18 směřuje svisle dolů.

Při limitním přechodu úhlu θ v obr. 4.18 k nulové hodnotě se budou body P i Q blížit k bodu A ležícímu v nejvyšším bodě kružnice. Limitním případem průměrného zrychlení $\bar{\boldsymbol{a}}$, jehož složky jsme právě určili, bude okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$ v bodě A.

Okamžité zrychlení v bodě A na obr 4.18 míří v obrázku svisle dolů, *do středu kružnice*. Při zmenšování úhlu θ se totiž směr průměrného zrychlení nemění a zůstane tedy zachován i při limitním přechodu. Abychom určili *velikost* a vektoru okamžitého zrychlení, potřebujeme znát limitní hodnotu podílu $\sin\theta/\theta$ při velmi malých úhlech θ. Z matematiky je známo, že tato hodnota je rovna jedné. Ze vztahu pro y-ovou složku průměrného zrychlení již snadno dostaneme velikost okamžitého zrychlení:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(dostředivé zrychlení)}. \tag{4.22}$$

Při rovnoměrném pohybu částice rychlostí o velikosti v po kružnici o poloměru r (nebo jejím oblouku) směřuje zrychlení částice trvale do středu kružnice a má konstantní velikost v^2/r.



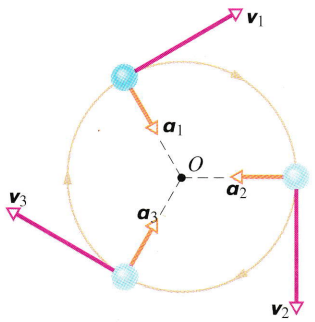
Obr. 4.18 Částice se pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru r. Velikost její rychlosti je v, $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$ jsou rychlosti částice v bodech P a Q, symetricky položených vzhledem k ose y. Rychlosti $\boldsymbol{v}_P$ a $\boldsymbol{v}_Q$ jsou rozloženy do složek. Okamžité zrychlení částice v libovolném bodě trajektorie míří do středu kružnice a má velikost v^2/r.

Částice oběhne celý obvod kružnice (vzdálenost $2\pi r$) za dobu T

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{(perioda)}, \tag{4.23}$$

zvanou **doba oběhu**, neboli **perioda**. V obecnějším pojetí rozumíme periodou dobu, za kterou vykoná částice právě jeden oběh po uzavřené trajektorii.

Na obr. 4.19 jsou zakresleny vektory okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení v různých fázích rovnoměrného pohybu po kružnici. Oba mají stále stejnou velikost, jejich směr se však během pohybu spojitě mění. Rychlost je vždy tečnou ke kružnici, orientovanou ve směru pohybu. Zrychlení trvale směřuje do středu kružnice, a proto je nazýváme **zrychlením dostředivým**.



Obr. 4.19 Rychlost a zrychlení částice při rovnoměrném pohybu po kružnici. Vektory mají stálou velikost, ale proměnný směr.

Zrychlení určující změnu směru rychlosti je stejně skutečné jako zrychlení, které souvisí se změnou její velikosti. Fotografie na obr. 2.8 zachycují tvář plukovníka Johna P. Stappa při prudkém brzdění raketových saní. Je jasné, že zřetelné fyziologické obtíže jsou způsobeny prudkou změnou *velikosti* rychlosti, neboť směr pohybu saní byl při tomto experimentu stálý. Kosmonaut při tréninku na centrifuze je naopak vystaven výrazným změnám *směru* rychlosti, zatímco její velikost je stálá. Fyziologické pocity vznikající v důsledku zrychlení jsou v obou případech stejné.

KONTROLA 6: Těleso se pohybuje v souřadnicové rovině xy po kruhové dráze se středem v počátku soustavy souřadnic. Bodem o x-ové souřadnici $x = -2\,\mathrm{m}$ prochází rychlostí $-(4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Určete (a) rychlost a (b) dostředivé zrychlení tělesa v bodě o y-ové souřadnici $y = 2\,\mathrm{m}$.

PŘÍKLAD 4.10

Stíhací piloti se oprávněně obávají příliš prudkých zatáček. Je-li totiž tělo pilota vystaveno velkému dostředivému zrychlení v situaci, kdy hlava směřuje do středu křivosti zatáčky, dochází k odkrvení mozku a poruše mozkových funkcí.

Úplné ztrátě vědomí předchází několik varovných příznaků: Je-li velikost dostředivého zrychlení mezi hodnotami $2g$ a $3g$, cítí se pilot být jakoby „těžký". Při hodnotě $4g$ začíná vidět pouze černobíle a jeho zorný úhel se zmenšuje (tzv. tunelové vidění). Je-li takovému zrychlení vystaven delší dobu anebo se velikost zrychlení dokonce ještě zvětší, přestává pilot vidět úplně a vzápětí ztrácí vědomí. Tento stav se nazývá g-LOC z anglického „g-induced loss of consciousness".

Jaké je dostředivé zrychlení pilota (v jednotkách g) stíhačky F-22 při průletu kruhové zatáčky o poloměru 5,80 km rychlostí o velikosti $v = 2\,580\,\mathrm{km/h}$ $(716\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})$?

ŘEŠENÍ: Dosazením číselných údajů do vztahu (4.22) dostaneme

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(716\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{5\,800\,\mathrm{m}} = \\ = 88{,}39\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 9{,}0g. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pilot, který by byl natolik neopatrný, že by skutečně navedl stroj do takové zatáčky, by téměř okamžitě upadl do bezvědomí bez jakýchkoliv varovných příznaků.

PŘÍKLAD 4.11

Umělá družice Země je na oběžné dráze ve výšce $h = 200\,\mathrm{km}$ nad zemským povrchem. V této výšce má gravitační zrychlení $\boldsymbol{g}$ (viz kap. 6) velikost $9{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaká je oběžná rychlost v družice?

ŘEŠENÍ: Družice se pohybuje kolem Země rovnoměrně po kružnici. Dostředivým zrychlením je zrychlení gravitační. Oběžnou rychlost v určíme z rovnice (4.22), do které dosadíme $a = g$ a $r = R_Z + h$, kde R_Z je poloměr Země (viz vnitřní strana obálky nebo dod. C):

$$g = \frac{v^2}{R_Z + h}.$$

Odtud

$$v = \sqrt{g(R_Z + h)} = \\ = \sqrt{(9{,}20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(6{,}37{\cdot}10^6\,\mathrm{m} + 200{\cdot}10^3\,\mathrm{m})} = \\ = 7\,770\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 7{,}77\,\mathrm{km/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Snadno se přesvědčíme, že doba oběhu družice kolem Země, tedy perioda jejího pohybu, je rovna 1,47 h.

4.8 VZÁJEMNÝ POHYB PO PŘÍMCE

Představme si, že pozorujeme kachnu, jak letí řekněme na sever rychlostí o velikosti 30 km/h. Vzhledem k jiné kachně, která letí spolu s ní, se však naše kachna nepohybuje. Je zřejmé, že rychlost pohybu tělesa závisí na vztažné soustavě pozorovatele, který provádí měření. Obecně budeme **vztažnou soustavou** rozumět vhodně zvolený objekt, s nímž spojíme soustavu souřadnic.

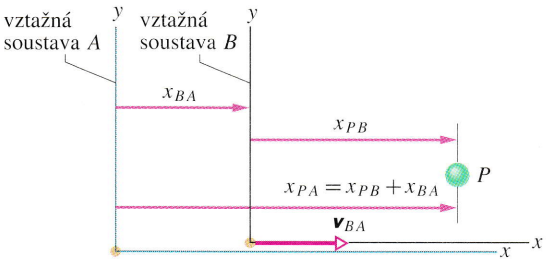
Nejpřirozenější vztažnou soustavou je pochopitelně ta, kterou neustále používáme, aniž si to snad uvědomujeme — zem pod našima nohama. Sdělí-li dopravní policista řidiči, že jel rychlostí 100 km/h, má samozřejmě na mysli rychlost vzhledem k souřadnicové soustavě spojené s povrchem Země. A řidič tomu také tak rozumí.

Pro pozorovatele v letadle nebo třeba v kosmické lodi nemusí být vztažná soustava spojená se Zemí právě nejvhodnější (například pro popis pohybu okolních předmětů). Můžeme si ovšem vybrat kteroukoli jinou, neboť výběr vztažných soustav není nijak omezen. Když už se však pro některou z nich rozhodneme, je důležité se této volby držet a všechna měření vztahovat k vybrané vztažné soustavě.

Problém popisu pohybu částice v různých vztažných soustavách vyložíme pomocí jednoduchého příkladu: Aleš (vztažná soustava A) sedí v autě zaparkovaném na dálnici v odstavném pruhu a sleduje rychlé auto P (částice), které právě projelo kolem v levém pruhu. Barbora (vztažná soustava B) jede v pravém pruhu stálou rychlostí. Také ona pozoruje automobil P. Dejme tomu, že oba pozorovatelé ve stejném okamžiku změří polohu sledovaného vozidla. Z obr. 4.20, který znázorňuje celou situaci, je zřejmé, že

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \qquad (4.24)$$

Všechny členy v této rovnici jsou složky vektorů a mohou být jak kladné, tak záporné. Slovy můžeme rovnici (4.24) vyjádřit takto: „Souřadnici částice P měřenou pozorovatelem ve vztažné soustavě A určíme tak, že k souřadnici částice P měřené pozorovatelem v soustavě B *přičteme* souřadnici pozorovatele B měřenou pozorovatelem A." Všimněte si významu veličin obsažených v rovnici (4.24) v souvislosti s jejich označením pomocí indexů.



Obr. 4.20 Aleš (vztažná soustava A) a Barbora (vztažná soustava B) pozorují vozidlo P. Všechna vozidla se pohybují podél společné osy x obou vztažných soustav. Vektor $\boldsymbol{v}_{BA}$ představuje vzájemnou rychlost vztažných soustav (rychlost soustavy B vzhledem k soustavě A). Trojice měření vyznačených poloh je provedena v jediném okamžiku.

Derivací rovnice (4.24) podle času dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{PA}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{PB}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{BA}),$$

tj. (vzhledem k tomu, že $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$)

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \qquad (4.25)$$

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi rychlostmi téhož objektu (automobil P), měřenými v různých vztažných soustavách. Tyto rychlosti jsou obecně různé. Vztah (4.25) lze velmi jednoduše vyjádřit slovy: „Rychlost částice P měřená ve vztažné soustavě A je součtem její rychlosti měřené v soustavě B a rychlosti soustavy B měřené v soustavě A." Symbolem v_{BA} značíme rychlost vztažné soustavy B vzhledem k soustavě A (obr. 4.20), neboli relativní rychlost B vůči A; rychlost v_{PA} se též nazývá relativní rychlost (automobilu) vůči vztažné soustavě A.

Zatím uvažujeme pouze o takových vztažných soustavách, které se navzájem pohybují konstantní rychlostí. Barbora (soustava B) tedy musí jet vzhledem k Alešovi (soustava A) stálou rychlostí. Pohyb automobilu P není omezen ničím, může být zrychlený či zpožděný, automobil může i zastavit nebo couvat.

Derivací rovnice (4.25) dostaneme vztah pro zrychlení

$$a_{PA} = a_{PB}. \qquad (4.26)$$

(Uvědomte si, že rychlost v_{BA} je konstantní. Její časová derivace je tedy nulová.) Informace obsažená ve vztahu (4.26) je velmi důležitá:

Částice má stejné zrychlení ve všech vztažných soustavách pohybujících se navzájem konstantními rychlostmi.

Jinými slovy:

Pozorovatelé v různých vztažných soustavách, pohybujících se navzájem konstantními rychlostmi, naměří u zkoumané částice totéž zrychlení.

KONTROLA 7: V následující tabulce jsou uvedeny rychlosti (v km/h) Barbořiny vztažné soustavy B a vozidla P pro tři různé situace. Doplňte chybějící údaje a určete, jak se mění vzdálenost vozidel P a B.

SITUACE	v_{BA}	v_{PA}	v_{PB}
1	+50	+50	
2	+30		+40
3		+60	−20

PŘÍKLAD 4.12

Aleš parkuje na okraji silnice, která vede od východu na západ. Sleduje automobil P jedoucí západním směrem. Barbora jede na východ rychlostí $v_{BA} = 52$ km/h, a také pozoruje vůz P. Směr od západu k východu považujeme za kladný.

(a) V určitém okamžiku Aleš zjistil, že se vozidlo P pohybuje rychlostí 78 km/h. Jakou rychlost vozidla P naměří v tomto okamžiku Barbora?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (4.25) dostaneme

$$v_{PB} = v_{PA} - v_{BA}.$$

Víme, že $v_{PA} = -78$ km/h. Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že se vůz P pohybuje západním (tedy záporným) směrem. Rychlost vztažné soustavy B vzhledem k A je rovněž zadána, $v_{BA} = 52$ km/h. Je tedy

$$v_{PB} = (-78\ \mathrm{km/h}) - (52\ \mathrm{km/h}) =$$
$$= -130\ \mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kdyby byl vůz P spojen s vozem Barbory lanem navinutým na cívce, odvíjelo by se lano z cívky právě touto rychlostí.

(b) Aleš zpozoruje, že vůz P se po 10 s brzdění zastavil. Jaké zrychlení vozu P Aleš naměřil za předpokladu, že automobil brzdil rovnoměrně?

ŘEŠENÍ: Z rovnice (2.11) ($v_x = v_{0x} + a_x t$) dostaneme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{0 - (-78\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(10\,\mathrm{s})} = \\ = \left(\frac{78\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}{10\,\mathrm{s}}\right)\left(\frac{1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{3{,}6\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}\right) = \\ = 2{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaké zrychlení vozu P naměří Barbora?

ŘEŠENÍ: V části (a) této úlohy jsme zjistili, že počáteční rychlost vozu P vzhledem k Barboře je $-130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Vůz P na dálnici zastavil, je tedy v klidu vzhledem k Alešově vztažné soustavě. V soustavě Barbořině se však pohybuje rychlostí o velikosti $52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ směrem na západ. Rychlost automobilu P vzhledem k Barboře je tedy $-52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Užitím vztahu $v_x = v_{0x} + a_x t$ dostaneme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-52\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}) - (-130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}})}{(10\,\mathrm{s})} = \\ = 2{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Barbořin výsledek je, podle očekávání, stejný jako Alešův. Ve výpočtech jsme tedy neudělali žádnou chybu.

4.9 VZÁJEMNÝ POHYB V ROVINĚ

Vzájemný pohyb těles v rovině (případně i v prostoru) lze nejlépe popsat pomocí vektorů.

Na obr. 4.21 jsou znázorněny vztažné soustavy A a B našich dvou pozorovatelů, kteří opět sledují pohyb částice P, tentokrát v rovině. Soustavy se stejně jako v předchozím případě pohybují konstantní vzájemnou (neboli relativní) rychlostí $\boldsymbol{v}_{BA}$. Pro zjednodušení výpočtů navíc předpokládejme, že odpovídající si osy obou soustav (x-ové a y-ové) jsou trvale rovnoběžné.

Pozorovatelé v soustavách A a B v určitém okamžiku změří polohu částice P. Z vektorového trojúhelníka na obr. 4.21 je na první pohled zřejmý vztah mezi jejími polohovými vektory v obou soustavách:

$$\boldsymbol{r}_{PA} = \boldsymbol{r}_{PB} + \boldsymbol{r}_{BA}. \qquad (4.27)$$

Tato vektorová transformační rovnice odpovídá skalární rovnici (4.24), platné pro pohyb po přímce.

Derivujeme-li ji podle času, získáme vztah mezi rychlostmi částice naměřenými pozorovateli v soustavách A a B:

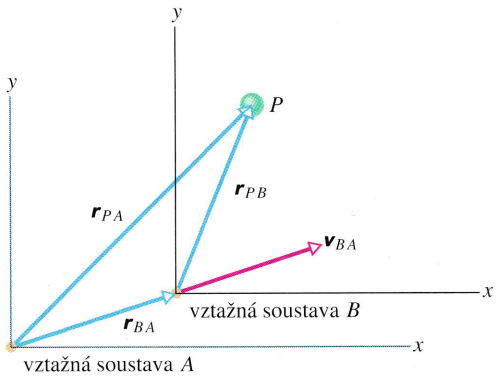
$$\boldsymbol{v}_{PA} = \boldsymbol{v}_{PB} + \boldsymbol{v}_{BA}. \qquad (4.28)$$

Tento vztah je dvojrozměrným ekvivalentem skalární rovnice (4.25). Význam indexů je stejný jako v rovnici (4.25) a $\boldsymbol{v}_{BA}$ opět představuje (konstantní) rychlost soustavy B vzhledem k soustavě A.

Dalším derivováním rovnice (4.28) dostaneme vztah pro zrychlení

$$\boldsymbol{a}_{PA} = \boldsymbol{a}_{PB}. \qquad (4.29)$$

Důležitý výsledek, který jsme získali pro případ pohybu po přímce, zůstává v platnosti i při pohybu v rovině či prostoru: při konstantních vzájemných rychlostech vztažných soustav naměří všichni pozorovatelé stejné zrychlení pohybující se částice.



Obr. 4.21 Vztažné soustavy v rovině. Vektory $\boldsymbol{r}_{PA}$ a $\boldsymbol{r}_{PB}$ určují polohu částice v soustavách A a B, $\boldsymbol{r}_{BA}$ je polohový vektor počátku soustavy B v soustavě A. Vektor $\boldsymbol{v}_{BA}$ představuje vzájemnou rychlost vztažných soustav (rychlost soustavy B vzhledem k A). Předpokládáme, že tato rychlost je konstantní.

PŘÍKLAD 4.13

Netopýr letící rychlostí $\boldsymbol{v}_{NZ}$ zaregistruje mouchu, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_{MZ}$. Rychlosti jsou zadány na obr. 4.22a a jsou vztaženy k zemi. Určete rychlost $\boldsymbol{v}_{MN}$ mouchy vzhledem k netopýrovi a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů.

ŘEŠENÍ: Podle obr. 4.22a jsou rychlosti mouchy a netopýra vzhledem k zemi dány vztahy

$$\boldsymbol{v}_{MZ} = (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 50^\circ)\boldsymbol{i} + (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 50^\circ)\boldsymbol{j}$$

a

$$\boldsymbol{v}_{NZ} = (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 150^\circ)\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 150^\circ)\boldsymbol{j}.$$

Úhly odměřujeme od kladného směru osy x. Při výpočtu vyjdeme ze skutečnosti, že rychlost $\boldsymbol{v}_{MN}$ *mouchy vzhledem k netopýrovi* je vektorovým součtem rychlosti $\boldsymbol{v}_{MZ}$ *mouchy*

vzhledem k zemi a rychlosti $\boldsymbol{v}_{ZN}$ země vzhledem k netopýrovi. Pak

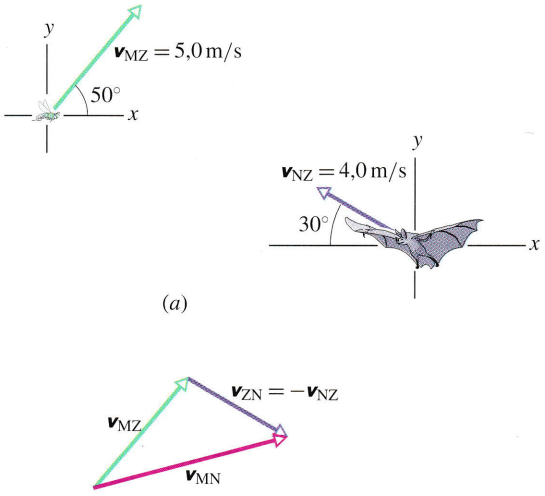
$$\boldsymbol{v}_{MN} = \boldsymbol{v}_{MZ} + \boldsymbol{v}_{ZN}$$

(obr. 4.22b). (Všimněte si, že „vnitřní" indexy (bližší znaménku „plus") na pravé straně této rovnice jsou stejné. Vnější indexy pravé strany se shodují s indexy na levé straně a na obou stranách rovnice vystupují ve stejném pořadí.) Vektor $\boldsymbol{v}_{ZN}$ je ovšem definován jako opačný k vektoru $\boldsymbol{v}_{NZ}$, tj. $\boldsymbol{v}_{ZN} = -\boldsymbol{v}_{NZ}$, dostáváme proto

$$\boldsymbol{v}_{MN} = \boldsymbol{v}_{MZ} + (-\boldsymbol{v}_{NZ}).$$

Dosazením rychlostí $\boldsymbol{v}_{MZ}$ a $\boldsymbol{v}_{NZ}$ (obr. 4.22) do předchozího vztahu dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{MN} &= (5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\cos 50^\circ)\boldsymbol{i} + (5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\sin 50^\circ)\boldsymbol{j} - \\ &\quad - (4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\cos 150^\circ)\boldsymbol{i} - \\ &\quad - (4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})(\sin 150^\circ)\boldsymbol{j} = \\ &= 3{,}21\boldsymbol{i} + 3{,}83\boldsymbol{j} + 3{,}46\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} \doteq \\ &\doteq (6{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} + (1{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$



Obr. 4.22 Příklad 4.13. (a) Netopýr zaregistroval mouchu. (b) Vektory rychlosti mouchy a netopýra.

PŘÍKLAD 4.14

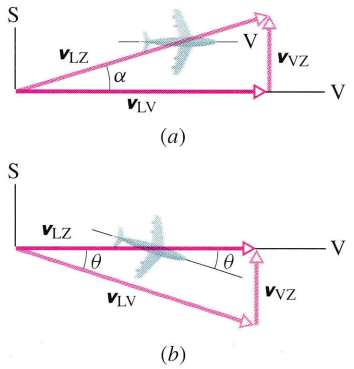
Kompas na palubě letadla ukazuje, že letadlo směřuje k východu. Palubní rychloměr udává hodnotu 215 km/h vzhledem k okolnímu vzduchu. Vane stálý jižní vítr rychlostí 65,0 km/h.

(a) Jaká je rychlost letadla vzhledem k zemi?

ŘEŠENÍ: Pohybujícím se tělesem je nyní letadlo (L). Letadlo (L) zde považujeme za hmotný bod. Jedna ze vztažných soustav je spojena se zemí (Z) a druhá se vzduchem (V). Podle rovnice (4.28) platí

$$\boldsymbol{v}_{LZ} = \boldsymbol{v}_{LV} + \boldsymbol{v}_{VZ}, \qquad (4.30)$$

kde $\boldsymbol{v}_{LZ}$ je rychlost letadla vzhledem k zemi, $\boldsymbol{v}_{LV}$ rychlost letadla vzhledem k okolnímu vzduchu a $\boldsymbol{v}_{VZ}$ rychlost vzduchu vzhledem k zemi (rychlost větru). Vektory rychlosti vystupující v rovnici (4.30) lze zakreslit tak, aby tvořily strany trojúhelníka podle obr. 4.23a. V obrázku si všimněte, že letadlo je orientováno přídí k východu, přesně tak, jak ukazuje palubní kompas. To však ještě neznamená, že se tímto směrem také skutečně pohybuje.



Obr. 4.23 Příklad 4.14. (a) Letadlo, jehož pilot udržuje východní kurs, je unášeno severním směrem. (b) Má-li letadlo letět východně, musí mířit částečně proti větru.

Velikost rychlosti letadla vzhledem k zemi určíme z vektorového trojúhelníka na obr. 4.23a:

$$\begin{aligned}v_{LZ} &= \sqrt{v_{LV}^2 + v_{VZ}^2} = \\ &= \sqrt{(215\,\mathrm{km/h})^2 + (65{,}0\,\mathrm{km/h})^2} = \\ &= 225\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Úhel α na obr. 4.23a je dán vztahem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{VZ}}{v_{LV}} = \frac{(65{,}0\,\mathrm{km/h})}{(215\,\mathrm{km/h})} = 0{,}302,$$

tj.

$$\alpha = 16{,}8^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Letadlo letí vzhledem k zemi rychlostí 225 km/h ve směru, který je od východního kursu odkloněn o 16,8° na sever. Vzhledem k zemi se tedy letadlo pohybuje rychleji než vůči okolnímu vzduchu.

(b) Jaký kurs musí pilot udržovat, chce-li skutečně letět na východ? (Kurs je určen údajem na palubním kompasu.)

ŘEŠENÍ: Aby letadlo letělo vzhledem k zemi přesně východním směrem, musí směřovat částečně proti větru a kompenzovat tak jeho unášivý vliv. Rychlost větru je stejná jako

v části (a). Diagram rychlostí odpovídající této situaci je na obr. 4.23b. Vektory $\boldsymbol{v}_{LV}$, $\boldsymbol{v}_{VZ}$, $\boldsymbol{v}_{LZ}$ tvoří opět pravoúhlý trojúhelník, podobně jako na obr. 4.23a a stále platí rovnice (4.30).

Velikost rychlosti letadla vzhledem k zemi určíme podle obr. 4.23b:

$$v_{LZ} = \sqrt{v_{LV}^2 - v_{VZ}^2} = \\ = \sqrt{(215\,\text{km/h})^2 - (65{,}0\,\text{km/h})^2} = \\ = 205\,\text{km/h}.$$

Z obrázku je rovněž zřejmé, že pilot musí udržovat kurs určený úhlem

$$\sin\theta = \frac{v_{VZ}}{v_{LV}} = \frac{(65{,}0\,\text{km/h})}{(215\,\text{km/h})} = 0{,}302,$$

tj.

$$\theta = 17{,}6°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Rychlost letadla vzhledem k zemi je nyní menší než vzhledem k okolnímu vzduchu.



4.10 VZÁJEMNÝ POHYB PŘI VYSOKÝCH RYCHLOSTECH

I když kosmické lety již před časem opustily oblast pouhé fantazie a staly se skutečností, stále na nás působí dojmem něčeho mimořádného. Vyvolávají především představu objektů pohybujících se velkými rychlostmi. Tak třeba typická velikost rychlosti družice na oběžné dráze kolem Země je 27 400 km/h. Máme-li ji však zařadit do kategorie „velkých rychlostí", musíme se dohodnout, s jakými rychlostmi ji budeme porovnávat. Příroda sama nabízí jako standard rychlost světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ (rychlost světla ve vakuu).} \quad (4.31)$$

Později se přesvědčíme, že se žádný hmotný objekt nemůže pohybovat rychleji než světlo ve vakuu, a to bez ohledu na volbu vztažné soustavy, ve které jej pozorujeme. Všechny objekty běžných rozměrů se ve srovnání s tímto „světelným standardem" pohybují velice pomalu. Přitom se nám jejich rychlost může zdát obrovská, posuzujeme-li ji našimi lidskými měřítky. Velikost rychlosti družice činí pouhých 0,002 5 % rychlosti světla. Na druhé straně se však rychlosti elementárních částic, například protonů nebo elektronů, mohou této hodnotě velmi přiblížit. Nemohou jí však v žádném případě dosáhnout či dokonce překročit.

Experimenty potvrzují, že elektron získá při urychlení napětím 10 milionů voltů rychlost o velikosti $0{,}998\,8c$. Použijeme-li pro jeho urychlení napětí 20 milionů voltů, velikost jeho rychlosti se sice ještě zvýší, avšak už jen na hodnotu $0{,}999\,7c$. Rychlost světla představuje hranici, ke které se rychlosti hmotných těles mohou přiblížit, ale nikdy jí nedosáhnou. Lety nadsvětelnými rychlostmi jsou možné jen ve fantastických literárních příbězích. A tak „warpový pohon", známý z populárního seriálu *Star Trek* a umožňující kosmonautům letět rychlostí $c \cdot 2^n$ (n je číslo „warpu"), zůstane navždy jen ve světě fantazie.

Platí vůbec kinematika, kterou jsme právě vybudovali pro popis pohybu běžných (a tedy velmi pomalých) objektů, také pro velmi rychlé částice, například elektrony či protony? Odpověď, kterou může dát jedině experiment, je záporná. Zákonitosti běžné kinematiky *neplatí* pro tělesa s rychlostmi blízkými rychlosti světla. Pro popis pohybu takových těles musíme použít Einsteinovu **speciální teorii relativity**, která souhlasí s experimentem pro *libovolnou* rychlost.

Kinematické vztahy pro běžná tělesa získáme z rovnic odvozených v rámci Einsteinovy relativistické teorie přechodem k „malým" rychlostem. Rovnice nerelativistické kinematiky, kterou bychom mohli nazývat „kinematikou pomalých těles", souhlasí s experimentem o to hůře, čím je rychlost sledovaných těles větší. Uveďme příklad: vztah (4.25)

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \qquad \text{(malé rychlosti)}$$

vyjadřuje souvislost mezi rychlostmi tělesa P měřenými dvěma pozorovateli v různých vztažných soustavách A a B. Odpovídající rovnice Einsteinovy teorie má tvar

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} \quad \text{(libovolné rychlosti).} \quad (4.32)$$

Pro $v_{PB} \ll c$ a $v_{BA} \ll c$ (splněno pro běžná tělesa) je hodnota jmenovatele zlomku velmi blízká jedničce a rovnice (4.32) přechází v rovnici (4.25).

Rychlost světla c je ústřední konstantou Einsteinovy teorie a vystupuje ve všech relativistických rovnicích. Každá z nich v případě „malých" rychlostí přejde na odpovídající nerelativistický tvar. Ověření této skutečnosti je snadné. Při neomezeném zvyšování rychlosti světla se *všechny* rychlosti budou jevit jako malé a bude platit „kinematika pomalých těles". Dosadíme-li například $c \to \infty$ do rovnice (4.32), dostaneme její nerelativistický tvar (4.25).

PŘÍKLAD 4.15

(Malé rychlosti) Pro $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}000\,1c$ určete v_{PA} z rovnic (4.25) a (4.32).

ŘEŠENÍ: Z rovnice (4.25) dostaneme

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} = 0{,}000\,1c + 0{,}000\,1c = \\ = 0{,}000\,2c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rovnice (4.32)

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} = \frac{0{,}000\,1c + 0{,}000\,1c}{1 + (0{,}000\,1c)^2/c^2} = \\ = \frac{0{,}000\,2c}{1{,}000\,000\,01} \doteq 0{,}000\,2c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Závěr: Pro rychlosti běžných hmotných těles vedou vztahy (4.25) a (4.32) ke stejným výsledkům. V takových případech můžeme celkem automaticky používat rovnici (4.25).

PŘÍKLAD 4.16

(Vysoké rychlosti) Určete v_{PA} ze vztahů (4.25) a (4.32), je-li $v_{PB} = v_{BA} = 0{,}65c$.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (4.25) dostaneme

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} = 0{,}65c + 0{,}65c = \\ = 1{,}30c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z rovnice (4.32) plyne

$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + v_{PB}v_{BA}/c^2} = \frac{0{,}65c + 0{,}65c}{1 + (0{,}65c)(0{,}65c)/c^2} = \\ = \frac{1{,}30c}{1{,}423} = 0{,}91c. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Závěr: Pro vysoké rychlosti jsou výsledky kinematiky pomalých těles a výsledky speciální teorie relativity velmi rozdílné. Klasická kinematika neklade na velikost rychlosti objektů žádná omezení. V jejím rámci jsou tedy přípustné i hodnoty větší než rychlost světla ve vakuu (jako v př. 4.16). Ve speciální teorii relativity naopak nikdy nemůže mít hmotný objekt vůči pozorovateli větší rychlost než světelnou, bez ohledu na to, jak vysoké rychlosti skládáme. Experiment závěry speciální teorie relativity plně potvrzuje.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Polohový vektor

Poloha částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic je popsána *polohovým vektorem* $\boldsymbol{r}$, zapsaným pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic ve tvaru

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (4.1)$$

Vektory $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ a $z\boldsymbol{k}$ jsou *průměty* polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ do směrů souřadnicových os, x, y a z jsou odpovídající *složky*. Polohový vektor je určen buď velikostí a jedním či dvěma úhly, nebo svými složkami.

Posunutí

Přemístění částice z polohy určené polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_1$ do polohy dané vektorem $\boldsymbol{r}_2$ je popsáno *vektorem posunutí* $\Delta\boldsymbol{r}$:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \qquad (4.2)$$

Jiný zápis posunutí využívá opět jednotkových vektorů:

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}, \qquad (4.3)$$

kde (x_1, y_1, z_1) jsou složky vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a (x_2, y_2, z_2) složky vektoru $\boldsymbol{r}_2$.

Průměrná rychlost

Průměrná rychlost částice $\overline{\boldsymbol{v}}$ v časovém intervalu od t do $t + \Delta t$ je definována jako podíl

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}, \qquad (4.4)$$

kde $\Delta\boldsymbol{r}$ je posunutí částice v tomto intervalu.

Rychlost

Okamžitou rychlostí částice $\boldsymbol{v}$ rozumíme limitu její průměrné rychlosti, blíží-li se doba Δt k nule,

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad (4.6)$$

tj.

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \qquad (4.7)$$

kde $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ a $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Směr vektoru okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ je v každém okamžiku tečný k trajektorii částice.

Průměrné zrychlení

Změní-li se rychlost hmotného bodu za časový interval Δt z hodnoty $\boldsymbol{v}_1$ na hodnotu $\boldsymbol{v}_2$, je *průměrné zrychlení* $\overline{\boldsymbol{a}}$ v tomto intervalu definováno jako podíl

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}. \qquad (4.9)$$

Zrychlení

Při poklesu délky časového intervalu Δt k nulové hodnotě nabude průměrné zrychlení $\overline{\boldsymbol{a}}$ limitní hodnoty $\boldsymbol{a}$, kterou nazýváme (okamžitým) *zrychlením*,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \qquad (4.10)$$

tj.

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{4.11}$$

kde $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$, $a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$ a $a_z = \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t$.

S jednotlivými složkami vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{r}$ můžeme pracovat odděleně a používat vztahů pro jednorozměrný pohyb, odvozených v kap. 2.

Šikmý vrh

Při šikmém vrhu se částice s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ pohybuje ve svislé rovině s tíhovým zrychlením $\boldsymbol{g}$. Je-li její počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ zadána velikostí v_0 a úhlem, který vektor $\boldsymbol{v}_0$ svírá s vodorovnou rovinou, má její trajektorie následující parametrické rovnice:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t, \tag{4.15}$$

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4.16}$$

Pro složky rychlosti platí

$$v_x = v_0 \cos\theta_0, \qquad v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt, \tag{4.17}$$

$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.18}$$

Trajektorií částice je parabola o rovnici

$$y = (\mathrm{tg}\,\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}, \tag{4.19}$$

při takové volbě počátku soustavy souřadnic, při níž jsou počáteční souřadnice x_0 a y_0 nulové. Doletem částice rozumíme její vodorovnou vzdálenost od místa výstřelu v okamžiku, kdy je její výška nad povrchem Země stejná jako v okamžiku výstřelu. Platí

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0. \tag{4.20}$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici

Obíhá-li částice po kružnici o poloměru r rychlostí o stálé velikosti v, nazýváme její pohyb *rovnoměrným pohybem po kružnici*. Velikost zrychlení částice má hodnotu

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{4.22}$$

Zrychlení $\boldsymbol{a}$ trvale směřuje do středu kružnice nebo kruhového oblouku. Nazýváme je dostředivým zrychlením. Doba oběhu částice

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{4.23}$$

se též nazývá *perioda* pohybu.

Vzájemný pohyb

Rychlosti částice měřené ve vztažných soustavách A a B jsou obecně různé. Je-li vzájemný (relativní) pohyb vztažných soustav pouze translační, jsou okamžité rychlosti částice měřené v těchto soustavách vázány transformačním vztahem

$$\boldsymbol{v}_{PA} = \boldsymbol{v}_{PB} + \boldsymbol{v}_{BA}, \tag{4.28}$$

kde $\boldsymbol{v}_{BA}$ je rychlost vztažné soustavy B vzhledem k A. Je-li rychlost vzájemného pohybu vztažných soustav $\boldsymbol{v}_{BA}$ konstantní, naměří pozorovatelé v obou vztažných soustavách stejné zrychlení částice, tj.

$$\boldsymbol{a}_{PA} = \boldsymbol{a}_{PB}. \tag{4.29}$$

Při rychlostech blízkých rychlosti světla je třeba použít místo vztahu (4.25) ($v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$) vztah vyplývající ze **speciální teorie relativity**. Pro přímočarý pohyb má tento vztah tvar

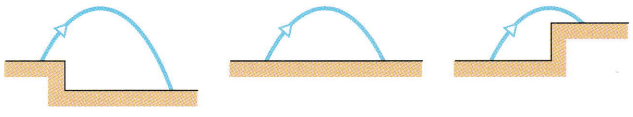
$$v_{PA} = \frac{v_{PB} + v_{BA}}{1 + \dfrac{v_{PB}v_{BA}}{c^2}} \tag{4.32}$$

a pro velmi malé rychlosti (zanedbatelné ve srovnání s rychlostí světla) přejde v rovnici (4.25).

OTÁZKY

1. Rychlost hokejového kotouče pohybujícího se v rovině xy je dána následujícími výrazy (v metrech za sekundu)
(1) $v_x = 3t^2 + 4t - 2$ a $v_y = 6t - 4$,
(2) $v_x = -3$ a $v_y = -5t^2 + 6$,
(3) $\boldsymbol{v} = 2t^2\boldsymbol{i} - (4t + 3)\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{v} = -2t\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.
Ve kterém z uvedených případů je některá ze složek a_x a a_y vektoru zrychlení konstantní? Kdy je konstantní vektor zrychlení? Jaké musí být v případě (4) jednotky koeficientů -2 a 3, je-li rychlost $\boldsymbol{v}$ zadána v metrech za sekundu a čas t v sekundách?

2. Náboje na obr. 4.24 jsou ve všech případech vystřeleny stejnou rychlostí pod stejným elevačním úhlem, dopadnou však do různých míst. Seřaďte uvedené situace sestupně podle velikosti rychlosti dopadu střel.



(*a*) (*b*) (*c*)

Obr. 4.24 Otázka 2

3. Ve kterém bodě trajektorie střely z otázky 2 je její rychlost (a) největší, (b) nejmenší?

4. V jistém okamžiku je rychlost letícího míče rovna $\boldsymbol{v} = 25\boldsymbol{i} - 4{,}9\boldsymbol{j}$. (Osa x je vodorovná, osa y svislá a orientovaná směrem

vzhůru, rychlost $\boldsymbol{v}$ je dána v metrech za sekundu). Prošel již míč nejvyšším bodem dráhy?

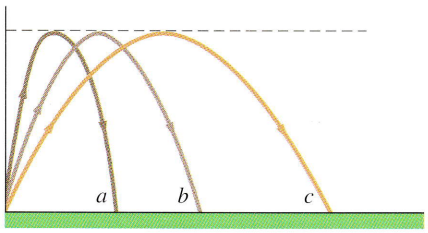
5. Raketa má být vystřelena z povrchu Země počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$, pro kterou připadají v úvahu následující možnosti:
(1) $\boldsymbol{v}_0 = 20\boldsymbol{i} + 70\boldsymbol{j}$,
(2) $\boldsymbol{v}_0 = -20\boldsymbol{i} + 70\boldsymbol{j}$,
(3) $\boldsymbol{v}_0 = 20\boldsymbol{i} - 70\boldsymbol{j}$,
(4) $\boldsymbol{v}_0 = -20\boldsymbol{i} - 70\boldsymbol{j}$.
Osa x kartézské soustavy souřadnic je vodorovná, osa y je svislá a orientovaná vzhůru. (a) Uspořádejte vektory počáteční rychlosti sestupně podle velikosti. (b) Uspořádejte uvedené možnosti sestupně podle doby letu střely.

6. Chlapec stojící v jámě vyhodí sněhovou kouli z úrovně vodorovného chodníku počáteční rychlostí o velikosti v_0 pod elevačním úhlem 45°. Koule dopadne znovu na chodník. Jak se změní (a) délka letu, (b) doba letu, zvolí-li chlapec při příštím hodu větší elevační úhel?

7. Ve výšce 2 m nad vodorovným povrchem vyhodíme hroudu hlíny počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = (2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaká je rychlost hroudy při dopadu?

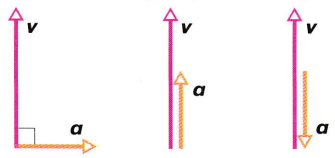
8. Letadlo letí rychlostí o velikosti 350 km/h ve stálé výšce nad povrchem Země. Pilot vypustí balík se zásobou potravin. Jaká je (a) vodorovná, (b) svislá složka počáteční rychlosti balíku? (c) Jaká je vodorovná složka jeho rychlosti těsně před dopadem na zem? (d) Jak by se změnila doba pádu balíku, kdyby letadlo letělo rychlostí 450 km/h? Vliv odporu prostředí neuvažujte.

9. Fotbalový míč letí po některé z trajektorií znázorněných na obr. 4.25. Seřaďte je podle (a) doby letu míče, (b) svislé složky jeho počáteční rychlosti, (c) vodorovné složky počáteční rychlosti, (d) velikosti počáteční rychlosti. Volte vždy sestupné řazení. Odpor prostředí zanedbejte.



Obr. 4.25 Otázka 9

10. Obr. 4.26 znázorňuje tři možné okamžité situace při pohybu částice. Rozhodněte, ve které z nich (a) velikost rychlosti částice roste, (b) klesá, (c) nemění se. Ve kterém z případů je skalární součin (d) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$ kladný, (e) záporný, (f) nulový?



Obr. 4.26 Otázka 10

11. Osobní vůz jede stálou rychlostí těsně za nákladní dodávkou. Z dodávky vypadne přepravka. (a) Řidič osobního auta nebrzdí a nesnaží se přepravce vyhnout. Narazí auto do přepravky ještě před jejím dopadem na silnici? (b) Rozhodněte, zda je vodorovná složka rychlosti přepravky během jejího pádu větší, menší, nebo stejná jako rychlost dodávky.

12. (a) Je možné, aby těleso mělo nenulové zrychlení a přitom se neměnila velikost jeho rychlosti? Je možné projíždět zatáčkou (b) s nulovým zrychlením, (c) se zrychlením stálé velikosti?

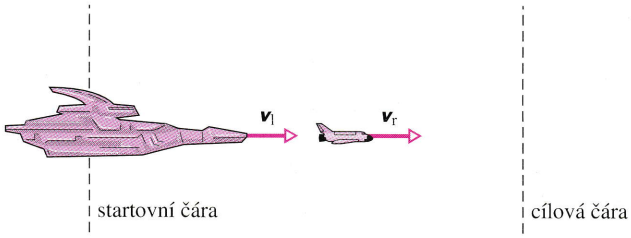
13. Dítě si během jízdy v autě pohrává s míčkem a najednou jej vyhodí svisle vzhůru. V následujících případech rozhodněte, zda míček spadne před dítě nebo za ně, anebo se mu vrátí zpět přímo do ruky: (a) auto jede konstantní rychlostí, (b) zrychluje, (c) brzdí.

14. Člověku jedoucímu ve výtahu vypadne z ruky mince ve chvíli, kdy výtah klesá konstantní rychlostí. Rozhodněte, zda je zrychlení mince větší, menší, nebo shodné s tíhovým zrychlením vzhledem k (a) člověku ve výtahu, (b) pozorovateli na schodišti.

15. Kapsářka stojí na otevřené zadní plošině tramvaje jedoucí konstantní rychlostí. Ve vhodném okamžiku se vykloní přes zábradlí plošiny a upustí ukradenou peněženku, na kterou již čeká její společnice. Popište trajektorii peněženky z hlediska (a) kapsářky, (b) její společnice a (c) policisty, který stojí v tramvaji jedoucí po vedlejší koleji opačným směrem, rovněž konstantní rychlostí.

16. Při ostřelování Paříže ze vzdálenosti 110 km používali Němci dělostřelecký kanón VWI přezdívaný „Tlustá Berta". Náboje byly vystřelovány pod úhlem větším než 45°. Němci totiž zjistili, že tak dosáhnou téměř dvojnásobného doletu ve srovnání s doletem při elevačním úhlu 45°. Lze z této informace usoudit, jak se mění hustota vzduchu s nadmořskou výškou?

17. Obr. 4.27 představuje jednu ze čtyř kosmických lodí při speciálním závodu. V okamžiku průletu startovní čarou vypustí každá z nich raketu, která směřuje k cílové čáře. Rychlosti kosmických lodí vzhledem ke startovní čáře v_l a rychlosti raket vzhledem k mateřským lodím v_r jsou postupně (1) $v_l = 0{,}70c$, $v_r = 0{,}40c$, (2) $v_l = 0{,}40c$, $v_r = 0{,}70c$, (3) $v_l = 0{,}20c$, $v_r = 0{,}90c$ a (4) $v_l = 0{,}50c$, $v_r = 0{,}60c$. Bez počítání rozhodněte, (a) kdo zvítězí a (b) kdo bude poslední.



Obr. 4.27 Otázka 17

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 4.2 Poloha a posunutí

1C. Meloun leží v místě o souřadnicích $x = -5{,}0$ m, $y = 8{,}0$ m a $z = 0$ m. Vyjádřete jeho polohový vektor (a) pomocí jednotkových vektorů, (b) pomocí velikosti a směru. (c) Načrtněte polohový vektor v kartézské soustavě souřadnic. Meloun se posune do místa o souřadnicích $(x, y, z) = (3{,}00\text{ m}, 0\text{ m}, 0\text{ m})$. Určete vektor posunutí a vyjádřete jej (d) pomocí jednotkových vektorů, (e) pomocí velikosti a směru.

2C. Poloha elektronu je zadána vektorem $\boldsymbol{r} = 5{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech). (a) Určete jeho velikost a (b) zakreslete jej v kartézské soustavě souřadnic.

3C. Proton se přemístí z počáteční polohy $\boldsymbol{r}_1 = 5{,}0\boldsymbol{i} - 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ do polohy $\boldsymbol{r}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny složky v metrech). (a) Určete vektor posunutí. (b) S jakou souřadnicovou rovinou je tento vektor rovnoběžný?

4C. Vektor posunutí pozitronu v určitém časovém intervalu je $\Delta\boldsymbol{r} = 2{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j} + 6{,}0\boldsymbol{k}$ a jeho výsledná poloha je určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r} = 3{,}0\boldsymbol{j} - 4{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech). Jaký byl polohový vektor pozitronu na počátku časového intervalu?

ODST. 4.3 Průměrná a okamžitá rychlost

5C. Letadlo letí z města A do C s mezipřistáním ve městě B. Město B leží východně od A ve vzdálenosti 300 km, město C je od B vzdáleno 600 km na jih. Prvá část letu trvá 45,0 min, druhá 1,50 h. (a) Určete vektor posunutí z A do C, (b) průměrnou rychlost a (c) průměrnou velikost rychlosti během celého letu.

6C. Vlak jede na východ stálou rychlostí o velikosti 60,0 km/h. Po 40,0 min jízdy odbočí k severovýchodu a směr jeho dalšího pohybu svírá s místním poledníkem úhel 50,0°. Vlak pokračuje v jízdě dalších 20,0 min. Posledních 50,0 min jízdy míří vlak na západ. Určete jeho průměrnou rychlost.

7C. Balon se během 3,50 h letu dostal do výšky 2,88 km nad povrch Země a posunul se o 21,5 km severně a 9,70 km východně od místa startu. Určete (a) velikost vektoru jeho průměrné rychlosti a (b) úhel, který tento vektor svírá s vodorovnou rovinou.

8C. Poloha iontu se během 10 s změní z hodnoty $\boldsymbol{r}_1 = 5{,}0\boldsymbol{i} - 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ na $\boldsymbol{r}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j} - 2{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny údaje jsou v metrech). Jaká je jeho průměrná rychlost v tomto časovém intervalu?

9C. Poloha elektronu je dána vztahem $\boldsymbol{r} = 3{,}0t\boldsymbol{i} - 4{,}0t^2\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$. (Čas t je měřen v sekundách a složky vektoru $\boldsymbol{r}$ v metrech.) (a) Určete časovou závislost rychlosti elektronu $\boldsymbol{v}(t)$. (b) Jakou rychlost má elektron v okamžiku $t = 2{,}0$ s? Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (c) Určete velikost a směr rychlosti elektronu v tomto okamžiku.

ODST. 4.4 Průměrné a okamžité zrychlení

10C. Rychlost protonu se během 4,0 s změní z hodnoty $\boldsymbol{v}_1 = 4{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ na $\boldsymbol{v}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j} + 5{,}0\boldsymbol{k}$ (všechny údaje v metrech za sekundu). (a) Určete průměrné zrychlení protonu $\bar{\boldsymbol{a}}$ v tomto časovém intervalu. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (b) Určete, jaká je velikost a směr vektoru $\bar{\boldsymbol{a}}$.

11C. Polohový vektor částice závisí na čase vztahem $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + 4t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$. Všechny veličiny jsou vyjádřeny v jednotkách SI. Určete časovou závislost (a) rychlosti, (b) zrychlení částice.

12C. Částice se pohybuje v rovině xy. Její poloha se mění s časem podle vztahu $\boldsymbol{r} = (2{,}00t^3 - 5{,}00t)\boldsymbol{i} + (6{,}00 - 7{,}00t^4)\boldsymbol{j}$, kde $\boldsymbol{r}$ je v metrech a t v sekundách. Určete její (a) polohu $\boldsymbol{r}$, (b) rychlost $\boldsymbol{v}$ a (c) zrychlení $\boldsymbol{a}$ v okamžiku $t = 2{,}00$ s. (d) Jaký je v tomto okamžiku směr tečny k trajektorii?

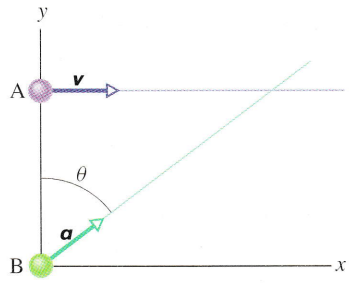
13C. Saně s plachtou jsou hnány větrem po zamrzlém jezeře. V jistém okamžiku t mají rychlost $(6{,}30\boldsymbol{i} - 8{,}42\boldsymbol{j})$ m·s^{-1}. Během dalších tří sekund dojde k náhlé změně podmínek a saně se zastaví. Určete jejich průměrné zrychlení v časovém intervalu od t do $t + 3$ s.

14Ú. Částice se pohybuje v souřadnicové rovině xy s konstantním zrychlením $(4{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j})$ m·s^{-2}. V okamžiku $t = 0$ prochází počátkem soustavy souřadnic rychlostí $8{,}0\boldsymbol{j}$ m·s^{-1}. (a) Určete její y-ovou souřadnici v okamžiku, kdy má její x-ová souřadnice hodnotu 29 m. (b) V tomtéž okamžiku určete velikost její rychlosti.

15Ú. Částice vyletí z počátku soustavy souřadnic s počáteční rychlostí $3{,}00\boldsymbol{i}$ m·s^{-1} a pohybuje se s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a} = (-1{,}00\boldsymbol{i} - 0{,}500\boldsymbol{j})$ m·s^{-2}. (a) Jaká je její rychlost v okamžiku, kdy její x-ová souřadnice nabývá největší hodnoty? (b) Jaká je v tomto okamžiku její poloha?

16Ú. Rychlost částice pohybující se v souřadnicové rovině xy je dána vztahem $\boldsymbol{v} = (6{,}0t - 4{,}0t^2)\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j}$. Složky rychlosti jsou měřeny v metrech za sekundu a čas ($t > 0$) v sekundách. (a) Jaké je její zrychlení v okamžiku $t = 3{,}0$ s? (b) Ve kterém okamžiku je její zrychlení nulové? (c) Kdy je nulová její rychlost? (d) Ve kterém okamžiku má velikost její rychlosti hodnotu 10 m·s^{-1}?

17Ú. Částice A se pohybuje po přímce $y = 30$ m rovnoběžně s kladným směrem osy x. Její rychlost $\boldsymbol{v}$ je konstantní a má velikost $v = 3{,}0$ m·s^{-1}. Částice B vyletí z počátku soustavy souřadnic s nulovou počáteční rychlostí právě v okamžiku, kdy částice A prochází osou y (obr. 4.28). Částice B se pohybuje



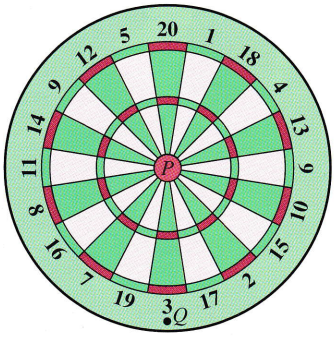
Obr. 4.28 Úloha 17

s konstantním zrychlením $\boldsymbol{a}$ o velikosti $a = 0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jak je třeba volit úhel θ mezi zrychlením $\boldsymbol{a}$ částice B a kladným směrem osy y, aby se částice srazily? (Jestliže při řešení úlohy dospějete k rovnici čtvrtého stupně pro neznámou t, převeďte ji substitucí $u = t^2$ na kvadratickou rovnici s neznámou u.)

ODST. 4.6 Šikmý vrh: matematický popis

Při řešení následujících úloh zanedbáme odpor prostředí, i když to v některých případech nebude opodstatněné. Bez tohoto zjednodušení by totiž výpočty nebyly schůdné.

18C. Hráč hodil šipku vodorovnou rychlostí $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Mířil přitom přesně na střed terče P (obr. 4.29). Za 0,19 s zasáhla šipka bod Q na okraji terče. (a) Určete vzdálenost PQ a (b) vzdálenost hráče od terče.



Obr. 4.29 Cvičení 18

19C. Střelec míří na terč umístěný ve vzdálenosti 30,5 m od ústí hlavně. V okamžiku výstřelu je hlaveň vodorovná a směřuje přímo do středu terče. Kulka zasáhne terč 1,9 cm pod jeho středem. (a) Určete dobu letu kulky a (b) její rychlost bezprostředně po výstřelu.

20C. Pohyb všech hmotných objektů v blízkosti povrchu Země je ovlivněn tíhovým zrychlením. Týká se to i protonů, elektronů a ostatních hmotných částic. Uvažujme elektron, který opustí elektronovou trysku s vodorovnou rychlostí o velikosti $v = 3{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Určete jeho pokles ve svislém směru po průletu vodorovnou evakuovanou trubicí délky 1,0 m. (b) Jak se změní tento výsledek při vyšší počáteční rychlosti elektronu?

21C. Elektronový svazek v katodové trubici opouští elektronovou trysku rychlostí o velikosti $1{,}0 \cdot 10^9\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ a vstoupí do oblasti mezi dvěma vodorovnými vychylovacími deskami. Desky jsou čtvercové a jejich strany měří 2 cm. Elektrostatické pole mezi nimi uděluje elektronům zrychlení o velikosti $1{,}0 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm\cdot s^{-2}}$, které míří svisle dolů. Určete (a) dobu průletu elektronu vychylovací soustavou, (b) svislou složku jeho posunutí v tomto časovém intervalu (nenarazí elektron do některé z desek?) a (c) jeho rychlost v okamžiku, kdy opustí prostor mezi deskami (výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů).

22C. Míč se skutálel z vodorovné desky stolu vysokého 1,2 m a dopadl na podlahu ve vodorovné vzdálenosti 1,5 m od hrany stolu. (a) Jak dlouho míč letěl? (b) S jakou rychlostí opustil desku stolu?

23C. Při zkušební střelbě z pistole stojí střelec na ocelové konstrukci ve výšce 45,0 m nad vodorovným povrchem Země. Střela opustí hlaveň vodorovnou rychlostí o velikosti $250\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Za jak dlouho a (b) v jaké vzdálenosti od paty konstrukce dopadne střela na zem? (c) Jaká je v tom okamžiku svislá složka její rychlosti?

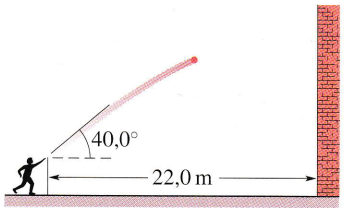
24C. Nadhazovač vyhodí baseballový míč vodorovnou rychlostí o velikosti 160 km/h. Pálkař stojí ve vzdálenosti 20 m. (a) Za jak dlouho urazí míč (a) první, resp. druhou polovinu této (vodorovné) vzdálenosti? (b) Určete svislou složku posunutí míče po průletu prvním, resp. (c) druhým z obou úseků. (d) Jak to, že nejsou výsledky částí (b) a (c) shodné? (Vliv odporu prostředí zanedbejte.)

25C. Střela je vystřelena počáteční rychlostí $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 60°. Určete velikost a směr její rychlosti po uplynutí doby (a) 2,0 s a (b) 5,0 s.

26C. Kámen je vržen počáteční rychlostí $20{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 40,0°. Určete vodorovnou i svislou složku jeho posunutí po uplynutí doby (a) 1,10 s, (b) 1,80 s, (c) 5,00 s od počátku pohybu.

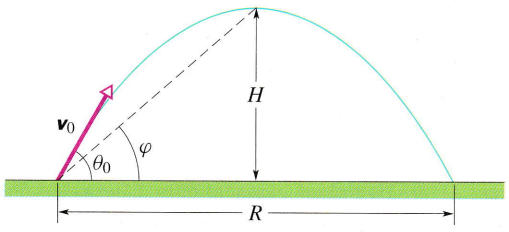
27C. Kdosi hodil míč ze skalního útesu počáteční rychlostí o velikosti $15{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem −20,0° (pozor na znaménko). Určete (a) vodorovnou i (b) svislou složku jeho posunutí po 2,30 sekundách letu.

28C. Chlapec chytá míč po odrazech od zdi vzdálené 22,0 m. Jeho spoluhráč vyhodí míč rychlostí $25{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 40,0° (obr. 4.30). (a) Za jak dlouho a (b) jak vysoko nad úrovní místa, z něhož byl vyhozen, narazí míč do zdi? (c) Určete vodorovnou a svislou složku rychlosti míče v okamžiku nárazu. (d) Zjistěte, zda míč projde ještě před nárazem vrcholem své trajektorie.



Obr. 4.30 Cvičení 28

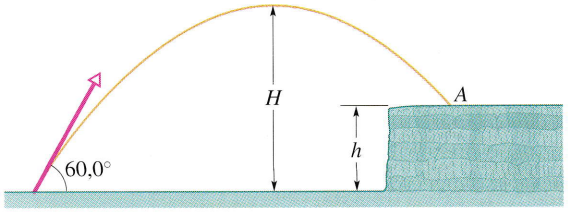
29C. (a) Dokažte, že poměr maximální výšky H a doletu R náboje vystřeleného pod elevačním úhlem θ_0 je dán vztahem $H/R = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\,\theta_0$ (obr. 4.31). (b) Lze zvolit úhel θ_0 tak, aby platilo $H = R$?



Obr. 4.31 Cvičení 29 a 30

30C. Střela vyletí z místa na zemském povrchu pod elevačním úhlem θ_0. (a) Ukažte, že zorný úhel φ, pod kterým je z místa výstřelu vidět vrchol její trajektorie, je $\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\theta_0$ (obr. 4.31). (b) Vypočtěte hodnotu φ pro $\theta_0 = 45°$.

31C. Kluci házejí kameny na skalní vyvýšeninu o výšce h. Počáteční rychlost kamene má velikost $42{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a elevační úhel je 60,0° (obr. 4.32). Kámen dopadne na vyvýšeninu po 5,50 s letu. Určete (a) výšku h, (b) velikost rychlosti dopadu, (c) výšku vrcholu trajektorie nad zemským povrchem.



Obr. 4.32 Cvičení 31

32Ú. Velikost počáteční rychlosti střely je rovna pětinásobku její hodnoty ve vrcholu trajektorie. Určete elevační úhel výstřelu.

33Ú. (a) Určete velikost rychlosti záchranného vaku z př. 4.6 při jeho dopadu na vodní hladinu. (b) Vypočtěte úhel θ zakreslený v obr. 4.14.

34Ú. Celých 23 let odolával světový rekord Boba Beamona ve skoku do dálky. Teprve na atletickém mistrovství světa v Tokiu v roce 1991 se podařilo Miku Powellovi překonat jej o plných 5 cm skokem 8,95 m (obr. 4.33). Předpokládejte, že odrazová rychlost při rekordním skoku byla $9{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (přibližně rychlost běhu sprintera). Tíhové zrychlení v Tokiu má velikost $9{,}80\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Určete největší možný dolet skokana v idealizovaných podmínkách, tj. bez odporu prostředí.

35Ú. Při sportovní střelbě na cíl vzdálený 46 m zvolil závodník zbraň, jejíž střely mají počáteční rychlost $460\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jak vysoko nad cíl musí být hlaveň zbraně namířena v okamžiku výstřelu, aby se podařilo cíl zasáhnout?

36Ú. Ukažte, že největší možná výška vrcholu trajektorie střely nad vodorovným povrchem je $y_{\max} = \frac{1}{2}(v_0 \sin\theta_0)^2/g$.

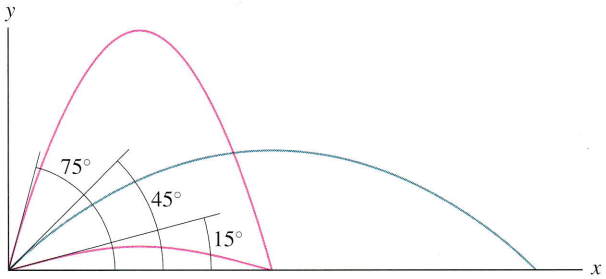
37Ú. V laboratoři prováděli speciální měření s cílem zjistit rychlost fotbalového míče při prudkém výkopu. Letící míč měl ve výšce 9,1 m rychlost $\boldsymbol{v} = 7{,}6\boldsymbol{i} + 6{,}1\boldsymbol{j}$. (Údaje jsou v metrech za sekundu, směr vektoru $\boldsymbol{i}$ je vodorovný a směr vektoru $\boldsymbol{j}$ svislý). (a) Do jaké největší výšky míč vystoupil? (b) Jaký byl jeho dolet? (c) Určete rychlost míče při výkopu a (d) těsně před dopadem na zem (velikost a směr).

38Ú. V detektivce objevila policie tělo pohřešovaného pod otevřeným oknem, ve vzdálenosti 4,6 m od domu. Okno je ve výšce 24 m nad zemí. Inspektor má podezření, že příčinou smrti nebyla nehoda. Odhadněte, zda může mít pravdu. Odhad zdůvodněte.

39Ú. V Galileiově díle „Rozpravy o dvou nových vědách" se dočteme: „… pro dva různé elevační úhly, lišící se od úhlu 45° o stejnou hodnotu, je délka letu stejná…" Dokažte pravdivost tohoto tvrzení (obr. 4.34).



Obr. 4.33 Úloha 34. Mike Powell při rekordním výkonu

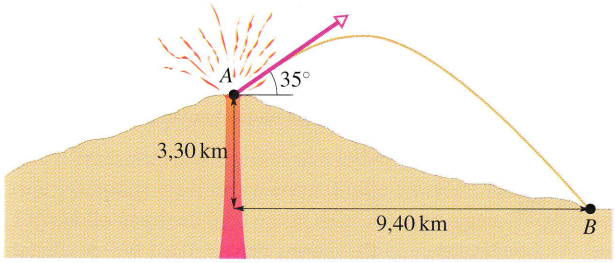


Obr. 4.34 Úloha 39

40Ú. Dolet při šikmém vrhu tělesa nezávisí jen na počáteční rychlosti, určené velikostí v_0 a elevačním úhlem θ_0, ale i na hodnotě tíhového zrychlení g. Ta je ovšem na různých místech zemského povrchu různá. Na olympijských hrách v Berlíně ($g = 9{,}812\,8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) v roce 1936 překonal Jesse Owens dosavadní světový rekord ve skoku do dálky výkonem 8,09 m. Jakého výkonu by dosáhl v Melbourne v roce 1956 ($g = 9{,}799\,9\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) při stejných hodnotách v_0 a θ_0?

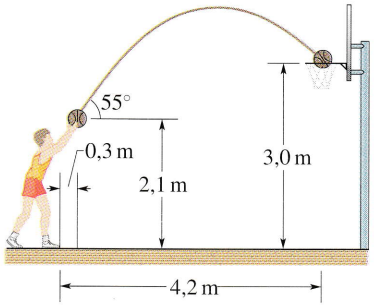
41Ú. Při baseballovém utkání chce hráč z třetí mety dohodit míč na první metu vzdálenou 38,7 m. Největší rychlost, kterou dokáže míč vyhodit, má velikost 137 km/h. (a) Jak daleko od první mety míč dopadne, vyhodí-li jej hráč vodorovným směrem ve výšce 0,9 m nad zemí? (b) Pod jakým elevačním úhlem musí hráč míč vyhodit, aby jej spoluhráč na první metě zachytil ve výšce 0,9 m nad zemí? (c) Jak dlouho v tomto případě míč poletí?

42Ú. Při sopečné erupci bývají z kráteru vymrštěny velké balvany. Na obr. 4.35 je znázorněn řez japonskou sopkou Fuji. (a) Jak velkou počáteční rychlost by musely balvany mít, aby při elevačním úhlu 35° dopadly do bodu *B* na úpatí sopky? (b) Jaká by byla doba jejich letu? V obou případech zanedbáváme vliv odporu prostředí. (c) Jak by se změnil výsledek části (a), kdybychom odpor prostředí vzali v úvahu?



Obr. 4.35 Úloha 42

43Ú. Jak velkou počáteční rychlostí musí basketbalista na obr. 4.36 vyhodit míč pod elevačním úhlem 55°, aby dopadl přímo do koše?

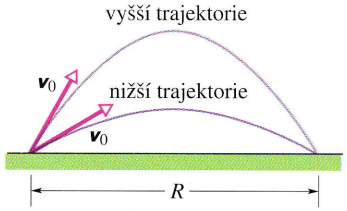


Obr. 4.36 Úloha 43

44Ú. Po 4,5 sekundách letu dopadl fotbalový míč do vodorovné vzdálenosti 46 m od místa výkopu. Jaká byla jeho počáteční rychlost (velikost a směr), jestliže mu ji hráč udělil při výskoku, ve výšce 1,5 m nad zemí?

45Ú. Golfista odpálil míček počáteční rychlostí o velikosti 43 $m \cdot s^{-1}$ pod elevačním úhlem 30°. Míček doletěl do vzdálenosti 180 m. Předpokládejte, že golfové hřiště je v tomto místě vodorovné. (a) Jak vysoko míček vyletěl? (b) Jak velká byla jeho rychlost těsně před dopadem?

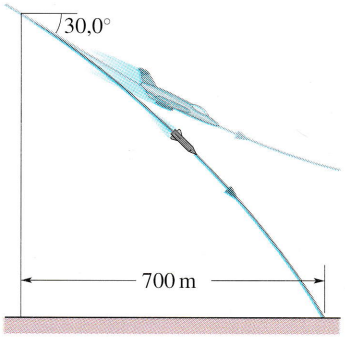
46Ú. Projektil byl vystřelen ze země počáteční rychlostí o velikosti $v_0 = 30{,}0\ m \cdot s^{-1}$ a zasáhl cíl ležící na zemi ve vzdálenosti 20,0 m (obr. 4.37). Určete obě možné hodnoty elevačního úhlu.



Obr. 4.37 Úloha 46

47Ú. Hráč baseballu dokáže dohodit míč do vzdálenosti 60 m. Určete největší možnou výšku takového hodu.

48Ú. Letadlo sestupuje pod úhlem 30° rychlostí o velikosti 290 km/h. Pilot uvolní „radarovou návnadu" (obr. 4.38), která dopadne na zem ve vodorovné vzdálenosti 700 m od místa uvolnění. (a) V jaké výšce pilot návnadu uvolnil? (b) Jak dlouho trval její pád?



Obr. 4.38 Úloha 48

49Ú. Hráč vykopne míč rychlostí 20 $m \cdot s^{-1}$ pod elevačním úhlem 45°. V tomtéž okamžiku vyběhne jeho spoluhráč, vzdálený o 55 m, míči naproti. Jakou průměrnou rychlostí musí běžet, aby zachytil míč těsně před jeho dopadem na zem? Odpor prostředí zanedbejte.

50Ú. Míč se kutálí po plošině nad schodištěm rychlostí 1,5 m/s a směřuje přímo ke schodišti. Šířka i výška každého schodu mají stejnou hodnotu 20 cm. Na který schod shora míč poprvé doskočí?

51Ú. Při sestupu svírá rychlost letadla se svislým směrem úhel 53°. Ve výšce 730 m uvolní pilot bombu, která dopadne na zem po 5,00 s letu. (a) Jaká je velikost rychlosti letadla? (b) Do jaké vodorovné vzdálenosti od místa uvolnění bomba dopadne? (c) Určete vodorovnou a svislou složku její rychlosti těsně před dopadem.

52Ú. Míč je vržen vodorovným směrem z místa ve výšce 20 m nad zemí. Na zem dopadne trojnásobnou rychlostí. Jaká byla jeho počáteční rychlost?

53Ú. (a) Při podání odpálil tenista míček vodorovně rychlostí o velikosti 23,6 $m \cdot s^{-1}$. K úderu došlo ve výšce 2,37 m nad povrchem kurtu. V jaké výšce přeletí míček nad horním okrajem sítě, je-li síť ve vzdálenosti 12 m a je vysoká 0,90 m? (b) Při dalším podání má míček stejně velkou rychlost, úder však směřuje 5,00° pod vodorovnou rovinu. Zdaří se podání?

54Ú. V příkladu 4.8 jsme zjistili, že největší dolet střely vypálené z přístavní pevnosti je 690 m. O jakou vzdálenost by musela pirátská loď ještě ustoupit, kdyby bylo dělo umístěno ve výšce 30 m nad hladinou moře?

55Ú. Pálkař odehraje míček ve výšce 1,2 m nad zemí pod elevačním úhlem 45°. Dolet míčku je 107 m. Pravidla hry zaručují zisk bodu, přeletí-li míček plot vysoký 7,3 m a vzdálený 98 m. Zjistěte, zda hráč získal bod a v kladném případě určete, jak vysoko nad plotem míček přeletěl.

56Ú*. Fotbalista dokáže odehrát míč rychlostí 25 $m \cdot s^{-1}$. Určete interval, v němž musí ležet elevační úhel, aby hráč skóroval. Branka je ve vzdálenosti 50 m a její břevno je 3,44 m nad zemí. (Využijte vztahu $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, vyjádřete $1/\cos^2\theta$ pomocí $\mathrm{tg}^2\theta$ a řešte získanou kvadratickou rovnici pro $\mathrm{tg}\,\theta$.)

ODST. 4.7 Rovnoměrný pohyb po kružnici

57C. Jeden z modelů atomu vodíku je založen na představě elektronu obíhajícího kolem protonu po kruhové dráze o průměru $5{,}28 \cdot 10^{-11}$ m rychlostí o velikosti $2{,}18 \cdot 10^{6}$ $m \cdot s^{-1}$. Určete (a) zrychlení elektronu a (b) periodu jeho pohybu.

58C. Určete (a) velikost, (b) směr zrychlení sprintera při běhu zatáčkou o poloměru 25 m. Velikost rychlosti běžce je 10 $m \cdot s^{-1}$.

59C. Nabitá částice se za určitých podmínek pohybuje v magnetickém poli po kruhové dráze. Předpokládejme, že elektron, pro který jsme takové podmínky zajistili, se pohybuje po kružnici o poloměru 15 cm s dostředivým zrychlením o velikosti o $3{,}0 \cdot 10^{14}$ $m \cdot s^{-2}$. (a) Určete jeho rychlost a (b) periodu jeho pohybu.

60C. Sprinter běží rychlostí 9,2 $m \cdot s^{-1}$ po kruhové dráze. Dostředivé zrychlení má velikost 3,8 $m \cdot s^{-2}$. (a) Jaký je poloměr dráhy? (b) Jaká je perioda pohybu?

61C. Umělá družice Země obíhá po kruhové dráze ve výšce 640 km nad zemským povrchem. Perioda jejího pohybu je 98,0 min. (a) Jaká je její rychlost? (b) Jaké je gravitační zrychlení v uvedené výšce?

62C. Kosmická sonda odolá mechanickým pnutím při zrychlení nejvýše $20g$. (a) Jaký je nejmenší přípustný poloměr její trajektorie, je-li velikost její rychlosti rovna jedné desetině rychlosti světla? (b) Za jakou dobu opíše polohový vektor takové sondy oblouk příslušný úhlu 90°?

63C. Vrtule ventilátoru se otáčí 1 200krát za minutu. Sledujme bod na konci listu vrtule ve vzdálenosti 0,15 m od osy otáčení. (a) Jakou dráhu opíše tento bod při jedné otáčce vrtule? (b) Jaká je velikost jeho rychlosti? (c) S jakým zrychlením se pohybuje? (d) Jaká je perioda jeho pohybu?

64C. Francouzský expresní vlak TGV (Train à Grande Vitesse, česky „rychlovlak“) má stanovenou průměrnou rychlost 216 km/h. (a) Nejvyšší přípustná velikost zrychlení při průjezdu zatáčkou je pro pohodlí cestujících dána hodnotou $0{,}050g$. Jaký je nejmenší možný poloměr zatáčky, kterou může vlak projíždět uvedenou rychlostí? (b) Musí vlak v zatáčce o poloměru 1,00 km zpomalit? Na jakou rychlost?

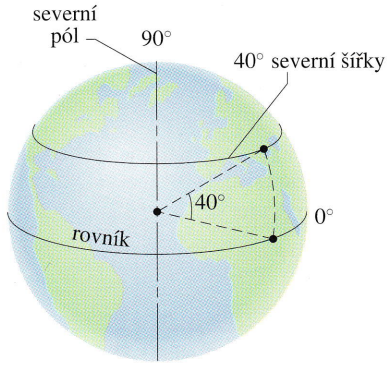
65C. Po výbuchu *supernovy* se může její jádro smrštit tak, že se stane *neutronovou hvězdou* s poloměrem přibližně 20 km. Předpokládejme, že neutronová hvězda vykoná jednu otáčku za jednu sekundu. (a) Jakou rychlostí se pohybuje bod na jejím rovníku? (b) Vyjádřete dostředivé zrychlení tohoto bodu (v $m \cdot s^{-2}$ a v násobcích g). (c) Jak se změní výsledky částí (a) a (b) při vyšší rychlosti rotace?

66C. Kosmonaut se otáčí na centrifuze s poloměrem 5,0 m ve vodorovné rovině. (a) Jakou rychlostí se pohybuje, má-li dostředivé zrychlení velikost $7{,}0g$? (b) Kolikrát za minutu se centrifuga otočí? (c) Jaká je perioda jejího pohybu?

67Ú. (a) Jaké je dostředivé zrychlení na zemském rovníku způsobené rotací Země? (b) Jaká by musela být perioda rotace Země, aby jeho velikost měla hodnotu 9,8 $m \cdot s^{-2}$?

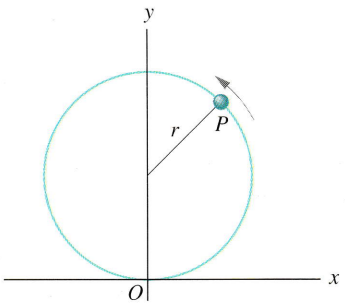
68Ú. Ruské kolo má poloměr 15 m a otočí se pětkrát za minutu. (a) Jaká je perioda pohybu kola? (b) Určete dostředivé zrychlení v nejvyšším a (c) v nejnižším bodě trajektorie.

69Ú. Vypočtěte zrychlení člověka na 40° severní šířky způsobené rotací Země (obr. 4.39).



Obr. 4.39 Úloha 69

70Ú. Částice se pohybuje konstantní rychlostí po kruhové dráze o poloměru $r = 3{,}00$ m (obr. 4.40) a vykoná jednu otáčku za



Obr. 4.40 Úloha 70

20,0 s. V čase $t = 0$ právě prochází počátkem O. Určete velikosti a směry následujících vektorů. (a) Polohové vektory částice vzhledem k počátku v okamžicích $t = 5{,}00$ s, $t = 7{,}50$ s a $t = 10{,}00$ s. (b) Vektor jejího posunutí v časovém intervalu od páté do desáté sekundy. (c) Vektor průměrné rychlosti v tomto

časovém intervalu. (d) Okamžitou rychlost a (e) zrychlení na počátku a konci tohoto intervalu.

71Ú. Chlapec točí kamenem uvázaným na provazu dlouhém 1,5 m. Kámen rovnoměrně obíhá ve vodorovné rovině, ve výšce 2,0 m nad zemí. Náhle se provaz přetrhne a kámen dopadne 10 m od chlapce. Jaké bylo dostředivé zrychlení kamene při rotaci?

ODST. 4.8 Vzájemný pohyb po přímce

72C. Loď pluje proti proudu řeky rychlostí 14 km/h vzhledem k vodnímu proudu. Voda v řece teče rychlostí 9 km/h. (a) Jakou rychlostí pluje loď vzhledem k břehům řeky? (b) Chlapec na lodi jde po palubě od přídě k zádi rychlostí 6 km/h. Jaká je jeho rychlost vzhledem k břehům?

73C. Muž vystoupí po nehybném eskalátoru dlouhém 15 m za čas 90 s. Jedoucí eskalátor překoná tutéž vzdálenost za 60 s. Za jakou dobu vystoupí člověk po pohybujícím se eskalátoru? Je výsledek závislý na délce eskalátoru?

74C. Trasa mezikontinentálního letu má délku 4 350 km a směřuje východozápadním směrem. Podle letového řádu trvá cesta z východu na západ o 50 minut déle než cesta zpáteční. Rychlost letadla je 960 km/h a vítr vane západním nebo východním směrem. S jakou rychlostí větru se počítalo při sestavování letového řádu?

75C. Kameraman stojí na otevřené plošině dodávky a filmuje běžícího geparda. Dodávka jede rychlostí 65 km/h západním směrem, gepard běží ve stejném směru a je o 48 km/h rychlejší. Náhle se gepard zastaví, otočí se a běží zpět na východ rychlostí 97 km/h vzhledem k zemi. Celý obrat trvá 2,0 s. Určete průměrné zrychlení zvířete vzhledem ke kameramanovi i vzhledem k zemi.

76C. Na letišti v Ženevě usnadňují pohyb cestujících dlouhými koridory „pojízdné chodníky". Petr chodník nepoužil a prošel koridorem za 150 s. Pavel, stojící v klidu na jedoucím chodníku, urazil tutéž vzdálenost za 70 s. Marie šla po chodníku stejnou rychlostí jako Petr. Za jak dlouho prošla Marie koridorem?

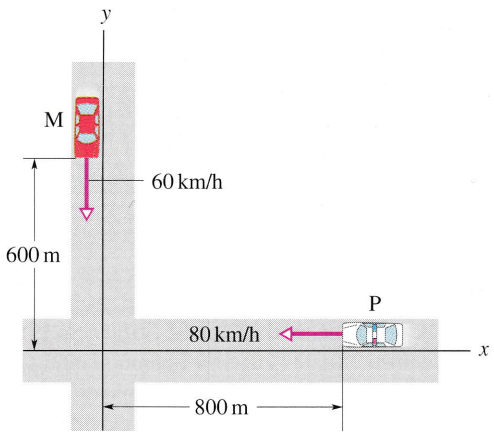
ODST. 4.9 Vzájemný pohyb v rovině

77C. Pravidla ragby (obr. 4.41) zakazují tzv. „dopředné" přihrávky. (Průmět rychlosti míče do podélného směru hřiště nesmí směřovat k brance soupeře.) Předpokládejme, že hráč běží k brance protihráčů rychlostí o velikosti 4,0 $m \cdot s^{-1}$, rovnoběžně s podélným okrajem hřiště. V běhu přihrává svému spoluhráči a odhazuje míč (vzhledem k sobě) rychlostí o velikosti 6,0 $m \cdot s^{-1}$. Pod jakým nejmenším úhlem vzhledem k podélnému rozměru hřiště může míč odhodit, aby neporušil pravidla?

78C. Obr. 4.42 zachycuje dopravní situaci na křižovatce dvou silnic. Policejní automobil P, vzdálený 800 m od křižovatky, jede rychlostí o velikosti 80 km/h. Vozidlo M je od křižovatky vzdáleno 600 m a na jeho tachometru je údaj 60 km/h. (a) Určete rychlost vozidla M vzhledem k policejnímu autu. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů. (b) Jaký úhel svírá rychlost vypočtená v části (a) se spojnicí vozidel? (c) Předpokládejte, že automobily pokračují v jízdě nezměněnou rychlostí. Mění se odpovědi částí (a) a (b), když se vozy přibližují ke křižovatce?



Obr. 4.41 Cvičení 77

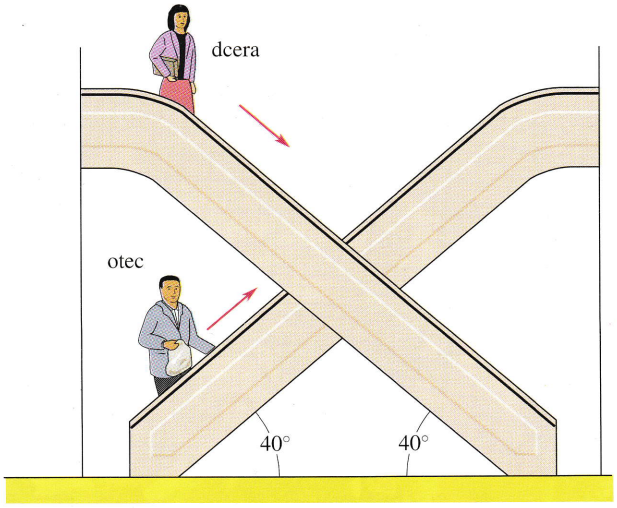


Obr. 4.42 Cvičení 78

79C. Sníh padá svisle rychlostí o velikosti 8,0 $m \cdot s^{-1}$. Pod jakým úhlem od svislého směru vidí padat sníh řidič automobilu, který jede po rovné silnici rychlostí o velikosti 50 km/h?

80C. Eskalátory v obchodním domě jsou konstruovány tak, že svírají s vodorovnou rovinou úhel 40° a pohybují se rychlostí o velikosti 0,75 $m \cdot s^{-1}$. Muž stojící na stoupajícím eskalátoru uvidí svou dceru, která již nakoupila a jede směrem dolů (obr. 4.43). Určete rychlost otce vzhledem k dceři. Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů.

81Ú. Vrtulník letí ve výšce 9,5 m nad plochým terénem stálou rychlostí o velikosti 6,2 $m \cdot s^{-1}$. Pilot vyhodí balík ve vodorovném směru proti směru letu. Jeho rychlost vzhledem k vrtulníku má velikost 12 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jaká je jeho počáteční rychlost vzhledem k zemi? (b) Určete vodorovnou vzdálenost balíku a letadla v okamžiku, kdy balík dopadne na zem. (c) Pod jakým úhlem dopadne balík na zem vzhledem k pozorovateli na zemi?



Obr. 4.43 Cvičení 80

82Ú. Vlak jede na jih rychlostí o velikosti 30 m·s^{-1} (vzhledem k zemi). Prší a vítr žene déšť jižním směrem. Trajektorie dešťových kapek vzhledem k zemi svírají se svislým směrem úhel 70°. Cestujícímu ve vlaku se však zdá, že kapky padají svisle. Určete velikost rychlosti kapek vzhledem k zemi.

83Ú. Malé letadlo může vzhledem k okolnímu vzduchu dosáhnout rychlosti o velikosti 500 km/h. Pilot má dopravit pasažéry do místa vzdáleného 800 km přesně na sever. Zjistí však, že má-li letět přímo k severu, musí odklonit kurs o 20,0° na východ. Let trvá 2,00 h. Určete rychlost větru (směr i velikost).

84Ú. Dvě lodi A a B vyplouvají z přístavu ve stejném okamžiku. Loď A pluje přesně na severozápad rychlostí 24 uzlů a loď B míří jihozápadně, pod úhlem 40° vzhledem k místnímu poledníku, rychlostí 28 uzlů (1 uzel = 1 námořní míle za hodinu, viz dod. D). (a) Určete velikost a směr rychlosti lodi A vzhledem k lodi B. (b) Za jak dlouho bude mezi plavidly vzdálenost 160 námořních mil? (c) Určete směr pohybu lodi A vzhledem k lodi B v tomto okamžiku.

85Ú. Státní policie v New Hampshire provádí měření rychlosti vozidel z letadla. Dálnice vede ve sledované oblasti severojižním směrem. Letadlo se pohybuje vzhledem k okolnímu vzduchu rychlostí o velikosti 217 km/h a letí neustále podél dálnice, přímo na sever. Pozemní služba hlásí, že vítr vane rychlostí 113 km/h, zapomene však udat jeho směr. Pilot zjistí zvláštní věc: bez ohledu na vítr urazil podél dálnice za dobu 1,00 h vzdálenost 217 km. Rychlost letadla vzhledem k zemi je tedy stejná jako za bezvětří. (a) Kterým směrem vítr vane? (b) Kam míří příď letadla (jaký úhel svírá podélná osa letadla s dálnicí)?

86Ú. Nákladní vagon s dřevěnými stěnami jede po přímém úseku železniční trati rychlostí o velikosti v_1. Ostřelovač pálí na vagon z velkorážné pušky. Střela, jejíž počáteční rychlost má velikost v_2, prorazí obě boční stěny vagonu. Spojnice otvorů je kolmá ke směru jízdy. Pod jakým úhlem vzhledem ke kolejím ostřelovač mířil? Předpokládejte, že směr letu střely se při průchodu stěnou nezmění, velikost její rychlosti se však sníží o 20 %. Pro číselný výpočet použijte hodnoty $v_1 = 85$ km/h, $v_2 = 650$ m/s. (Jak to, že nepotřebujeme znát šířku vagonu?)

87Ú. Skifařka dokáže v klidné vodě pádlovat rychlostí 6,0 km/h. (a) Kterým směrem musí namířit příď lodi, aby přejela kolmo k jejím břehům, je-li rychlost vodního proudu 3,0 km/h? (b) Za jak dlouho přejede řeku širokou 6,0 km? (c) Při další jízdě vesluje nejprve 3,0 km *po* proudu řeky (vzdálenost měřena vzhledem ke břehům) a poté se vrátí do výchozího místa. Jak dlouho trvá tato jízda? (d) Jak se změní výsledek části (c), pojede-li skifařka nejprve 3,0 km *proti* proudu a zpět se vrací po proudu? (e) V jakém směru by musela veslovat (vzhledem ke břehům), kdyby chtěla přejet na protější břeh v nejkratším možném čase bez ohledu na místo přistání? Jak dlouho by to trvalo?

ODST. 4.10 Vzájemný pohyb při vysokých rychlostech

88C. Kosmická loď A směřuje ke středu naší galaxie. Posádka zaregistruje záblesk světla, který se šíří rychlostí c ve směru pohybu lodi. Záblesk je zaznamenán i druhou kosmickou lodí B, která letí vzhledem k A rychlostí o velikosti $0{,}98c$. Jakou rychlost světelného pulzu naměří pozorovatel na lodi B, letí-li jeho loď (a) ve stejném směru jako loď A, (b) v opačném směru než loď A?

89C. Elektron letí vzhledem k pozorovateli B rychlostí $0{,}42c$. Pozorovatel B se pohybuje rychlostí $0{,}63c$ vzhledem k pozorovateli A, stejným směrem jako elektron. Jakou rychlost elektronu naměří pozorovatel A?

90Ú. Posádka kosmické lodi A, která letí k hvězdě Betelgeuze, zaznamená svazek protonů, který míjí loď ve stejném směru a rovněž míří k této hvězdě. Rychlost protonů vzhledem k lodi je $0{,}980\,0c$. Rychlost protonů ve svazku měří i posádka lodi B, cestující po téže přímce jako loď A, a získá výsledek $-0{,}980\,0c$. Určete vzájemnou rychlost lodí.

91Ú. Galaxie Alfa se od Země vzdaluje rychlostí o velikosti $0{,}35c$. Galaxie Beta, která je právě na opačné straně, se vzdaluje rychlostí stejně velkou. Pozorovatel v galaxii Alfa měří rychlost, jíž se od něj vzdaluje (a) Země, (b) Galaxie Beta. Dokážete předpovědět výsledky jeho měření?

PRO POČÍTAČ

92Ú. Jestliže při šikmém vrhu tělesa neleží místo dopadu na stejné vodorovné úrovni jako místo vrhu, není délka vrhu (vodorovná vzdálenost místa dopadu od místa vrhu) největší při elevačním úhlu 45°. Předpokládejme, že koulař hodil kouli z místa, které je ve výšce h nad úrovní hřiště. Velikost počáteční rychlosti koule je v_0, elevační úhel označme θ. Ukažte, že délka vrhu je dána vztahem

$$d = \frac{v_0 \cos\theta}{g}\left(v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}\right).$$

(b) Sestavte program pro výpočet vzdálenosti d v závislosti na úhlu θ pro zadané hodnoty v_0 a h. (c) S přesností na půl stupně určete elevační úhel, při němž bude délka vrhu největší pro hodnoty $v_0 = 9{,}0$ m·s^{-1} a $h = 2{,}1$ m. Vypočtěte i tuto největší délku. (d) Závisí výsledky předchozí úlohy na velikosti počáteční

rychlosti? Proveďte výpočet ještě pro hodnoty $v_0 = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_0 = 15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (Větší z těchto hodnot vysoce přesahuje reálné možnosti i těch nejlepších sportovců.)

93Ú. V této úloze budeme uvažovat o tom, jak se s časem mění vzdálenost šikmo vrženého tělesa od místa vrhu. Nemáme nyní na mysli pouze vodorovnou složku polohového vektoru tělesa vzhledem k místu vrhu, jako tomu bylo v předchozích úlohách, nýbrž jeho *velikost*. Bezprostředně po vyhození tělesa tato veličina s časem vždy nejprve roste. V některých případech však může od jistého okamžiku začít klesat a teprve po uplynutí další doby se její průběh opět změní v rostoucí funkci času. Konkrétní situace je závislá na volbě elevačního úhlu. Sestavte program, který pro danou hodnotu velikosti počáteční rychlosti a různé elevační úhly provede opakovaný výpočet okamžité vzdálenosti tělesa od místa vrhu v časovém intervalu od $t = 0$ (okamžik vrhu) až do okamžiku několik sekund po průletu tělesa počáteční úrovní s časovým krokem Δt. Pro konkrétní výpočet zvolte $v_0 = 100\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{s}$, elevační úhly měňte od 5° do 90° s krokem 5°. Pro každý elevační úhel odhadněte časové intervaly, ve kterých se těleso přibližuje a vzdaluje od místa vrhu. (Podrobněji viz James S. Walker: „Projectiles, Are They Comming or Going?“, *The Physics Teacher*, May 1995.)

94Ú. Pálkař odehraje baseballový míč ve výšce 1,00 m nad zemí. Udělí mu při tom počáteční rychlost o velikosti v_0, která svírá s vodorovnou rovinou úhel θ. Ve vzdálenosti 110 m od postavení pálkaře je plot, vysoký 2,40 m. (a) Pro $v_0 = 35{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ určete interval, v němž musí ležet elevační úhel θ, má-li míč plot přeletět. Dolní a horní mez tohoto intervalu jsou určeny podmínkou těsného přeletu míče nad plotem. (*Tip*: Místo explicitního řešení parametrických rovnic trajektorie pro neznámou θ je možné určit hledané úhly grafickou metodou. V úloze je totiž zadána poloha bodu, kterým musí trajektorie míče projít, aby byly podmínky zadání ještě splněny. Z parametrických rovnic trajektorie lze získat dvě různé závislosti úhlu θ na okamžiku průletu míče tímto bodem. Zakreslete je do grafu a určete průsečík získaných křivek.) (b) Pro elevační úhel $\theta = 40°$ určete nejmenší hodnotu v_0, při níž míč ještě přeletí plot. (c) Aby míč přeletěl plot při pevně zvoleném elevačním úhlu, je třeba, aby velikost jeho počáteční rychlosti převyšovala určitou minimální hodnotu $v_0(\theta)$, závislou na tomto úhlu (viz část (b)). Určete nejmenší ze všech těchto mezních hodnot a najděte odpovídající úhel θ. (d) Řešte část (c) pro případ, že pálkař stojí ve vzdálenosti 96 m od zdi vysoké 12,2 m.

95Ú. Golfista vypálí míček směrem ke svislé zdi vzdálené 20,0 m. Snaží se při tom zasáhnout červený kruh o průměru 30,0 cm, namalovaný na zdi. Střed kruhu je 1,20 m nad zemí. Počáteční rychlost míčku má velikost $15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, elevační úhel je 35,0°. (a) Za jak dlouho po úderu narazí míček na stěnu? (b) Zasáhne červený kruh? (c) Jak velkou rychlostí narazí? (d) Prošel míček před nárazem vrcholem své trajektorie?

96Ú. Cyklista je v jistém okamžiku 40,0 m východně od vlajkového stožáru umístěného v parku a jede na jih rychlostí $10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Po 30,0 s je vzdálen od stožáru 40,0 m na sever a jede východním směrem rychlostí o velikosti $10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) posunutí, (b) průměrnou rychlost a (c) průměrné zrychlení za tento časový interval. (d) Vypočtěte rozdíl $\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_\mathrm{f} - \boldsymbol{v}_\mathrm{i})$, kde $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ je rychlost cyklisty na počátku tohoto intervalu a $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$ je rychlost na jeho konci.

97Ú. V jistém okamžiku je polohový vektor motýla vzhledem k rohu zahradního jezírka roven $\boldsymbol{D}_\mathrm{i} = (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (1{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$. Po 40,0 s je $\boldsymbol{D}_\mathrm{f} = (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (1{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$. Určete (a) vektor posunutí (pomocí jednotkových vektorů), (b) velikost posunutí, (c) průměrnou rychlost a (d) průměrnou velikost rychlosti motýla v uvedeném časovém intervalu.

5
Síla a pohyb I



Všude na světě mají lidé v oblibě soutěže a rekordy. Snad proto, aby se přesvědčili, že hranice lidských možností lze neustále posouvat. A tak se tu a tam dovídáme o nejrůznějších neobvyklých výkonech, včetně neuvěřitelných siláckých kousků. Jeden z nich předvedl 4. dubna 1974 belgický silák John Massis, když se mu podařilo posunout dva osobní vagony newyorské železniční společnosti Long Island: zuby stiskl náústek připevněný k lanu, na němž byly vagony uvázány, zapřel se chodidly do pražců a zaklonil se. Vozy vážily kolem osmdesáti tun. Napadne nás, že Massis určitě musel vyvinout nadlidskou sílu, aby je uvedl do pohybu! Je tomu tak skutečně?

5.1 ČÍM JE ZPŮSOBENO ZRYCHLENÍ?

Pozorujeme-li, že rychlost nějakého malého tělíska mění svou velikost nebo směr, můžeme si být jisti, že něco muselo tuto změnu (toto zrychlení) *způsobit*. Z běžné zkušenosti totiž víme, že změna rychlosti tělesa je způsobena jeho interakcí s okolními objekty. Pozorujeme-li například hokejový kotouč, který klouže po ledové ploše a náhle se zastaví či náhle změní směr, usuzujeme, že určitě narazil do nějakého hrbolku na ledovém povrchu.

Zrychlení tělíska je způsobeno jeho **interakcí** (vzájemným působením) s okolními objekty. Kvantitativně ji popisujeme fyzikální veličinou, kterou nazýváme **síla**. Snadno si dokážeme představit, že některý z okolních objektů působí na tělísko například silou tlakovou nebo tahovou.* Úder povrchové nerovnosti do hokejového kotouče lze například popsat jako tlakové působení, které je příčinou zrychlení kotouče. Tato kapitola je věnována diskusi o vztahu mezi zrychlením a silami, které je způsobují. Jako první jej pochopil Isaac Newton (1642–1727). Teorii založenou na jeho způsobu prezentace tohoto vztahu nazýváme *newtonovskou mechanikou*.

Newtonovská mechanika není použitelná v každé situaci. O jednom omezení její platnosti už víme: v kap. 4 jsme se zmínili o případech, kdy rychlosti interagujících těles nejsou zanedbatelné ve srovnání s rychlostí světla. Tehdy musíme nahradit newtonovskou mechaniku Einsteinovou speciální teorií relativity, platnou pro všechny rychlosti, včetně rychlostí blízkých rychlosti světla. Druhé omezení souvisí přímo s povahou samotné fyzikální soustavy. Náleží-li interagující objekty do oblasti mikrosvěta (například elektrony v atomu), je třeba zaměnit newtonovskou mechaniku mechanikou kvantovou. Fyzikové dnes chápou newtonovskou mechaniku jako speciální případ těchto obecnějších teorií. Jedná se však o případ velmi významný, neboť je použitelný pro studium pohybu těles v obrovském rozsahu jejich velikostí, od objektů velmi malých, téměř na hranici atomové struktury, až k objektům astronomickým, jako jsou galaxie či jejich kupy.

Zamyslíme se nyní nad prvním pohybovým zákonem newtonovské mechaniky.

5.2 PRVNÍ NEWTONŮV ZÁKON

Před tím, než Newton formuloval svoji mechaniku, panoval názor, že jakési působení, tj. „síla", je nezbytné pro udržení tělesa v pohybu se stálou rychlostí. Klid byl považován za „přirozený stav" těles. Aby se těleso pohybovalo stálou rychlostí, mělo by být nějak poháněno, třeba tlakem či tahem. Jinak by se „přirozeně" zastavilo. Takové úvahy se zdají být rozumné. Uvedeme-li například knihu do klouzavého pohybu po dřevěné podlaze, bude se skutečně zpomalovat a nakonec se zastaví. Hodláme-li docílit toho, aby po podlaze klouzala stálou rychlostí, měli bychom ji neustále tlačit či táhnout.

Po ledové ploše by ovšem kniha dorazila o něco dále. Lze si představovat stále delší a kluzčí plochy, po nichž by kniha klouzala do větší a větší vzdálenosti, než by se zastavila. V limitě můžeme uvažovat o dlouhé, extrémně kluzké ploše, kterou budeme nazývat **dokonale hladká podložka**. Při pohybu po ní se kniha takřka nezpomaluje. (Takovou situaci lze připravit v laboratoři, máme-li k dispozici vodorovnou vzduchovou lavici, podél níž se kniha pohybuje na vzduchovém polštáři.)

Dospěli jsme k závěru, že k udržení stálé rychlosti pohybu tělesa *nepotřebujeme* sílu. Dokážeme si jistě uvědomit, že ani k udržení rotačního pohybu tělesa, které bylo jednou roztočeno kolem nějaké vhodně zvolené osy, nepotřebujeme v ideálním případě žádné silové působení. Stačí si představit setrvačník. Prozatím však nebudeme další výklad tímto způsobem komplikovat, i když tím původní Newtonovu formulaci jeho mechaniky poněkud ochudíme. Abychom automaticky vyloučili úvahy o otáčivém pohybu, budeme pracovat výhradně s modelem *hmotného bodu* neboli *částice*, který jsme zavedli již v kap. 2, i když někdy, zejména v úlohách, budeme hovořit o tělese nebo konkrétním objektu. Částici, na kterou její okolí nepůsobí, nazveme volnou. **Volná částice** je samozřejmě opět jedním z idealizovaných modelů, který však vystihuje celou řadu reálných situací ve velmi dobrém přiblížení. Jako volná se částice chová například tehdy, nelze-li vliv jednotlivých okolních objektů na její pohyb zjistit v rámci přesnosti prováděných měření, anebo se vlivy okolních objektů nějakým způsobem kompenzují.

Dospíváme k formulaci prvního ze tří Newtonových pohybových zákonů.

První Newtonův zákon: Je-li volná částice v klidu vzhledem ke vhodně zvolené vztažné soustavě, pak v něm setrvá. Pohybuje-li se stálou rychlostí, bude v tomto pohybu neustále pokračovat.

Tento zákon dobře zapadá do úvah v čl. 4.8 o vztažných soustavách, jejichž vzájemná rychlost je konstantní. Bude-li volná částice v jedné z nich v klidu, bude se vůči druhé pohybovat stálou rychlostí. *Klid* částic nebo vztaž-

* Síla vyjadřuje vzájemné *působení objektů*. Při přesném vyjadřování bychom tedy měli hovořit o silách, kterými na sledované tělísko T *působí okolní objekty* A, B atd. Někdy však budeme stručně říkat, že na tělísko *působí síly*, aniž se staráme o jejich původ.

ných soustav se tedy nijak neliší od *rovnoměrného přímočarého pohybu*.

První Newtonův zákon lze interpretovat i tak, že *zaručuje existenci* preferovaných vztažných soustav, v nichž platí zákony newtonovské mechaniky. Tyto soustavy se vyznačují tím, že v nich jsou volné částice v klidu nebo se pohybují stálou rychlostí. Rychlost vzájemného pohybu takových soustav je tedy rovněž konstantní. Z uvedeného hlediska lze první Newtonův zákon vyjádřit takto:

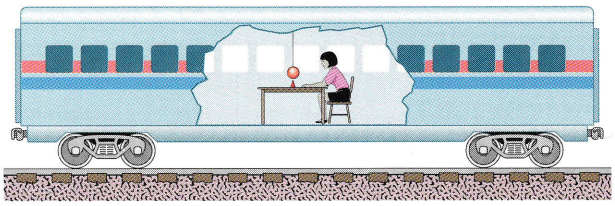
První Newtonův zákon: S každou volnou částicí lze spojit vztažnou soustavu, v níž jsou ostatní volné částice v klidu, nebo se vůči ní pohybují stálou rychlostí.

Newton sám se k formulacím svého prvého zákona vracel řadu let. V jeho díle jich dokážeme vystopovat celkem devět, lišících se zejména výstižností. Žádná z nich, stejně jako formulace dalších Newtonových zákonů, však neobsahuje výslovnou informaci o tom, k jaké vztažné soustavě se váže. Všechny totiž předpokládají **absolutní prostor** a **absolutní čas**, nezávislé na jakýchkoli objektech. Již z Galileiových pokusů však vyplynulo, že zákony mechaniky jsou stejné ve všech vztažných soustavách pohybujících se navzájem rovnoměrně přímočaře, a neumožňují tedy „absolutní prostor a čas" zjistit. V dnešním pojetí newtonovské mechaniky proto interpretujeme první Newtonův zákon jako axiom zaručující existenci *preferovaných* vztažných soustav, soustav **inerciálních**.

Prvnímu Newtonovu zákonu se někdy říká *zákon setrvačnosti*. Vztažné soustavy, které definuje, se nazývají *inerciální vztažné soustavy* nebo jednoduše *inerciální soustavy**.

Obr. 5.1 ukazuje, jak lze zjistit, zda daná vztažná soustava je inerciální. V železničním vagonu, který je v klidu vůči nástupišti, nakreslíme na stůl značku pod rovnovážnou polohu kyvadla. Při pohybu vagonu zůstává tělísko kyvadla neustále nad značkou jedině tehdy, je-li pohyb vagonu rovnoměrný přímočarý.

Pak je vagon inerciální soustavou.



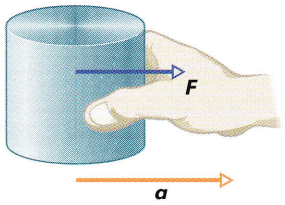
Obr. 5.1 Ověření inerciálnosti vztažné soustavy spojené s železničním vagonem.

Jestliže se vagon urychluje, zpomaluje či zatáčí, uhýbá tělísko od značky. Vůz je v takovém případě neinerciální vztažnou soustavou.

5.3 SÍLA

Síla způsobuje zrychlení tělesa. Jednotku síly nyní definujeme prostřednictvím zrychlení, které síla uděluje standardnímu referenčnímu tělesu. Jako referenční těleso použijeme (spíše v představě nežli ve skutečnosti) standardní kilogram z obr. 1.6. Toto těleso určuje definitoricky přesně hmotnost jednoho kilogramu.

Položíme standardní těleso na vodorovný, dokonale hladký stůl a táhneme je vpravo (obr. 5.2). Když dosáhneme měřeného zrychlení o velikosti 1 $m \cdot s^{-2}$, definujeme velikost síly, kterou na těleso působíme, jako 1 newton (zkráceně N).



Obr. 5.2 Síla ***F*** působí na standardní kilogram a udílí mu zrychlení ***a***.

Můžeme také na standardní těleso působit silou 2 N a měřené zrychlení bude mít velikost 2 $m \cdot s^{-2}$ atd. Obecně, má-li naše standardní těleso o hmotnosti 1 kg zrychlení o velikosti a, víme, že na ně musí působit síla, jejíž velikost F (v newtonech) je číselně rovna velikosti zrychlení (v metrech za sekundu na druhou).

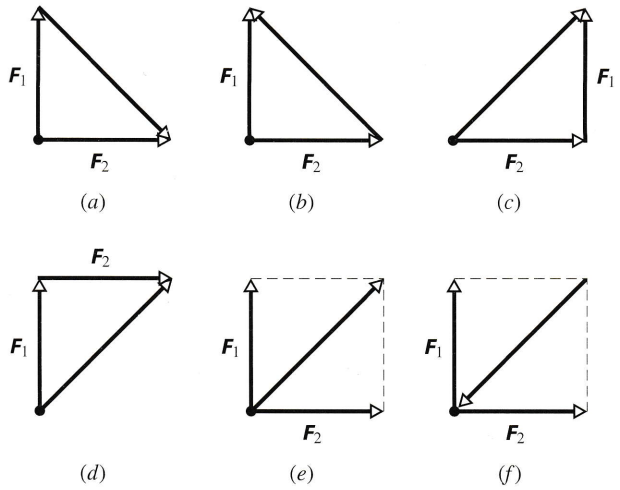
Velikost síly lze tedy měřit prostřednictvím velikosti zrychlení, které síla způsobuje. Zrychlení je však vektorovou veličinou, charakterizovanou jak velikostí, tak směrem. Je síla rovněž vektorovou veličinou? Síle můžeme přisoudit

* Inerciální vztažná soustava, stejně jako volná částice, jsou samozřejmě pouze idealizované modely. Vesmírná tělesa, například hvězdy, však lze za volné částice považovat s velmi dobrou přesností, neboť jejich vzájemné gravitační působení je zanedbatelné díky obrovským vzdálenostem mezi nimi. (Čtenář si může provést odhad velikosti gravitační síly, jíž na sebe působí například Slunce a nejbližší hvězda Proxima v souhvězdí Kentaura.) Vztažné soustavy spojené s takovými tělesy jsou pak v rámci této přesnosti inerciální. Často používáme inerciální soustavu spojenou se Sluncem, zvanou **Galileiova**. V ní umísťujeme počátek soustavy souřadnic do těžiště sluneční soustavy, souřadnicové osy jsou namířeny k vybraným hvězdám. Při studiu pohybů v „pozemských podmínkách" je ovšem výhodné spojovat vztažnou soustavu přímo s „pozemskou laboratoří", tj. povrchem Země v daném místě. Tato soustava však vlivem pohybu Země kolem Slunce a zejména vlivem její vlastní rotace není inerciální (odhadněte velikosti příslušných zrychlení). Pokud však neprovádíme velmi přesná měření, lze i s touto vztažnou soustavou, kterou nazýváme **laboratorní**, pracovat jako s inerciální.

směr velmi snadno, totiž shodně se směrem zrychlení. To však nestačí. Vektorový charakter sil musíme ověřit experimentem. Výsledek splňuje očekávání: síly jsou skutečně vektorové veličiny. Mají směr i velikost a skládají se podle pravidel pro sčítání vektorů, uvedených v kap. 3.

Pro označení sil budeme tedy používat tučných symbolů, nejčastěji $\boldsymbol{F}$. Symbol $\sum \boldsymbol{F}$ užijeme pro označení vektorového součtu několika sil, který nazveme **výslednou silou** neboli **výslednicí**. Jako každý vektor lze i jednotlivé síly či výslednici promítat do souřadnicových os a určovat jejich složky. Nakonec poznamenejme, že první Newtonův zákon platí nejen v případech, kdy na těleso nepůsobí žádné síly, ale i tehdy, když síly sice působí, ale jejich výslednice je nulová.

KONTROLA 1: Dvě kolmé síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ na obrázku jsou kombinovány šesti různými způsoby. Které z nich správně určují výslednici $\sum \boldsymbol{F}$?



5.4 HMOTNOST

Každodenní zkušenost nám ukazuje, že jedna a táž síla uděluje různým tělesům různá zrychlení. Představme si, že na podlahu položíme fotbalový míč a stejně velký medicinbal, vycpaný látkou, a do obou prudce kopneme. Aniž bychom museli takový pokus uskutečnit, víme, jak dopadne: lehký fotbalový míč získá výrazně větší zrychlení než těžký medicinbal. Zrychlení obou těles jsou různá proto, že se liší jejich hmotnosti. Avšak co je to přesně hmotnost?

Měření hmotnosti vyložíme pomocí série myšlenkových experimentů. V prvním z nich budeme působit silou na standardní těleso, jehož hmotnost m_0 byla definována jako 1,0 kg. Předpokládejme, že velikost zrychlení standardního tělesa je $1{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Pak můžeme říci, že na těleso působí síla o velikosti 1,0 N.

Nyní budeme působit toutéž silou na jiné těleso, řekněme těleso X, jehož hmotnost není známa. (Je třeba se při tom nějakým způsobem ujistit, i když to může být obtížné, že působící síla je skutečně táž jako v prvním pokusu.)

Předpokládejme, že jsme u tělesa X naměřili zrychlení $0{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Víme, že *méně hmotný* fotbalový míč získá působením téže síly (při výkopu) *větší zrychlení* než hmotnější medicinbal. Můžeme tedy vyslovit následující hypotézu: hmotnosti dvou těles jsou v obráceném poměru velikostí jejich zrychlení, působí-li na obě tělesa stejná síla. Pro těleso X a standardní těleso to znamená, že platí

$$\frac{m_X}{m_0} = \frac{a_0}{a_X}.$$

Pak

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1{,}0\ \mathrm{kg}) \frac{(1{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}{(0{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 4{,}0\ \mathrm{kg}.$$

Naše hypotéza bude ovšem užitečná jedině tehdy, bude-li platit pro libovolnou velikost působící síly. Budeme-li například působit na standardní těleso silou o velikosti 8,0 N, naměříme zrychlení $8{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Bude-li tato síla působit na těleso X, udělí mu zrychlení o velikosti $2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Naše hypotéza pak vede k výsledku

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1{,}0\ \mathrm{kg}) \frac{(8{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}{(2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 4{,}0\ \mathrm{kg},$$

který souhlasí s experimentem. Četné další experimenty potvrzují, že vyslovená hypotéza umožňuje jednoznačně a spolehlivě přisoudit každému tělesu jeho hmotnost.

Experimenty také ukazují, že hmotnost je *vlastní* charakteristikou tělesa, tj. takovou, která je automaticky dána samotnou existencí tělesa. Plyne z nich i to, že hmotnost je skalární veličina. Zůstává však stále neodbytná otázka: Co je to přesně hmotnost?

Slova *hmotnost, hmota* se v běžné řeči hojně užívají. O hmotnosti má proto jistě každý intuitivní představu, snad představu něčeho, co lze přímo smyslově vnímat, „hmatat". Je to velikost tělesa, jeho váha, jeho hustota… ?

Odpověď zní „ne", přestože jsou tyto charakteristiky někdy s hmotností směšovány. Můžeme pouze říci, že *hmotnost tělesa je charakteristika, která určuje poměr mezi silou působící na těleso a udíleným zrychlením.*

Hmotnost již nelze definovat přesněji. K „fyzikálnímu vnímání" hmotnosti můžeme dospět jedině tak, že budeme zkoušet urychlovat různá tělesa, například kopat do fotbalového míče nebo medicinbalu.

5.5 DRUHÝ NEWTONŮV ZÁKON

Všechny dosavadní definice, pokusy a pozorování lze shrnout do jednoduché vektorové rovnice, zvané druhý Newtonův pohybový zákon:

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F} \quad \text{(druhý Newtonův zákon).} \qquad (5.1)$$

Při použití rov. (5.1) si musíme ujasnit, na jaké těleso ji aplikujeme. Pak $\sum \boldsymbol{F}$ je vektorový součet (výslednice) *všech* sil, které působí na *ono* těleso. Do výslednice jsou zahrnuty pouze síly, které působí *na vymezené těleso*, na rozdíl od sil působících na jiná tělesa, která v zadané úloze mohou rovněž figurovat. Součet $\sum \boldsymbol{F}$ zahrnuje pouze *vnější* síly, tj. ty, jimiž na těleso působí jiná tělesa. Neobsahuje síly vnitřní, jimiž působí jednotlivé části tělesa na sebe navzájem.

Jako každá vektorová rovnice je i rov. (5.1) ekvivalentní třem rovnicím skalárním:

$$ma_x = \sum F_x, \quad ma_y = \sum F_y, \quad ma_z = \sum F_z. \qquad (5.2)$$

Tyto rovnice představují vztahy mezi složkami zrychlení tělesa a odpovídajícími složkami výslednice sil, které na těleso působí.

Můžeme si všimnout, že druhý Newtonův zákon není v rozporu s prvním: těleso, na něž nepůsobí žádné síly, se podle rov. (5.1) pohybuje bez zrychlení.

V jednotkách SI podle rov. (5.2) platí

$$1\,\mathrm{N} = (1\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}, \qquad (5.3)$$

což souhlasí s úvahami v čl. 5.3. Přestože budeme téměř výhradně pracovat s jednotkami soustavy SI, poznamenejme, že se stále ještě používají i jiné jednotky, zejména jednotky Britské soustavy a soustavy CGS (centimetr – gram – sekunda). Tab. 5.1 obsahuje příslušné převody. (Viz rovněž dod. D.)

Tabulka 5.1 **Jednotky v druhém Newtonově zákoně (rov. (5.1) a (5.2))**

SOUSTAVA	SÍLA	HMOTNOST	ZRYCHLENÍ
SI	newton	kilogram	$\mathrm{m/s^2}$
CGS	dyn	gram	$\mathrm{cm/s^2}$
britská*	libra (lb)	slug	$\mathrm{ft/s^2}$

* $1\,\mathrm{dyn} = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm/s^2}$, $1\,\mathrm{lb} = 1\,\mathrm{slug{\cdot}ft/s^2}$.

Při řešení úloh pomocí druhého Newtonova zákona často používáme **silový diagram**, v němž je studované těleso vyznačeno bodem a všechny vnější síly, které na těleso působí, případně i jejich výslednice $\sum \boldsymbol{F}$, jsou reprezentovány vektory umístěnými v tomto bodě. (Místo bodu můžeme schematicky kreslit studované těleso.) Diagram bude obsahovat soustavu souřadnicových os a někdy i vektor zrychlení tělesa.

Při řešení úlohy vycházíme z vektorové rovnice (5.1). Postupně si všímáme skalárních rovnic (5.2) a pracujeme tak se složkami vektorů ve směrech jednotlivých souřadnicových os. První ze sady rovnic (5.2) znamená, že součet x-ových složek všech sil určuje x-ovou složku zrychlení tělesa, aniž ovlivňuje jeho y-ovou či z-ovou složku. Podobně je y-ová složka zrychlení určena výhradně součtem y-ových složek všech sil a z-ová složka zrychlení součtem z-ových složek všech sil. Obecně pak platí:

> Složka zrychlení ve směru dané souřadnicové osy je určena výhradně součtem složek všech sil měřených podél téže osy a nezávisí na složkách sil ve směrech os ostatních.

V př. 5.1 půjde o sílu, která na těleso působí ve směru osy x. Pracujeme tedy jen s jedinou složkou síly (ostatní jsou nulové). V př. 5.2 působí na těleso tři síly, z nichž dvě svírají nenulový úhel s osami x a y. V této dvojrozměrné situaci musíme určit jak x-ové, tak y-ové složky sil a použít dvě z rovnic (5.2).

Př. 5.2 poslouží současně jako modelový případ zvláštního typu úloh: Těleso se neurychluje ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$), přestože na ně působí síly. V takové situaci je podle rov. (5.1) $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Výslednice sil je tedy nulová, síly působící na těleso jsou vyváženy. Říkáme, že těleso je **v rovnováze**, případně že *síly* jsou v rovnováze.

Všimněme si ještě jedné vlastnosti rov. (5.2), užitečné pro řešení úloh. Z nulovosti zrychlení vyplývá, že $a_x = 0$, a tedy i $\sum F_x = 0$. Jsou tedy v rovnováze x-ové složky všech sil. Dosadíme-li do $\sum F_x$ konkrétní hodnoty složek působících sil, dostaneme algebraický vztah, využitelný pro řešení úlohy.* Podobně při $a_y = 0$ usoudíme, že $\sum F_y = 0$. Po dosazení y-ových složek sil máme další algebraický vztah.

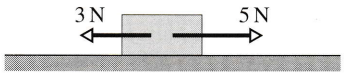
Může se stát, že se složky jednotlivých sil podél některé z os navzájem kompenzují, zatímco u složek měřených ve směru druhé osy tomu tak není. Znamená to, že zrychlení směřuje podél této druhé osy.

Abychom se naučili spolehlivě řešit konkrétní situace, potřebujeme získat určitou zkušenost. Proto zařazujeme do této kapitoly celou řadu příkladů.

KONTROLA 2: Na obrázku jsou zakresleny dvě vodorovné síly působící na kostku pohybující se po dokonale hladké podložce. Předpokládejme, že na kostku

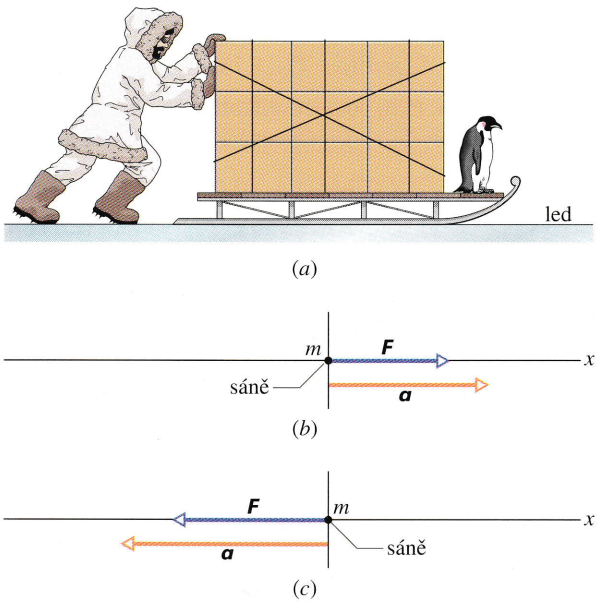
* Vztah umožňuje určit x-ovou složku některé ze sil, známe-li x-ové složky sil ostatních.

působí ještě třetí síla $\boldsymbol{F}_3$. Určete její velikost a směr, je-li kostka (a) v klidu, (b) pohybuje se doleva konstantní rychlostí o velikosti $5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



PŘÍKLAD 5.1

Student experimentální fyziky zkouší testovat platnost pohybových zákonů. Obul si boty s neklouzající podrážkou a tlačí naložené sáně o hmotnosti 240 kg do vzdálenosti 2,3 m po dokonale hladké hladině zamrzlého jezera. Působí na ně při tom stálou vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti $F = 130\ \mathrm{N}$ (obr. 5.3a).



Obr. 5.3 Příklad 5.1. (a) Student tlačí sáně po dokonale hladkém povrchu. (b) Silový diagram příkladu (a), znázorňující výslednou sílu působící na sáně a zrychlení, které tato síla saním udílí. (c) Silový diagram příkladu (b). Člověk nyní sáně táhne, takže jejich zrychlení má opačný směr.

(a) Jaká je výsledná rychlost sání, rozjíždějí-li se z klidu?

ŘEŠENÍ: Obr. 5.3b představuje silový diagram popsané situace. Zvolme osu x vodorovně a orientujme ji doprava. Uvažujme o saních jako o hmotném bodu. Předpokládáme, že síla $\boldsymbol{F}$, kterou působí student, představuje jedinou sílu působící na sáně. Vzhledem k tomu, že F_x je její jediná nenulová složka, určíme velikost zrychlení sání a_x z druhého Newtonova zákona takto:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{(130\ \mathrm{N})}{(240\ \mathrm{kg})} = 0{,}542\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Poněvadž je zrychlení konstantní, můžeme pro zjištění výsledné rychlosti užít vztahu (2.16), $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$. Položíme-li $v_{0x} = 0$, $x - x_0 = d$ a uvědomíme-li si, že v našem případě je $v = v_x$, $a_x = a$, dostaneme pro v:

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2(0{,}542\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(2{,}3\ \mathrm{m})} = \\ = 1{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Síla, zrychlení, posunutí i výsledná rychlost sání mají směr osy x a jejich x-ové složky jsou kladné. Všechny tyto vektory tedy směřují v obr. 5.3b zleva doprava.

(b) Student chce změnit směr rychlosti v opačný během 4,5 s. Jak velkou stálou silou musí sáně táhnout?

ŘEŠENÍ: Užitím rov. (2.11), tj. $v_x = v_{0x} + a_x t$, nejprve určíme zrychlení potřebné ke změně směru rychlosti v opačný během 4,5 s. Dostáváme

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-1{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) - (1{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(4{,}5\ \mathrm{s})} = \\ = -0{,}711\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Velikost tohoto zrychlení je větší než v úloze (a), kde činilo $0{,}542\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, takže je zřejmé, že student musí nyní táhnout sáně větší silou. Tuto sílu určíme z prvé rovnice ze sady rov. (5.2), uvědomíme-li si, že $a_y = 0$ a $a_z = 0$.

$$F_x = ma_x = (240\ \mathrm{kg})(-0{,}711\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = -171\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znaménko minus ukazuje, že student musí táhnout sáně ve směru klesající souřadnice x, tj. zprava doleva v silovém diagramu na obr. 5.3c.

PŘÍKLAD 5.2

Ve dvojrozměrné přetahované se Aleš, Božena a Cyril přetahují o pneumatiku ve směrech znázorněných na obr. 5.4a (obrázek ukazuje pohled shora). Pneumatika je v klidu, přestože na ni působí tři tahové síly. Aleš táhne silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{A}$ o velikosti 220 N a Cyril silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{C}$ o velikosti 170 N. Směr síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{C}$ neznáme. Jak velká je síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{B}$, jíž působí na pneumatiku Božena?

ŘEŠENÍ: Na obr. 5.4b je znázorněn silový diagram úlohy. Poněvadž je zrychlení pneumatiky nulové, je podle rov. (5.1) nulová i výslednice všech sil, které na ni působí:

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\mathrm{A} + \boldsymbol{F}_\mathrm{B} + \boldsymbol{F}_\mathrm{C} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

Tato vektorová rovnost je ekvivalentní prvým dvěma skalárním rovnostem v sadě rov. (5.2). Pro složky ve směru osy x platí

$$\sum F_x = F_{\mathrm{A}x} + F_{\mathrm{B}x} + F_{\mathrm{C}x} = 0, \qquad (5.4)$$

ve směru osy y pak

$$\sum F_y = F_{\mathrm{A}y} + F_{\mathrm{B}y} + F_{\mathrm{C}y} = 0. \qquad (5.5)$$

Pomocí zadaných velikostí sil a úhlů vyznačených v obr. 5.4b vyjádříme nyní složky sil a dosadíme do rov. (5.4) a (5.5). Znaménka vyznačují orientaci průmětů. Ze vztahu (5.4) dostáváme

$$\sum F_x = -F_A \cos 47{,}0^\circ + 0 + F_C \cos\varphi = 0.$$

Dosazením známých hodnot pak získáme

$$-(220\,\text{N})\cos 47{,}0^\circ + 0 + (170\,\text{N})\cos\varphi = 0$$

a odtud

$$\cos\varphi = \frac{(220\,\text{N})\cos 47{,}0^\circ}{(170\,\text{N})} = 0{,}883,$$
$$\varphi = 28{,}0^\circ.$$

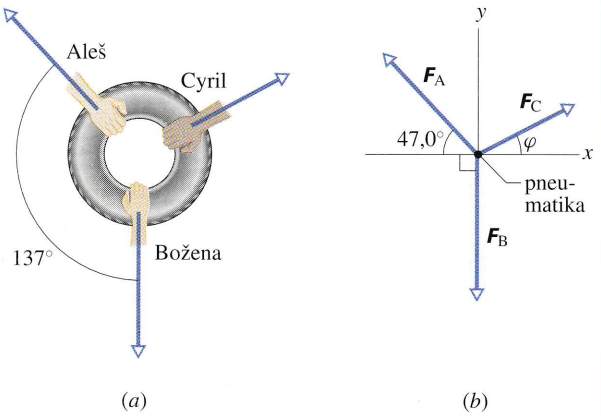
Obdobně plyne ze vztahu (5.5)

$$\sum F_y = F_A \sin 47{,}0^\circ - F_B + F_C \sin\varphi = 0,$$

kde jsme položili $F_{By} = -F_B$, neboť Božena táhne pneumatiku přímo v záporném směru osy y. Dosazení známých hodnot vede k výsledku

$$F_B = (220\,\text{N})\sin 47{,}0^\circ + (170\,\text{N})\sin 28{,}0^\circ = 241\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Nechme si znovu projít hlavou postup, který jsme použili při řešení soustavy dvou rovnic (5.4) a (5.5) o dvou neznámých F_B a φ. Nejprve jsme řešili rov. (5.4) (pro x-ové složky sil), která obsahovala jedinou neznámou φ. Získanou hodnotu $\varphi = 28{,}0^\circ$ jsme pak dosadili do rov. (5.5) pro y-ové složky sil. Kdybychom začínali s rov. (5.5), v níž vystupují obě neznámé, byl by výpočet podstatně komplikovanější. Museli bychom totiž vyjádřit $\sin\varphi$ pomocí F_B a dosadit do rov. (5.4), která ovšem obsahuje $\cos\varphi$. Získali bychom tak nepříliš jednoduchou goniometrickou rovnici pro úhel φ. Při řešení úloh je třeba dávat pozor i na takové zdánlivé drobnosti, jako je způsob zpracování rovnic.



Obr. 5.4 Příklad 5.2. (a) Děti přetahující se o pneumatiku (pohled shora). (b) Silový diagram.

PŘÍKLAD 5.3

Obr. 5.5a ukazuje pohled shora na dvoukilogramovou plechovku pohybující se po dokonale hladké podložce vlivem působení tří sil. Její zrychlení má velikost 8 m·s^{-2}. Síla $\boldsymbol{F}_1$ má velikost 10 N a síla a $\boldsymbol{F}_2$ 12 N. Obr. 5.5b, v němž je vyznačeno i zrychlení $\boldsymbol{a}$, představuje neúplný silový diagram úlohy. Vypočtěte třetí sílu $\boldsymbol{F}_3$ a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ kartézské soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ: Zrychlení je způsobeno výslednicí všech tří vodorovných sil. Z rovnice (5.1) plyne

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = m\boldsymbol{a}.$$

Z rovnic (5.2) dostáváme pro směr x

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = ma_x, \qquad (5.6)$$

pro směr y

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = ma_y. \qquad (5.7)$$

Přepíšeme-li rov. (5.6) pomocí velikostí sil a úhlů mezi nimi a vezmeme-li v úvahu správná znaménka jednotlivých složek, můžeme psát

$$-F_1 \cos 60^\circ + 0 + F_{3x} = ma \sin 30^\circ.$$

Dosazením číselných údajů pak dostaneme

$$-(10\,\text{N})\cos 60^\circ + 0 + F_{3x} = (2\,\text{kg})(8\,\text{m·s}^{-2})\sin 30^\circ,$$

takže

$$F_{3x} = (10\,\text{N})\cos 60^\circ + (2\,\text{kg})(8\,\text{m·s}^{-2})\sin 30^\circ = 13\,\text{N}.$$

Obdobně z rov. (5.7) získáme postupně

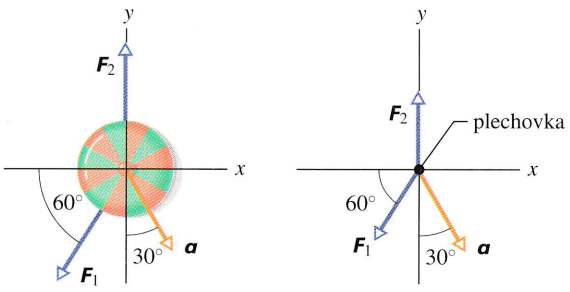
$$-F_1 \sin 60^\circ + F_2 + F_{3y} = -ma\cos 30^\circ,$$
$$-(10\,\text{N})\sin 60^\circ + 12\,\text{N} + F_{3y} = -(2\,\text{kg})(8\,\text{m·s}^{-2})\cos 30^\circ,$$

odkud

$$F_{3y} = -17{,}2\,\text{N} \doteq -17\,\text{N}.$$

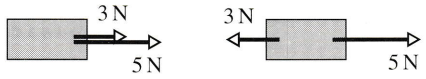
Třetí síla je tedy

$$\boldsymbol{F}_3 = (13\,\text{N})\boldsymbol{i} - (17\,\text{N})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



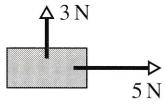
Obr. 5.5 Příklad 5.3. (a) Pohled shora na plechovku urychlovanou třemi silami. Dvě z nich jsou vyznačeny. (b) Silový diagram úlohy.

KONTROLA 3: Obrázek ukazuje pohled shora na čtyři situace, kdy dvě síly urychlují tutéž kostku po dokonale hladké podlaze. Uspořádejte situace sestupně podle (a) velikosti výslednice sil působících na kostku a (b) podle velikosti zrychlení kostky.

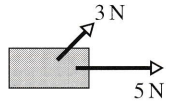


(1)

(2)



(3)



(4)

RADY A NÁMĚTY

Bod 5.1: *Rozbor úlohy z hlediska působících sil*

Přečteme si zadání úlohy několikrát, až získáme dobrou představu o tom, jaká je situace, jaké údaje jsou zadány a jaké jsou úkoly. Tak třeba u př. 5.1 jsme si říkali: „Někdo tlačí sáně. Jejich rychlost se mění, takže zrychlení je nenulové. Víme, že pohyb je přímočarý. V prvé části úlohy je síla zadána, v druhé části ji máme určit. Vypadá to tedy tak, že je třeba použít druhý Newtonův zákon a aplikovat jej na případ jednorozměrného pohybu."

Je-li jasné, o jaký problém jde, ale nevíme-li, jak dále postupovat, problém prozatím odložíme a znovu si přečteme zadání. Nejsme-li si jisti správným pochopením druhého Newtonova zákona, přečteme si znovu celý článek. Prostudujeme příklady. Skutečnost, že problém formulovaný v př. 5.1 je jednorozměrný a zrychlení pohybu je konstantní, nás vrací ke kap. 2 a speciálně k tab. 2.1, obsahující všechny rovnice, které budeme potřebovat.

Bod 5.2: *Dvojí obrázky*

Při řešení každé úlohy je užitečné mít dva obrázky. Jedním z nich je hrubý náčrt skutečné situace. Zakreslíme do něj síly, přičemž počáteční bod každého vektoru síly umístíme na povrch či do objemu tělesa, na něž síla působí. Druhým obrázkem je silový diagram, v němž jsou zakresleny síly působící na *jediné* těleso, které je v nákresu znázorněno bodem. Počáteční bod každé ze sil umístíme právě do tohoto bodu.

Bod 5.3: *Jakou soustavu studujeme?*

Používáme-li druhý Newtonův zákon, musíme si uvědomit, na které těleso nebo soustavu jej aplikujeme. V př. 5.1 jsou to sáně (nikoli student nebo led). V př. 5.3 je to plechovka.

Bod 5.4: *Zvolíme vhodně soustavu souřadnic*

V př. 5.2 jsme si ušetřili práci tím, že jsme jednu ze souřadnicových os ztotožnili se směrem jedné z působících sil (osa y měla směr síly $\boldsymbol{F}_B$). Užitím druhého Newtonova zákona jsme dostali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která byla díky vhodné volbě souřadnicových os velmi jednoduchá: první rovnice obsahovala pouze jednu neznámou. Tuto rovnici jsme proto vyřešili napřed a výsledek dosadili do druhé. V podobných případech je takový postup rozumný, neboť velmi zjednodušuje celý výpočet.

5.6 NĚKTERÉ TYPY SIL

Tíhová síla (váha)

Tíhovou silou $\boldsymbol{G}$ (nepřesně též **váhou** tělesa, viz poznámku k př. 5.11) rozumíme sílu, kterou je těleso přitahováno k astronomickému objektu v jeho těsné blízkosti.

V běžných situacích je tímto astronomickým objektem Země. Tíhová síla je dána především přitažlivou **gravitační interakcí** dvou těles. Podrobně o ní budeme hovořit v kap. 14. Prozatím ji však budeme chápat jako sílu, která udílí tělesu *tíhové zrychlení* $\boldsymbol{g}$. Tíhová síla působící na těleso o hmotnosti m (váha tělesa o hmotnosti m) má velikost

$$G = mg. \tag{5.8}$$

Vektor tíhové síly pak lze zapsat jako

$$\boldsymbol{G} = -mg\boldsymbol{j} = -G\boldsymbol{j}, \tag{5.9}$$

(kde vektor $+\boldsymbol{j}$ míří svisle vzhůru, směrem od Země), nebo jako

$$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}, \tag{5.10}$$

kde $\boldsymbol{g}$ je tíhové zrychlení. Je lhostejné, pro jaký způsob zápisu tíhové síly se rozhodneme. Jestliže však podle obvyklé konvence orientujeme osu y směrem vzhůru, musíme dát pozor, abychom nezaměnili (kladnou) velikost tíhového zrychlení, vystupující v rov. (5.8) s jeho (zápornou) y-ovou složkou v rov. (5.10).

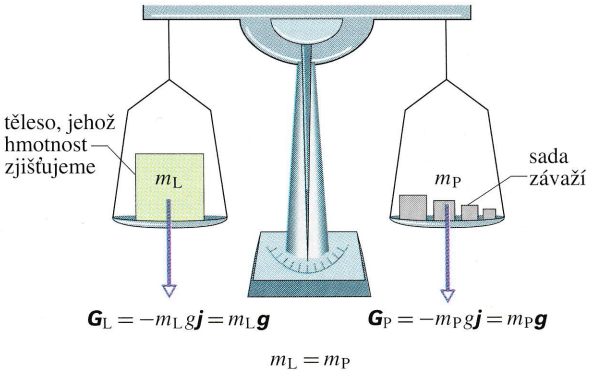
Jednotkou tíhové síly v soustavě SI je samozřejmě newton. Tíhová síla *není hmotnost*. Její velikost v daném bodě (v blízkosti Země či kteréhokoli jiného astronomického objektu) závisí na hodnotě g v tomto bodě. Bude-li například na medicinbal působit na Zemi tíhová síla o velikosti 71 N, na Měsíci to bude pouhých 12 N. Tíhové zrychlení na Měsíci je totiž asi šestkrát menší než na Zemi. Hmotnost medicinbalu 7,2 kg je stejná v kterémkoli místě, neboť hmotnost je charakteristikou předmětu samotného. (Chceme-li „vážit" méně, můžeme vylézt na vrchol hory. Naše hmotnost

se tím samozřejmě nezmění. Ve vyšší poloze však budeme ve větší vzdálenosti od středu Země a hodnota g bude nižší. Zmenší se tedy i tíhová síla.)

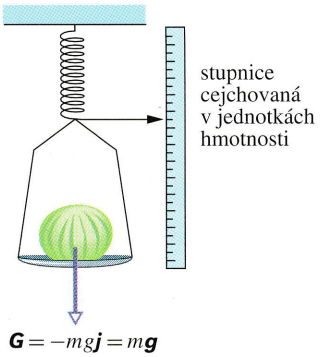
Běžně předpokládáme, že tíhovou sílu měříme v inerciální vztažné soustavě. V neinerciální soustavě však mohou být výsledky měření zkresleny a namísto skutečné tíhové síly naměříme tzv. **zdánlivou váhu**. K tomuto problému se podrobněji vrátíme v př. 5.11b, c.

Těleso můžeme *vážit* tak,* že je položíme na jednu misku rovnoramenné váhy (obr. 5.6) a na druhou misku klademe referenční tělesa známých hmotností. Jakmile dosáhneme rovnováhy, jsou hmotnosti misek vyrovnány a známe tedy i hmotnost tělesa m. Známe-li i hodnotu g v bodě, v němž měření provádíme, určíme velikost tíhové síly podle vztahu (5.8).

„Vážit" můžeme i na pružinové váze (obr. 5.7). Těleso napíná pružinu a ukazatel se pohybuje podél stupnice cejchované a označené buď v jednotkách hmotnosti, nebo v jednotkách síly. (Tímto způsobem funguje skoro každá osobní váha. Její stupnice bývá cejchována v kilogramech.) V případě cejchování stupnice v jednotkách hmotnosti je naměřený údaj správný pouze tehdy, je-li hodnota g v místě vážení táž jako hodnota, při níž byla stupnice cejchována.



Obr. 5.6 Rovnoramenná váha. V případě rovnováhy je celková hmotnost těles na levé misce (L) rovna celkové hmotnosti těles na pravé misce (P).



Obr. 5.7 Pružinová váha. Hodnota čtená na stupnici je úměrná velikosti tíhové síly působící na objekt umístěný na misce a udává přímo její velikost, je-li stupnice cejchována v newtonech. Je-li stupnice cejchována v kilogramech, čteme na stupnici hmotnost tělesa. Hmotnost je však správně určena jen tehdy, je-li velikost tíhového zrychlení při měření stejná jako při cejchování stupnice.

Kolmá tlaková síla

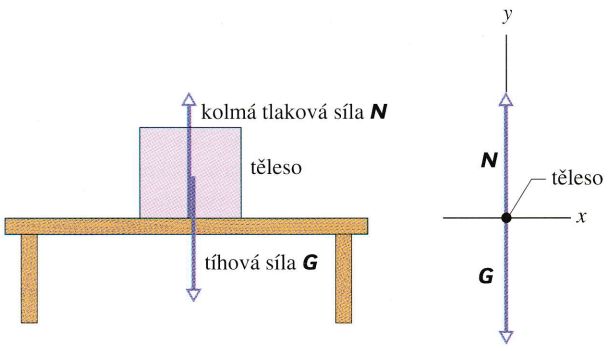
Na těleso samozřejmě působí i okolní objekty, které jsou s ním v přímém styku. Spočívá-li těleso na nějaké podložce, působí na ně podložka určitými silami. Jednou z nich je **tlaková síla** $\boldsymbol{N}$, kolmá k podložce. Často ji nazýváme **silou normálovou**. Název souvisí s matematickým pojmem *normálový*, neboli „kolmý".

Je-li těleso v klidu na vodorovné podložce (obr. 5.8), míří síla $\boldsymbol{N}$ svisle vzhůru. Tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ směřuje samozřejmě dolů. Pro toto *speciální* uspořádání můžeme určit velikost síly $\boldsymbol{N}$ z druhé rovnice sady rov. (5.2):

$$\sum F_y = N - mg = ma_y, \qquad (5.11)$$

a tedy, protože $a_y = 0$,

$$N = mg. \qquad (5.12)$$



Obr. 5.8 (a) Na těleso spočívající na stole působí stůl normálovou silou $\boldsymbol{N}$ kolmou ke svrchní desce. (b) Odpovídající silový diagram.

* V souhlasu s originálem knihy a také pro stručnost používáme někdy, spíše však výjimečně, formulací typu „těleso váží 500 N", „těleso o váze 500 N" apod. Suplujeme tím údaj o hmotnosti tělesa, která je právě taková, že Země působí na ono těleso, umístěné na jejím povrchu, tíhovou silou 500 N, tj. $m = \frac{G}{g} = \frac{500\,\mathrm{N}}{9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}} \doteq 51\,\mathrm{kg}$.

RADY A NÁMĚTY

Bod 5.5: *Normálová síla*

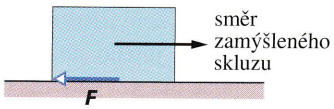
Vztah (5.12) pro normálovou sílu platí jedině tehdy, směřuje-li tato síla vzhůru, svislá složka zrychlení tělesa je nulová a na těleso nepůsobí kromě síly tíhové a normálové žádné další síly s nenulovými svislými složkami. Pro jiné situace jej *nemůžeme* použít a musíme se vrátit k zápisu všech složek druhého Newtonova zákona.

Sílu $\boldsymbol{N}$ můžeme v obrázku volně posouvat, pokud zachováváme její směr. V obr. 5.8a bychom ji například mohli přesunout tak, aby *koncový bod* vektoru $\boldsymbol{N}$ ležel v místě styku svrchní desky stolu s tělesem (jako bychom tím vyjadřovali skutečnost, že deska stolu „tlačí" na podstavu tělesa). Správné umístění vektoru $\boldsymbol{N}$ je ovšem takové, že jeho *počáteční bod* leží na rozhraní svrchní desky stolu a tělesa a označuje tak *působiště* normálové síly. Dokud však s tělesem pracujeme jako s hmotným bodem, můžeme při kreslení schematického obrázku umístit působiště síly $\boldsymbol{N}$ i kamkoli jinam do objemu tělesa. Možným interpretačním omylům se spolehlivě vyhneme, budeme-li pracovat se silovým diagramem (obr. 5.8b), v němž je síla $\boldsymbol{N}$ umístěna přímo v bodě symbolizujícím těleso.

KONTROLA 4: Stůl s tělesem z obr. 5.8 jsou umístěny ve výtahu. Zjistěte, zda je velikost síly $\boldsymbol{N}$ větší, menší či stejná jako velikost tíhové síly mg, stoupá-li výtah (a) stálou rychlostí, (b) se vzrůstající rychlostí.

Třecí síla

Klouže-li těleso po podložce, nebo snažíme-li se je do klouzavého pohybu uvést, brání tomuto pohybu vazby mezi tělesem a podložkou. (Podrobněji o nich budeme mluvit v následující kapitole.) Tento odpor bývá charakterizován jedinou silou $\boldsymbol{F}$, zvanou **třecí síla** nebo jednoduše **tření**. Třecí síla působící na těleso míří podél podložky a je orientována proti pohybu či zamýšlenému pohybu tělesa (obr. 5.9). Pro zjednodušení situace někdy tření zanedbáváme. V takovém případě nazýváme podložku *dokonale hladkou*.

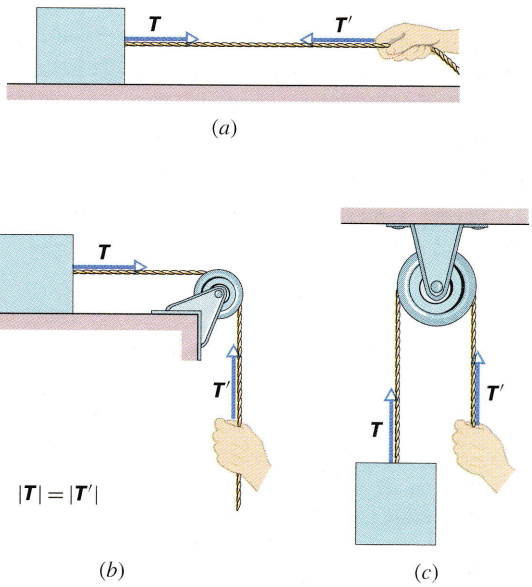


Obr. 5.9 Třecí síla $\boldsymbol{F}$ brání skluzu tělesa po podložce.

Tahová síla

Je-li těleso taženo na provaze, vlákně, lanku či něčem podobném, říkáme, že je lanko *napínáno*. Jeho jednotlivé části na sebe navzájem působí silami **pnutí**. Těleso je taženo silou $\boldsymbol{T}$, která směřuje podél lanka ven z objemu tělesa a je umístěna v bodě úchytu lanka (obr. 5.10a). Hovoříme o **tahové** nebo **tažné síle** lanka.

Zpravidla předpokládáme, že lanko je *nehmotné* a *nepružné*. Máme tím na mysli, že jeho hmotnost je zanedbatelná ve srovnání s hmotností tělesa a jeho délka je neměnná. Lanko tedy pouze realizuje spojení dvou těles. Táhne přitom obě tělesa silami o stejné velikosti T. Platí to i v případě, že se obě tělesa i s lankem pohybují se zrychlením nebo když je lanko vedeno přes *nehmotnou kladku*, která se může *otáčet bez tření* (obr. 5.10b, c). (Jedná se o idealizovanou kladku, jejíž hmotnost je velmi malá vzhledem k hmotnostem těles a třecí síla bránící jejímu otáčení kolem osy je rovněž zanedbatelná.)



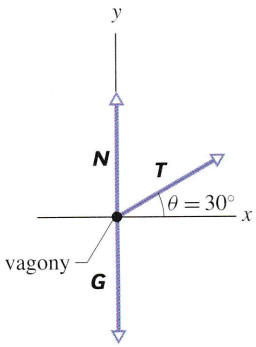
Obr. 5.10 (a) Tažné lanko je napnuté. Táhne těleso i ruku silou o velikosti T. Situace je stejná i na obrázcích (b) a (c), kde je lanko vedeno přes nehmotnou kladku, která se otáčí bez tření.

KONTROLA 5: Tíhová síla působící na těleso zavěšené na laně podle obr. 5.10c má velikost 75 N. Rozhodněte, zda velikost tažných sil lana, označených $\boldsymbol{T}'$, je stejná, větší, nebo menší než 75 N, jestliže těleso stoupá (a) s konstantní rychlostí, (b) s rostoucí rychlostí, (c) s klesající rychlostí.

PŘÍKLAD 5.4

Připomeňme si siláka Johna Massise a železniční vagony. Kladli jsme si otázku, zda velikost síly, kterou musel vyvinout, aby je posunul, nějak výrazně překračovala běžnou

hranici lidských možností. Předpokládejme, že Massis, svírající v zubech konec lana uvázaného k vagonům, vyvinul tažnou sílu dvaapůlkrát větší, než sám vážil. Jeho hmotnost byla 80 kg, lano svíralo s vodorovnou rovinou úhel $\theta = 30°$. Velikost tíhové síly vagonů G byla $7{,}0{\cdot}10^5$ N (odpovídá asi osmdesáti tunám) a John Massis je posunul po kolejích o 1,0 m. Předpokládejme, že kolejnice nepůsobily na kola žádnou brzdnou silou. Jaká byla výsledná rychlost vagonů?



Obr. 5.11 Příklad 5.4. Silový diagram Massisova pokusu s vagony. Délky šipek označujících vektory neodpovídají skutečným poměrům. Síla napínající vlákno je totiž *mnohem* menší než síla tíhová a normálová.

ŘEŠENÍ: Na obr. 5.11 je znázorněn silový diagram, v němž jsou vagony reprezentovány bodem. Osa x směřuje podél kolejnic. Z rovnic (5.2) dostáváme

$$\sum F_x = T\cos\theta = Ma_x, \qquad (5.13)$$

kde M je hmotnost vagonů. Ze zadaných hodnot určíme T a M.

Podle předpokladu vyvine J. Massis tahovou sílu o velikosti

$$T = 2{,}5mg = 2{,}5(80\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = 1\,960\,\text{N},$$

což je hodnota běžná u dobrého vzpěrače střední váhy a zdaleka o ní nelze hovořit jako o nadlidské síle.

Tíhová síla působící na vagony má podle vztahu (5.8) velikost

$$G = Mg,$$

takže hmotnost vagonů M je

$$M = \frac{G}{g} = \frac{(7{,}0{\cdot}10^5\,\text{N})}{(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})} = 7{,}143{\cdot}10^4\,\text{kg}.$$

Ze vztahu (5.13) zjistíme zrychlení

$$a_x = \frac{T\cos\theta}{M} = \frac{(1\,960\,\text{N})\cos 30°}{(7{,}143{\cdot}10^4\,\text{kg})} = 2{,}376{\cdot}10^{-2}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Pro určení výsledné rychlosti vagonů použijeme vztahu (2.16), kam dosadíme $v_{0x} = 0$ a $x - x_0 = 1{,}0$ m:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0),$$

tj.

$$v_x = \sqrt{0 + 2(2{,}376{\cdot}10^{-2}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(1{,}0\,\text{m})} = \\ = 0{,}22\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

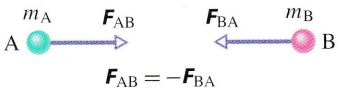
Massis by si svůj úkol usnadnil, kdyby připojil lano k vagonu o něco výše, aby bylo vodorovné. Víte proč?

5.7 TŘETÍ NEWTONŮV ZÁKON

Síly vždy působí ve dvojicích. Při úderu působí kladivo jistou silou na hlavičku hřebíku. Současně však působí i hřebík na kladivo, a to silou stejně velkou, avšak opačně orientovanou. Opře-li se člověk o stěnu, tlačí i stěna na člověka.

Nechť těleso A na obr. 5.12 působí na těleso B silou $\boldsymbol{F}_{BA}$. Experimenty ukazují, že i těleso B působí na těleso A jistou silou $\boldsymbol{F}_{AB}$. Tyto síly mají stejnou velikost a opačný směr. Platí tedy

$$\boldsymbol{F}_{AB} = -\boldsymbol{F}_{BA} \quad \text{(třetí Newtonův zákon).} \qquad (5.14)$$



Obr. 5.12 Třetí Newtonův zákon. Těleso A působí silou $\boldsymbol{F}_{BA}$ na těleso B a těleso B působí silou $\boldsymbol{F}_{AB}$ na těleso A. Platí $\boldsymbol{F}_{AB} = -\boldsymbol{F}_{BA}$.

Všimněte si pořadí indexů. Například $\boldsymbol{F}_{AB}$ je síla, která vyjadřuje působení *tělesa* B *na těleso* A. Rov. (5.14) platí bez ohledu na to, zda se tělesa pohybují, nebo zda jsou v klidu.

Vztah (5.14) vyjadřuje třetí Newtonův pohybový zákon. Běžně je jedna z těchto sil (kterákoli) nazývána **akcí** a druhá **reakcí**. Kdykoli „narazíme" na sílu, má dobrý smysl se ptát: A kde je reakce?

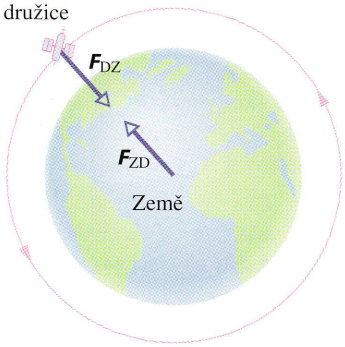
Věta „Ke každé akci existuje stejně velká a opačně orientovaná reakce" již takřka zlidověla a může mít různý význam podle toho, v jaké souvislosti je vyslovena. Ve fyzice však neznamená nic jiného než slovní vyjádření rov. (5.14). Zejména vůbec nic nevypovídá o příčině a následku. Kterákoli z interakčních sil může hrát roli akce či reakce.

Může nás napadnout: „Je-li každá síla spjata s jinou silou stejné velikosti a opačného směru, proč se tyto síly nevyruší? Jak se vůbec může něco dát do pohybu?" Odpověď je jednoduchá a názorně ji vidíme na obr. 5.12:

Síly akce a reakce působí *vždy* na různá tělesa. Nesčítají se proto ve výslednou sílu a nemohou se vyrušit.

Toto tvrzení se týká situace, kdy je sledovanou soustavou buď jedno, nebo druhé z obou interagujících těles. (V dalších kapitolách uvidíme, že v případě studia soustavy dvou nebo i více těles má smysl v rámci celé soustavy mluvit o výslednici interakčních sil. Ta ovšem bude, díky třetímu Newtonovu zákonu, skutečně nulová.)

Dvě síly, které působí na *totéž* těleso, *nejsou* akcí a reakcí, ani když mají stejnou velikost a opačný směr. V následujících příkladech určíme všechny dvojice typu akce – reakce.



Obr. 5.13 Družice na oběžné dráze kolem Země. Znázorněné síly představují dvojici akce – reakce. Všimněte si, že působí na různá tělesa.

Družice

Obr. 5.13 ukazuje družici na oběžné dráze kolem Země. Jedinou silou působící *na družici* je přitažlivá gravitační síla $\boldsymbol{F}_{DZ}$, jíž na ni působí Země. Kde je odpovídající reakce? Je to přitažlivá gravitační síla $\boldsymbol{F}_{ZD}$, jíž působí družice na Zemi. Její působiště můžeme umístit do středu Země.

Mohli bychom se domnívat, že malinká družice prakticky nemůže Zemi přitahovat. Přesto tomu tak je, přesně podle třetího Newtonova zákona. Pro velikosti sil platí $F_{DZ} = F_{ZD}$. Síla $\boldsymbol{F}_{ZD}$ udílí Zemi zrychlení, které je však vlivem obrovské hmotnosti Země tak malé, že není měřitelné.

Meloun na stole

Obr. 5.14a znázorňuje meloun ležící v klidu na stole.* Země působí na meloun svisle dolů tíhovou silou $\boldsymbol{F}_{MZ}$. Meloun se neurychluje, neboť tato síla je kompenzována stejně velkou, avšak opačnou, normálovou silou $\boldsymbol{F}_{MS}$, jíž na meloun působí stůl (obr. 5.14b). Síly $\boldsymbol{F}_{MZ}$ a $\boldsymbol{F}_{MS}$ však *netvoří* dvojici akce – reakce, neboť *působí na totéž těleso, meloun*.

Reakcí k síle $\boldsymbol{F}_{MZ}$ je gravitační síla $\boldsymbol{F}_{ZM}$, jíž působí meloun na Zemi. Tato dvojice akce – reakce je znázorněna na obr. 5.14c.

Reakcí k síle $\boldsymbol{F}_{MS}$ je síla $\boldsymbol{F}_{SM}$, jíž působí meloun na stůl. Tato dvojice akce – reakce je znázorněna na obr. 5.14d. Dvojice akce – reakce, vystupující v této úloze, spolu s příslušnými dvojicemi těles, jsou tedy

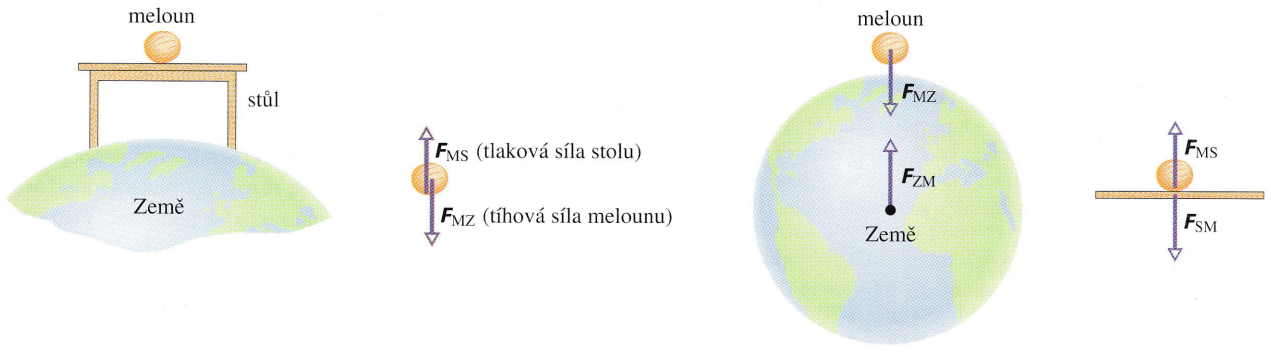
první dvojice: $\boldsymbol{F}_{MZ} = -\boldsymbol{F}_{ZM}$ (meloun a Země)

a

druhá dvojice: $\boldsymbol{F}_{MS} = -\boldsymbol{F}_{SM}$ (meloun a stůl).

KONTROLA 6: Dejme tomu, že meloun a stůl z obr. 5.14 jsou v kabině výtahu, která se rozjíždí směrem vzhůru. (a) Rozhodněte, zda velikosti sil $\boldsymbol{F}_{SM}$ a $\boldsymbol{F}_{MS}$ vzrostou, klesnou, či zůstanou beze změny. (b) Jsou tyto dvě síly stále stejně velké a opačně orientované? (c) Rozhodněte, zda velikosti sil $\boldsymbol{F}_{MZ}$ a $\boldsymbol{F}_{ZM}$ vzrostou, klesnou, či

* Nebereme v úvahu malé komplikace způsobené rotací Země.



Obr. 5.14 (a) Meloun leží na stole, který spočívá na zemském povrchu. (b) *Na meloun* působí síly $\boldsymbol{F}_{MS}$ a $\boldsymbol{F}_{MZ}$. Meloun je v klidu, neboť tyto síly jsou v rovnováze. (c) Dvojice akce – reakce při interakci melounu a Země. (d) Dvojice akce – reakce při interakci melounu a stolu.

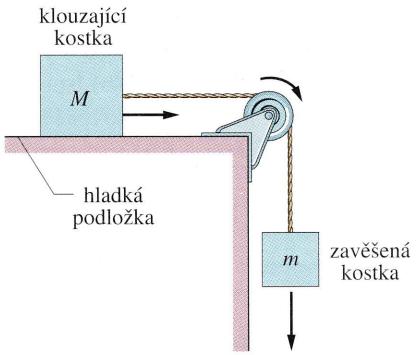
zůstanou beze změny. (d) Jsou tyto dvě síly stále stejně velké a opačně orientované?

5.8 UŽITÍ NEWTONOVÝCH ZÁKONŮ

Zbývající část této kapitoly tvoří příklady. Měli byste se nad nimi hlouběji zamyslet. Neučte se dílčí výpočty a odpovědi, ale soustřeďte se na problém jako celek. Snažte se pochopit postupy, které vedou k jeho vyřešení. Zvlášť důležité je vědět, jak přejít od schematického náčrtu situace k silovému diagramu a vhodně volit soustavu souřadnic, aby bylo možné aplikovat druhý Newtonův zákon. Začneme př. 5.5, který je propracován do nejmenších detailů formou otázka – odpověď.

PŘÍKLAD 5.5

Obr. 5.15 znázorňuje kostku (*klouzající kostka*) o hmotnosti 3,3 kg. Kostka se může volně pohybovat po vodorovné dokonale hladké podložce, např. na vzduchové lavici. Kostka je připojena nehmotným vláknem vedeným přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření k jiné kostce (*zavěšená kostka*), jejíž hmotnost je 2,1 kg. Zavěšená kostka klesá a klouzající kostka se pohybuje s určitým zrychlením vpravo. (a) Určete toto zrychlení. (b) Určete zrychlení zavěšené kostky a (c) sílu napínající vlákno.

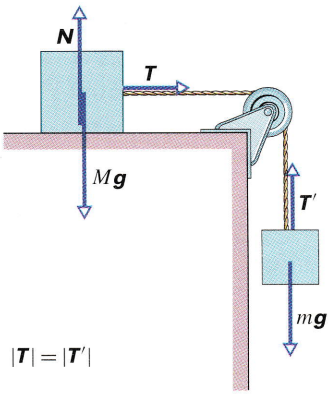


Obr. 5.15 Příklad 5.5. Kostka o hmotnosti M na vodorovné dokonale hladké podložce je spojena s kostkou o hmotnosti m vláknem vedeným přes kladku. Vlákno i kladka jsou nehmotné. Kladka se otáčí bez tření. Šipky vyznačují směr pohybu po uvolnění soustavy.

? *O co v úloze jde?*

Máme dva hmotné objekty, klouzající a zavěšenou kostku. Nesmíme zapomenout, že je zde také Země, která oba tyto objekty přitahuje. Bez přítomnosti Země by se nic nedělo. Na kostky působí celkem pět sil, znázorněných na obr. 5.16:

1. Vlákno táhne klouzající kostku vpravo silou $\boldsymbol{T}$ o velikosti T.
2. Vlákno táhne zavěšenou kostku silou $\boldsymbol{T}'$ o téže velikosti T. Tato síla směřuje vzhůru a brání volnému pádu zavěšené kostky, ke kterému by jinak samozřejmě došlo. Předpokládáme, že vlákno je napjato po celé délce stejně. Kladka slouží ke změně směru síly napínající vlákno beze změny její velikosti.
3. Země přitahuje klouzající kostku tíhovou silou $M\boldsymbol{g}$.
4. Země přitahuje zavěšenou kostku tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$.
5. Stůl tlačí na klouzající kostku normálovou silou $\boldsymbol{N}$.



Obr. 5.16 Síly působící na dvě kostky

Uvědomme si ještě další důležité věci. Předpokládáme, že vlákno je nepružné. Klesne-li tedy zavěšená kostka za jistou dobu o 1 mm, pohne se klouzající kostka v témže časovém intervalu o 1 mm vpravo. Kostky se pohybují společně a jejich zrychlení mají stejnou velikost a.

? *Jak máme tuto úlohu posuzovat? Nabízí se nám na základě její formulace použití určitého fyzikálního zákona?*

Ano, nabízí. Síly, hmotnosti a zrychlení jsou obsaženy v druhém Newtonově pohybovém zákonu $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$.

? *Chceme-li použít tento zákon při řešení úlohy, na jaké těleso jej máme aplikovat?*

Zaměřme se na dvě tělesa vystupující v úloze, klouzající a zavěšenou kostku. I když jde ve skutečnosti o rozměrné objekty, můžeme je považovat za hmotné body, protože každý z elementů, z nichž jsou složeny (řekněme každý atom), se pohybuje přesně stejným způsobem. Aplikujeme druhý Newtonův zákon na každou kostku zvlášť.

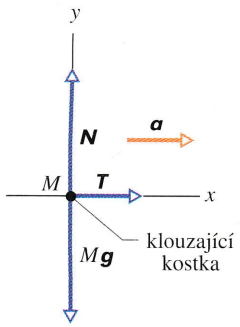
? *A co s kladkou?*

Kladku za hmotný bod považovat nemůžeme, neboť pohyb jejích jednotlivých elementů je různý. Až budeme uvažovat o otáčivém pohybu, všimneme si kladek podrobně. Prozatím se však tomuto problému vyhneme tím, že budeme hmotnost kladky považovat za zanedbatelnou v porovnání s hmotnostmi obou kostek.

? *Dobrá. Jak tedy nyní aplikujeme vztah $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ na klouzající kostku?*

Představíme si kostku jako částici o hmotnosti M a nakreslíme *všechny* síly, které *na ni* působí, podle obr. 5.17. Tento obrázek představuje silový diagram klouzající kostky. Jsou

v něm tři síly. Nyní zvolíme souřadnicové osy. Je vhodné nakreslit osu x rovnoběžně s deskou stolu ve směru pohybu kostky.



Obr. 5.17 Silový diagram pro klouzající kostku na obr. 5.15

? *Ano, ale stále nebylo řečeno, jak aplikovat na klouzající kostku vztah* $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$. *Zatím jsme mluvili pouze o tom, jak nakreslit silový diagram.*

To je pravda. Vztah $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ je vektorovou rovnicí a tu je třeba rozepsat do složek:

$$Ma_x = \sum F_x, \quad Ma_y = \sum F_y, \quad Ma_z = \sum F_z, \qquad (5.15)$$

kde $\sum F_x, \sum F_y, \sum F_z$ jsou složky výsledné síly. Vzhledem k tomu, že se klouzající kostka nepohybuje ve svislém směru, je zřejmé, že y-ová složka výslednice je nulová. Normálová síla $\boldsymbol{N}$, směřující vzhůru, a tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ jsou v rovnováze. z-ové složky všech sil jsou rovněž nulové (osa z je kolmá k rovině nákresu). Můžeme ovšem použít první z rov. (5.15).

Ve směru osy x je nenulová pouze jediná složka, x-ová složka síly $\boldsymbol{T}$. Ze vztahu $ma_x = \sum F_x$ tedy plyne

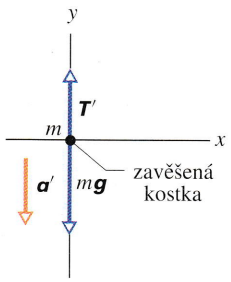
$$Ma = T. \qquad (5.16)$$

Tato rovnice obsahuje dvě neznámé, T a a, takže ji nedokážeme jednoznačně vyřešit. Připomeňme však, že jsme zatím nic neřekli o zavěšené kostce.

? *Jistě. Budeme vztah* $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ *aplikovat i na zavěšenou kostku? Jak?*

Nakreslíme silový diagram pro tuto kostku podle obr. 5.18. Tentokrát užijeme druhou z rovnic (5.15) a dostaneme

$$-ma = \sum F_y = T - mg. \qquad (5.17)$$



Obr. 5.18 Silový diagram pro zavěšenou kostku na obr. 5.15. Vektory $\boldsymbol{T}'$, $\boldsymbol{a}'$ mají díky kladce jiné směry než vektory $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{a}$, platí však $|\boldsymbol{T}'| = |\boldsymbol{T}|$, $|\boldsymbol{a}'| = |\boldsymbol{a}|$.

Znaménko minus na levé straně rovnice signalizuje, že se kostka urychluje směrem dolů, v záporném směru osy y. Z rov. (5.17) plyne

$$mg - T = ma. \qquad (5.18)$$

Tato rovnice obsahuje tytéž neznámé veličiny jako rov. (5.16). Sečtením obou rovnic vyloučíme T. Řešením vzhledem k neznámé a dostaneme

$$a = \frac{m}{M+m} g. \qquad (5.19)$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (5.16) získáme

$$T = \frac{mM}{M+m} g. \qquad (5.20)$$

Pro zadané číselné hodnoty dostáváme

$$a = \frac{m}{M+m} g = \frac{(2{,}1\ \mathrm{kg})}{(3{,}3\ \mathrm{kg} + 2{,}1\ \mathrm{kg})} (9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) =$$
$$= 3{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$T = \frac{mM}{M+m} g = \frac{(3{,}3\ \mathrm{kg})(2{,}1\ \mathrm{kg})}{(3{,}3\ \mathrm{kg} + 2{,}1\ \mathrm{kg})} (9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) =$$
$$= 13\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

? *Nyní je problém vyřešen, že?*

To je správná otázka. Naším úkolem není jen řešit úlohy, ale také se učit fyziku. S úlohou nejsme ve skutečnosti hotovi, dokud jsme neověřili, zda jsou získané výsledky rozumné. Získáme tím často mnohem lepší zkušenost než samotným nalezením správné odpovědi.

Nejprve se vraťme k rov. (5.19). Všimněme si, že je rozměrově správný a že hodnota a bude vždy menší než g. Musí tomu tak být, neboť zavěšená kostka nepadá volně. Vlákno ji táhne směrem vzhůru.

Nyní se zaměřme na vztah (5.20), který můžeme přepsat ve tvaru

$$T = \frac{M}{M+m} mg. \qquad (5.21)$$

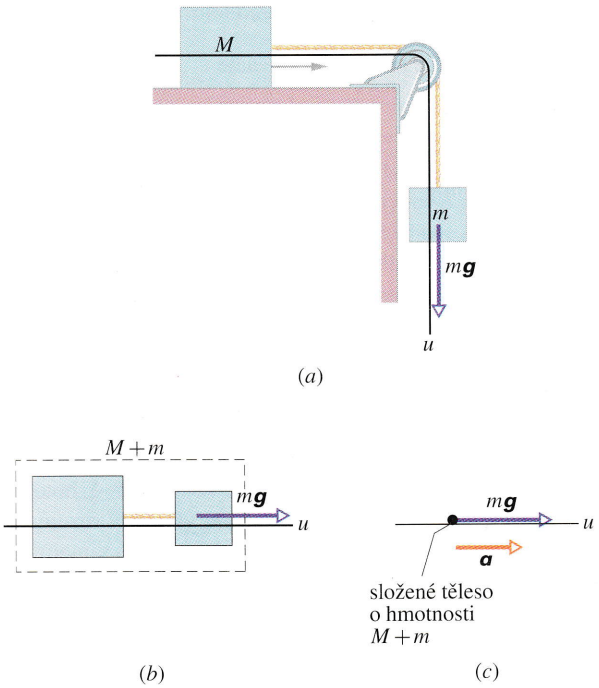
V tomto tvaru snáze ověříme rozměrovou správnost, neboť jak T, tak mg jsou velikosti sil. Z rov. (5.21) také hned vidíme, že velikost síly napínající vlákno je vždy menší než mg, tj. než velikost tíhové síly působící na zavěšenou kostku. To je potěšitelné zjištění, neboť kdyby vyšla hodnota T *větší* než mg, znamenalo by to, že se zavěšená kostka urychluje směrem vzhůru.

Výsledky můžeme také ověřovat rozborem speciálních případů, u nichž jsme si jisti správnou odpovědí. Jednoduchý případ, odpovídající experimentům v mezihvězdném prostoru, dostaneme volbou $g = 0$. Víme, že v takovém případě zůstanou kostky v klidu a vlákno nebude napjato. Dosadíme-li

$g = 0$ do rov. (5.19) a (5.20), vyjde opravdu $a = 0$ a $T = 0$. Další dvě speciální situace nastanou pro $M = 0$ a $m \to \infty$.

PŘÍKLAD 5.5 — jiný způsob řešení

Velikost zrychlení a kostek na obr. 5.15 dokonce dokážeme určit na pouhých dvou řádcích algebraických úprav, jestliže zvolíme poněkud zvláštní postup. (a) Užijeme neobvyklou volbu „osy", řekněme u, která prochází *oběma* kostkami podél vlákna, jak znázorňuje obr. 5.19a. (b) V myšlenkách „narovnáme" osu u podle obr. 5.19b a budeme kostky považovat za dvě součásti jednoho složeného tělesa o hmotnosti $M + m$. Silový diagram pro tuto soustavu je na obr. 5.19c.



Obr. 5.19 (a) „Osa" u prochází soustavou tvořenou kostkami a vláknem z obr. 5.15. (b) Kostky jsou uspořádány podél „napřímené" osy u a považovány za jediné těleso o hmotnosti $M + m$. (c) Příslušný silový diagram zahrnující pouze síly ve směru u. Taková síla je jediná.

ŘEŠENÍ: Uvědomme si, že na složené těleso působí ve směru osy u pouze jediná síla, a to tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, orientovaná kladně. Síly $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ napínající vlákno (obr. 5.16) jsou nyní vnitřními silami soustavy, tvořené složeným tělesem, a nevstupují do druhého Newtonova zákona. Síla, jíž působí kladka na vlákno, je kolmá k ose u a rovněž v druhém Newtonově zákonu nebude figurovat.

Řídíme-li se v této situaci vztahy (5.2), můžeme napsat rovnici pro složku zrychlení tělesa podél osy u:

$$(M + m)a_u = \sum F_u,$$

kde $(M + m)$ je hmotnost tělesa. Zrychlení složeného tělesa podél osy u (a tedy i zrychlení každé z kostek spojených vláknem) má velikost a. Jediná síla udělující složenému tělesu zrychlení podél osy u má velikost mg. Dostáváme tedy

$$(M + m)a = mg$$

a

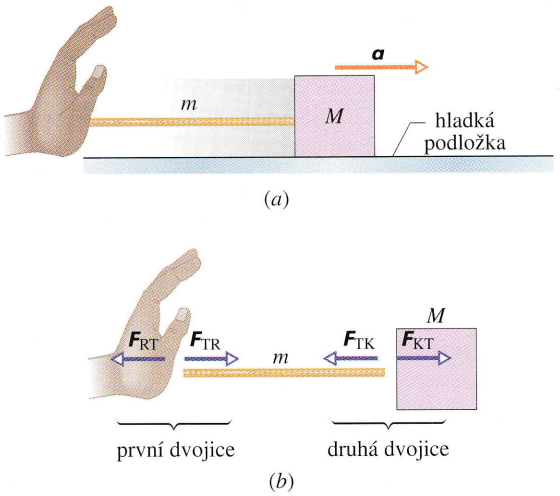
$$a = \frac{m}{M + m} g. \qquad (5.22)$$

Tento výsledek se shoduje s rov. (5.19).

Abychom určili velikost T, aplikujeme druhý Newtonův zákon na kteroukoli z obou kostek. Dostaneme tak rov. (5.16), nebo (5.18). Dosazením za a z rov. (5.22) a řešením vzhledem k neznámé T dostaneme rov. (5.20).

PŘÍKLAD 5.6

Kostka o hmotnosti $M = 33$ kg je tlačena po dokonale hladké podložce pomocí tyčky o hmotnosti $m = 3{,}2$ kg (obr. 5.20a). Kostka, která je zpočátku v klidu, se pohybuje s konstantním zrychlením a během 1,7 s se posune do vzdálenosti $d = 77$ cm.



Obr. 5.20 Příklad 5.6. (a) Tyčka o hmotnosti m tlačí kostku o hmotnosti M po dokonale hladké podložce. (b) Pohled na jednotlivé části soustavy ukazuje dvojice akce – reakce, tj. vzájemné působení ruky a tyčky (první dvojice) a tyčky a kostky (druhá dvojice).

(a) Určete všechny dvojice akce – reakce působící ve vodorovném směru.

ŘEŠENÍ: Jak je zřejmé z obr. 5.20b, jsou zde dvě dvojice sil typu akce – reakce:

první dvojice	$\boldsymbol{F}_{RT} = -\boldsymbol{F}_{TR}$	(ruka a tyčka),
druhá dvojice	$\boldsymbol{F}_{TK} = -\boldsymbol{F}_{KT}$	(tyčka a kostka).

Sílu $\boldsymbol{F}_{RT}$, jíž působí tyčka na ruku, bychom pocítili, kdybychom experiment prováděli „vlastnoručně".

(b) Jakou silou musí působit ruka na tyčku?

ŘEŠENÍ: Hledaná síla udílí zrychlení tyčce i kostce. Abychom ji zjistili, musíme nejdříve určit užitím vztahu (2.15) velikost stálého zrychlení a:

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2.$$

Dosazením $v_{0x} = 0$ a $x - x_0 = d$ a řešením vzhledem k neznámé $a_x = a$ dostaneme

$$a = \frac{2d}{t^2} = \frac{2(0{,}77\,\mathrm{m})}{(1{,}7\,\mathrm{s})^2} = 0{,}533\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Pro zjištění síly, jíž vyvine ruka, použijeme druhý Newtonův zákon pro soustavu složenou z tyčky a kostky. Pak

$$F_{\mathrm{TR}} = (M+m)a = (33\,\mathrm{kg} + 3{,}2\,\mathrm{kg})(0{,}533\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 19{,}3\,\mathrm{N} \doteq 19\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou silou tlačí tyčka na kostku?

ŘEŠENÍ: Aplikujeme druhý Newtonův zákon na samotnou kostku:

$$F_{\mathrm{KT}} = Ma = (33\,\mathrm{kg})(0{,}533\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 17{,}6\,\mathrm{N} \doteq 18\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká je výsledná síla působící na tyčku?

ŘEŠENÍ: Velikost této síly F můžeme najít dvěma způsoby. První z nich využívá výsledků (b) a (c):

$$F = F_{\mathrm{TR}} - F_{\mathrm{TK}} = 19{,}3\,\mathrm{N} - 17{,}6\,\mathrm{N} = \\ = 1{,}7\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při výpočtu jsme využili skutečnosti, že podle třetího Newtonova zákona má síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{TK}}$ stejnou velikost (tj. 17,6 N) jako síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{KT}}$.

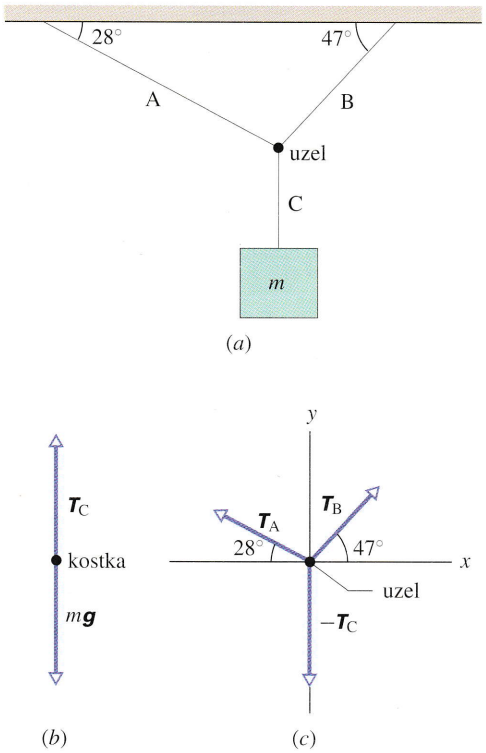
Druhý způsob spočívá přímo v použití druhého Newtonova zákona pro samotnou tyčku. Dostáváme

$$F = ma = (3{,}2\,\mathrm{kg})(0{,}533\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 1{,}7\,\mathrm{N}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

což souhlasí s předchozím výsledkem. Musí tomu tak být, neboť oba postupy jsou ekvivalentní. Ověřte to obecným vyjádřením velikosti síly F pomocí zadaných veličin oběma způsoby.

PŘÍKLAD 5.7

Obr. 5.21 znázorňuje kostku o hmotnosti $m = 15\,\mathrm{kg}$ zavěšenou na třech vláknech. Jakými silami jsou vlákna napínána?



Obr. 5.21 Příklad 5.7. (a) Kostka o hmotnosti m je zavěšena na třech vláknech. (b) Silový diagram kostky. (c) Silový diagram uzlu, v němž jsou vlákna spojena.

ŘEŠENÍ: V silovém diagramu kostky (obr. 5.21b) směřuje tahová síla $\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}$, jíž působí na kostku vlákno C, svisle vzhůru, zatímco tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ míří dolů. Soustava je v klidu, takže podle druhého Newtonova zákona platí

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{C}} + m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}.$$

Poněvadž jsou síly $\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}$ a $m\boldsymbol{g}$ svislé, dostáváme jedinou skalární rovnici

$$\sum F_y = T_{\mathrm{C}} - mg = 0.$$

Dosazením zadaných hodnot pak získáme

$$T_{\mathrm{C}} = mg = (15\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}) = \\ = 147\,\mathrm{N} \doteq 150\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Další krok vychází ze skutečnosti, že všechny tři hledané tahové síly mají působiště v uzlu, v němž jsou vlákna spojena. Aplikujeme tedy druhý Newtonův zákon na uzel. Příslušný silový diagram je na obr. 5.21c. Protože se uzel neurychluje, musí být výsledná síla, která na něj působí, nulová. Pak

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}} + (-\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}}) = \boldsymbol{0}.$$

Tato vektorová rovnice je ekvivalentní dvěma rovnicím skalárním

$$\sum F_y = T_{\mathrm{A}} \sin 28^\circ + T_{\mathrm{B}} \sin 47^\circ - T_{\mathrm{C}} = 0 \qquad (5.23)$$

a

$$\sum F_x = -T_A \cos 28^\circ + T_B \cos 47^\circ = 0. \quad (5.24)$$

Uvědomte si, že při zápisu x-ové složky síly $\boldsymbol{T}_A$ musíme výraz $T_A \cos 28^\circ$ opatřit znaménkem minus, abychom vyjádřili fakt, že průmět síly $\boldsymbol{T}_A$ do osy x je s touto osou nesouhlasně rovnoběžný.

Dosazením číselných hodnot do rov. (5.23) a (5.24) dostaneme

$$T_A(0{,}469) + T_B(0{,}731) = 147\,\text{N} \quad (5.25)$$

a

$$T_B(0{,}682) = T_A(0{,}883). \quad (5.26)$$

Z rov. (5.26) vyplývá

$$T_B = \frac{0{,}883}{0{,}682} T_A = 1{,}29 T_A.$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (5.25) a řešením vzhledem k neznámé T_A získáváme

$$T_A = \frac{147\,\text{N}}{0{,}469 + (1{,}29)(0{,}731)} = \\ = 104\,\text{N} \doteq 100\,\text{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Nakonec určíme T_B:

$$T_B = 1{,}29\, T_A = (1{,}29)(104\,\text{N}) = \\ = 134\,\text{N} \doteq 130\,\text{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

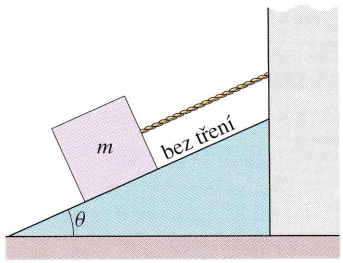
PŘÍKLAD 5.8

Na obr. 5.22a je kostka o hmotnosti $m = 15\,\text{kg}$ upevněná na vlákně a spočívající na dokonale hladké nakloněné rovině. Jakou silou je napínáno vlákno, je-li $\theta = 27^\circ$? Jakou silou působí nakloněná rovina na kostku?

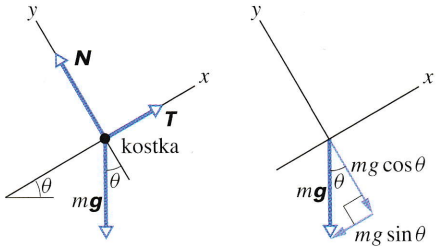
ŘEŠENÍ: Na obr. 5.22b je silový diagram pro případ kostky. Na kostku působí tyto síly: (1) normálová síla $\boldsymbol{N}$, jíž na ni tlačí nakloněná rovina, (2) tahová síla vlákna $\boldsymbol{T}$ a (3) tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$. Poněvadž je zrychlení kostky nulové, je podle druhého Newtonova zákona nulová i výslednice všech těchto sil:

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} + m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}. \quad (5.27)$$

Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby osa x byla rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Při této volbě budou mít dokonce dvě ze sil ($\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{T}$) směr souřadnicových os. To je výhoda. Všimněme si, že úhel mezi tíhovou silou a zápornou poloosou osy y je roven úhlu sklonu nakloněné roviny. Složky této síly určíme z trojúhelníka znázorněného na obr. 5.22c.



(a)



(b) (c)

Obr. 5.22 Příklady 5.8 a 5.9. (a) Kostka o hmotnosti m upevněná na vlákně spočívá v klidu na dokonale hladké nakloněné rovině. (b) Silový diagram kostky. Všimněme si volby souřadnicových os. (c) Určení x-ové a y-ové složky tíhové síly $m\boldsymbol{g}$.

Rozepsáním vztahu (5.27) do složek dostaneme

$$\sum F_x = T - mg \sin\theta = 0$$

a

$$\sum F_y = N - mg \cos\theta = 0.$$

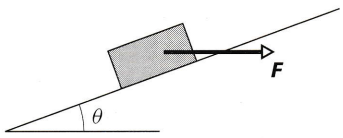
Pak tedy

$$T = mg \sin\theta = (15\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m·s}^{-2}) \sin 27^\circ = \\ = 67\,\text{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

a

$$N = mg \cos\theta = (15\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m·s}^{-2}) \cos 27^\circ = \\ = 131\,\text{N} \doteq 130\,\text{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 7: Na obrázku působí na kostku vodorovná síla $\boldsymbol{F}$. (a) Rozhodněte, zda průmět síly $\boldsymbol{F}$ do směru kolmého ke svahu má velikost $F\cos\theta$ nebo $F\sin\theta$. (b) Dojde vlivem působení síly $\boldsymbol{F}$ ke zvýšení či ke snížení velikosti normálové tlakové síly, jíž působí svah na kostku?



PŘÍKLAD 5.9

Představme si, že dojde k přetnutí vlákna udržujícího kostku na obr. 5.22 na nakloněné rovině v klidu. S jakým zrychlením se bude kostka pohybovat?

ŘEŠENÍ: Přetnutím vlákna zmizí síla $\boldsymbol{T}$, vyznačená na obr. 5.22b. Zbývající síly působící na kostku se samozřejmě nemohou vyrušit, neboť nepůsobí v téže přímce. Použitím druhého Newtonova zákona pro x-ové složky sil $\boldsymbol{N}$ a $m\boldsymbol{g}$ dostaneme

$$\sum F_x = 0 - mg\sin\theta = ma,$$

takže

$$a = -g\sin\theta. \tag{5.28}$$

Uvědomme si, že normálová síla $\boldsymbol{N}$ nemá vliv na zrychlení podél nakloněné roviny, neboť její x-ová složka je nulová.

Ze vztahu (5.28) vychází

$$a = -(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\sin 27^\circ = \\ = -4{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znaménko minus signalizuje, že zrychlení má směr klesající souřadnice x, tedy dolů podél nakloněné roviny.

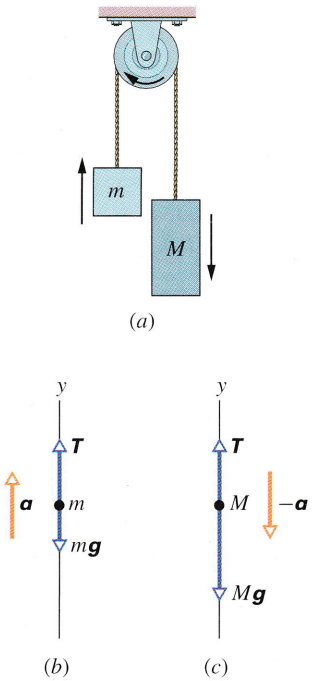
Z rov. (5.28) je vidět, že zrychlení kostky nezávisí na její hmotnosti, stejně jako je tomu v případě zrychlení volně padajícího tělesa. Rov. (5.28) představuje návod, jak lze užít nakloněné roviny ke „zmírnění gravitace", tj. ke „zpomalení" volného pádu. Pro $\theta = 90^\circ$ dostáváme $a = -g$, pro $\theta = 0^\circ$ je $a = 0$. Oba tyto výsledky jsme očekávali.

PŘÍKLAD 5.10

Na obr. 5.23a jsou dvě kostky spojené vláknem vedeným přes nehmotnou kladku, která se otáčí bez tření. (Takové uspořádání se nazývá *Atwoodův padostroj*.) Nechť $m = 1{,}3\ \mathrm{kg}$ a $M = 2{,}8\ \mathrm{kg}$. Určíme velikost síly napínající vlákno a (společnou) velikost zrychlení kostek.

ŘEŠENÍ: Obr. 5.23b, c představují silové diagramy pro každou z kostek. Zadali jsme $M > m$, takže očekáváme, že kostka M bude klesat, zatímco m bude stoupat. Tato informace umožní přiřadit zrychlením kostek správná znaménka.

Než začneme s výpočtem, uvědomme si, že síla napínající vlákno musí být menší než tíhová síla působící na kostku M (jinak by kostka nezačala klesat) a větší než tíhová síla působící na kostku m (jinak by tato kostka nezačala stoupat). Znázornění vektorů v silových diagramech na obr. 5.23 tuto skutečnost respektuje.



Obr. 5.23 Příklad 5.10. (a) Kostka o hmotnosti M a kostka o menší hmotnosti m jsou spojeny vláknem vedeným přes kladku. Směry zrychlení kostek jsou vyznačeny šipkami. Silové diagramy pro kostku m (b) a kostku M (c).

Užitím druhého Newtonova zákona pro kostku o hmotnosti m, jejíž zrychlení má velikost a a je souhlasně rovnoběžné s osou y, dostaneme

$$ma = T - mg. \tag{5.29}$$

Pro kostku o hmotnosti M, jejíž zrychlení má stejnou velikost, je však nesouhlasně rovnoběžné s osou y, máme

$$-Ma = T - Mg, \tag{5.30}$$

nebo

$$Ma = -T + Mg. \tag{5.31}$$

Sečtením rovnic (5.29) a (5.31) (nebo vyloučením T) získáme

$$a = \frac{M-m}{M+m}g. \tag{5.32}$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (5.29) nebo do (5.31) a řešením vzhledem k neznámé T dostaneme

$$T = \frac{2mM}{M+m}g. \tag{5.33}$$

Dosazením zadaných údajů pak dostáváme

$$a = \frac{M-m}{M+m}g = \frac{(2{,}8\ \mathrm{kg} - 1{,}3\ \mathrm{kg})}{(2{,}8\ \mathrm{kg} + 1{,}3\ \mathrm{kg})}(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}) = \\ = 3{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

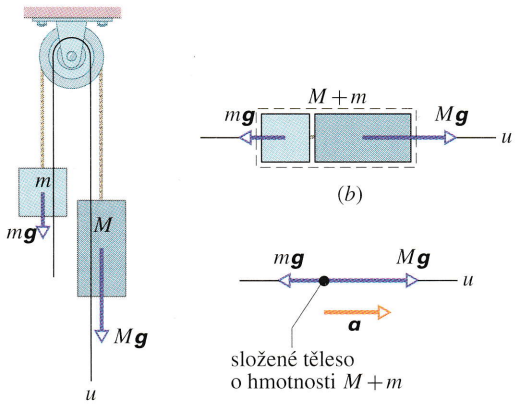
a

$$T = \frac{2Mm}{M+m}g = \frac{2(2{,}8\,\mathrm{kg})(1{,}3\,\mathrm{kg})}{(2{,}8\,\mathrm{kg}+1{,}3\,\mathrm{kg})}(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) =$$
$$= 17\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Velikosti tíhových sil působících na jednotlivé kostky jsou 13 N (= mg) a 27 N (= Mg). Velikost síly napínající vlákno (17 N) skutečně leží v intervalu těchto dvou hodnot.

PŘÍKLAD 5.10 — jiný způsob řešení

Obdobně jako při alternativním* řešení př. 5.5 použijeme nekonvenční volbu osy u.



Obr. 5.24 (a) „Osa" u je vedena přes celou soustavu znázorněnou na obr. 5.23. (b) Kostky jsou uspořádány v „napřímené" ose u a považovány za jediné těleso o hmotnosti $M+m$. (c) Příslušný silový diagram, v němž jsou vyznačeny pouze síly působící podél osy u. Takové síly jsou dvě.

ŘEŠENÍ: Vedeme osu u celou soustavou podle obr. 5.24a a napřímíme ji podle obr. 5.24b. Kostky budeme považovat za jediné těleso o hmotnosti $M+m$. Nakreslíme silový diagram podle obr. 5.24c. Uvědomme si, že podél osy u působí na složené těleso dvě síly: $m\boldsymbol{g}$ ve směru nesouhlasném s osou u a $M\boldsymbol{g}$ ve směru souhlasném. (Síly, jimiž působí na vlákno kladka, jsou kolmé k ose u a nevstupují do výpočtu.) Síly, které působí podél osy u, udělují složenému tělesu zrychlení $\boldsymbol{a}$. Zápis druhého Newtonova zákona pro složku u má tvar

$$\sum F_u = Mg - mg = (M+m)a, \qquad (5.34)$$

odkud

$$a = \frac{M-m}{M+m}g,$$

stejně jako při předchozím způsobu řešení. Pro získání T použijeme druhý Newtonův zákon pro kteroukoli z kostek a užijeme obvyklý způsob volby osy y. Pro kostku o hmotnosti m dostaneme rov. (5.29) a po dosazení za a získáme výsledek (5.33).

PŘÍKLAD 5.11

Pasažér o hmotnosti $m = 72{,}2$ kg stojí na nášlapné váze v kabině výtahu (obr. 5.25). Jaký údaj ukazuje váha pro hodnoty zrychlení uvedené v obrázku?

ŘEŠENÍ: Zabývejme se touto úlohou z hlediska pozorovatele v (inerciální) vztažné soustavě spojené se Zemí. Pozorovatel aplikuje druhý Newtonův zákon na urychlujícího se pasažéra. Obr. 5.25a-c ukazují silové diagramy, v nichž je pasažér považován za částici, pro různé hodnoty velikosti zrychlení kabiny.

Bez ohledu na zrychlení kabiny působí Země na pasažéra tíhovou silou o velikosti mg, kde $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ je velikost tíhového zrychlení. Podlaha výtahu tlačí na váhu směrem vzhůru. Váha tlačí směrem vzhůru na pasažéra normálovou silou o velikosti N, která je shodná s údajem na stupnici váhy. Pasažér se domnívá, že váží tolik, kolik ukazuje váha. Tato veličina se často nazývá *zdánlivá váha*, přičemž název *tíhová síla* nebo jen *váha* je rezervován pro veličinu $m\boldsymbol{g}$.*

---

* Způsob řešení úloh, použitý jako alternativa v př. 5.5 a 5.10 a založený na myšlence „napřímení nekonvenční osy u jdoucí celou soustavou", může mít svá úskalí, pokud jej důkladně nepromyslíme a nepochopíme. Jeho použitelnost spočívá výhradně v tom, že každý vektor, a tedy i všechny vektorové veličiny vstupující do našich výpočtů, lze zapsat pomocí složek v libovolně zvolené soustavě souřadnic. „Napřímení nekonvenční osy u", o níž je řeč např. v př. 5.10, nepředstavuje nic jiného, než dvojí volbu soustavy souřadnic: s kostkou m je spojena soustava souřadnic, jejíž y-ová osa má směr zrychlení této kostky (směřuje tedy svisle vzhůru), y-ová osa soustavy souřadnic spojené s kostkou M směřuje naopak svisle dolů, tj. opět ve směru zrychlení příslušné kostky. Vazební podmínka úlohy $\boldsymbol{a}_m = -\boldsymbol{a}_M$ požaduje, aby zrychlení kostek byly opačné vektory. Toto a požadavek zanedbatelné hmotnosti kladky pak zajistí, že druhý Newtonův zákon zapsaný ve složkách má stejný tvar jako v případě s „napřímenou" osou u.

* V originále je veličina mg nazývána *vahou*. V české fyzikální terminologii se tento výraz již téměř neužívá. Vektorové veličině $m\boldsymbol{g}$, kde $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, představující sílu, jíž působí Země na těleso o hmotnosti m v těsné blízkosti jejího povrchu, se říká *tíhová síla*, mg je *velikost tíhové síly*. Údaj čtený na stupnici nášlapné váhy samozřejmě ukazuje velikost síly, jíž působí člověk na podložku váhy, resp. podložka váhy na člověka. Pro tuto veličinu se někdy užívá názvu *tíha*. Pro $a = 0$ je tíha rovna mg a odpovídá *skutečné váze* zmiňované v originále, pro $a \neq 0$ se od hodnoty mg liší a odpovídá *zdánlivé váze*. Pro $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$ mluvíme o **beztížném stavu**. Bez pojmu *tíha* s přívlastky či bez nich se ovšem snadno obejdeme a vyhneme se tak možným dezinterpretacím. Vzhledem k tomu, že stupnice osobních vah jsou cejchovány výhradně v kilogramech, může mít smysl mluvit o *zdánlivé hmotnosti*. Prakticky ve všech úlohách, s nimiž se setkáme, působí na studovaná tělesa tíhová síla. Pro stručnost a s přihlédnutím k původnímu textu užíváme někdy namísto obsáhlejší správné formulace „na těleso působí tíhová síla 100 N" použít zkráceného, avšak nepřesného, vyjádření „těleso váží 100 N".

Druhý Newtonův zákon dává

$$ma = N - mg,$$

tj.

$$N = m(g + a). \qquad (5.35)$$

(a) Jaký je údaj na stupnici váhy, je-li kabina v klidu, nebo pohybuje-li se stálou rychlostí? (Obr. 5.25a.)

ŘEŠENÍ: Pro tento případ je $a = 0$, a tedy

$$N = m(g + a) = (72{,}2\,\text{kg})(9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} + 0) = \\ = 708\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento údaj považuje pasažér za svoji „váhu".

(b) Jaký je údaj na stupnici, směřuje-li zrychlení kabiny vzhůru a jeho velikost je $3{,}20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$? (Obr. 5.25b.)

ŘEŠENÍ: Směřuje-li zrychlení kabiny vzhůru, znamená to, že kabina buď stoupá se vzrůstající rychlostí, nebo klesá s klesající rychlostí. V obou případech je vztažná soustava spojená s kabinou neinerciální. Z rov. (5.35) dostaneme

$$N = m(g + a) = (72{,}2\,\text{kg})(9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} + 3{,}20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = \\ = 939\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

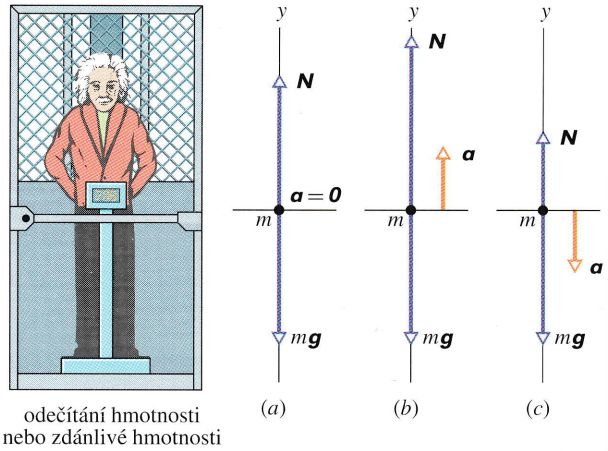
Pasažér tlačí na váhu větší silou než za klidu. Při pohledu na stupnici se pasažér může domnívat, že „přibral" 23,6 kg (odpovídá 231 N)!

(c) Jaký je údaj na stupnici, směřuje-li zrychlení kabiny dolů a má-li velikost $3{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$? (Obr. 5.25c.)

ŘEŠENÍ: Směřuje-li zrychlení kabiny dolů, znamená to, že kabina buď stoupá s klesající rychlostí, nebo klesá se vzrůstající rychlostí. Vztažná soustava spojená s kabinou je opět neinerciální. Z rov. (5.35) dostaneme

$$N = m(g + a) = (72{,}2\,\text{kg})(9{,}80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} - 3{,}20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = \\ = 477\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pasažér tlačí na váhu menší silou než za klidu. Zdá se mu, že „zhubl" o 23,6 kg (odpovídá 231 N)!



odečítání hmotnosti nebo zdánlivé hmotnosti

Obr. 5.25 Příklad 5.11. Pasažér o hmotnosti m stojí ve výtahu na pružinové váze, která ukazuje jeho hmotnost nebo „zdánlivou" hmotnost. Silové diagramy pro případy, kdy (a) zrychlení kabiny výtahu je nulové, (b) $a = +3{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, (c) $a = -3{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

KONTROLA 8: Jaký by byl údaj na stupnici, kdyby se lano kabiny přetrhlo a kabina by padala volným pádem? Jaká je tedy zdánlivá váha (či zdánlivá hmotnost) pasažéra při volném pádu?

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Newtonovská mechanika

Rychlost částice nebo tělesa nahrazeného hmotným bodem se může měnit (částice se může urychlovat), jestliže na ni okolní objekty působí **silami**. *Newtonovská mechanika* uvádí do souvislosti celkové silové působení na zkoumané těleso s jeho zrychlením.

Síla

Pozorujeme-li, že těleso má vzhledem k inerciální soustavě nenulové zrychlení (jeho pohyb je nerovnoměrný nebo křivočarý), jsme si díky prvnímu Newtonovu zákonu jisti, že je ovlivněno interakcí s okolními objekty. Kvantitativně je tato interakce popsána fyzikální veličinou zvanou **síla**. Vztahy pro síly charakterizující konkrétní interakce jsou dány **silovými zákony**, které je třeba zjistit experimentálně. Silový zákon lze odhalit tak, že sledujeme *testovací těleso* o známé hmotnosti m, které interaguje s *jediným* okolním objektem. Síla, kterou tento objekt působí na těleso, bude v každém okamžiku dána součinem hmotnosti testovacího tělesa m a jeho zrychlení $\boldsymbol{a}$. Experimentálně bylo zjištěno, že síly jsou vektorové veličiny a lze je skládat podle pravidel vektorové algebry. **Výslednice sil** působících na těleso je jejich vektorovým součtem. Velikost síly je číselně dána velikostí zrychlení, které tato síla udílí standardnímu kilogramu. Síla, která standardnímu kilogramovému tělesu udělí zrychlení o velikosti $1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, má podle definice velikost 1 N. Směr zrychlení a směr síly jsou shodné.

Hmotnost

Hmotnost tělesa je jeho charakteristika, která určuje vztah mezi jeho zrychlením a silou (nebo výslednicí sil), která mu toto zrychlení udílí. Hmotnost je skalární veličina.

První Newtonův zákon

Volné částice se navzájem pohybují rovnoměrně přímočaře nebo jsou vůči sobě v klidu. S volnými částicemi lze spojit preferované vztažné soustavy, nazývané inerciální. Volná částice je vzhledem k inerciální vztažné soustavě v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu (tj. v pohybu s konstantní rychlostí).

Druhý Newtonův zákon

Síly působící na těleso o hmotnosti m mu udílejí zrychlení, které je dáno jejich výslednicí $\sum \boldsymbol{F}$ podle vztahu

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{5.1}$$

Tento vztah lze rozepsat do složek:

$$ma_x = \sum F_x, \quad ma_y = \sum F_y, \quad ma_z = \sum F_z. \tag{5.2}$$

Z druhého Newtonova zákona vyplývá, že v soustavě jednotek SI je jednotka síly

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}. \tag{5.3}$$

Silový diagram je užitečný pro řešení úloh pomocí druhého Newtonova zákona: je to zjednodušený diagram, konstruovaný pro *jediné* těleso, reprezentované bodem. Vnější síly působící na toto těleso jsou znázorněny jako vektory. V diagramu je rovněž zakreslena soustava souřadnic zvolená tak, aby řešení úlohy bylo co nejjednodušší.

Některé typy sil

Tíhová síla $\boldsymbol{G}$ je síla, kterou působí na těleso Země (nebo jiný astronomický objekt, v jehož těsné blízkosti se těleso nachází):

$$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}, \tag{5.10}$$

kde $\boldsymbol{g}$ je tíhové zrychlení (zrychlení volného pádu).

Normálová síla $\boldsymbol{N}$ je tlaková síla, kterou působí na těleso podložka, na níž těleso spočívá. Je k podložce vždy kolmá.

Třecí silou $\boldsymbol{F}$ působí na těleso podložka, pokud je podél ní uváděno do skluzu, nebo již po ní klouže. Tato síla je rovnoběžná s podložkou a směřuje proti směru skutečného či zamýšleného pohybu tělesa. **Dokonale hladká podložka** působí na těleso zanedbatelně malou třecí silou.

Tahovou silou $\boldsymbol{T}$ působí na těleso připojené lano (vlákno). Její působiště je v místě spoje. Síla má směr vlákna a míří ven z tělesa. Pro **nehmotné** vlákno (tj. vlákno se zanedbatelnou hmotností) má tahová síla na obou jeho koncích stejnou velikost, i když je vedeno přes **nehmotnou kladku**, která se může otáčet **bez tření** (hmotnost kladky je zanedbatelná stejně jako třecí síla v ose kladky, která by bránila její rotaci).

Třetí Newtonův zákon

Působí-li těleso A silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}$ na těleso B, působí i těleso B na těleso A, a to silou stejně velkou, avšak opačně orientovanou:

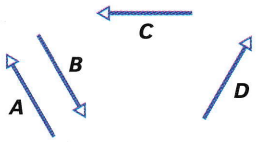
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}. \tag{5.14}$$

Tyto síly působí na *různá* tělesa.

OTÁZKY

1. Na pohybující se těleso působí dvě síly. Je možné, aby se těleso pohybovalo (a) rovnoměrně, (b) stálou rychlostí? Mohla by být rychlost tělesa nulová (c) v některém okamžiku, (d) trvale?

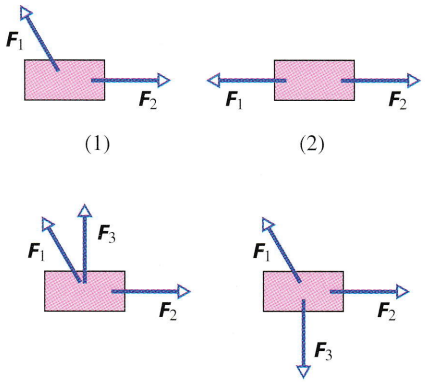
2. Obr. 5.26 znázorňuje čtyři síly stejné velikosti. Je možné vybrat z nich tři tak, aby se při jejich (současném) působení na těleso jeho rychlost neměnila? V kladném případě tyto síly označte.



Obr. 5.26 Otázka 2

3. Obr. 5.27 znázorňuje pohled shora na čtyři situace, v nichž síly působí na kostku spočívající na dokonale hladké podlaze. Ve kterých z nich lze vhodně zvolit velikost sil tak, aby kostka (a) byla v klidu, (b) pohybovala se konstantní rychlostí?

4. Svislá síla $\boldsymbol{F}$ působí na kostku o hmotnosti m ležící na podlaze. Co se děje s normálovou silou $\boldsymbol{N}$, jíž působí na kostku podlaha, narůstá-li velikost F síly $\boldsymbol{F}$ z nulové hodnoty a síla $\boldsymbol{F}$ směřuje (a) dolů, (b) vzhůru?

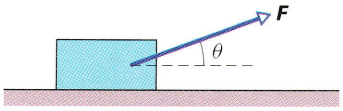


Obr. 5.27 Otázka 3

5. Na těleso na obr. 5.8 působí tíhová síla o velikosti 100 N. Na jeho povrchu leží další těleso, na něž působí tíhová síla 50 N. Jaká je normálová síla, jíž působí (a) dolní těleso na horní, (b) stůl na dolní těleso?

6. (a) Přispívá svislá složka síly $\boldsymbol{F}$ na obr. 5.28 k nadzvednutí krabice, nebo ji přitlačuje k podlaze? (b) Předpokládejte, že

hmotnost krabice je m. Je velikost normálové síly, jíž působí podlaha na krabici, stejná, větší či menší ve srovnání s mg? (c) Je svislá složka síly $\boldsymbol{F}$ rovna $F \sin\theta$, nebo $F \cos\theta$?



Obr. 5.28 Otázka 6

7. Zavěšené těleso na obr. 5.10c váží 75 N. Rozhodněte, zda je hodnota T, resp. T' stejná, větší či menší než 75 N, pohybuje-li se těleso směrem dolů (a) se vzrůstající rychlostí, (b) s klesající rychlostí.

8. Kabina výtahu je zavěšena na jediném laně a nemá protizávaží. V přízemí do kabiny nastoupí pasažéři, kteří jedou do nejvyššího patra a tam vystoupí. Nahoře nastoupí noví pasažéři a jedou do přízemí. Rozhodněte, v kterých fázích této okružní jízdy je velikost síly napínající závěsné lano (a) stejná jako velikost tíhové síly působící na pasažéry a kabinu, (b) větší, (c) menší.

9. Na obr. 5.29 je nehmotné lano vedeno přes kladku, která se může otáčet bez tření. Na laně visí opice a dívá se do zrcadla, které má stejnou hmotnost jako ona a je zavěšeno na druhém konci lana. Může opice „uniknout" svému obrazu v zrcadle, jestliže (a) poleze po laně vzhůru, (b) poleze po laně dolů, (c) pustí lano? Zdůvodněte.

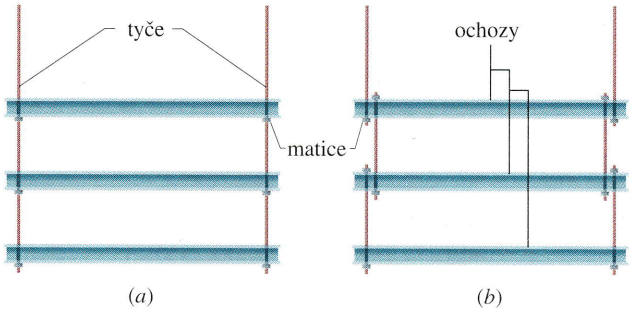


Obr. 5.29 Otázka 9

10. Je 17. července 1981, Kansas City: nově otevřená hala Hyatt Regency je plná lidí, kteří poslouchají oblíbené skladby 40. let a tančí při nich. Mnoho lidí se tísní na ochozech, které visí jako mosty nad širokým atriem. Najednou se dva ochozy utrhnou a spadnou na ty, kteří se baví dole…

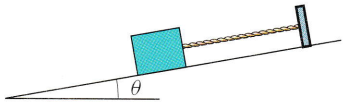
Ochozy byly zavěšeny nad sebou na svislých tyčích a připevněny k nim pomocí šroubů s maticemi. V původním návrhu konstrukce měly být použity pouze dvě svislé tyče a ke každé z nich měly být připevněny tři ochozy (obr. 5.30a). Tíhová síla působící na každý z ochozů i s lidmi měla průměrnou velikost G. Jaká by byla celková zátěž závitů a dvou šroubů s maticemi držících (a) nejnižší, (b) nejvyšší ochoz?

Předpokládejme, že šrouby nelze uchytit k tyčím jinak, než na jejich koncích. Je tedy třeba zvolit jiný typ konstrukce. Na rozdíl od původního provedení je nyní použito šesti tyčí a každá je spojena se dvěma ochozy (obr. 5.30b). Jaká je nyní celková zátěž závitů a dvou šroubů držících (c) nejnižší, (d) nejvyšší ochoz? Právě tato druhá konstrukce byla použita v popisovaném případě.



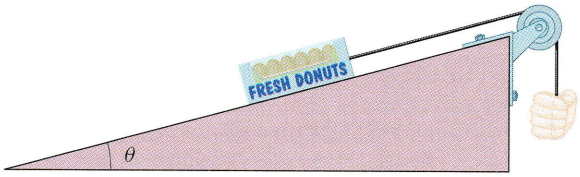
Obr. 5.30 Otázka 10

11. Kostka na obr. 5.31 je připevněna na provaze uchyceném ke sloupku, který je pevně spojen s nakloněnou rovinou. Rozhodněte, zda velikosti následujících sil rostou, klesají či zůstávají neměnné, narůstá-li úhel sklonu θ od nulové hodnoty: (a) složka tíhové síly působící na kostku měřená podél nakloněné roviny, (b) síla napínající provaz, (c) složka tíhové síly působící na kostku měřená ve směru kolmém k nakloněné rovině, (d) normálová síla, jíž působí nakloněná rovina na kostku.



Obr. 5.31 Otázka 11

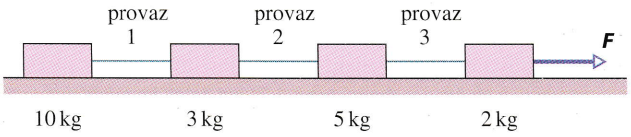
12. Krabice s koblihami leží na dokonale hladké nakloněné rovině (obr. 5.32). Složka tíhové síly působící na krabici měřená podél nakloněné roviny má velikost 5 N. Tahová síla provazu je T. Rozhodněte, je-li hodnota T stejná, větší či menší než 5 N, jestliže krabice (a) je v klidu, (b) stoupá po nakloněné rovině s konstantní rychlostí, (c) klesá s konstantní rychlostí, (d) stoupá s klesající rychlostí, (e) klesá s klesající rychlostí.



Obr. 5.32 Otázka 12

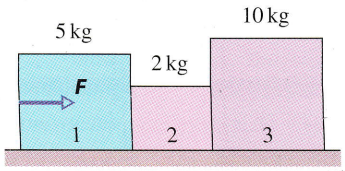
13. Na obr. 5.33 jsou čtyři kostky tažené po dokonale hladké vodorovné podložce silou $\boldsymbol{F}$. Jaká celková hmotnost je urychlo-

vána směrem vpravo (a) silou $\boldsymbol{F}$, (b) vláknem 3, (c) vláknem 1? (d) Sestavte sestupné pořadí kostek podle velikosti jejich zrychlení. (e) Sestavte sestupné pořadí vláken podle velikosti tažné síly. (Přípravná otázka pro řešení úloh 48 a 49.)



Obr. 5.33 Otázka 13

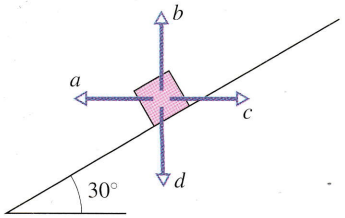
14. Na obr. 5.34 jsou tři kostky tlačené po dokonale hladké podložce vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$. Jaká celková hmotnost je urychlována



Obr. 5.34 Otázka 14

směrem vpravo (a) silou $\boldsymbol{F}$, (b) silou $\boldsymbol{F}_{21}$, jíž působí kostka 1 na kostku 2, (c) silou $\boldsymbol{F}_{32}$, jíž působí kostka 2 na kostku 3? (d) Seřaďte kostky sestupně podle velikosti jejich zrychlení. (e) Seřaďte sestupně síly $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_{21}$, $\boldsymbol{F}_{32}$ podle jejich velikosti. (Přípravná otázka pro úlohu 40.)

15. Obr. 5.35 ukazuje čtyři možné směry působení síly o velikosti F na kostku umístěnou na nakloněné rovině. Směry jsou buď vodorovné, nebo svislé. (Předpokládáme, že velikost síly není dostatečná k tomu, aby se v případě a nebo b kostka odpoutala od podložky.) Uspořádejte jednotlivé možnosti sestupně podle velikosti odpovídající normálové síly, jíž tlačí podložka na kostku.



Obr. 5.35 Otázka 15

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 5.3 Síla

1C. Standardní kilogramové těleso se pohybuje se zrychlením o velikosti $2{,}00\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, které svírá s kladným směrem osy x úhel 20°. Určete (a) x-ovou a y-ovou složku výslednice sil působících na těleso. (b) Vyjádřete výslednici pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic.

2C. Standardní kilogramové těleso je urychlováno silami $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{F}_2 = (-2{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. (a) Zapište výslednou sílu pomocí jednotkových vektorů. Určete velikost a směr (b) výsledné síly působící na těleso, (c) zrychlení tělesa.

3Ú. Standardní kilogramové těleso se pohybuje se zrychlením o velikosti $4{,}00\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, které svírá s kladným směrem osy x úhel 160°. Zrychlení udílejí tělesu dvě síly, z nichž jedna má tvar $\boldsymbol{F}_1 = (2{,}5\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}6\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. (a) Zapište druhou ze sil pomocí jednotkových vektorů. (b) Určete její velikost a směr.

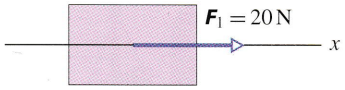
ODST. 5.5 Druhý Newtonův zákon

4C. Na kostku o hmotnosti 2,0 kg, která může klouzat po dokonale hladké kuchyňské lince v rovině xy, působí dvě vodorovné síly. Jedna z nich je $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Zapište zrychlení kostky pomocí jednotkových vektorů, je-li druhá síla (a) $\boldsymbol{F}_2 = (-3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$, (b) $\boldsymbol{F}_2 = (-3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$, (c) $\boldsymbol{F}_2 = (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$.

5C. Částice, na niž působí dvě síly, se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v} = (3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Jedna ze sil je $\boldsymbol{F}_1 = (2\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Určete druhou sílu.

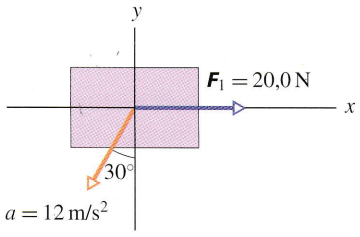
6C. Na částici pohybující se stálou rychlostí $\boldsymbol{v} = (2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$ působí tři síly. Dvě z nich jsou dány takto: $\boldsymbol{F}_1 = (2\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (3\ \mathrm{N})\boldsymbol{j} + (-2\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{F}_2 = (-5\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (8\ \mathrm{N})\boldsymbol{j} + (-2\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$. Určete třetí sílu.

7C. Na dvoukilogramovou bednu, znázorněnou na obr. 5.36 v pohledu shora, působí dvě síly, z nichž pouze jedna je v obrázku vyznačena. Bedna se pohybuje přesně podél osy x. Pro každou z následujících hodnot x-ové složky zrychlení a_x bedny určete druhou sílu: (a) $10{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, (b) $20{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, (c) 0, (d) $-10{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, (e) $-20{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



Obr. 5.36 Cvičení 7

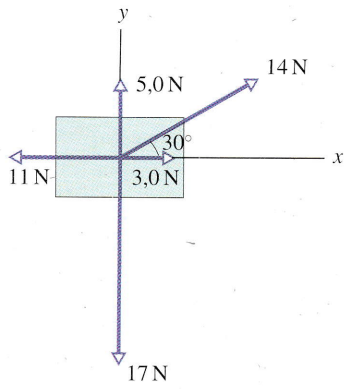
8C. Na dvoukilogramovou bednu, znázorněnou na obr. 5.37 v pohledu shora, působí dvě síly, z nichž pouze jedna je v obrázku vyznačena. Obrázek také ukazuje zrychlení bedny. (a) Vyjádřete druhou sílu pomocí jednotkových vektorů. (b) Určete její velikost a směr.



Obr. 5.37 Cvičení 8

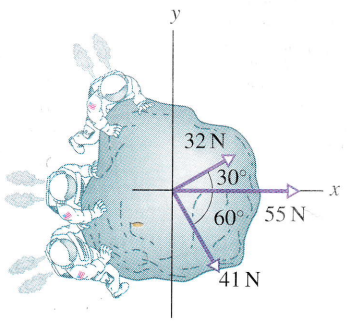
9C. Bedna na obr. 5.38 má hmotnost 4,0 kg. Působí na ni pět

sil. Vyjádřete zrychlení bedny (a) pomocí jednotkových vektorů a (b) určete jeho velikost a směr.



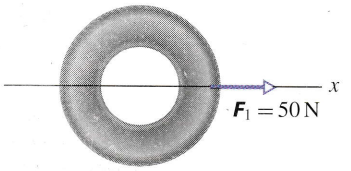
Obr. 5.38 Cvičení 9

10Ú. Tři astronauti poháněni tryskovými motorky na zádech tlačí asteroid o hmotnosti 120 kg k řídícímu stanovišti. Působí na něj při tom silami, vyznačenými v obr. 5.39. Jaké je zrychlení asteroidu vyjádřené (a) pomocí jednotkových vektorů, (b) pomocí velikosti a směru?



Obr. 5.39 Úloha 10

11Ú. Obr. 5.40 představuje pohled shora na pneumatiku o hmotnosti 12 kg, taženou třemi lany. Jedna ze sil ($\boldsymbol{F}_1$, velikost 50 N) je vyznačena. Stanovte orientaci dalších dvou sil $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ tak, aby velikost výsledného zrychlení byla co nejmenší a určete tuto velikost pro (a) $F_2 = 30\,\text{N}$, $F_3 = 20\,\text{N}$, (b) $F_2 = 30\,\text{N}$, $F_3 = 10\,\text{N}$, (c) $F_2 = F_3 = 30\,\text{N}$.



Obr. 5.40 Úloha 11

ODST. 5.6 Některé typy sil

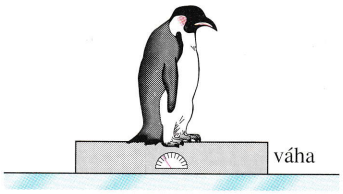
12C. Určete hmotnost a tíhovou sílu pro (a) 1 400librový sněžný skútr a (b) 421kilogramovou tepelnou pumpu.

13C. Jaká je tíhová síla v newtonech a hmotnost v kilogramech pro (a) 5,0librový balík cukru, (b) 240librového zápasníka, (c) 1,8tunový automobil?

14C. Vesmírný cestovatel, jehož hmotnost je 75 kg, opustil Zemi. Určete velikost tíhové síly, která na něj působí (a) na Zemi, (b) na Marsu, kde je $g = 3{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, (c) v meziplanetárním prostoru, kde je $g = 0$. (d) Jaká je jeho hmotnost ve všech těchto místech?

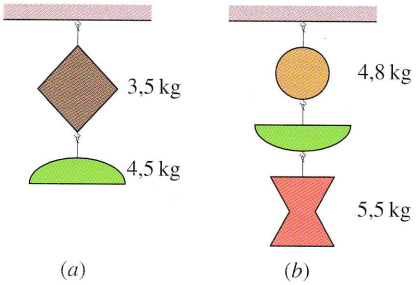
15C. Na částici působí tíhová síla 22 N v místě, kde je $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. (a) Určete tíhovou sílu působící na částici v místě, kde je $g = 4{,}9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Jaká je v tomto místě její hmotnost? (b) Jaká bude hmotnost a tíhová síla působící na tuto částici, přemístíme-li ji do prostoru, kde je $g = 0$?

16C. Tučňák o hmotnosti 15,0 kg stojí na osobní váze (obrázek 5.41). Určete (a) tíhovou sílu $\boldsymbol{G}$ působící na tučňáka a (b) normálovou sílu $\boldsymbol{N}$. Jaký údaj ukazuje váha, je-li cejchována v newtonech?



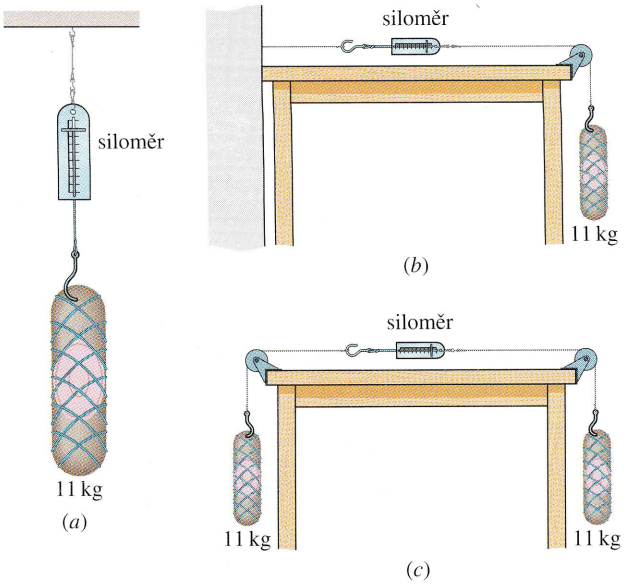
Obr. 5.41 Cvičení 16

17C. Na obr. 5.42a je znázorněna ozdoba se dvěma kovovými díly navléknutými na vlákně o zanedbatelné hmotnosti, zavěšená u stropu. Hmotnosti dílů jsou dány. Jaká síla napíná (a) dolní vlákno, (b) horní vlákno? Obr. 5.42b zachycuje podobnou ozdobu se třemi kovovými díly. Hmotnosti nejvyššího a nejnižšího dílu jsou dány. Síla napínající horní vlákno má velikost 199 N. Jak velká síla napíná (c) dolní a (d) prostřední vlákno?



Obr. 5.42 Cvičení 17

18C. (a) Salám o hmotnosti 11,0 kg je zavěšen na pružině siloměru, který je připevněn provazem ke stropu (obr. 5.43a). Jaký údaj je na stupnici siloměru? (b) Na obr. 5.43b je týž salám zavěšen na provaze vedeném přes kladku a upevněném k pružině siloměru. Siloměr je připevněn dalším provazem ke stěně. Jaký je nyní údaj na stupnici siloměru? (c) Na obr. 5.43c je stěna nahrazena jiným salámem o hmotnosti 11,0 kg a soustava je v rovnováze. Určete údaj na stupnici siloměru i v tomto případě.



Obr. 5.43 Cvičení 18

ODST. 5.8 Užití Newtonových zákonů

19C. Tíhová síla působící na letící letadlo je kompenzována svislou vztlakovou silou, kterou na letadlo působí okolní vzduch. Jak velká je vztlaková síla, je-li hmotnost letadla $1{,}20 \cdot 10^3$ kg?

20C. Jaká je velikost výslednice sil působících na automobil o hmotnosti 1 900 kg, který se rozjíždí se zrychlením o velikosti $3{,}1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$?

21C. Pokusné raketové sáně mohou být během 1,8 s rovnoměrně urychleny z klidu až na rychlost 1 600 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jaká je velikost potřebné průměrné síly, je-li hmotnost sání 500 kg?

22C. Automobil jedoucí rychlostí 53 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ narazil do mostního pilíře. Řidič se přitom pohnul o 65 cm dopředu (vzhledem k silnici), než byl jeho pohyb zastaven airbagem. Jak velká síla (předpokládáme stálou sílu) působila na řidičovu horní část těla, jejíž hmotnost je 41 kg?

23C. Při zachycení zbloudilého neutronu jádrem se neutron vlivem *silné interakce* musí zastavit na vzdálenosti rovné průměru jádra. Síla, která „drží" jádro pohromadě, je vně jádra prakticky nulová. Předpokládejme, že zbloudilý neutron s počáteční rychlostí o velikosti $1{,}4 \cdot 10^7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je právě tak tak zachycen jádrem o průměru $d = 1{,}0 \cdot 10^{-14}$ m. Jak velká je síla působící na neutron, považujeme-li ji za konstantní? Hmotnost neutronu je $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

24C. V modifikované přetahované se přetahují dva lidé nikoli na provaze, ale o sáně s hmotností 25 kg, které leží na (dokonale hladké) ledové ploše. Jaké bude zrychlení saní, vyvine-li jeden z hráčů sílu o velikosti 90 N a druhý 92 N?

25C. Motocykl o hmotnosti 225 kg dosáhne z klidu rychlosti 90 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ během 5,0 s. (a) Jak velké je zrychlení motocyklu, považujeme-li je za konstantní? (b) Jaká je velikost výsledné síly urychlující motocykl?

26C. Vraťme se k obr. 5.15 a předpokládejme, že hmotnosti znázorněných těles jsou $m = 2{,}0$ kg a $M = 4{,}0$ kg. (a) Bez výpočtu rozhodněte, které z obou těles je nutno zavěsit na konec lana, abychom docílili co největšího zrychlení. Jaká je v tomto případě (b) velikost zrychlení a (c) velikost tahové síly lana?

27C. Vraťme se k obr. 5.22. Zvolme hmotnost kostky $m = 8{,}5$ kg a úhel $\theta = 30°$. Určete (a) tahovou sílu provazu a (b) normálovou sílu působící na kostku. (c) Jaké bude zrychlení kostky, jestliže se provaz přetrhne?

28C. Tryskový letoun se rozjíždí po startovní dráze se zrychlením $2{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Má dva tryskové motory, z nichž každý vyvine tažnou sílu o velikosti $1{,}4 \cdot 10^5$ N. Kolik váží letadlo?

29C. *Sluneční plachtění.* „Sluneční jachta" je kosmická loď s velkou „plachtou", poháněná světelnými paprsky ze Slunce. I když je světelný tlak v běžných podmínkách velice malý, může být dostatečný k tomu, aby dopravil kosmickou loď na bezplatný, i když velmi pomalý výlet. Předpokládejme, že hmotnost lodi je 900 kg a působí na ni tlaková síla o velikosti 20 N. (a) Jak velké je zrychlení lodi? (b) Startuje-li loď z klidu, jak daleko se dostane za 1 den a (c) jak velké rychlosti za tu dobu dosáhne?

30C. Tahová síla, při které praskne rybářský vlasec, se všeobecně nazývá „pevností" vlasce. Jakou nejmenší pevnost vlasce (v newtonech) musíme požadovat, aby se 19librový losos zastavil na vzdálenosti 4,4 palce, pohyboval-li se rychlostí o velikosti 9,2 stop na sekundu? Předpokládejte, že zrychlení lososa je konstantní. Převody zadaných údajů do soustavy SI vyhledejte v převodní tabulce.

31C. V laboratorním experimentu je původně klidový elektron ($m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg) rovnoměrně urychlen na vzdálenosti 1,5 cm a dosáhne rychlosti $6{,}0 \cdot 10^6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jaká je velikost urychlující síly? (b) Jak velká je tíhová síla působící na elektron?

32C. Elektron vstupuje do elektrického pole s vodorovnou rychlostí o velikosti $1{,}2 \cdot 10^7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Pole na něj působí stálou svislou silou o velikosti $4{,}5 \cdot 10^{-16}$ N. Hmotnost elektronu je $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. Zjistěte, jaká bude svislá složka posunutí elektronu poté, co ve vodorovném směru urazil 30 mm.

33C. Automobil vážící $1{,}30 \cdot 10^4$ N začne brzdit při rychlosti 40 $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a zastaví se na dráze 15 m. Za předpokladu, že je brzdná síla konstantní, určete (a) její velikost a (b) dobu brzdění. Jaká bude (c) brzdná dráha a (d) doba brzdění automobilu při téže brzdné síle, byla-li velikost počáteční rychlosti dvojnásobná? (Tato úloha může posloužit k získání představy o nebezpečí rychlé jízdy.)

34C. Určete počáteční zrychlení rakety o hmotnosti $1{,}3 \cdot 10^4$ kg, je-li počáteční tažná síla jejího motoru $2{,}6 \cdot 10^5$ N. Nezanedbávejte tíhovou sílu působící na raketu.

35C. Celková hmotnost rakety s nákladem je $5{,}0 \cdot 10^4$ kg. (a) Jak velká je tažná síla motoru, jestliže se raketa po zážehu „vznáší" nad startovací rampou, (b) raketa se urychluje se zrychlením o velikosti $20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$?

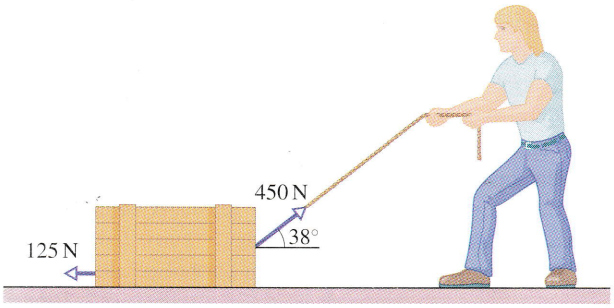
36Ú. Dívka o hmotnosti 40 kg si na hladině zamrzlého jezera hraje se sáněmi o hmotnosti 8,4 kg. Dívka a sáně jsou od sebe

vzdáleny o 15 m. Holčička táhne sáně na provaze směrem k sobě vodorovnou silou o velikosti 5,2 N. (a) S jakým zrychlením se pohybují sáně? (b) S jakým zrychlením se pohybuje dívka? (c) Jak daleko od původního stanoviště dívky se střetnou, neuvažujeme-li působení třecích sil?

37Ú. Požárník o hmotnosti 72 kg sjíždí dolů po svislé tyči se zrychlením o velikosti 3,0 $m \cdot s^{-2}$. Jaká je velikost a směr (a) svislé síly, jíž působí tyč na požárníka, (b) svislé síly, jíž působí požárník na tyč?

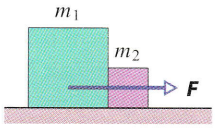
38Ú. Kulička o hmotnosti $3{,}0 \cdot 10^{-4}$ kg je zavěšena na niti. Stálý vítr, který vane ve vodorovném směru, na ni působí tak, že kulička je v klidu a nit svírá se svislým směrem úhel 37°. Určete (a) velikost síly větru a (b) velikost tažné síly niti.

39Ú. Dělník vleče bednu po podlaze pomocí lana (obr. 5.44). Lano je od vodorovného směru odkloněno o úhel 38° a dělník je táhne silou o velikosti 450 N. Podlaha působí na bednu mj. vodorovnou silou o velikosti 125 N, směřující proti jejímu pohybu. Vypočtěte zrychlení bedny, (a) je-li její hmotnost 310 kg, (b) váží-li bedna 310 N.



Obr. 5.44 Úloha 39

40Ú. Dvě kostky ležící na dokonale hladkém stole se dotýkají (obr. 5.45). (a) Určete síly, jimiž na sebe kostky navzájem působí, je-li $m_1 = 2{,}3$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg a $F = 3{,}2$ N. (b) Předpokládejme, že síla o stejné velikosti F bude působit na kostku m_2 v opačném směru. Ukažte, že velikost sil, jimiž na sebe nyní kostky působí, je 2,1 N, tj. je odlišná od výsledku úlohy (a). Zdůvodněte tento rozdíl.



Obr. 5.45 Úloha 40

41Ú. Představme si, že tlačíme malou ledničku stálou silou ***F*** po naleštěné (dokonale hladké) podlaze tak, že síla ***F*** je buď vodorovná (případ 1), nebo je od vodorovného směru odkloněna o úhel θ šikmo vzhůru (případ 2). (a) Jaký je poměr velikostí rychlostí, kterých dosáhne lednička v případech 2 a 1, tlačíme-li ji vždy po stejnou dobu t? (b) Jaký bude tento poměr, posune-li se lednička v obou případech do téže vzdálenosti d?

42Ú. Pro zábavu: Pásovec klouže po dokonale hladké zamrzlé hladině rybníka s počáteční rychlostí o velikosti 5,0 $m \cdot s^{-1}$, která je souhlasně rovnoběžná se souřadnicovou osou x. Jeho počáteční polohu zvolíme za počátek soustavy souřadnic. Závan větru působí na pásovce silou o velikosti 17 N ve směru kladně orientované osy y. Pomocí jednotkových vektorů dané kartézské soustavy souřadnic zapište (a) jeho rychlost a (b) jeho polohu po uplynutí 3,0 s.

43Ú. Celková hmotnost výtahu i s nákladem je 1 600 kg. Určete tažnou sílu nosného lana, jestliže se výtah, který původně klesal rychlostí 12 $m \cdot s^{-1}$, zastavil na dráze 42 m.

44Ú. Předmět je zavěšen na siloměru připevněném ke stropu kabiny výtahu. Výtah stojí a na stupnici siloměru je údaj 65 N. Jaký údaj bude ukazovat siloměr, bude-li výtah stoupat (a) konstantní rychlostí 7,6 $m \cdot s^{-1}$, (b) rychlostí klesající z počáteční hodnoty 7,6 $m \cdot s^{-1}$, je-li velikost zrychlení 2,4 $m \cdot s^{-2}$?

45Ú. Tryskový motor o hmotnosti 1 400 kg je připevněn k trupu dopravního letadla třemi šrouby (obvyklá praxe). Předpokládejme, že každý šroub nese jednu třetinu zátěže. (a) Vypočtěte sílu působící na každý šroub, jestliže letadlo čeká na startovací dráze na pokyn k odletu. (b) Během letu se letadlo dostane do turbulence, vlivem níž získá náhle zrychlení o velikosti 2,6 $m \cdot s^{-2}$ směřující svisle vzhůru. Vypočtěte sílu působící na každý šroub za této situace.

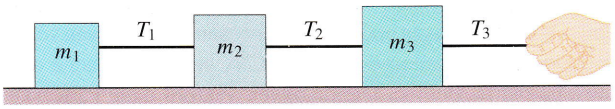
46Ú. Na obr. 5.46 je vrtulník o hmotnosti 15 000 kg, který zvedá nákladní automobil o hmotnosti 4 500 kg se zrychlením 1,4 $m \cdot s^{-2}$. Vypočtěte (a) sílu, jíž působí vzduch na vrtuli, (b) tažnou sílu horního nosného lana.



Obr. 5.46 Úloha 46

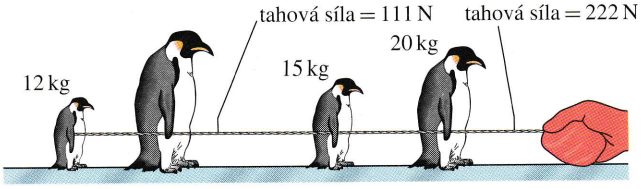
47Ú. Člověk o hmotnosti 80 kg skáče na betonový dvorek z okna umístěného ve výšce pouhých 0,5 m. Při dopadu zapomene pokrčit kolena, takže se jeho pohyb zastaví na vzdálenosti 2,0 cm. (a) Jaké je průměrné zrychlení člověka od okamžiku, kdy se dotkl chodidly dvorku, do chvíle, kdy byl již zcela v klidu? (b) Jakou silou byly při tomto skoku namáhány jeho kosti?

48Ú. Tři kostky spojené podle obr. 5.47 jsou taženy po dokonale hladké vodorovné podložce směrem vpravo. Tahová síla má velikost $T_3 = 65$ N. Hmotnosti kostek jsou $m_1 = 12{,}0$ kg, $m_2 = 24{,}0$ kg a $m_3 = 31{,}0$ kg. Vypočtěte (a) zrychlení soustavy, (b) velikosti tahových sil T_1 a T_2 vláken spojujících kostky.



Obr. 5.47 Úloha 48

49Ú. Na obr. 5.48 jsou čtyři hraví tučňáci, které jejich ošetřovatel táhne na laně po velmi kluzkém (dokonale hladkém) ledu. Hmotnosti tří tučňáků a velikosti tažných sil jednotlivých částí lana jsou dány. Určete hmotnost zbývajícího tučňáka.



Obr. 5.48 Úloha 49

50Ú. Kabina výtahu vážící 6 240 lb se rozjíždí směrem vzhůru se zrychlením o velikosti 4,00 $ft \cdot s^{-2}$. (a) Vypočtěte tažnou sílu lana. (b) Jaká by byla tažná síla lana, kdyby stoupající výtah *brzdil* se zrychlením o stejné velikosti? Údaje převeďte do soustavy jednotek SI.

51Ú. Parašutista o hmotnosti 80 kg padá se zrychlením o velikosti 2,5 $m \cdot s^{-2}$. Hmotnost padáku je 5,0 kg. (a) Jakou vztlakovou silou působí vzduch na otevřený padák? (b) Jakou tahovou silou působí na padák člověk?

52Ú. Člověk o hmotnosti 85 kg se spouští na zem z výšky 10,0 m tak, že se drží lana vedeného přes kladku, na jehož druhém konci je zavěšen pytel s pískem o hmotnosti 65 kg. Kladka se otáčí bez tření. (a) Jakou rychlostí dopadne člověk na zem, jestliže byl zpočátku v klidu? (b) Může člověk nějakým způsobem rychlost dopadu snížit?

53Ú. Letadlo o váze $5{,}2 \cdot 10^4$ lb (obr. 5.49) musí mít před vzlétnutím rychlost 280 ft/s. Motor vyvine sílu o velikosti nejvýše 24 000 lb, která však nepostačuje k tomu, aby letadlo dosáhlo požadované rychlosti na dráze 300 ft, odpovídající délce paluby. Jakou nejmenší silou (předpokládáme, že konstantní) musí na letadlo působit katapultovací zařízení, aby letadlo mohlo vzlétnout? Předpokládáme, že jak motor, tak katapultovací zařízení působí na letadlo při rozjezdu konstantní silou.

54Ú. Představme si kosmickou loď blížící se k povrchu Callista, jednoho z Jupiterových měsíců. Vyvine-li motor brzdnou sílu (směřující od povrchu svisle vzhůru) o velikosti 3 260 N, bude loď klesat s konstantní rychlostí. Pokud by byla velikost brzdné síly pouze 2 200 N, klesala by loď se zrychlením o velikosti 0,39 $m \cdot s^{-2}$. (a) Jaká tíhová síla působí na loď v blízkosti povrchu Callista? (b) Jaká je hmotnost lodi? (c) Jaké je tíhové zrychlení v blízkosti povrchu Callista?

55Ú. Artista o hmotnosti 52 kg se spouští po laně, které může prasknout, překročí-li velikost tahové síly hodnotu 425 N. (a) Co se stane, visí-li artista na laně v klidu? (b) S jak velkým zrychlením se musí artista spouštět, aby právě zabránil přetržení lana?



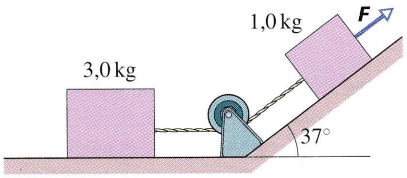
Obr. 5.49 Úloha 53

56Ú. Řetěz tvořený pěti články, z nichž každý má hmotnost 0,100 kg, je zvedán svisle vzhůru se stálým zrychlením 2,50 $m \cdot s^{-2}$ (obr. 5.50). Určete (a) síly vzájemného působení mezi všemi dvojicemi sousedních článků, (b) sílu $\boldsymbol{F}$, jíž působí na horní článek člověk zvedající řetěz, (c) *výslednou* sílu udělující zrychlení každému článku.



Obr. 5.50 Úloha 56

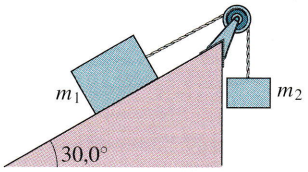
57Ú. Těleso o hmotnosti 1,0 kg leží na nakloněné rovině s úhlem sklonu 37° a je spojeno s tělesem o hmotnosti 3,0 kg podle obr. 5.51. Styčné plochy jsou dokonale hladké a kladka se otáčí bez tření. Jaká je tažná síla spojovacího vlákna, je-li $F = 12$ N?



Obr. 5.51 Úloha 57

58Ú. Kostka o hmotnosti $m_1 = 3{,}70$ kg spočívá na dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30,0°. Vláknem vedeným přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření je spojena

s další kostkou, jejíž hmotnost je $m_2 = 2{,}30\,\text{kg}$ (obr. 5.52). Určete (a) velikost zrychlení každé z kostek a (b) směr zrychlení kostky m_2. (c) Jakou silou je napínáno vlákno?



Obr. 5.52 Úloha 58

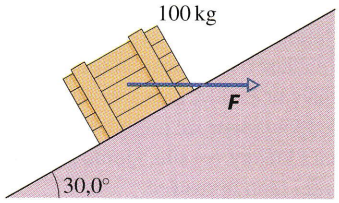
59Ú. Balík opotřebeného pokrývačského materiálu o hmotnosti 50 kg je třeba spustit na zem na laně, jehož pevnost je 390 N (při vyšší zátěži se lano přetrhne). (a) Jak lze zabránit přetržení lana během spouštění materiálu? (b) Předpokládejme, že spouštíme balík z výšky 9 m způsobem, jímž právě tak tak zabráníme přetržení lana. Jakou rychlostí dopadne balík na zem?

60Ú. Kostka je vržena vzhůru po dokonale hladké nakloněné rovině počáteční rychlostí o velikosti v_0. Úhel sklonu nakloněné roviny je θ. (a) Jakou vzdálenost urazí kostka podél nakloněné roviny, než se dostane do bodu obratu? (b) Jak dlouho to bude trvat? (c) S jakou rychlostí se kostka vrátí do místa, ze kterého byla vržena? Číselně spočtěte pro hodnoty $\theta = 32{,}0°$ a $v_0 = 3{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

61Ú. Kosmická loď startuje svisle vzhůru z povrchu Měsíce, kde je tíhové zrychlení $1{,}6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Loď startuje se zrychlením o velikosti $1{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ vzhledem k povrchu Měsíce. Jakou silou působí sedadlo lodi na astronauta, na kterého působí na Zemi tíhová síla o velikosti 735 N?

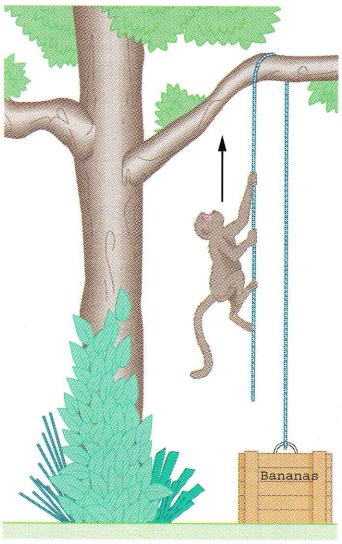
62Ú. Lampa je zavěšena na svislém provaze v kabině klesajícího výtahu, který brzdí se zrychlením o velikosti $2{,}4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. (a) Určete hmotnost lampy, víte-li, že tažná síla provazu má velikost 89 N. (b) Jak velká síla by napínala provaz, kdyby se výtah rozjížděl vzhůru se zrychlením o velikosti $2{,}4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$?

63Ú. Přepravka o hmotnosti 100 kg je tlačena stálou rychlostí vzhůru po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30,0° (obr. 5.53). (a) Jak velká vodorovná síla ***F*** je k tomu potřebná? (b) Jakou silou tlačí nakloněná rovina na přepravku?



Obr. 5.53 Úloha 63

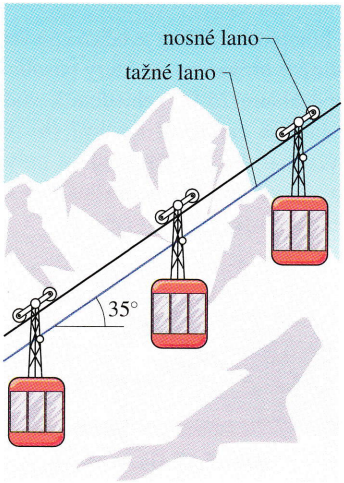
64Ú. Desetikilogramová opice leze po nehmotném provaze přehozeném přes větev stromu. Provaz je na druhém konci zatížen patnáctikilogramovým závažím ležícím na zemi (obr. 5.54). Provaz může klouzat po větvi bez tření. (a) S jakým nejmenším zrychlením musí opice lézt, má-li se zátěž odpoutat od země? Jakmile se závaží odpoutá od povrchu Země, přestane opice lézt, ale drží se provazu. (b) Jaké je nyní zrychlení opice a (c) jakou silou je napínán provaz?



Obr. 5.54 Úloha 64

65Ú. Obr. 5.55 ukazuje část alpské kabinové lanovky. Nejvyšší povolená hmotnost každé kabiny je 2 800 kg. Kabiny jezdí po nosném laně a jsou taženy dalším lanem, které je připojeno k závěsu každé z nich.

Jak se liší síly pnutí v sousedních úsecích tažného lana, mají-li kabiny maximální povolenou hmotnost a stoupají-li se zrychlením o velikosti $0{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$? Sklon lana je 35°.

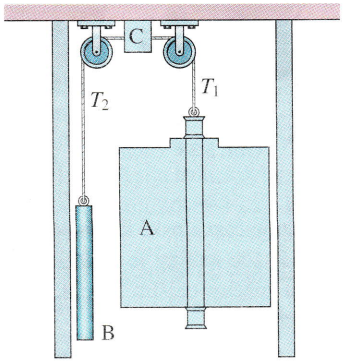


Obr. 5.55 Úloha 65

66Ú. Kosmická loď má hmotnost $1{,}20\cdot10^6\,\text{kg}$ a je zpočátku v klidu vzhledem k systému stálic. (a) S jakým stálým zrychlením by se musela loď pohybovat, aby za 3,0 dny dosáhla vzhledem k systému stálic rychlosti o velikosti $0{,}10c$ (kde c je rychlost světla)? (Neberte v úvahu korekce vyplývající z Einsteinovy

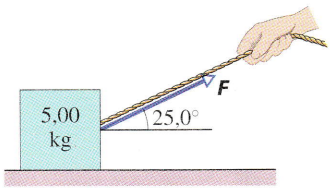
speciální teorie relativity.) (b) Vyjádřete velikost zrychlení v jednotkách g. (c) Jak velké síly je třeba k udělení tohoto zrychlení? (d) Předpokládejme, že motory se vypnou, jakmile loď dosáhne požadované rychlosti ($v = 0{,}10c$). Jak daleko dorazí loď od okamžiku startu za 5,0 světelných měsíců (vzdálenost, kterou světlo urazí za dobu 5,0 měsíců)?

67Ú. Výtah na obr. 5.56 je sestaven z kabiny (A) o hmotnosti 1 150 kg, protizávaží (B) o hmotnosti 1 400 kg, hnacího mechanismu (C), lana a dvou kladek. Hnací mechanismus lano buď urychluje, nebo zpomaluje. V důsledku toho se síla T_1 napínající lano na jedné straně hnacího mechanismu liší od síly T_2, která lano napíná na druhé straně. Předpokládejme, že kabina (A) stoupá se zrychlením o velikosti $a = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Se zrychlením o téže velikosti klesá protizávaží (B). Zanedbejte hmotnost kladek i lana. Určete (a) T_1, (b) T_2 a (c) velikost síly, kterou působí na lano hnací mechanismus.



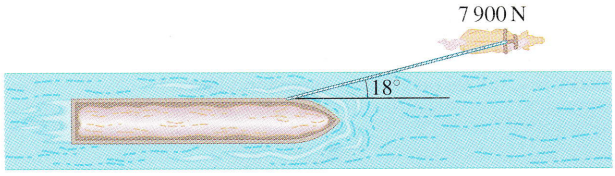
Obr. 5.56 Úloha 67

68Ú. Kostka o hmotnosti 5,00 kg je tažena po vodorovné dokonale hladké podložce provazem, na který působí síla o velikosti $F = 12{,}0$ N pod úhlem 25,0° vzhledem k vodorovné rovině (obr. 5.57). (a) Jaké je zrychlení kostky? (b) Velikost síly F začne pomalu vzrůstat. Jaká je její velikost právě v okamžiku, kdy se kostka zcela zvedne nad podložku? (c) Jaké je v tomto okamžiku zrychlení kostky?



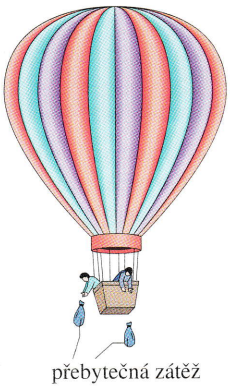
Obr. 5.57 Úloha 68

69Ú. V minulosti se přepravovaly pramice vodními kanály pomocí koní způsobem znázorněným na obr. 5.58. Předpokládejme, že kůň táhne silou 7 900 N lano, které svírá se směrem pohybu pramice úhel 18°. Pramice pluje přímo podél kanálu. Její hmotnost je 9 500 kg a zrychlení má velikost $0{,}12\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Určete sílu, kterou působí na pramici voda.



Obr. 5.58 Úloha 69

70Ú. Horkovzdušný balon o hmotnosti M svisle klesá se zrychlením o velikosti a směřujícím dolů (obr. 5.59). Určete hmotnost zátěže, kterou je třeba z balonu vyhodit, aby získal zrychlení o téže velikosti a, avšak směřující vzhůru? Předpokládáme, že vztlaková síla, jíž působí na balon okolní vzduch, se odstraněním zátěže nezmění.

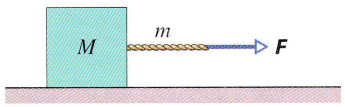


Obr. 5.59 Úloha 70

71Ú. Síla udílí tělesu o hmotnosti m_1 zrychlení o velikosti $12{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Tělesu o hmotnosti m_2 by táž síla udělila zrychlení o velikosti $3{,}30\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jaké zrychlení udělí tato síla objektům o hmotnosti (a) $m_2 - m_1$ a (b) $m_2 + m_1$?

72Ú. Raketa o hmotnosti 3 000 kg startuje z povrchu Země pod elevačním úhlem 60°. Motor vyvine sílu o velikosti $6{,}0\cdot 10^4$ N, která svírá s vodorovnou rovinou stálý úhel 60°. Zážeh motoru trvá 50 s. V hrubém přiblížení můžeme zanedbat vliv ztráty hmotnosti rakety při hoření paliva i vliv působení okolního vzduchu. Určete, (a) jaké výšky nad povrchem Země dosáhne raketa do okamžiku vypnutí motoru a (b) jak daleko od místa startu dopadne opět na povrch Země, považujeme-li jej za rovinný.*

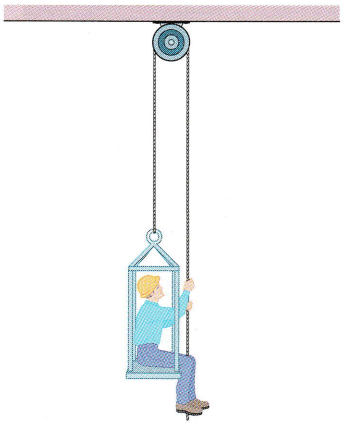
73Ú. Kostka o hmotnosti M je tažena po dokonale hladké vodorovné podložce na laně o hmotnosti m (obr. 5.60). Na konci lana působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}$. (a) Ukažte, že lano *musí* být prohnuté, byť nepatrně. Předpokládejte, že průhyb je zanedbatelný, a určete (b) zrychlení lana a kostky, (c) sílu, kterou působí lano na kostku, a (d) sílu napínající lano uprostřed.



Obr. 5.60 Úloha 73

* Zjistěte, jak se liší hodnoty g v místě startu rakety a v nejvyšším bodě, kterého raketa dosáhne, a odhadněte, zda to může ovlivnit výsledky.

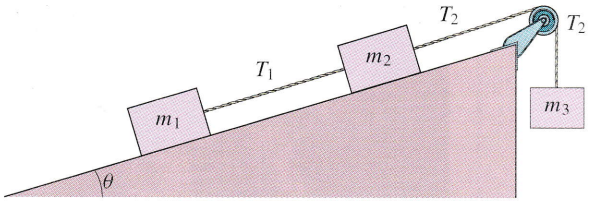
74Ú. Na obr. 5.61 je znázorněn člověk na sedačce zavěšené na nehmotném provaze. Provaz je veden přes nehmotnou kladku, která se může otáčet bez tření. Druhý konec provazu drží člověk v rukou. Celková hmotnost člověka a sedačky je 95,0 kg. (a) Jak velkou silou musí člověk táhnout provaz, aby sedačka stoupala s konstantní rychlostí? (b) Jaké tažné síly je třeba k dosažení zrychlení o velikosti $1{,}30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$? (c) Předpokládejme nyní, že druhý konec lana drží osoba stojící na zemi. Odpovězte znovu na otázky (a) a (b). (d) V každém ze čtyř výše uvedených případů určete sílu, jíž působí závěs kladky na strop.



Obr. 5.61 Úloha 74

PRO POČÍTAČ

75Ú. Na obr. 5.62 jsou znázorněny tři kostky spojené vlákny. Kostky o hmotnostech m_1 a m_2 spočívají na dokonale hladké nakloněné rovině s úhlem sklonu θ, jejich spojovací vlákno je napínáno silou o velikosti T_1. Třetí kostka o hmotnosti m_3 je s kostkou m_2 spojena vláknem vedeným přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření, velikost síly napínající vlákno je v tomto případě T_2. Pro hodnoty $\theta = 20°$, $m_1 = 2{,}00\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1{,}00\,\mathrm{kg}$ a $m_3 = 3{,}00\,\mathrm{kg}$ určete T_1, T_2 a zrychlení obou kostek.
(*Tip*: Užijte druhého Newtonova zákona pro každou z kostek, zapište příslušné tři rovnice a řešte je na počítači.)



Obr. 5.62 Úloha 75

76Ú. Na dvoukilogramový předmět působí tři síly, které mu udílejí zrychlení $\boldsymbol{a} = -(8{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\boldsymbol{i} + (6{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})\boldsymbol{j}$. Dvě ze sil jsou známy: $\boldsymbol{F}_1 = (30{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (16{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{F}_2 = -(12{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (8{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Určete třetí sílu.

6
Síla a pohyb II



Kočky se rády vyhřívají na sluníčku. Když ale odpočívají na římse výškové budovy, riskují nebezpečný pád. Kupodivu se však zjistilo, že kočka může docela dobře přežít, je-li výška pádu dostatečně ***velká****, alespoň sedm či osm poschodí. V takovém případě rozsah jejího poranění, např. počet zlomenin nebo smrtelných zranění, s výškou pádu dokonce* ***klesá****! (Rekord drží kočka, která vypadla z dvaatřicátého patra a jen mírně si poranila hrudník a přišla o zub.) Je to vůbec možné?*

6.1 TŘENÍ

Třecím silám se v každodenním životě nevyhneme. Kdyby byly jedinými silami působícími na tělesa, zastavily by každý pohybující se předmět a každé otáčející se soukolí. Kolem dvaceti procent spotřeby benzinu v automobilu například připadá na kompenzaci vlivu tření v motoru a hnacím mechanismu. Na druhé straně, kdyby tření nebylo, nikam bychom se automobilem nedostali. Nemohli bychom chodit ani jezdit na kole. Nemohli bychom držet tužku a i kdyby přece, nepsala by. Hřebíky a šrouby by nebyly k ničemu, utkaná látka by se rozpadla a uzly by se rozvázaly.

V tomto článku se budeme zabývat třecími silami působícími mezi suchými pevnými povrchy těles, která se po sobě pohybují malými vzájemnými rychlostmi. Uvažujme dva jednoduché pokusy:

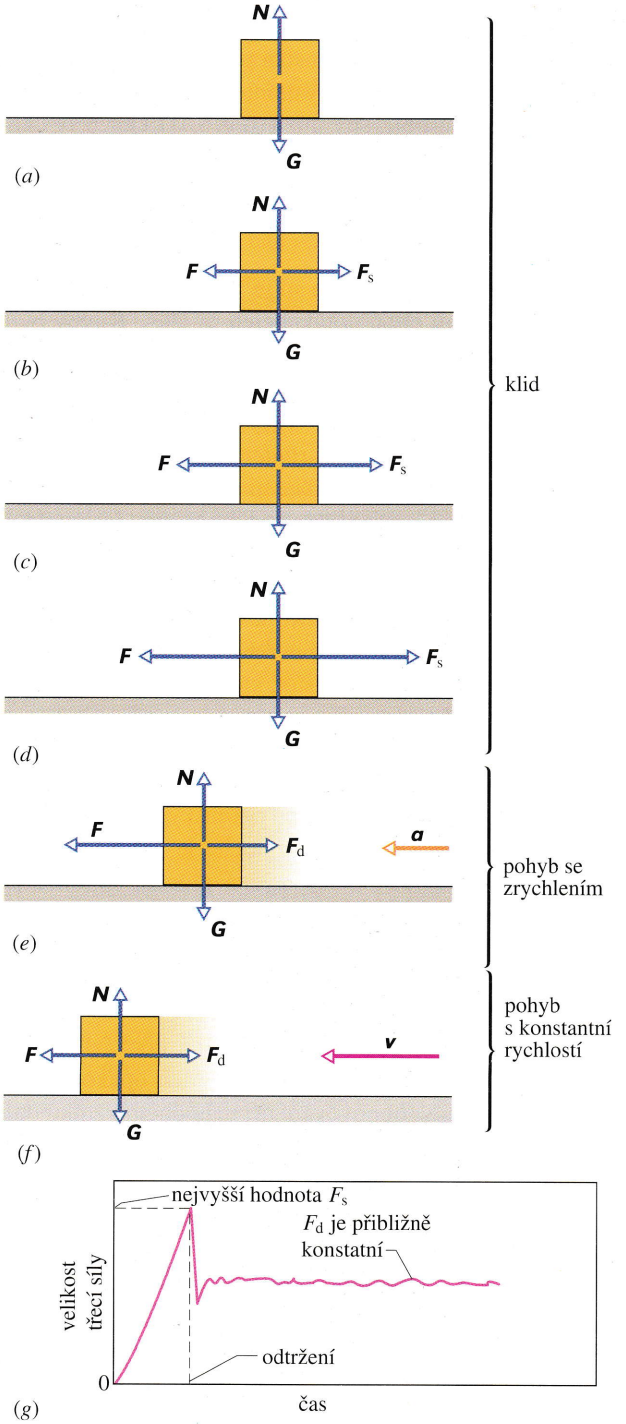
1. *První pokus.* Postrčíme knihu, aby sklouzla po desce stolu. Třecí síla, kterou působí horní deska stolu na spodek klouzající knihy, knihu zpomaluje a případně ji i zastaví. Kdybychom chtěli, aby kniha klouzala po stole konstantní rychlostí, museli bychom ji táhnout nebo tlačit silou stejné velikosti a opačného směru, než má třecí síla, která jejímu pohybu brání.

2. *Druhý pokus.* Těžká přepravka leží ve skladu na podlaze. Tlačíme ji vodorovně stálou silou, ale ona se nepohne. Je to způsobeno tím, že síla, kterou na ni působíme, je kompenzována vodorovnou třecí silou, jíž podlaha působí opačným směrem na dno přepravky. Je pozoruhodné, že tato třecí síla si sama řídí svou velikost i směr právě tak, aby zrušila účinek jakékoli síly, kterou bychom na přepravku působili. Samozřejmě, kdybychom vyvinuli sílu dostatečně velkou, dokázali bychom přepravkou přece jen pohnout (viz první pokus).

Na obr. 6.1 je rozebrána obdobná situace podrobněji. Na obr. 6.1a spočívá kostka na desce stolu. Tíhová síla $\boldsymbol{G}$ je vyrovnána opačně orientovanou normálovou silou $\boldsymbol{N}$. Na obr. 6.1b působíme na kostku silou $\boldsymbol{F}$ a snažíme se ji odtlačit směrem doleva. Jako odezva vzniká třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, která směřuje vpravo a přesně vyrovná sílu $\boldsymbol{F}$, kterou na kostku působíme. Sílu $\boldsymbol{F}_s$ nazýváme **statickou třecí silou**.

Obrázky 6.1c a d ukazují, že se vzrůstající silou $\boldsymbol{F}$ roste i síla $\boldsymbol{F}_s$ a kostka zůstává v klidu. Jakmile velikost síly $\boldsymbol{F}$ dosáhne určité hodnoty, kostka se „utrhne", ztratí svůj těsný kontakt s deskou stolu a urychluje se směrem vlevo (obr. 6.1e). Třecí síla $\boldsymbol{F}_d$, která pak kostku brzdí, se nazývá **dynamická** (též **kinetická**) třecí síla.

Obvykle má dynamická třecí síla, působící pouze při pohybu, menší velikost, než je nejvyšší přípustná hodnota velikosti statické třecí síly, která působí jen za klidu.



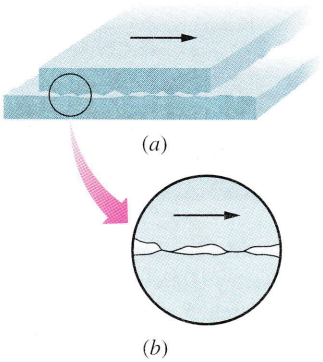
Obr. 6.1 (a) Síly působící na kostku v klidu. (b–d) Vnější síla $\boldsymbol{F}$ působící na kostku je vyvážena stejně velkou, opačně orientovanou silou statického tření $\boldsymbol{F}_s$. Při rostoucí velikosti síly $\boldsymbol{F}$ roste i velikost síly $\boldsymbol{F}_s$, až dosáhne jisté nejvyšší hodnoty. (e) Kostka se pak najednou „utrhne" a začne se urychlovat směrem vlevo. (f) Má-li se kostka dále pohybovat rovnoměrně, je třeba velikost síly $\boldsymbol{F}$ snížit z této největší hodnoty tak, aby síla $\boldsymbol{F}$ právě kompenzovala dynamickou třecí sílu. (g) Výsledek měření třecí síly při ději (a) až (f).

Požadujeme-li, aby se kostka pohybovala po povrchu stolu rovnoměrně, musíme vystihnout okamžik, kdy se pohne, a velikost působící síly snížit (obr. 6.1f). Obr. 6.1g ukazuje výsledek pokusu, při němž síla **F** pozvolna rostla až do okamžiku, kdy se kostka pohnula. Všimněte si poklesu velikosti této síly, nutného k dosažení rovnoměrného pohybu kostky.

Podstatou vzniku třecích sil je vzájemné působení povrchových atomů obou dotýkajících se těles. Kdyby byla dvě tělesa s vyleštěnými a pečlivě očistěnými kovovými povrchy uvedena do styku ve velmi dobrém vakuu, nemohla by po sobě klouzat. Naopak, okamžitě by k sobě přilnula (byla by *svařena za studena*) tak těsně, že by vytvořila jediný kovový kus. Existují speciálně leštěné strojnické bloky, které k sobě i ve vzduchu mohou přilnout tak pevně, že je lze oddělit jen kroucením. Těsného kontaktu atom–atom obvykle nelze docílit tak snadno. I vysoce leštěný kovový povrch má daleko k tomu, aby byl rovinný v atomovém měřítku. Běžné povrchy jsou navíc znečistěny vrstvami oxidů a jiných nečistot, které možnost svaření za studena zhoršují.

Dva povrchy, které jsou k sobě přiloženy, se stýkají pouze nejvyššími výběžky. (Jako kdybychom švýcarské Alpy otočili jejich vrcholky proti rakouským Alpám.) Skutečná *mikro*skopická dotyková plocha je mnohem menší než zdánlivá *makro*skopická styčná plocha, dokonce až 10^4krát. Přesto se povrchy mohou k sobě svařit v mnoha stykových bodech. Snažíme-li se potom vnější silou docílit vzájemného skluzu těles podél jejich povrchů, způsobují tyto svary vznik statického tření.

Tlačíme-li těleso po nějaké podložce, dochází nejprve k narušení svarů (utržení) a poté k jejich opakovanému porušování a znovuobnovování při náhodném vzniku dalších a dalších stykových plošek (obr. 6.2). Dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_d$ je vektorovým součtem sil působících při tomto procesu. Často je pohyb tělesa „trhaný", neboť různé dvojice plošek k sobě vždy nakrátko přilnou a zase po sobě sklouznou.



Obr. 6.2 Mechanismus smykového tření. (a) Horní těleso klouže směrem vpravo po povrchu dolního tělesa. Zvětšeno. (b) Detail, ukazující dvě styková místa, kde vznikl svar za studena. K udržení pohybu je třeba působit silou, která svary naruší.

Nepřetržité opakování *kontaktů a smyků* může být provázeno různými zvuky, například při smyku kol na suché dlažbě, škrábání nehtem po tabuli, otevírání dveří s rezavými panty, tahání smyčce po houslové struně.

6.2 VLASTNOSTI SIL TŘENÍ

Předpokládejme, že na těleso se suchým povrchem, které spočívá na podložce stejné kvality, případně je k ní tlačeno, působíme silou **F** ve snaze je po podložce posunout. Experiment ukazuje, že třecí síla, jíž působí podložka proti pohybu tělesa, má tři vlastnosti:

1. Je-li těleso v klidu, má statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$ stejnou velikost jako průmět síly **F** do podložky a je vůči němu opačně orientována.

2. Velikost síly F_s dosahuje maximální hodnoty $F_{s,max}$ dané vztahem

$$F_{s,max} = f_s N, \tag{6.1}$$

kde f_s je **koeficient statického tření** a N je velikost tlakové síly, jíž působí podložka na těleso. Převýší-li velikost průmětu síly **F** do podložky hodnotu $F_{s,max}$, začne těleso po podložce klouzat.

3. V okamžiku, kdy se těleso dá do pohybu, klesne velikost třecí síly prakticky skokem na hodnotu F_d, určenou vztahem

$$F_d = f_d N, \tag{6.2}$$

kde f_d je **koeficient dynamického** (též **kinetického**) **tření**. Tuto velikost má dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_d$ v průběhu celého pohybu.

Vlastnosti 1 a 2, které jsme formulovali pro případ jedné síly **F**, zůstanou v nezměněné podobě i v případě, že **F** je výslednicí několika sil působících na těleso. Rovnice (6.1) a (6.2) *nemají* vektorový charakter. Síly $\boldsymbol{F}_d$, resp. $\boldsymbol{F}_s$ jsou totiž vždy rovnoběžné s podložkou a směřují proti pohybu, resp. zamýšlenému pohybu tělesa, zatímco síla **N** je k podložce kolmá.

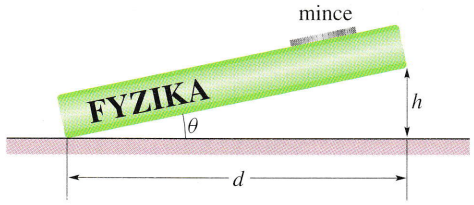
Koeficienty f_s a f_d jsou bezrozměrové a zjišťují se experimentálně. Jejich hodnoty závisejí na vlastnostech tělesa i podložky, takže hovoříme o koeficientech tření *mezi* podložkou a tělesem či *mezi* dvěma materiály (např. řekneme,

že „hodnota statického koeficientu tření f_s *mezi* sáněmi a asfaltem je 0,5“). Předpokládáme, že hodnota f_d není závislá na rychlosti pohybu tělesa po podložce.

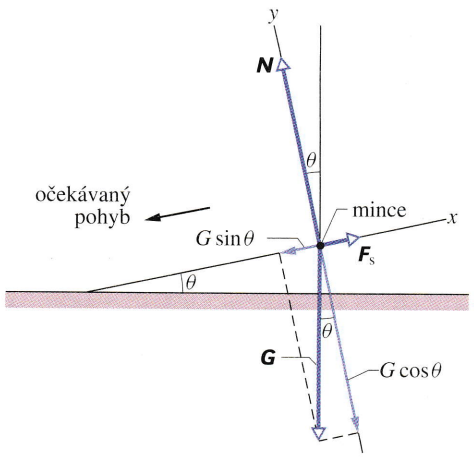
KONTROLA 1: Kostka leží na podlaze. (a) Jaká je velikost třecí síly, kterou na kostku působí podlaha? (b) Na kostku začneme působit vodorovnou silou o velikosti 5 N, avšak kostka je stále v klidu. Jak velká je třecí síla působící na kostku? (c) Podaří se kostku uvést do pohybu vodorovnou silou o velikosti 8 N, je-li maximální hodnota statické třecí síly $F_{s,max}$ rovna 10 N? (d) Podaří se to při působení vodorovné síly o velikosti 12 N?

PŘÍKLAD 6.1

Na obr. 6.3a je nakreslena mince, ležící na knize, skloněné vzhledem k vodorovné rovině o úhel θ. Zkusmo jsme zjistili, že při zvýšení úhlu θ na hodnotu 13° začne mince klouzat. Jaký je koeficient statického tření f_s mezi mincí a knihou?



(a)



(b)

Obr. 6.3 Příklad 6.1. (a) Mince právě začíná klouzat po obalu knihy. (b) Silový diagram ukazuje tři síly působící na minci. Tíhová síla je znázorněna jako součet svých průmětů do souřadnicových os x a y, zvolených způsobem, který zjednodušuje řešení problému.

ŘEŠENÍ: Obr. 6.3b znázorňuje silový diagram mince právě v okamžiku, kdy začíná klouzat. Na minci působí tlaková síla $\boldsymbol{N}$ kolmá ke knize, tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, která směřuje podél nakloněné roviny vzhůru, neboť mince „se chystá“ sklouznout dolů. Mince je v rovnováze, takže výslednice sil na ni působících je nulová. Z druhého Newtonova zákona tak získáme vztah

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}. \tag{6.3}$$

Pro x-ové složky vede tato vektorová rovnice ke vztahu

$$\sum F_x = F_s - G\sin\theta = 0, \quad \text{tj.} \quad F_s = G\sin\theta. \tag{6.4}$$

Pro y-ové složky dostáváme

$$F_y = N - G\cos\theta, \quad \text{tj.} \quad N = G\cos\theta. \tag{6.5}$$

V okamžiku, kdy mince začíná klouzat (*a jedině v tomto okamžiku*), nabývá velikost statické třecí síly své maximální hodnoty $f_s N$. Dosazením $f_s N$ za F_s do rovnice (6.4) a vydělením rovnicí (6.5) dostáváme

$$\frac{F_s}{N} = \frac{f_s N}{N} = \frac{G\sin\theta}{G\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta,$$

tj.

$$f_s = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} 13^\circ = 0{,}23. \quad \text{(Odpověď)} \tag{6.6}$$

Získali jsme jednoduchý návod jak změřit f_s. Úhloměr ani nepotřebujeme. Stačí změřit dvě délky h a d, vyznačené v obr. 6.2a, a určit jejich poměr $h/d = \operatorname{tg}\theta$.

PŘÍKLAD 6.2

Při nouzovém brzdění se zablokují kola automobilu (nemohou se otáčet) a automobil klouže po silnici. Utržené kousky pneumatik a krátké úseky roztaveného asfaltu vytvářejí „brzdné stopy“, svědčící o tom, že při skluzu automobilu po silnici dochází ke sváření za studena. Brzdné stopy „rekordní délky“ byly zaznamenány v roce 1960 na silnici M1 v Anglii u vozu Jaguar a měřily 290 m! Předpokládejme, že $f_s = 0{,}60$. Jak rychle jelo auto v okamžiku, kdy se kola zablokovala?

ŘEŠENÍ: V obr. 6.4a je vyznačena brzdná dráha automobilu. V diagramu sil působících na automobil během brzdění je vyznačena tíhová síla $\boldsymbol{G}$, normálová síla $\boldsymbol{N}$ a dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_d$. Ve vztahu (2.16)

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0),$$

položíme $v_x = 0$ a $x - x_0 = d$ a vyjádříme velikost počáteční rychlosti $v_0 = v_{0x}$:

$$v_0 = \sqrt{-2a_x d}. \tag{6.7}$$

Pro zjištění a_x použijeme x-ovou složku druhého Newtonova zákona. Při zanedbání vlivu odporu vzduchu na pohyb auta

je jedinou silou s nenulovou x-ovou složkou třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$, přičemž $F_{\mathrm{d},x} = -F_\mathrm{d}$. Dostáváme tak

$$-F_\mathrm{d} = ma_x, \quad \text{tj.} \quad a_x = -\frac{F_\mathrm{d}}{m} = \frac{-f_\mathrm{d}N}{m}, \tag{6.8}$$

kde jsme dosadili $F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d}N$ ze vztahu (6.2) a m je hmotnost automobilu.

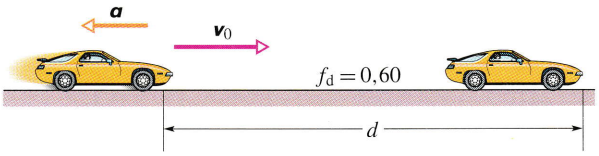
Normálová síla $\boldsymbol{N}$ má velikost $N = G = mg$. Jejím dosazením do vztahu (6.8) dostáváme

$$a_x = \frac{-f_\mathrm{d}mg}{m} = -f_\mathrm{d}g. \tag{6.9}$$

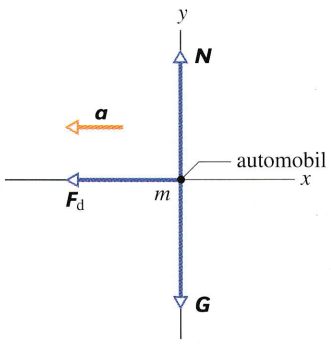
Nakonec dosadíme vztah (6.9) do (6.7):

$$v_0 = \sqrt{2f_\mathrm{d}gd} = \sqrt{2(0{,}60)(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(290\ \mathrm{m})} =$$
$$= 58\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 210\ \mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při řešení jsme mlčky předpokládali, že konec brzdné stopy odpovídá hodnotě $v_x = 0$. V popisovaném skutečném případě byla brzdná stopa přerušena proto, že jaguar urazil se zablokovanými koly zmíněných 290 m a pak vyjel ze silnice. Získaný výsledek je proto třeba interpretovat tak, že hodnota v_0 činila nejméně 210 km/h, mohla však být i mnohem vyšší.



(a)



(b)

Obr. 6.4 Příklad 6.2. (a) Automobil klouže směrem doprava a zastaví se poté, co urazil vzdálenost d. (b) Silový diagram brzdícího automobilu. Vektor zrychlení směřuje vlevo, souhlasně s třecí silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$.

PŘÍKLAD 6.3

Žena táhne po zasněženém vodorovném chodníku naložené sáně o hmotnosti $m = 75\ \mathrm{kg}$. Rychlost sání je konstantní. Koeficient dynamického tření f_d mezi skluznicí a sněhem je 0,10 a úhel φ na obr. 6.5 je 42°.

(a) Jaká je velikost T tahové síly provazu?

ŘEŠENÍ: Na obr. 6.5b je diagram sil působících na sáně. Použitím druhého Newtonova zákona pro vodorovný směr dostáváme

$$T\cos\varphi - F_\mathrm{d} = ma_x = 0, \tag{6.10}$$

kde a_x má nulovou hodnotu, neboť rychlost sání je konstantní. Pro svislý směr platí

$$T\sin\varphi + N - mg = ma_y = 0, \tag{6.11}$$

kde $m\boldsymbol{g}$ je tíhová síla působící na sáně. Podle rov. (6.2) je

$$F_\mathrm{d} = f_\mathrm{d}N. \tag{6.12}$$

Poslední tři rovnice obsahují neznámé veličiny T, N a F_d. Vyloučením N a F_d získáme poslední z nich, T:

Začneme sečtením rovnic (6.10) a (6.12) a dostaneme

$$T\cos\varphi = f_\mathrm{d}N$$

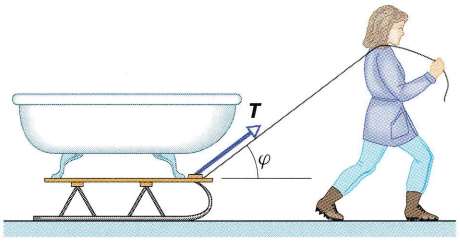
a odtud

$$N = \frac{T\cos\varphi}{f_\mathrm{d}}. \tag{6.13}$$

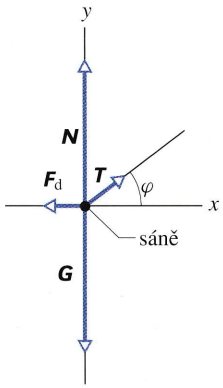
Dosazením do (6.11) a řešením vzhledem k neznámé T pak dostáváme

$$T = \frac{f_\mathrm{d}mg}{\cos\varphi + f_\mathrm{d}\sin\varphi} = \tag{6.14}$$
$$= \frac{(0{,}10)(75\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{\cos 42^\circ + (0{,}10)\sin 42^\circ} =$$
$$= 91\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Získaná hodnota je tedy výrazně nižší než velikost tíhové síly.



(a)



(b)

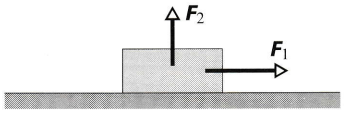
Obr. 6.5 Příklad 6.3. (a) Žena táhne sáně stálou rychlostí, přičemž na ně působí silou $\boldsymbol{T}$. (b) Silový diagram pro sáně s nákladem.

(b) Jak velká je normálová síla, jíž tlačí sněhový povrch na skluznice sání?

ŘEŠENÍ: Hodnotu N získáme dosazením $T = 91\,\mathrm{N}$ a zadaných údajů do vztahu (6.11) nebo (6.13). Pomocí (6.11) dostáváme

$$N = mg - T\sin\varphi = \\ = (75\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) - (91\,\mathrm{N})\sin 42^\circ = \\ = 670\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 2: Na kostku (viz obr.) spočívající na podlaze působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 10 N. Kostka je však v klidu. Na kostku začneme působit svislou silou $\boldsymbol{F}_2$, jejíž velikost postupně narůstá (od počáteční nulové hodnoty) až do okamžiku uvedení kostky do pohybu. Rozhodněte, zda v průběhu tohoto experimentu následující veličiny rostou, klesají, či zůstávají nezměněny: (a) velikost třecí síly, jíž působí podložka na kostku, (b) velikost normálové tlakové síly podložky na kostku, (c) maximální hodnota $F_{s,max}$ statické třecí síly, jíž může působit podložka na kostku.



PŘÍKLAD 6.4

Na obr. 6.6a se bedna nakládané zeleniny o hmotnosti $m_1 = 14\,\mathrm{kg}$ pohybuje po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou podložkou úhel $\theta = 30^\circ$. Bedna je spojena pevným lanem o zanedbatelné hmotnosti, vedeným přes nehmotnou kladku, která se může otáčet bez tření, s jinou bednou, jejíž hmotnost je $m_2 = 14\,\mathrm{kg}$. Zavěšená bedna klesá stálou rychlostí.

(a) Určete velikost a směr třecí síly, jíž působí nakloněná rovina na bednu m_1.

ŘEŠENÍ: Ze skutečnosti, že těleso m_2 klesá, je zřejmé, že m_1 stoupá po nakloněné rovině. *Dynamická* třecí síla $\boldsymbol{F}_d$ tedy směřuje podél nakloněné roviny dolů.

Pro zjištění její velikosti ovšem nemůžeme použít vztahu (6.2), neboť neznáme koeficient dynamického tření f_d mezi tělesem m_1 a šikmou podložkou. Můžeme však užít postupu uvedeného v kapitole 5. Nejprve nakreslíme silové diagramy těles m_1 a m_2 podle obr. 6.6b a c. Symboly $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}_2$ v nich představují tíhové síly a $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ jsou tahové síly, jimiž působí lano na bedny m_1 a m_2. Velikosti tahových sil jsou stejné. Jejich společnou hodnotu označíme T.

Promítneme $\boldsymbol{G}_1$ do souřadnicových os a aplikujeme na těleso m_1 druhý Newtonův zákon. Pro jeho x-ovou složku dostáváme podle obr. 6.6b vztah

$$\sum F_x = T - F_d - m_1 g\sin\theta = m_1 a_x = 0, \qquad (6.15)$$

ve kterém jsme položili $a_x = 0$. Těleso m_1 se totiž pohybuje konstantní rychlostí. Druhý Newtonův zákon zapíšeme i pro těleso m_2 a opět využijeme skutečnosti, že se pohybuje stálou rychlostí. Všechny vektory mají tentokrát nenulové pouze y-ové složky, takže podle obr. 6.6c dostáváme

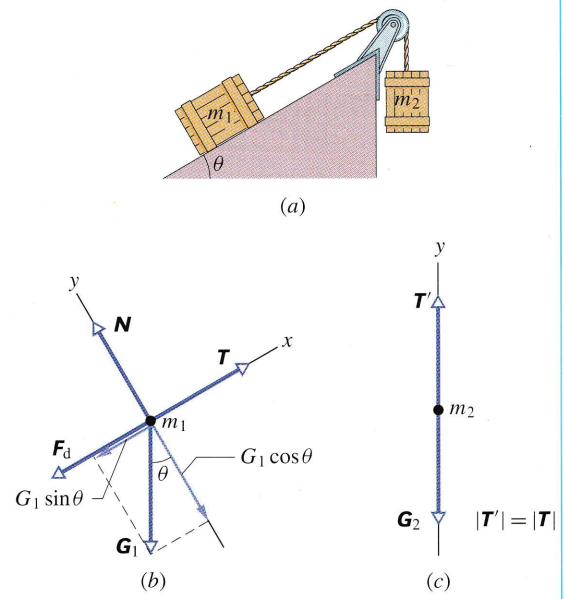
$$\sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y = 0,$$

tj.

$$T = m_2 g. \qquad (6.16)$$

Za T dosadíme do vztahu (6.15) výraz (6.16) a vyjádříme F_d:

$$F_d = m_2 g - m_1 g\sin\theta = \\ = (14\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}) - (14\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\sin 30^\circ = \\ = 68{,}6\,\mathrm{N} \doteq 69\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 6.6 Příklad 6.4. (a) Těleso o hmotnosti m_1 stoupá po nakloněné rovině stálou rychlostí, těleso m_2 klesá, rovněž stálou rychlostí. (b) Silový diagram tělesa m_1. (c) Silový diagram tělesa m_2.

(b) Určete hodnotu f_d.

ŘEŠENÍ: Hodnotu f_d můžeme získat ze vztahu (6.2). Nejprve však musíme zjistit velikost normálové síly $\boldsymbol{N}$ působící na těleso m_1. Použijeme k tomu y-ovou složku vektorové rovnice vyjadřující druhý Newtonův zákon pro těleso m_1 (obr. 6.6b):

$$\sum F_y = N - m_1 g\cos\theta = m_1 a_y = 0,$$

tj.

$$N = m_1 g \cos\theta.$$

Ze vztahu (6.2) pak dostáváme

$$f_d = \frac{F_d}{N} = \frac{F_d}{m_1 g \cos\theta} = \frac{(68{,}6\ \mathrm{N})}{(14\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\cos 30^\circ} = 0{,}58. \quad \text{(Odpověď)}$$

6.3 ODPOROVÁ SÍLA A MEZNÍ RYCHLOST

Tekutinou rozumíme tekuté prostředí, obvykle plyn nebo kapalinu, výjimečně plazma. Při pohybu tělesa v tekutině, kdy se těleso pohybuje klidným prostředím, anebo prostředí proudí kolem klidného tělesa, působí prostředí na těleso **odporovou silou** ***F***, která pohybu brání. Tato síla směřuje proti rychlosti, jíž se těleso pohybuje vzhledem k prostředí.

V tomto článku se budeme zabývat pouze případy, kdy proudícím prostředím je vzduch, těleso je spíše zaoblené (fotbalový míč) než štíhlé (oštěp) a proudění je natolik rychlé, že již může být považováno za turbulentní (za tělesem se tvoří vzduchové víry). V takových případech souvisí odporová síla ***F*** s relativní rychlostí empirickým vztahem

$$F = \tfrac{1}{2} C \varrho S v^2, \qquad (6.17)$$

kde ϱ je hustota vzduchu (hmotnost vztažená na objemovou jednotku) a S je **účinný průřez** tělesa, definovaný jako obsah největšího řezu tělesa rovinou kolmou k relativní rychlosti ***v***. **Součinitel odporu** C se zjišťuje experimentálně, jeho typické hodnoty se pohybují v rozmezí od 0,4 do 1,0. Pro dané těleso není C konstantou v pravém slova smyslu, neboť se při výrazných změnách rychlosti ***v*** také mění. Tuto komplikaci však nebudeme brát v úvahu.

Závislost odporu prostředí na veličinách S a v^2 velmi dobře znají sjezdaři. Pro dosažení vysoké rychlosti musí sjezdař co možná nejvíce snížit velikost odporové síly, například tím, že zaujme sjezdový postoj zvaný „vajíčko" (obr. 6.7) a minimalizuje tak účinný průřez S.

Ze vztahu (6.17) je vidět, že při pádu oblého objektu vzduchem velikost odporové síly F postupně narůstá (od počáteční nulové hodnoty při $v = 0$) s rostoucí rychlostí pádu. Obr. 6.8 ukazuje, že při dostatečně dlouhém pádu dojde k vyrovnání síly odporové ***F*** a tíhové ***G*** = m***g***. Výsledná svislá síla působící na těleso se tak anuluje. Podle druhého Newtonova zákona musí této situaci odpovídat nulové zrychlení, takže rychlost tělesa již neporoste. Těleso pak padá stálou **mezní rychlostí** o velikosti v_m, kterou zjistíme z rovnosti $F = mg$ užitím vztahu (6.17). Platí

$$\tfrac{1}{2} C \varrho S v_m^2 = mg$$

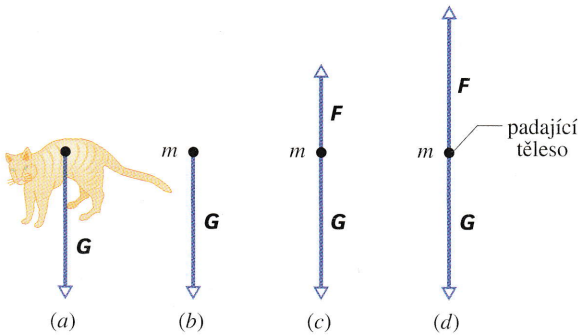
a odtud

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho S}}. \qquad (6.18)$$

Tabulka 6.1 uvádí hodnoty v_m pro některé běžné předměty.



Obr. 6.7 Sjezdař je schoulen ve „vajíčku", aby co nejvíce snížil svůj účinný průřez a tím i odporovou sílu.



Obr. 6.8 Síly působící na těleso během pádu ve vzduchu: (a) Těleso na samém počátku pádu, (b) silový diagram v tomto okamžiku, (c) silový diagram o chvíli později, kdy již působí odporová síla. (d) Velikost odporové síly roste až do okamžiku, kdy se vyrovná se silou tíhovou. Od té chvíle padá těleso konstantní (mezní) rychlostí.

V souhlasu s výpočty* založenými na vztahu (6.17) dosáhne kočka mezní rychlosti při pádu z výšky zhruba šesti poschodí. Než k tomu dojde, je $G > F$ a kočka je urychlována nenulovou výslednou silou, směřující svisle dolů.

* W. O. Whitney a C. J. Mehlhaff, High-rise syndrome in cats. *J. Am. Veterinary Medical assoc.* **191**, 1399–1403 (1987).

S odkazem na kapitolu 2 si připomeňme, že naše smysly reagují na zrychlení, nikoli na rychlost. Také padající kočka pocítí zrychlení. Lekne se, skrčí nohy pod tělo, zvedne hlavu a ohne páteř vzhůru. Tím se sníží její účinný průřez S a zvýší velikost dosažitelné mezní rychlosti v_m. Za této situace by ovšem při přistání muselo dojít k většímu poranění.

V okamžiku, kdy kočka dosáhne mezní rychlosti, její zrychlení klesne na nulu a kočka se uklidní. Napne nohy a krk vodorovně a napřímí páteř (podobá se při tom letící veverce při skoku ze stromu na strom). Tím se zvýší průřez S a s ním i síla odporu F. Kočka se začne zpomalovat, neboť nyní je $F > G$ a výsledná síla míří vzhůru, až do okamžiku, kdy dosáhne nové, nižší mezní rychlosti. Pokles v_m snižuje nebezpečí vážného poranění při dopadu. Těsně před koncem pádu, když kočka spatří blížící se povrch země, stáhne nohy zpět pod tělo a připraví se na přistání.

Tabulka 6.1 **Některé mezní rychlosti ve vzduchu**

PŘEDMĚT	MEZNÍ RYCHLOST ($m \cdot s^{-1}$)	95% VZDÁLENOST[a] (m)
Osmikilogramový náboj	145	2 500
Vzdušný akrobat[b] (typický případ)	60	430
Baseballový míč	42	210
Tenisový míček	31	115
Basketbalový míč	20	47
Pingpongový míček	9	10
Dešťová kapka (poloměr 1,5 mm)	7	6
Výsadkář[c] (typický případ)	5	3

[a] Vzdálenost, kterou musí těleso urazit, aby dosáhlo rychlosti o velikosti 95 % mezní hodnoty v_m.
[b] Parašutista předvádí akrobatické figury bez otevření padáku.
[c] Parašutista otevře padák bezprostředně po výskoku z letadla.
Zdroj: Upraveno podle Petera J. Brancazia, *Sport Science*, Simon & Schuster, New York, 1984.

PŘÍKLAD 6.5

Padající kočka dosáhla poprvé mezní rychlosti o velikosti 100 km/h poté, co se prohnula do svislé polohy. Pak se opět roztáhla a její účinný průřez se zvýšil na dvojnásobek. Jak rychle padala kočka v okamžiku, kdy dosáhla mezní rychlosti podruhé?

ŘEŠENÍ: Označme v_{m1}, resp. v_{m2} velikost prvé, resp. druhé mezní rychlosti a S_1 a S_2 odpovídající účinné průřezy. Užitím vzorce (6.18) vypočteme poměr mezních rychlostí:

$$\frac{v_{m2}}{v_{m1}} = \frac{\sqrt{2mg/C\varrho S_2}}{\sqrt{2mg/C\varrho S_1}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{S_1}{2S_1}} = \sqrt{0{,}5} \doteq 0{,}7,$$

tj. $v_{m2} \doteq 0{,}7 v_{m1}$, což činí přibližně 70 km/h.

Následující událost se odehrála v dubnu 1987. Při skupinovém seskoku z letadla si parašutista Gregory Robertson všiml, že jeho kolegyně Debbie Williamsová ztratila vědomí při srážce s dalším vzdušným akrobatem v okamžiku, kdy ještě neměla otevřený padák. Robertson byl v tu chvíli v dost velké výšce nad ní. Prozatím však také padák neotevřel, aby si vychutnal radost ze čtyřkilometrového pádu. Reagoval pohotově: otočil se hlavou dolů, aby tak minimalizoval svůj účinný průřez a zvýšil rychlost pádu. Dosáhl mezní rychlosti něco přes 120 km/h, dostihl Williamsovou a zaujal vodorovnou polohu „rozepjatého orla" (obr. 6.9). Tím opět zvýšil velikost odporové síly natolik, že mohl dívku zachytit a otevřít její padák. Svůj vlastní pak otevřel pouhých 10 s před dopadem. Williamsová měla sice vlivem neřízeného přistání rozsáhlá vnitřní poranění, pád však naštěstí přežila.



Obr. 6.9 Parašutisté ve vodorovné poloze „rozepjatého orla" dosahují maximálního odporu vzduchu.

PŘÍKLAD 6.6

Dešťová kapka o poloměru $R = 1{,}5$ mm padá z mraku, který je ve výšce $h = 1\,200$ m nad zemským povrchem. Odporový koeficient kapky je 0,60. Předpokládejme, že kapka má po celou dobu pádu kulový tvar. Hustota vody je $\varrho_v = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a hustota vzduchu $\varrho_{vz} = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

(a) Jaká je mezní rychlost kapky?

ŘEŠENÍ: Objem koule je $\frac{4}{3}\pi R^3$, její efektivní průřez je roven obsahu kruhu o poloměru R. Je tedy

$$m = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho_v \quad \text{a} \quad S = \pi R^2.$$

Ze vztahu (6.18) pak dostáváme

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho_{vz}S}} = \sqrt{\frac{8\pi R^3 \varrho_v g}{3C\varrho_{vz}\pi R^2}} = \sqrt{\frac{8R\varrho_v g}{3C\varrho_{vz}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8(1{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})(1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}})(9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})}{3(0{,}60)(1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}})}} =$$

$$= 7{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Uvědomte si, že ve výpočtu nevystupuje výška mraku nad povrchem Země. Kapka (viz tab. 6.1) dosáhne mezní rychlosti po několika metrech.

(b) Jaká by byla rychlost kapky těsně před dopadem na povrch Země, kdyby nepůsobila odporová síla?

ŘEŠENÍ: Do vztahu (2.23) dosadíme $(y - y_0) = -h$ a $v_0 = 0$. Dostaneme

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(1\,200\ \mathrm{m})} = 150\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Za takových podmínek by asi Shakespeare sotva mohl napsat „... a laskavý déšť z nebes skrápěl zemi... "

KONTROLA 3: Rozhodněte, zda rychlost velkých dešťových kapek je v blízkosti povrchu Země větší, menší, či stejná jako rychlost kapek malých. Předpokládejte, že velké i malé kapky mají kulový tvar.

6.4 ROVNOMĚRNÝ POHYB PO KRUŽNICI

Připomeňme si, že o rovnoměrném pohybu po kružnici hovoříme tehdy, pohybuje-li se částice po kružnici nebo jejím oblouku rychlostí o stálé velikosti v. Uvědomme si také, že částice se pohybuje s dostředivým zrychlením (směřujícím stále do středu kružnice), jehož velikost je stálá a je dána vztahem (4.22):

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(dostředivé zrychlení)}, \qquad (6.19)$$

kde r je poloměr kružnice.

Dostředivé zrychlení udílí částici **dostředivá síla**, která samozřejmě rovněž směřuje stále do středu kružnice. Její velikost je konstantní a pomocí druhého Newtonova zákona ji lze vyjádřit ve tvaru

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} \quad \text{(dostředivá síla)}. \qquad (6.20)$$

Jestliže má tedy výslednice sil působících na částici charakter dostředivé síly, pohybuje se částice rovnoměrně po kružnici. Naopak, vidíme-li částici pohybující se rovnoměrně po kružnici, můžeme si být jisti, že výslednice sil na ni působících je dostředivá síla. Bez dostředivé síly není rovnoměrný pohyb po kružnici možný. Dostředivé zrychlení i dostředivá síla jsou vektorovými veličinami, jejichž velikost je konstantní a směr se neustále mění tak, aby směřovaly do středu kružnice.

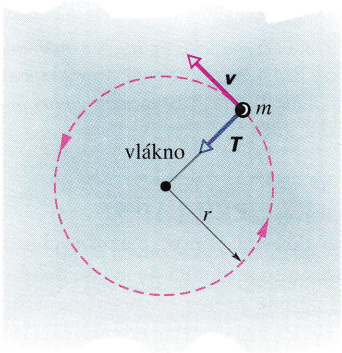
Představme si, že tělesem obíhajícím rovnoměrně po kružnici je třeba hokejový kotouč uvázaný na šňůře a kroužící kolem jejího pevného konce podle obr. 6.10. Úlohu dostředivé síly hraje v tomto případě tahová síla šňůry. Při pohybu Měsíce kolem Země, který je rovnoměrnému pohybu po kružnici blízký, je dostředivou silou přitažlivá gravitační síla, jíž na Měsíc působí Země. Dostředivá síla tedy není novým druhem síly. Může to být síla pnutí, gravitační síla nebo síla jakékoliv jiné povahy.

Srovnejme nyní dva obdobné případy rovnoměrného pohybu po kružnici:

1. *Projíždění zatáčky v autě.* Představme si dort v krabici uprostřed zadního sedadla automobilu, který jede velkou rychlostí po ploché silnici. Řidič náhle zatočí vlevo po kruhovém oblouku, krabice sklouzne po sedadle vpravo a je přitisknuta k vnitřní stěně vozu. Co se vlastně stalo?

Pohyb automobilu po oblouku považujeme za rovnoměrný pohyb po kružnici. Dostředivou silou, která jej způsobuje, je třecí síla, jíž působí povrch silnice na pneumatiky vozu. Tato síla směřuje radiálně dovnitř kružnice a má velikost danou vztahem (6.20). Je přitom rozložena na všechna čtyři kola.

Krabice s dortem by rovněž konala rovnoměrný pohyb po kružnici a setrvala při něm uprostřed sedadla, kdyby třecí síla, jíž na ni působí sedadlo, byla dostatečně velká. V popisovaném případě tomu tak zřejmě není, a proto krabice sklouzne po sedadle.



Obr. 6.10 Hokejový kotouč o hmotnosti m se pohybuje po kružnici po vodorovné dokonale hladké podložce. Jeho rychlost má stálou velikost v. Dostředivou silou je tahová síla $\boldsymbol{T}$, jíž na kotouč působí šňůra.

Z hlediska vztažné soustavy spojené s povrchem Země krabice s dortem ve skutečnosti pokračuje v přímočarém pohybu, zatímco sedadlo pod ní klouže, dokud krabice nenarazí na stěnu vozu. Tlaková síla stěny na krabici pak

realizuje dostředivou sílu a krabice se začne pohybovat rovnoměrně po kružnici spolu s automobilem.

2. *Obíhání kolem Země.* Nyní jsme v roli cestujícího vesmírné lodi *Atlantis*, která je na oběžné dráze kolem Země a zabýváme se studiem „stavu beztíže". Co se děje v tomto případě?

Dostředivou silou, která udržuje kosmickou loď i kosmonauta v rovnoměrném pohybu po kružnici, je přitažlivá gravitační síla, jíž Země působí jak na loď, tak na kosmonauta. Tato síla směřuje do středu kruhové trajektorie (střed Země) a její velikost vyhovuje vztahu (6.20).

Jak v automobilu, tak v kosmické lodi se pozorovaný předmět pohybuje rovnoměrným pohybem po kružnici vlivem dostředivé síly. Obě situace jsou však velmi odlišné. V autě je dort vržen ke stěně, která pak na něj působí tlakovou silou. V obíhající kosmické lodi naopak pasažér volně pluje a žádnou působící sílu nepociťuje. Proč je rozdíl tak veliký?

Je způsoben rozdílnou povahou dostředivé síly v jednotlivých případech. V autě je dostředivou silou tzv. *plošná síla*, zprostředkovaná přímým kontaktem stěny vozu s částí povrchu krabice. V kosmické lodi má dostředivá síla charakter *síly objemové*. Je to přitažlivá gravitační síla, složená z elementárních sil, jimiž působí Země na jednotlivé částice lodi a kosmonautova těla úměrně jejich hmotnostem. (Podrobněji o tom v čl. 14.2.) Žádná část těla se tedy plošně nestlačuje, a kosmonaut proto silové působení nepociťuje.

PŘÍKLAD 6.7

Igor je inženýr-kosmonaut v kosmické lodi *Vostok II*, která létá na oběžné dráze kolem Země ve výšce $h = 520\,\text{km}$. Její rychlost má velikost 7,6 km/s, Igor má hmotnost $m = 79\,\text{kg}$.

(a) S jakým zrychlením se Igor pohybuje?

ŘEŠENÍ: Igor koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru $R_Z + h$, kde R_Z je poloměr Země. Jeho dostředivé zrychlení je dáno vztahem (6.19):

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_Z + h} = \frac{(7{,}6{\cdot}10^3\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1})^2}{(6{,}37{\cdot}10^6\,\text{m}) + (0{,}52{\cdot}10^6\,\text{m})} =$$
$$= 8{,}38\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2} \doteq 8{,}4\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato hodnota představuje velikost tíhového zrychlení v nadmořské výšce, v níž se Igor nachází. Předmět, který by byl do této nadmořské výšky vynesen a pak jen volně puštěn, by padal k Zemi se zrychlením, jehož počáteční velikost by měla právě tu hodnotu, kterou jsme před chvílí vypočetli. Pohyby kosmické lodi a pohyb padajícího předmětu se liší tím, že kámen má počáteční rychlost nulovou, takže „jen padá", zatímco loď na oběžné dráze má počáteční rychlost kolmou na směr přitažlivé síly, takže koná kromě pádu ještě „boční pohyb". Výsledkem je pak pohyb po zakřivené trajektorii kolem Země.

(b) Jak velkou gravitační (dostředivou) silou působí Země na kosmonauta?

ŘEŠENÍ: Dostředivá síla má velikost

$$F = ma = (79\,\text{kg})(8{,}38\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}) = 660\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kdyby se kosmonaut Igor postavil na váhu umístěnou na věži o výšce $h = 520\,\text{km}$, ukazovala by váha údaj 660 N. V obíhající kosmické lodi by váha ukazovala nulu, pokud by na ní Igor vůbec mohl „stát". Váha totiž „padá" společně s kosmonautem a jeho nohy na ni ve skutečnosti netlačí.

RADY A NÁMĚTY

Bod 6.1: *Podívejme se na to*

V příkladu 6.7 jsme potřebovali znát poloměr Země, který nebyl v zadání uveden. Abychom si i v takové situaci věděli rady, měli bychom být obeznámeni se zdroji informací podobného druhu, počínaje touto knihou. Řada užitečných údajů je uvedena na vnitřní obálce knihy, v dodatcích a tabulkách. Neocenitelným zdrojem je každoročně aktualizovaná příručka *Handbook of Chemistry and Physics* (vydavatel CRC Press). Z cvičných důvodů zkuste zjistit například hustotu železa, rozvoj funkce e^x v mocninnou řadu, počet centimetrů v míli, střední vzdálenost Saturnu od Slunce, hmotnost protonu, rychlost světla, atomové čísla samaria. Vše je možné najít v citované příručce. (Český středoškolák najde všechny tyto údaje např. v běžných Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách.)

KONTROLA 4: Vezete se na ruském kole, které se rovnoměrně otáčí. Určete směr svého zrychlení $\boldsymbol{a}$ a směr tlakové síly, kterou na vás působí sedačka, při průchodu (a) nejvyšším, resp. (b) nejnižším bodem trajektorie.

PŘÍKLAD 6.8

Během cirkusového představení v roce 1901 předvedl Allo „Dare Devil" Diavolo vrcholné číslo, jízdu na kole ve spirále smrti (obr. 6.11a). Předpokládejme, že smyčka je kruhová a má poloměr $R = 2{,}7\,\text{m}$. Jakou nejmenší rychlostí $\boldsymbol{v}$ mohl Diavolo projíždět nejvyšším bodem smyčky, aby s ní neztratil kontakt?

ŘEŠENÍ: Obr. 6.11b znázorňuje silový diagram artisty na kole v nejvyšším bodě smyčky (spojená tělesa aproximujeme hmotným bodem). V diagramu je vyznačena tíhová síla $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ a normálová síla $\boldsymbol{N}$, jíž působí smyčka na kolo s akrobatem. Zrychlení $\boldsymbol{a}$ směřuje dolů ke středu smyčky

a podle vztahu (6.19) má velikost $a = v^2/R$. Užitím druhého Newtonova zákona dostáváme

$$\sum F_y = -N - mg = ma_y = -ma = -m\frac{v^2}{R}.$$

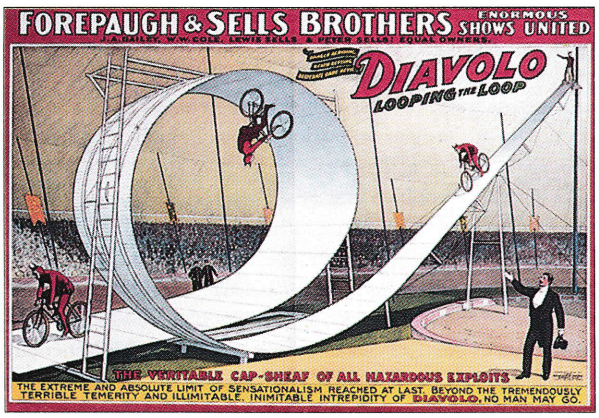
V okamžiku ztráty kontaktu kola se smyčkou je $N = 0$ a platí

$$mg = m\frac{v^2}{R},$$

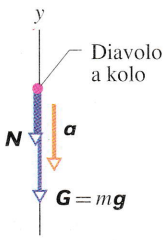
tj.

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}7\ \mathrm{m})} = \\ = 5{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Aby Diavolo neztratil kontakt se smyčkou, musel projet jejím nejvyšším bodem rychleji než $5{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pak byla velikost tlakových sil mezi koly a smyčkou nenulová.



(a)



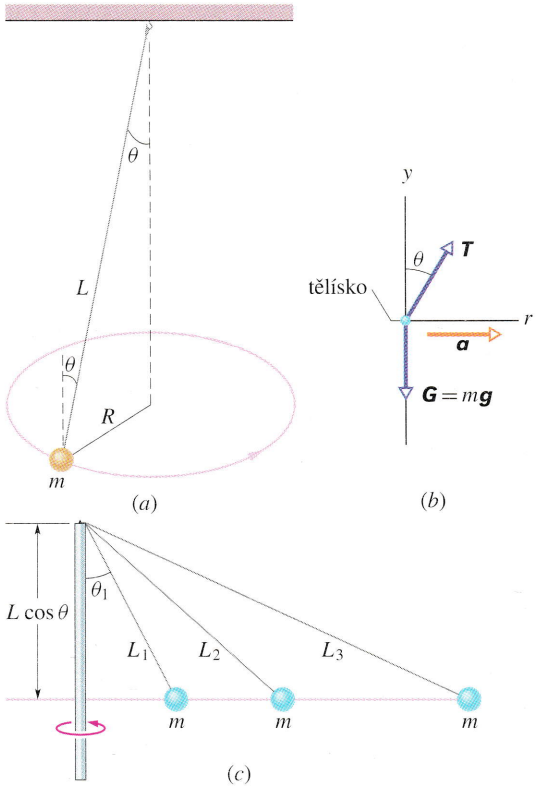
(b)

Obr. 6.11 Příklad 6.8. (a) Dobová reklama na Diavolovo vystoupení a (b) silový diagram v okamžiku průjezdu akrobata nejvyšším bodem smyčky.

PŘÍKLAD 6.9

Na obr. 6.12a je *konické kyvadlo*, jehož kulička má hmotnost $m = 1{,}5$ kg a je zavěšena na vlákně délky $L = 1{,}7$ m. Kulička obíhá ve vodorovné rovině po kružnici a vlákno svírá se svislým směrem úhel $\theta = 37°$. Při tomto pohybu opisuje vlákno kuželovou plochu. Určete periodu pohybu τ (dobu oběhu).

ŘEŠENÍ: Silový diagram na obr. 6.12b znázorňuje síly působící na kuličku kyvadla: tahovou sílu vlákna $\boldsymbol{T}$ a tíhovou sílu $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$. Podle obrázku umístíme počátek soustavy souřadnic do středu kuličky. Místo pevné osy x však použijeme „pohyblivou" radiální osu r, která neustále míří do středu trajektorie kuličky.



Obr. 6.12 Příklad 6.9. (a) Konické kyvadlo, jehož závěsné vlákno svírá se svislým směrem úhel θ. (b) Silový diagram kuličky kyvadla. Souřadnicové osy y a r mají svislý a radiální směr. Výsledná síla, a tedy i zrychlení, směřují do středu kružnice. (c) Tři kyvadla různých délek jsou roztáčena na společné hřídeli. Jejich kuličky obíhají v téže vodorovné rovině, v souhlasu se vztahem (6.24).

Složky síly $\boldsymbol{T}$ ve směrech y a r jsou $T\cos\theta$ a $T\sin\theta$. Vzhledem k tomu, že $a_y = 0$, dostáváme ze druhého Newtonova zákona

$$T\cos\theta - mg = ma_y = 0, \quad \text{tj.} \quad T\cos\theta = mg. \qquad (6.21)$$

Výsledná síla ovšem musí mít charakter síly dostředivé, takže musí mít stálou velikost a radiální směr. Radiální složka výslednice sil je $T\sin\theta$. Podle (6.20) tedy platí

$$T\sin\theta = ma_r = \frac{mv^2}{R}, \qquad (6.22)$$

kde R je poloměr kruhové trajektorie kuličky. Vydělíme vztahy (6.22) a (6.21) a vyjádříme v:

$$v = \sqrt{\frac{gR\sin\theta}{\cos\theta}}.$$

Za velikost rychlosti v dosadíme $2\pi R/\tau$ (obvod kružnice vydělený periodou). Pro periodu τ pak dostaneme

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{R\cos\theta}{g\sin\theta}}. \qquad (6.23)$$

Z obr. 6.12 vidíme, že $R = L\sin\theta$. Dosazením do vztahu (6.13) vychází

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}} = \qquad (6.24)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}7\text{ m})\cos 37^\circ}{(9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}} = 2{,}3\text{ s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Ze vztahu (6.24) je vidět, že perioda τ nezávisí na hmotnosti kuličky, ale pouze na vzdálenosti roviny jejího pohybu od bodu závěsu $L\cos\theta$. Pohybuje-li se tedy několik konických kyvadel se společným bodem závěsu, ale s různými délkami *se stejnou periodou*, obíhají jejich kuličky v téže vodorovné rovině (obr. 6.12c).

PŘÍKLAD 6.10

Na obr. 6.13 je nakreslen automobil o hmotnosti $m = 1\,600\text{ kg}$, který jede rychlostí o velikosti $v = 20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ po ploché kruhové silnici o poloměru $R = 190\text{ m}$. Jakou nejmenší hodnotu může mít koeficient statického tření f_s mezi pneumatikami a povrchem silnice, nemá-li dojít ke smyku?

ŘEŠENÍ: Dostředivou silou, díky níž se automobil pohybuje rovnoměrně po kružnici, je radiální třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, jíž působí povrch silnice na pneumatiky automobilu. (I když se auto pohybuje, nepodkluzuje v radiálním směru. Uplatní se proto statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, nikoli dynamická $\boldsymbol{F}_d$.)

V silovém diagramu na obr. 6.13b jsou zakresleny síly působící na automobil: $\boldsymbol{F}_s$, $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$. Automobil není urychlován ve svislém směru, tj. $a_y = 0$. Druhý Newtonův zákon pro tento směr dává známý výsledek $N = G = mg$.

Výslednice sil musí mít nenulový průmět do radiálního směru $\sum \boldsymbol{F}_r$, který určuje dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}_r$ automobilu. (V opačném případě by automobil vyjel ze silnice po přímce.) Podle vztahu (6.20) je $\sum F_r = mv^2/R$. Vzhledem k tomu, že jedinou silou s nenulovým radiálním průmětem je statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, platí

$$F_s = \frac{mv^2}{R}. \qquad (6.25)$$

Připomeňme, že automobil se dostane do smyku, dosáhne-li velikost statické třecí síly F_s největší možné hodnoty f_sN. V naší úloze řešíme právě tuto kritickou situaci, a tak ve vztahu (6.25) položíme $F_s = f_sN$. Dále dosadíme $N = mg$ a dostáváme

$$f_s mg = \frac{mv^2}{R},$$

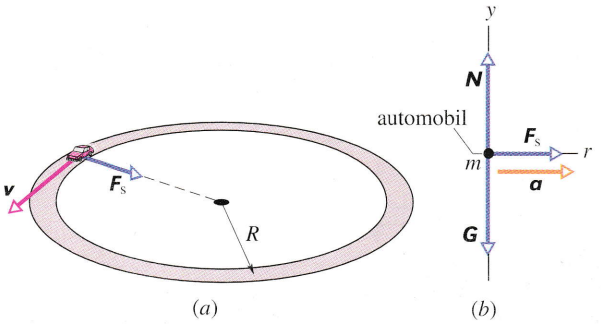
tj.

$$f_s = \frac{v^2}{gR} = \frac{(20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{(9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(190\text{ m})} = \qquad (6.26)$$

$$= 0{,}21. \quad \text{(Odpověď)}$$

Je-li $f_s \geqq 0{,}21$, udrží síla $\boldsymbol{F}_s$ automobil na kruhové dráze. Je-li však $f_s < 0{,}21$, automobil bude klouzat a kruhovou dráhu opustí.

Všimněme si dalších vlastností vztahu (6.26). Za prvé, hodnota f_s závisí na kvadrátu rychlosti v^2. To znamená, že každé zvýšení rychlosti vyžaduje mnohem větší třecí sílu. Možná jste si tuto skutečnost již někdy uvědomili, když při projíždění prudké ploché zatáčky kola automobilu náhle podklouzla. Za druhé, ve vztahu (6.26) nevystupuje hmotnost. Tento vztah tedy platí pro vozidlo jakékoli hmotnosti, od dětského autíčka nebo bicyklu až po těžký tahač.



Obr. 6.13 Příklad 6.10. (a) Automobil se pohybuje rovnoměrně po ploché kruhové silnici. Třecí síla $\boldsymbol{F}_s$ realizuje potřebnou dostředivou sílu. (b) Silový diagram (není v měřítku) ve svislé rovině.

KONTROLA 5: Předpokládejme, že automobil na obrázku 6.13 se pohybuje po kružnici o poloměru R_1 a je právě v kritické situaci před smykem. (a) Jaký je nejmenší možný poloměr dráhy při dvojnásobně velké rychlosti, nemá-li dojít ke smyku? (b) Jak se změní nejmenší možný poloměr zatáčky, zdvojnásobíme-li i hmotnost automobilu (například při přepravě nákladu)?

PŘÍKLAD 6.11

Při projíždění zatáčky nemůže řidič automobilu na tření vždy spoléhat, především je-li silnice zledovatělá nebo mokrá. Proto bývají zatáčky klopené. Podobně jako v př. 6.10 předpokládejme, že automobil o hmotnosti m projíždí zatáčkou o poloměru $R = 190\text{ m}$, nyní však klopenou, rychlostí o stálé velikosti $v = 20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (obr. 6.14a). Při jakém úhlu θ klopení není třeba se třením počítat?

ŘEŠENÍ: Dostředivé zrychlení a odpovídající dostředivá síla $\sum \boldsymbol{F}_r$ jsou stejné jako v předchozím příkladu. Vlivem klopení zatáčky se však směr tlakové síly $\boldsymbol{N}$ odkloní ke středu křivosti zatáčky. Síla $\boldsymbol{N}$ má nyní nenulový radiální průmět $\boldsymbol{N}_r$, který představuje potřebnou dostředivou sílu.

Svislá složka zrychlení je nulová, takže platí

$$N_y = N\cos\theta = G = mg. \tag{6.27}$$

Nespoléháme-li na účinek třecí síly (počítáme tedy s mezní situací $F_s = 0$), představuje složka N_r jediný nenulový příspěvek k radiální složce výslednice. Podle vztahu (6.20) je pak

$$N_r = N\sin\theta = \frac{mv^2}{R}. \tag{6.28}$$

Vydělením vztahů (6.28) a (6.27) dostáváme

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{gR}$$

a nakonec

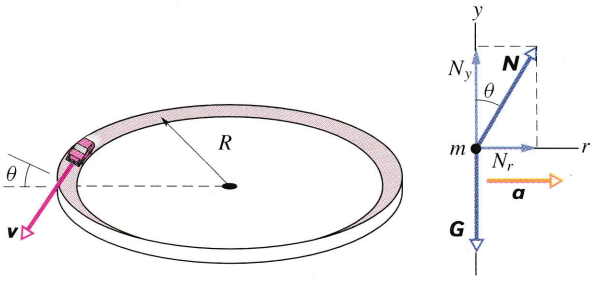
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{gR} = \tag{6.29}$$

$$= \frac{(20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(190\ \mathrm{m})} = 0{,}215,$$

tj.

$$\theta = 12°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vztahy (6.26) a (6.29) ukazují, že kritická hodnota koeficientu tření pro neklopenou silnici je stejná jako tangenta úhlu náklonu klopené zatáčky. Silnice musí na automobil v každém případě působit silou, která hraje roli dostředivé síly, ať již má povahu síly třecí či tlakové.

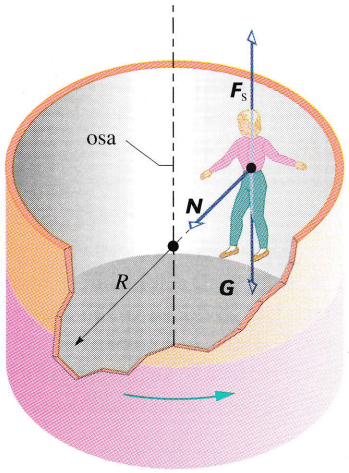


(a) (b)

Obr. 6.14 Příklad 6.11. (a) Automobil rovnoměrně projíždí klopenou zatáčku. Pro přehlednost je úhel klopení v obrázku zakreslen větší, než vychází ve skutečnosti. (b) Diagram sil působících na automobil za předpokladu, že tření mezi silnicí a pneumatikami je nulové. Radiální průmět normálové síly vytváří potřebnou dostředivou sílu. Výsledné zrychlení směřuje do středu kruhové zatáčky.

PŘÍKLAD 6.12

I někteří otrlí vyznavači jízdy na horské dráze blednou při myšlence na jízdu na Rotoru. Je to dutý válec, který se rychle otáčí kolem své osy (obr. 6.15). Člověk vstoupí před jízdou do válce bočními dvířky, postaví se na podlahu a opře se o stěnu pokrytou plachtou. Dvířka se zavřou a válec se začne otáčet. Jezdec, stěna i podlaha se pohybují společně. V okamžiku, kdy rychlost jezdce dosáhne určité předepsané velikosti, podlaha náhle odpadne. Člověk však nepadá spolu s podlahou. Naopak! Je tisknut ke stěně rotujícího válce kýmsi neviditelným a nepřátelským. Po chvíli se podlaha vrací k jeho nohám, válec se zpomalí, jezdec klesne o několik centimetrů a opět se dotkne nohama podlahy. (Někdo považuje takovou jízdu za docela zábavnou.)



Obr. 6.15 Příklad 6.12. Rotor v zábavním parku a síly působící na jezdce. Dostředivou silou je normálová síla, jíž tlačí stěna tělo člověka dovnitř válce. I když tato síla směřuje neustále k ose rotace, má jezdec překvapivý pocit, že jej ke stěně tlačí radiální síla, směřující ven. Jeho pocity jsou způsobeny tím, že je v klidu vůči *neinerciální* vztažné soustavě, takže se spolu s ní pohybuje se zrychlením. Síly, které ho k tomu nutí (pevnost otáčející se stěny, strhávající jezdce s sebou), jsou zdrojem pocitů a vzrušení při jízdě na Rotoru.

Předpokládejme, že koeficient statického tření f_s mezi jezdcovým oblečením a plátnem je 0,40 a že poloměr válce je $R = 2{,}1$ m.

(a) Jakou nejmenší obvodovou rychlost v musí mít válec i člověk, aby člověk při odpojení podlahy nespadl?

ŘEŠENÍ: Člověk nespadne, je-li tíhová síla $\boldsymbol{G}$ v rovnováze se statickou třecí silou $\boldsymbol{F}_s$, kterou na něj působí směrem vzhůru stěna válce. Při nejmenší přípustné rychlosti, při níž ještě nedochází ke skluzu člověka podél stěny, nabývá velikost síly F_s maximální možné hodnoty $f_s N$. Kritická podmínka má tedy tvar

$$f_s N = mg, \tag{6.30}$$

kde m je hmotnost člověka.

Tabulka 6.2 **Hledání supersíly — dosažené výsledky**

DATUM	VĚDEC	OBJEV
1687	Newton	Ukázal, že platí stejné zákony pro astronomická tělesa jako pro objekty na Zemi. Sjednotil nebeskou a pozemskou mechaniku.
1820	Oersted	Brilantními experimenty ukázali, že elektřina a magnetismus, do té doby považované za dvě oddělené disciplíny, jsou těsně spjaty.
1830	Faraday	
1873	Maxwell	Sjednotil elektřinu, magnetismus a optiku v jedinou disciplínu, elektrodynamiku.
1979	Glashow Salam Weinberg	Získali Nobelovu cenu za důkaz, že slabá a elektromagnetická interakce mohou být interpretovány jako dva různé aspekty jediné *elektroslabé interakce*. Došlo tak k redukci počtu fundamentálních interakcí na tři.
1984	Rubbia van der Meer	Získali Nobelovu cenu za experimentální ověření teorie elektroslabé interakce.

Současné teorie:
Teorie velkého sjednocení (GUT): snaha o sjednocení elektroslabé a silné interakce.
Teorie supersymetrie: snaha o sjednocení všech interakcí, včetně gravitační, do jediného rámce.
Teorie superstrun: interpretace bodových částic, jako jsou např. elektrony, jako nepředstavitelně jemných uzavřených smyček. Překvapivě se ukázalo, že ke čtyřem dimenzím časoprostoru je třeba přidat dimenze další.

Normálová síla $\boldsymbol{N}$ je jako obvykle kolmá k povrchu, k němuž je těleso (v tomto případě člověk) tlačeno. Všimněte si, že tato síla je nyní vodorovná a směřuje k ose rotace. Hraje tedy úlohu dostředivé síly, uděluje člověku dostředivé zrychlení a_r a udržuje jej tak na kruhové dráze. Podle vztahu (6.20) je

$$N = \frac{mv^2}{R}. \qquad (6.31)$$

Dosadíme výraz pro N do rovnice (6.30) a vypočteme v:

$$v = \sqrt{\frac{gR}{f_s}} = \sqrt{\frac{(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}1\ \mathrm{m})}{(0{,}40)}} =$$
$$= 7{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 7{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že výsledek nezávisí na hmotnosti jezdce. Platí pro kohokoli, kdo se veze na Rotoru, od dítěte až po zápasníka v sumo.

(b) Jaká je velikost dostředivé síly působící na člověka o hmotnosti 49 kg?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (6.31) je

$$N = \frac{mv^2}{R} = \frac{(49\ \mathrm{kg})(7{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2}{(2{,}1\ \mathrm{m})} \doteq$$
$$\doteq 1\,200\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Rotor z příkladu 6.12 se zpočátku pohybuje nejmenší možnou rychlostí potřebnou k tomu, aby člověk nezačal padat. Poté začne velikost rychlosti postupně narůstat. Rozhodněte, zda následující veličiny rostou, klesají, či zůstávají neměnné: (a) velikost síly F_s, (b) velikost síly $\boldsymbol{N}$, (c) hodnota $F_{s,\max}$.

6.5 PŘÍRODNÍ SÍLY

V předchozím textu jsme užívali písmene $\boldsymbol{F}$ pro označení síly v obecném smyslu. Užívají se i další symboly: $\boldsymbol{G}$, případně $\boldsymbol{F}_G$ pro tíhovou sílu, $\boldsymbol{F}_s$, resp. $\boldsymbol{F}_d$ pro třecí sílu statickou, resp. dynamickou, $\boldsymbol{N}$, případně $\boldsymbol{F}_N$ pro normálovou (tlakovou) sílu, příležitostně i $\boldsymbol{T}$ pro tahovou sílu. Na mikroskopické úrovni však lze všechny tyto síly zařadit do pouhých dvou kategorií: (1) **gravitační síla**, jejímž jediným příkladem, se kterým jsme se prozatím setkali, je síla tíhová, a (2) **elektromagnetická síla**, která bez výjimky zahrnuje všechny ostatní případy. Elektromagnetická síla je kombinací elektrických a magnetických sil. Síla, která způsobí, že elektricky nabitá bublina ulpí na stěně, a síla, díky níž magnet sebere ze země železnou jehlu, jsou jejími různými příklady. Ve skutečnosti, odhlédneme-li od sil gravitačních, mají všechny ostatní síly, které nějakým způsobem přímo vnímáme (například jako tahové nebo tlakové), elektro-

Klopení dráhy je nutné v zatáčkách, jimiž automobil projíždí tak rychle, že samotným třením nevznikne dostatečně velká dostředivá síla.



magnetickou povahu. Znamená to, že podstatou všech takových sil včetně třecích, odporových, tahových a tlakových je elektromagnetická interakce mezi atomy. Pnutí v provazu existuje jedině proto, že se jednotlivé atomy provazu navzájem přitahují.

Kromě gravitačních a elektromagnetických sil známe ještě dvě další interakce. Mají krátký dosah a nemáme s nimi přímou smyslovou zkušenost. Jsou to **slabá interakce**, která se uplatňuje u některých druhů radioaktivního rozpadu, a **silná interakce**, která k sobě váže kvarky vytvářející protony a neutrony a „drží pohromadě" atomová jádra.

Fyzikové již dlouho věří, že podstatou přírody je jednoduchost a že počet fundamentálních interakcí je ve skutečnosti nižší. Einstein věnoval většinu svého životního pracovního úsilí snaze o interpretaci těchto interakcí jako různých aspektů jediné *supersíly*. Tehdy neuspěl. V šedesátých až sedmdesátých letech však prokázali jiní fyzikové, že slabá a elektromagnetická síla jsou různé projevy téže **elektroslabé interakce**. Snahy o další redukci pokračují dodneška a patří k nejpřednějším cílům fyziky. Tabulka 6.2 shrnuje kroky, které již byly směrem ke **sjednocení** (jak je cíl zkoumání nazýván) učiněny a naznačuje i leccos o jejich směřování v budoucnosti.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Tření

Snažíme-li se silou $\boldsymbol{F}$ uvést těleso do skluzu po podložce, působí podložka na těleso **třecí silou**. Ta je s podložkou rovnoběžná a míří proti pohybu tělesa. Je způsobena vazebními silami mezi částicemi tělesa a podložky.

Dokud nedojde ke skluzu, jedná se o **statickou třecí sílu** $\boldsymbol{F}_s$, při skluzu se uplatní **třecí síla dynamická (kinetická)** $\boldsymbol{F}_d$.

Vlastnosti tření

Vlastnost 1. Na těleso působíme silou $\boldsymbol{F}$ a snažíme se je uvést do pohybu. Dokud je těleso v klidu, má statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$ stejnou velikost jako průmět síly $\boldsymbol{F}$ do roviny podložky a má opačný směr. Při zvyšování velikosti tohoto průmětu roste i velikost síly $\boldsymbol{F}_s$.

Vlastnost 2. Velikost síly $\boldsymbol{F}_s$ nabývá maximální hodnoty $F_{s,max}$ dané vztahem

$$F_{s,max} = f_s N, \tag{6.1}$$

kde f_s je **koeficient statického tření** a N je velikost normálové síly (tlakové síly podložky). Převýší-li velikost průmětu síly $\boldsymbol{F}$ do roviny podložky hodnotu $F_{s,max}$, začne těleso po podložce klouzat.

Vlastnost 3. Začne-li těleso klouzat po podložce, velikost třecí síly prudce klesne na konstantní hodnotu F_d určenou vztahem

$$F_d = f_d N, \tag{6.2}$$

kde f_d je **koeficient dynamického (kinetického) tření**.

Odporová síla

Pohybuje-li se těleso relativní rychlostí $\boldsymbol{v}$ vůči prostředí, kterým je obklopeno (například vzduch), působí prostředí na těleso **odporovou silou** $\boldsymbol{F}$. Tato síla brání pohybu tělesa a směřuje proti relativní rychlosti. Velikost síly $\boldsymbol{F}$ souvisí s relativní rychlostí vztahem

$$F = \tfrac{1}{2} C \varrho S v^2, \tag{6.17}$$

kde ϱ je hustota prostředí (hmotnost vztažená na jednotku objemu), S je **účinný průřez** tělesa (tj. obsah největšího řezu tělesa rovinou kolmou k relativní rychlosti) a C je experimentálně určený koeficient — součinitel odporu.

Mezní rychlost

Padá-li oblé těleso ve vzduchu po dostatečně dlouhé dráze, dojde ke kompenzaci odporové a tíhové síly. Těleso se přestane urychlovat a padá konstantní **mezní rychlostí** o velikosti v_m dané vztahem

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho S}}, \tag{6.18}$$

kde m je hmotnost tělesa.

Rovnoměrný pohyb po kružnici

Pohyb, při němž se částice o hmotnosti m pohybuje po kružnici rychlostí, jejíž velikost je stálá, nazýváme **rovnoměrným pohybem po kružnici**. Částice se pohybuje s **dostředivým zrychlením** o velikosti

$$a = \frac{v^2}{r}, \tag{6.19}$$

které jí udílí **dostředivá síla** o velikosti

$$F = \frac{mv^2}{r}. \tag{6.20}$$

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{F}$ míří do středu křivosti trajektorie.

Fundamentální síly

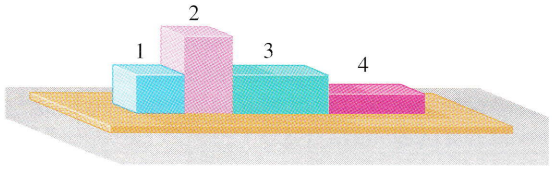
Nepřeberné množství příkladů sil lze roztřídit do tří fundamentálních typů interakce: **gravitační, elektroslabá** (kombinace sil členěných z historických důvodů na **elektrické** a **magnetické** a sil **slabých**) a konečně **silná**. V našem běžném světě se setkáváme pouze s gravitačními, elektrickými a magnetickými silami. Fyzikové doufají, že se seznam tří interakcí podaří zredukovat v jedinou všezahrnující *supersílu*.

OTÁZKY

1. Na obr. 6.16 jsou čtyři kostky uspořádané na desce. Pravý konec desky zvedáme (podobně jako u knihy na obr. 6.3a), dokud po ní kostky nezačnou sjíždět. Kostky jsou ze stejného materiálu a mají hmotnosti

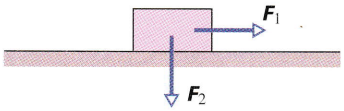
kostka 1 ... 5 kg, kostka 2 ... 10 kg,
kostka 3 ... 10 kg, kostka 4 ... 5 kg.

V jakém pořadí zleva doprava musí být kostky narovnány, aby začaly sjíždět při nejmenším možném úhlu sklonu desky vzhledem k vodorovné rovině?



Obr. 6.16 Otázka 1

2. Na obr. 6.17 je znázorněna kostka ležící na podlaze. Na kostku působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 10 N. Kostka je však v klidu. Kostku začneme tlačit k podlaze silou $\boldsymbol{F}_2$, jejíž velikost postupně narůstá od nulové hodnoty. Rozhodněte, zda budou následující veličiny růst, klesat, či zůstanou zachovány: (a) velikost třecí síly $\boldsymbol{F}_s$ působící na kostku, (b) velikost normálové síly $\boldsymbol{N}$, jíž působí podlaha na kostku, (c) maximální hodnota $F_{s,max}$ velikosti statické třecí síly mezi kostkou a podlahou. (d) Může kostka začít klouzat?

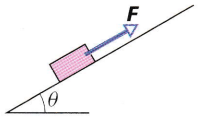


Obr. 6.17 Otázka 2

3. Přepravku na jablka tlačíme ke stěně tak silně, že neklouže dolů. Určete směr následujících sil, jimiž působí stěna na přepravku: (a) statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$, (b) normálová síla $\boldsymbol{N}$. Co se stane s hodnotami (c) F_s, (d) N a (e) $F_{s,max}$, zvýšíme-li tlak?

4. Krabice leží na rampě, která svírá s vodorovnou rovinou úhel θ. Úhel θ narůstá z počáteční nulové hodnoty až do okamžiku, kdy krabice začne klouzat. Rozhodněte, zda hodnoty následujících veličin rostou, klesají, či zůstávají neměnné: (a) složka tíhové síly působící na krabici, měřená podél rampy, (b) velikost statické třecí síly, jíž působí rampa na krabici, (c) složka tíhové síly ve směru kolmém k rampě, (d) normálová síla, jíž působí rampa na krabici, (e) maximální hodnota velikosti statické třecí síly $F_{s,max}$.

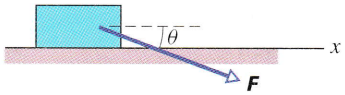
5. Kostka na obr. 6.18 leží na rampě v klidu vlivem třecí síly, jíž na ni rampa působí. Na kostku začneme působit silou $\boldsymbol{F}$, která míří podél rampy vzhůru a jejíž velikost postupně narůstá z počáteční nulové hodnoty. Jak se přitom mění velikost a směr třecí síly působící na kostku?



Obr. 6.18 Otázka 5

6. Vraťte se k otázce 5 s tím, že síla $\boldsymbol{F}$ bude nyní mířit podél rampy dolů. Její velikost opět narůstá od nulové hodnoty. Co se nyní děje se směrem a velikostí třecí síly působící na kostku?

7. Úhel θ mezi silou $\boldsymbol{F}$ působící na nepohyblivou kostku na obr. 6.19 a vodorovnou rovinou roste. Rozhodněte, zda následující veličiny rostou, klesají, či zůstávají konstantní: (a) F_x, (b) F_s, (c) N, (d) $F_{s,max}$.



Obr. 6.19 Otázka 7

8. Odpovězte na otázku 7, je-li síla $\boldsymbol{F}$ odkloněna vzhůru.

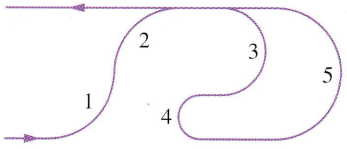
9. Jaká by byla perioda a rychlost kónického kyvadla z příkladu 6.9 pro úhel $\theta = 90°$?

10. Částice se může pohybovat různými rychlostmi po třech různých kruhových obloucích. Možnosti jsou shrnuty v následující tabulce:

OBLOUK	VELIKOST RYCHLOSTI	POLOMĚR
1	$2v_0$	r_0
2	$3v_0$	$3r_0$
3	$2v_0$	$4r_0$

Uspořádejte oblouky podle velikosti dostředivé síly působící na částici (sestupně).

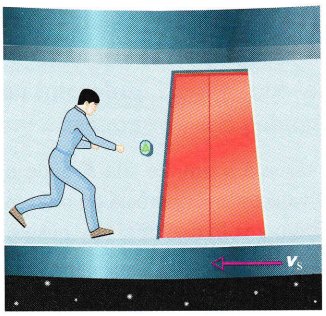
11. Na obr. 6.20 je zakreslen půdorys dráhy v zábavním parku. Vozík projíždí rovnoměrně pěti kruhovými oblouky o poloměrech R_0, $2R_0$ a $3R_0$. Uspořádejte oblouky podle velikosti dostředivé síly působící na projíždějící vozík (sestupně).



Obr. 6.20 Otázka 11

12. Obr. 6.21 znázorňuje řez kruhovou vesmírnou stanicí, která rotuje kolem svého středu. V důsledku toho působí na posádku zdánlivá tíhová síla. Jeden z členů posádky je právě v blízkosti

obvodové stěny, která má rychlost $\boldsymbol{v}_s$. (a) Astronaut se přemístí (například výtahem) blíže ke středu stanice. Rozhodněte, zda při tom velikost zdánlivé tíhové síly působící na astronauta vzroste, klesne, nebo se nezmění. (b) V druhé části pokusu astronaut běží podél stěny lodi v opačném směru vůči $\boldsymbol{v}_s$ (rychlostí, jejíž velikost je menší než v_s). Opět rozhodněte, zda velikost zdánlivé tíhové síly vzroste, klesne, nebo zůstane nezměněna.



Obr. 6.21 Otázka 12

13. Na obr. 6.22 je pohled shora na dva kameny obíhající po dokonale hladké podložce po kruhových trajektoriích. Každý z nich je přivázán na provaze, jehož druhý konec je upevněn ve středu kružnice. Rozhodněte, zda tahová síla delšího provazu je větší, menší, či stejně velká jako tahová síla provazu kratšího, pohybují-li se kameny (a) stejně velkými rychlostmi, (b) se stejnými periodami oběhu.



Obr. 6.22 Otázka 13

14. Mince leží na točně, jejíž rotace se postupně zrychluje. Co se děje s velikostí třecí síly, jíž působí točna na minci, jestliže rychlost otáčení narůstá z počáteční nulové hodnoty?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 6.2 Vlastnosti sil tření

1C. Plný prádelník o hmotnosti 45 kg stojí na podlaze. (a) Koeficient statického tření mezi ním a podlahou je 0,45. Jakou nejmenší vodorovnou silou musí člověk na prádelník působit, aby jím pohnul? (b) Zodpovězte předchozí otázku pro případ, že z prádelníku nejprve vyndáme prádlo a šatstvo o celkové hmotnosti 17 kg.

2C. Hráč baseballu o hmotnosti $m = 79$ kg klouže k druhé metě a je brzděn třecí silou o velikosti $F = 470$ N. Jaký je koeficient dynamického tření mezi hráčem a trávníkem?

3C. Koeficient statického tření mezi teflonem a míchanými vejci je asi 0,04. Při jakém nejmenším úhlu sklonu vzhledem k vodorovné rovině sklouznou vejce podél dna teflonové pánve?

4C. Síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 100 N, která svírá s vodorovnou rovinou úhel θ a míří vzhůru, působí na židli o hmotnosti 25,0 kg spočívající na podlaze. (a) Pro každou z hodnot úhlu $\theta = 0°; 30°; 60°$ vypočtěte velikost tlakové síly podlahy na židli a vodorovnou složku síly $\boldsymbol{F}$. (b) Pro každou z hodnot θ rozhodněte, bude-li židle v klidu, nebo bude-li klouzat po podlaze. Koeficient statického tření mezi židlí a podlahou je 0,420.

5C. V Nevadě a jižní Kalifornii zanechávají kameny v tvrdé a vyprahlé pouštní půdě stopy, jako by se stěhovaly (obr. 6.23). Po celá léta si lidé lámali hlavu, odkud se bere neviditelný pohyb vedoucí ke vzniku těchto stop. Odpověď přišla v sedmdesátých letech tohoto století: Když poušť zasáhla náhlá bouře, vytvořila se na pevném podkladu tenká vrstva bláta, která značně snížila koeficient tření mezi kameny a podkladem. Bouři doprovázel silný vítr, opíral se do kamenů, posouval je a ony zanechaly v půdě stopy, které později slunečním žárem ztvrdly. Předpokládejme, že hmotnost kamene je 300 kg (zhruba největší hmotnost kamenů, které zanechávají stopy) a že koeficient statického tření je zmenšen na hodnotu 0,15. Jak velká vodorovná síla musí na kámen působit při prudkém poryvu větru, aby se pohnul?



Obr. 6.23 Cvičení 5

6C. Jakého největšího zrychlení může dosáhnout běžec, je-li koeficient statického tření mezi obuví a běžeckou dráhou 0,95? (Při běhu je v kontaktu s dráhou jen jedna noha běžce.)

7C. Dělník tlačí vodorovným směrem bednu o hmotnosti 35 kg. Působí na ni při tom silou 110 N. Koeficient statického tření mezi bednou a podlahou je 0,37. (a) Jakou třecí silou působí podlaha na bednu? (b) Jaká je za této situace maximální velikost statické třecí síly $F_{s,max}$? (c) Pohne se bedna? (d) Druhý dělník přichází na pomoc a táhne bednu svisle vzhůru. Jakou nejmenší tahovou silou musí na bednu působit, aby se prvnímu dělníkovi podařilo uvést ji do pohybu? (První dělník stále tlačí bednu silou 110 N.) (e) Jakou nejmenší silou by musel na bednu působit druhý dělník, kdyby ji namísto zvedání tahal vodorovným směrem, aby se oběma podařilo bednu posunout?

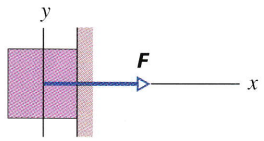
8C. Člověk tlačí po podlaze bednu o hmotnosti 55 kg vodo-

rovnou silou o velikosti 220 N. Koeficient dynamického tření je 0,35. (a) Jaká je velikost třecí síly? (b) Jaké je zrychlení bedny?

9C. Kufr vážící 220 N leží na vodorovné podlaze. Koeficient statického tření mezi kufrem a podlahou je 0,41, koeficient dynamického tření je 0,32. (a) Jakou nejmenší vodorovnou silou musí působit člověk na kufr, aby jím pohnul? (b) Jakou vodorovnou silou musí člověk působit na kufr, který se již dal do pohybu, aby udržel jeho rychlost stálou? (c) Jaké je zrychlení kufru, působí-li na něj člověk stále stejnou silou jako na začátku?

10C. Skříňka vážící 556 N stojí na podlaze. Koeficient statického tření mezi ní a podlahou je 0,68, koeficient dynamického tření je 0,56. Při čtyřech různých pokusech uvést skříňku do pohybu na ni působila pokaždé jinak velká vodorovná síla: (a) 222 N, (b) 334 N, (c) 445 N, (d) 556 N. Pro každý z uvedených případů zjistěte, zda se skříňka pohnula a vypočtěte velikost třecí síly, kterou na skříňku působí podlaha poté, co je uvedena do pohybu. Na počátku každého pokusu je skříňka v klidu.

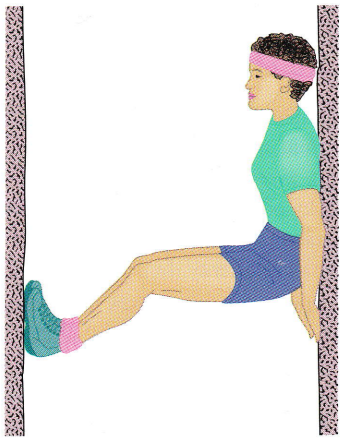
11C. Kostku o váze 5,0 N tlačíme ke svislé stěně vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 12 N (obr. 6.24). Koeficient statického tření mezi stěnou a kostkou je 0,60, koeficient dynamického tření mezi nimi je 0,40. Předpokládejme, že se kostka zpočátku nepohybuje. (a) Začne se kostka pohybovat? (b) Pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ vyjádřete sílu, jíž působí stěna na kostku.



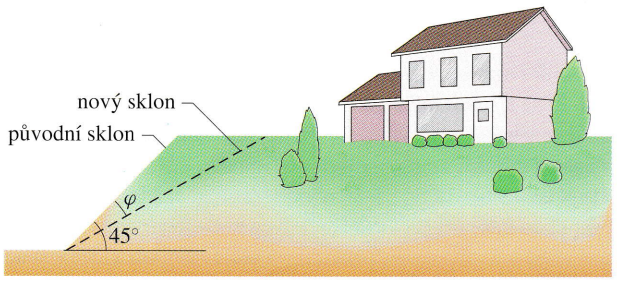
Obr. 6.24 Cvičení 11

12C. Horolezkyně o hmotnosti 49 kg šplhá „komínem“ mezi dvěma skalními stěnami způsobem znázorněným na obr. 6.25. Koeficient statického tření mezi její obuví a skálou je 0,8, mezi zády a skálou 1,2. Horolezkyně snižuje tlakovou sílu, kterou se tiskne nohama i zády ke skalní stěně, až do okamžiku těsně před sklouznutím. Předpokládáme, že poměr velikostí statických třecích sil, jimiž působí skalní stěna na chodidla, resp. záda horolezkyně, je takový, že by ke skluzu zad i chodidel došlo současně.* (a) Jak velkou silou se horolezkyně tiskne ke skále? (b) Jakou část tíhové síly kompenzuje třecí síla působící na její obuv?

13C. Dům je postaven na vrcholku kopce se sklonem svahu asi 45° (obr. 6.26). Geologická studie naznačuje, že úhel sklonu bude pravděpodobně časem klesat vlivem skluzu svrchních vrstev půdy. Koeficient statického tření mezi svrchní a spodní vrstvou je 0,5. O jaký nejmenší úhel φ je potřeba zmenšit sklon svahu, aby k sesuvům nedošlo?

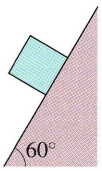


Obr. 6.25 Cvičení 12



Obr. 6.26 Cvičení 13

14C. Koeficient dynamického tření v situaci znázorněné na obr. 6.27 je 0,20. Jaké zrychlení má kostka, která (a) klesá podél nakloněné roviny, (b) byla vržena podél nakloněné roviny vzhůru a dosud stoupá.

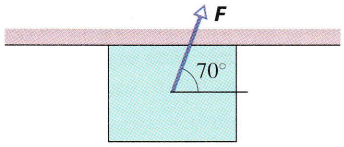


Obr. 6.27 Cvičení 14

15C. Hokejový kotouč o hmotnosti 110 g klouže po ledové ploše a urazí 15 m, než se zastaví. Velikost jeho počáteční rychlosti je 6,0 m/s. (a) Určete velikost třecí síly působící na kotouč a (b) koeficient tření mezi kotoučem a ledem.

16Ú. Po neúspěšné zkoušce z fyziky měl student děsivý sen: zdálo se mu, že tlačí jakousi kostku po stropě svého pokoje. Kostka má hmotnost 5,0 kg a student na ni působí silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 80 N, která svírá s rovinou stropu úhel 70° (obr. 6.28). Koeficient dynamického tření mezi kostkou a stropem je 0,40. Úspěšnost zkoušky závisí na tom, zda se studentovi podaří určit, jak velké je zrychlení kostky.

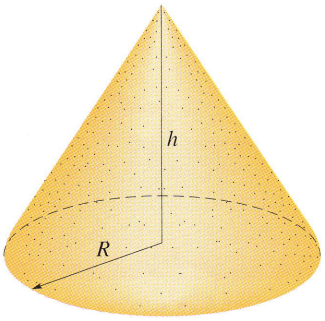
* Velikosti statických třecích sil, jimiž působí skalní stěna na chodidla, resp. na záda horolezkyně, nejsou shodné. Je to způsobeno tím, že horolezkyni nelze v popsané situaci považovat za hmotný bod. Její těžiště (viz kap. 9) leží v blízkosti stěny, o niž se sportovkyně opírá zády. Statická třecí síla, jíž na ni tato stěna působí, musí proto kompenzovat větší část tíhové síly než stěna protilehlá. Předpoklad o současném skluzu horolezkyně po *obou* stěnách nahrazuje v této úloze údaj o poloze těžiště a umožňuje při jejím řešení použít model hmotného bodu.



Obr. 6.28 Úloha 16

17Ú. Úkolem studenta v praktiku je určit koeficient statického i dynamického tření mezi krabicí a deskou. Položí krabici na desku a pozvolna zvedá jeden konec desky. V okamžiku, kdy úhel odklonu desky od vodorovné roviny dosáhne hodnoty 30°, začne krabice klouzat a během 4,0 s sjede podél desky o 2,5 m. Jak velké jsou oba koeficienty tření?

18Ú. Dělník potřebuje nasypat písek na kuželovou hromadu o kruhové podstavě. Poloměr kruhu je R. Žádný písek se nesmí rozsypat okolo (obr. 6.29). Koeficient statického tření mezi vrstvou písku uloženou podél pláště kužele a pískem vespod je f_s. Ukažte, že největší objem písku, který může být tímto způsobem uskladněn, je $\pi f_s R^3/3$. (Objem kužele je $Sh/3$, kde S je obsah základny a h výška kužele.)



Obr. 6.29 Úloha 18

19Ú. Lyžaři mají zkušenost, že lyže volně položená na zasněžený terén se přilepí. Když se však lyže pohybuje, sníh se třením zahřívá a částečně roztaje. Výsledkem je snížení koeficientu tření a zlepšení skluzu. Navoskovanou lyži voda navíc nesmáčí a tření mezi lyží a vrstvou vody se tím ještě více zmenší. Reklama v časopisu doporučuje nový typ plastových lyží jako zvláště nesmáčivý a uvádí následující srovnání: Na nových lyžích sjel lyžař po mírném, 200 m dlouhém svahu za pouhých 42 s, zatímco sjezd na lyžích standardního typu trval 61 s. (a) Určete průměrnou velikost zrychlení lyžaře v obou případech. (b) Za předpokladu, že svah má sklon 3,0°, určete pro oba typy lyží koeficient dynamického tření mezi sněhovou vrstvou a skluznicí.

20Ú. Ocelová kostka o hmotnosti 11 kg spočívá na vodorovném stole. Koeficient statického tření mezi kostkou a stolem je 0,52. Jak velkou silou lze uvést kostku do pohybu, (a) je-li tato síla vodorovná, (b) svírá-li tato síla s vodorovnou rovinou úhel +60° (směřuje vzhůru)? (c) Předpokládejme, že na kostku působí síla, která svírá s vodorovnou rovinou úhel −60° (směřuje dolů). Jaká je největší přípustná hodnota její velikosti, má-li kostka zůstat v klidu?

21Ú. Železniční vůz je naložen bednami. Koeficient statického tření mezi nimi a podlahou vozu je 0,25. Vlak jede rychlostí 48 km/h. Jaká je nejkratší možná vzdálenost, na které může vlak zastavit, aby bedny neklouzaly? Vlak brzdí s konstantním zrychlením.

22Ú. Kostka klouže stálou rychlostí dolů po nakloněné rovině s úhlem sklonu θ. Poté je podél nakloněné roviny vržena zpět vzhůru počáteční rychlostí o velikosti v_0. (a) Jakou vzdálenost kostka podél nakloněné roviny urazí, než se zastaví? (b) Sklouzne pak zase dolů? Vysvětlete.

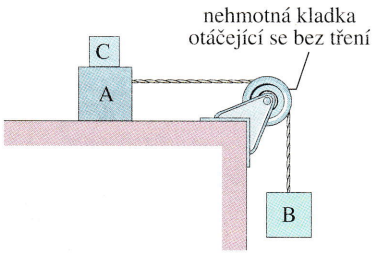
23Ú. Bedna o hmotnosti 68 kg je vlečena po podlaze na laně, které svírá s vodorovnou rovinou úhel 15°. (a) Koeficient statického tření mezi podlahou a bednou je 0,50. Určete nejmenší tahovou sílu lana, potřebnou k uvedení bedny do pohybu. (b) S jakým zrychlením se bedna začne v tomto případě pohybovat, je-li $f_d = 0{,}35$.

24Ú. Vepřík klouže po dřevěné skluzavce o úhlu sklonu 35° (obr. 6.30) dvakrát déle, než kdyby skluzavka byla dokonale hladká. Určete koeficient dynamického tření.



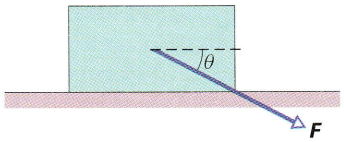
Obr. 6.30 Úloha 24

25Ú. Kostky A a B na obr. 6.31 váží 44 N, resp. 22 N. (a) Koeficient statického tření f_s mezi kostkou A a stolem je 0,20. Určete nejmenší váhu kostky C, kterou je třeba položit na kostku A, aby nedošlo ke skluzu. (b) Kostku C náhle zvedneme. Jaké je zrychlení kostky A, je-li koeficient dynamického tření mezi ní a deskou stolu 0,15?



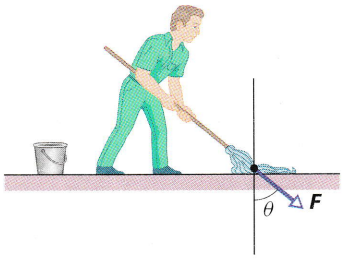
Obr. 6.31 Úloha 25

26Ú. Kostku o hmotnosti 3,5 kg suneme po vodorovné podlaze silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti $F = 15\,\text{N}$, která svírá s podlahou úhel $\theta =$ $= 40°$ (obr. 6.32). Koeficient dynamického tření mezi kostkou a podlahou je 0,25. Vypočtěte (a) velikost třecí síly působící na kostku a (b) zrychlení kostky.



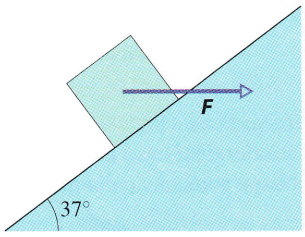
Obr. 6.32 Úloha 26

27Ú. Pečlivý pracovník na obr. 6.33 tlačí mop přímo ve směru jeho rukojeti silou $\boldsymbol{F}$. Rukojeť svírá se svislým směrem úhel θ. Koeficient statického, resp. dynamického tření mezi hlavicí mopu a podlahou je f_s, resp. f_d. Zanedbejte hmotnost rukojeti a předpokládejte, že celková hmotnost m mopu je soustředěna v hlavici. (a) Určete velikost síly F, pohybuje-li se mop po podlaze konstantní rychlostí. (b) Ukažte, že působením síly $\boldsymbol{F}$ (opět ve směru rukojeti) nelze uvést mop do pohybu, pokud úhel θ nedosáhne jisté nejmenší hodnoty θ_0. Určete ji.



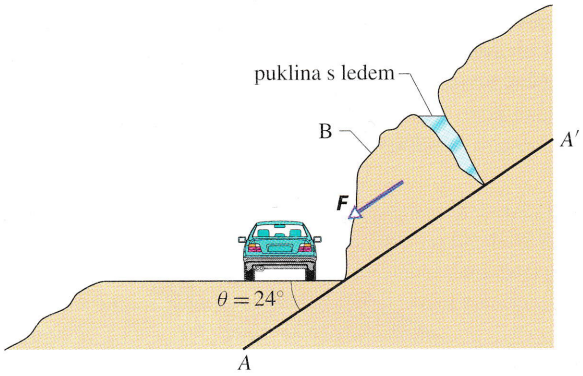
Obr. 6.33 Úloha 27

28Ú. Na kostku o hmotnosti 5,0 kg, pohybující se po nakloněné rovině, působí vodorovná síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 50 N (obr. 6.34). Koeficient dynamického tření mezi kostkou a nakloněnou rovinou je 0,30. Koeficient statického tření není zadán. (Jistou informaci o něm však v tuto chvíli již přece jen máme.) (a) Jaké je zrychlení pohybu kostky po nakloněné rovině? (b) Jakou vzdálenost urazí kostka podél nakloněné roviny, jestliže její počáteční rychlost směřovala vzhůru a měla velikost $4{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$? (c) Co se stane v okamžiku, kdy se kostka dostane do bodu obratu? Zdůvodněte.



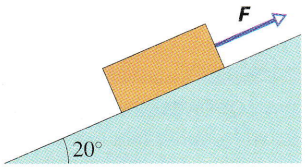
Obr. 6.34 Úloha 28

29Ú. Obr. 6.35 znázorňuje boční průřez silnicí zařízlou do svahu. Plnou čárou AA' je vyznačena tzv. oslabená vrstevná plocha, podél níž může docházet ke skluzu. Blok B, ležící přímo nad silnicí, je od skály nad ním oddělen velkou trhlinou a jeho sesuvu brání pouze tření o vrstevnou plochu. Hmotnost bloku je $1{,}8{\cdot}10^7$ kg, *hloubkový úhel* θ je 24° a koeficient statického tření mezi blokem a podložím má hodnotu 0,63. (a) Ukažte, že blok nesklouzne. (b) Do trhliny prosakuje voda a zamrzá. Zvyšuje přitom svůj objem a působí tak na blok silou $\boldsymbol{F}$ rovnoběžnou se směrem AA'. Při jaké nejmenší hodnotě F začne blok klouzat?



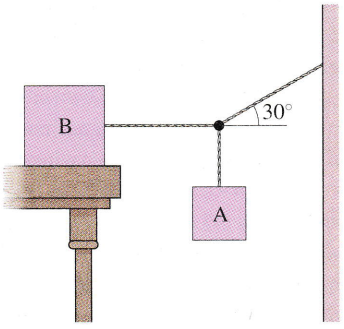
Obr. 6.35 Úloha 29

30Ú. Kostka vážící 80 N spočívá na nakloněné rovině o úhlu sklonu 20° (obr. 6.36). Koeficient statického tření je 0,25, koeficient dynamického tření 0,15. (a) Jaká je nejmenší velikost síly $\boldsymbol{F}$ rovnoběžné s nakloněnou rovinou, která zabrání kostce ve skluzu? (b) Jaká je nejmenší hodnota F, při níž se začne kostka pohybovat po nakloněné rovině vzhůru? (c) Při jaké hodnotě F bude kostka stoupat stálou rychlostí?



Obr. 6.36 Úloha 30

31Ú. Kostka B na obr. 6.37 má hmotnost 72,5 kg. Koeficient statického tření mezi kostkou a vodorovnou rovinou je 0,25. Určete největší možnou hmotnost kostky A, při níž ještě bude soustava v rovnováze.

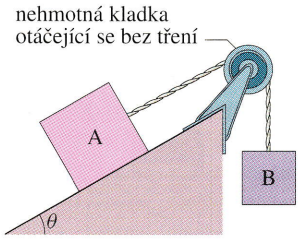


Obr. 6.37 Úloha 31

32Ú. Tělesa A a B na obr. 6.38 jsou spojena vláknem vedeným

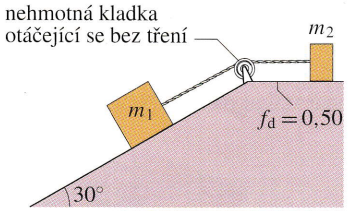
přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření. Těleso A má hmotnost 10,4 kg, těleso B 3,3 kg. Koeficienty tření mezi tělesem A a nakloněnou rovinou jsou $f_s = 0{,}56$ a $f_d = 0{,}25$. Úhel θ je 40°. Určete zrychlení těles, jestliže (a) jsou zpočátku v klidu, (b) těleso A stoupá po nakloněné rovině, (c) těleso A klesá po nakloněné rovině.

33Ú. Uspořádání těles je stejné jako na obr. 6.38. Kostka A má hmotnost 10 kg, koeficient dynamického tření mezi ní a nakloněnou rovinou je 0,22. Úhel θ je 30°. Kostka A klouže dolů po nakloněné rovině stálou rychlostí. Jakou hmotnost má kostka B?



Obr. 6.38 Úlohy 32 a 33

34Ú. Kostky na obr. 6.39 mají hmotnosti $m_1 = 4{,}0$ kg a $m_2 = 2{,}0$ kg. Koeficient dynamického tření mezi m_2 a vodorovnou rovinou je 0,50. Nakloněná rovina je dokonale hladká. Určete (a) tahovou sílu vlákna a (b) zrychlení kostek.

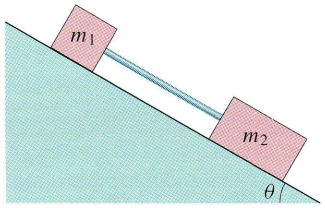


Obr. 6.39 Úloha 34

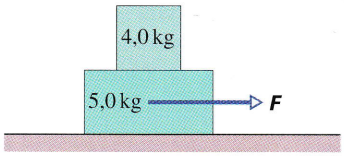
35Ú. Dvě kostky o hmotnostech 4,0 kg a 8,0 kg jsou spojeny vláknem zanedbatelné hmotnosti a kloužou dolů po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Čtyřkilogramová kostka je vpředu. Koeficient dynamického tření mezi čtyřkilogramovou (osmikilogramovou) kostkou a nakloněnou rovinou je 0,10 (0,20). (a) Určete zrychlení kostek a (b) sílu napínající vlákno. (c) Popište pohyb soustavy po záměně pořadí kostek.

36Ú. Dvě tělesa o hmotnostech $m_1 = 1{,}65$ kg a $m_2 = 3{,}30$ kg spojená nehmotnou tyčí kloužou po nakloněné rovině o úhlu sklonu $\theta = 30°$ (obr. 6.40) tak, že těleso m_1 je taženo tělesem m_2. Tyč je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Koeficient dynamického tření mezi m_1 a nakloněnou rovinou je $f_1 = 0{,}226$, mezi m_2 a rovinou $f_2 = 0{,}113$. Vypočtěte (a) sílu napínající tyč a (b) zrychlení těles. (c) Jak se změní odpovědi (a) a (b), zaměníme-li pořadí těles?

37Ú. Kostka o hmotnosti 4,0 kg leží na horní podstavě jiné kostky, jejíž hmotnost je 5,0 kg. Předpokládejme nejprve, že spodní kostka je pevně spojena s podložkou. K uvedení horní kostky do pohybu je v takovém případě třeba, aby na ni působila vodorovná síla o velikosti nejméně 12 N. Nyní položíme obě kostky na vodorovný dokonale hladký stůl (obr. 6.41). Určete (a) největší možnou velikost vodorovné síly **F**, kterou lze působit na dolní kostku tak, aby se obě kostky pohybovaly společně a (b) společné zrychlení kostek.

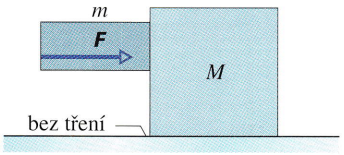


Obr. 6.40 Úloha 36



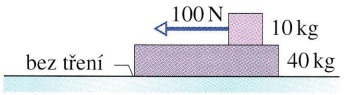
Obr. 6.41 Úloha 37

38Ú. Dvě kostky ($m = 16$ kg a $M = 88$ kg), znázorněné na obr. 6.42, nejsou spojeny. Koeficient statického tření mezi nimi je $f_s = 0{,}38$, podložka pod kostkou M je však dokonale hladká. Jakou nejmenší vodorovnou silou **F** je nutno tlačit kostku m ke stěně kostky M, aby se pohybovaly společně?



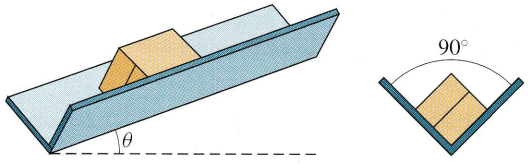
Obr. 6.42 Úloha 38

39Ú. Deska o hmotnosti 40 kg leží na dokonale hladké podlaze. Na desce spočívá kostka o hmotnosti 10 kg (obr. 6.43). Koeficient statického tření f_s mezi kostkou a deskou je 0,60, koeficient dynamického tření je $f_d = 0{,}40$. Na kostku působí vodorovná síla o velikosti 100 N. Určete zrychlení (a) kostky i (b) desky.



Obr. 6.43 Úloha 39

40Ú. Bedna klouže ve žlabu s pravoúhlým profilem (obr. 6.44). Koeficient dynamického tření mezi bednou a žlabem je f_d. Vyjádřete zrychlení bedny pomocí f_d, θ a g.



Obr. 6.44 Úloha 40

41Ú. Lokomotiva s 25 vagony se rozjíždí po vodorovné trati. Každý vagon má hmotnost 5 000 kg a je brzděn třecí silou o velikosti $F = 250v$ (v newtonech), kde v je velikost jeho okamžité rychlosti ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$). V okamžiku, kdy velikost rychlosti vlaku nabude hodnoty 30 km/h, má zrychlení velikost $0,20\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. (a) Jak velkou tažnou silou působí lokomotiva na první vagon? (b) Předpokládejme, že získaná hodnota představuje velikost největší síly, kterou je lokomotiva schopna vyvinout. Určete nejpříkřejší možné stoupání svahu, po němž může lokomotiva vytáhnout vlak stálou rychlostí 30 km/h.

42Ú. Krabice s pískem, která je zpočátku v klidu, je upevněna na šňůře a tažena po podlaze. Velikost tahové síly šňůry nesmí převýšit 1 100 N. Koeficient statického tření mezi krabicí a podlahou je 0,35. (a) Jaký úhel mezi šňůrou a podlahou musíme zvolit, abychom přepravili co největší množství písku? (b) Jaká bude v této situaci hmotnost krabice s pískem?

43Ú*. Člun o hmotnosti 1 000 kg se pohybuje rychlostí 90 km/h. Posádka vypne motor. Velikost třecí síly F_d mezi člunem a vodou je úměrná velikosti rychlosti člunu podle vztahu $F_\mathrm{d} = 70v$, kde v je zadáno v metrech za sekundu a F_d v newtonech. Za jak dlouho klesne velikost rychlosti člunu na 45 km/h?

ODST. 6.3 Odporová síla a mezní rychlost

44C. Určete odporovou sílu, která působí na raketu o poloměru 53 cm při rychlosti $250\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, letí-li v nízké nadmořské výšce, kde je hustota vzduchu $1,2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Předpokládejte, že $C = 0,75$.

45C. Mezní rychlost vzdušného akrobata v poloze rozepjatého orla je 160 km/h, při letu střemhlav pak 310 km/h. Předpokládáme, že koeficient C má stejnou hodnotu při obou figurách. Vypočtěte poměr odpovídajících účinných průřezů.

46C. Určete poměr velikostí odporové síly, která působí na tryskové dopravní letadlo letící rychlostí o velikosti 1 000 km/h v nadmořské výšce 10 km a odporové síly působící na vrtulové vojenské letadlo, které letí poloviční rychlostí v poloviční výšce. Hustota vzduchu ve výšce 10 km je $0,38\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, ve výšce 5,0 km je $0,67\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Předpokládejte, že účinné průřezy obou letadel i odporové koeficienty jsou stejné.

47Ú. Z údajů v tab. 6.1 určete průměr osmikilogramového náboje. Předpokládejte, že $C = 0,49$ a hustota vzduchu má hodnotu $1,2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

ODST. 6.4 Rovnoměrný pohyb po kružnici

48C. Koeficient statického tření mezi pneumatikami automobilu a silnicí je 0,25. Jakou největší rychlostí může automobil projet bez smyku vodorovnou zatáčkou o poloměru 47,5 m?

49C. Jaký je nejmenší poloměr neklopené zatáčky, kterou může bez nehody projet cyklista, jede-li rychlostí 30 km/h? Koeficient statického tření mezi pneumatikami a silnicí je 0,32.

50C. Při olympijské soutěži závodních sání byla nejlepšímu evropskému družstvu naměřena rychlost 60 mil v hodině při průjezdu zatáčkou o poloměru 25 stop. Jakému přetížení (v jednotkách g) byli při tom jezdci vystaveni? (Zadané hodnoty převeďte do soustavy SI.)

51C. Automobil vážící 10,7 kN jede rychlostí 13,4 m/s. Řidič se chystá projet neklopenou zatáčkou o poloměru 61,0 m. (a) Jak velká třecí síla je schopna udržet automobil na kruhové dráze? (b) Jak dopadne řidičův pokus, je-li koeficient statického tření mezi pneumatikami vozu a silnicí 0,35?

52C. V kruhové zatáčce je předepsána rychlost o velikosti 60 km/h. (a) Jaký je správný úhel klopení zatáčky, je-li její poloměr 150 m? (b) Jaká by při uvedené rychlosti musela být minimální hodnota statického koeficientu tření mezi pneumatikami a silnicí, potřebná pro bezpečný průjezd vozidel (bez smyku), kdyby zatáčka nebyla klopená?

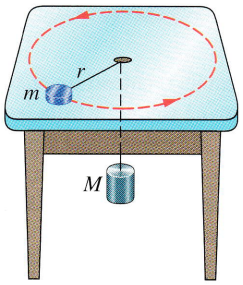
53C. V klopené zatáčce je předepsána rychlost 60 km/h. Poloměr zatáčky je 200 m. Automobil jede v dešti rychlostí 40 km/h. Určete nejmenší přípustnou hodnotu koeficientu tření mezi pneumatikami a silnicí, při níž může automobil projet zatáčkou ještě bez smyku?

54C. Holčička postavila piknikový košík na vnější obvod kolotoče. Kolotoč má poloměr 4,6 m a otočí se jednou za 30 s. (a) Jaká je velikost rychlosti bodu na obvodu kolotoče? (b) Jaký musí být koeficient statického tření mezi košíkem a kolotočem, má-li být košík vzhledem ke kolotoči v klidu?

55C. Malá kulička (hmotný bod) o hmotnosti 50 g zavěšená na niti délky 1,2 m tvoří konické kyvadlo. Kulička obíhá po vodorovné kružnici o poloměru 25 cm. (a) Jak velká je rychlost kuličky? (b) Jaké je její zrychlení? (c) Jak velká je tahová síla niti?

56C. Elektron v Bohrově modelu vodíkového atomu obíhá kolem jádra po kruhové dráze o poloměru $5,3 \cdot 10^{-11}$ m. Elektron oběhne jádro $6,6 \cdot 10^{15}$krát za sekundu. (a) Určete jeho rychlost, (b) zrychlení (velikost i směr) a (c) dostředivou sílu, která na elektron působí. (Tato síla je dána přitažlivou elektrostatickou interakcí záporně nabitého elektronu a kladně nabitého jádra.) Hmotnost elektronu je $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg.

57C. Tělísko o hmotnosti m leží na dokonale hladkém stole a je spojeno se závažím o hmotnosti M provázkem provlečeným otvorem ve stole (obr. 6.45). Určete rychlost, kterou se musí tělísko m pohybovat, aby závaží M bylo v klidu.

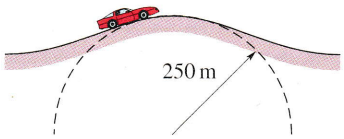


Obr. 6.45 Cvičení 57

58C. Kaskadér v autě přejíždí vrcholek, jehož profil je přibližně kruhový, s poloměrem 250 m (obr. 6.46). Jakou největší rychlostí může jet, aby vozidlo neztratilo kontakt se silnicí?

59Ú. Malá mince leží na ploché vodorovné točně. Točna se otočí třikrát za 3,14 s. (a) Jaká je rychlost mince, která se veze na točně

bez klouzání ve vzdálenosti 5,0 cm od jejího středu? (b) Jaké je zrychlení mince (velikost i směr)? (c) Jaká je velikost třecí síly působící na minci? Hmotnost mince je 2,0 g. (d) Zjistilo se, že mince umístěná do vzdálenosti větší než 10 cm od středu točny již bude klouzat. Jaký je koeficient statického tření mezi mincí a točnou?



Obr. 6.46 Cvičení 58

60Ú. Malý předmět je umístěn ve vzdálenosti 10 cm od středu talíře gramofonu. Při otáčkách $33\frac{1}{3}$ ot/min zůstává předmět vzhledem k točně v klidu, při 45 ot/min již klouže. V jakém intervalu leží hodnota statického koeficientu tření mezi předmětem a točnou?

61Ú. Cyklista projíždí kruhovou zatáčkou o poloměru 25 m rychlostí o stálé velikosti 9,00 $m \cdot s^{-1}$. Hmotnost cyklisty i s kolem je 85,0 kg. Určete (a) velikost třecí síly, jíž působí povrch silnice na kolo, (b) velikost celkové síly, jíž působí silnice na kolo.

62Ú. Student o hmotnosti 67 kg se veze na ruském kole, které se otáčí rovnoměrně. Zdánlivá váha studenta v nejvyšším bodě dráhy je 560 N. (a) Jakou má student zdánlivou váhu v nejnižším bodě? (b) Jakou bude mít zdánlivou váhu v nejvyšším bodě, jestliže se rychlost kola zdvojnásobí?

63Ú. Auto projíždí plochou zatáčkou o poloměru $R = 220$ m nejvyšší povolenou rychlostí o velikosti $v = 94{,}0$ $km \cdot h^{-1}$. Jakou *celkovou* silou působí pasažér o hmotnosti 85,0 kg na sedadlo?

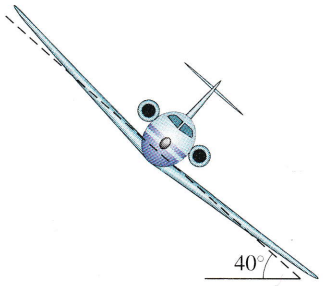
64Ú. Kámen uvázaný na vlákně obíhá ve svislé rovině po kružnici o poloměru R. Určete kritickou hodnotu velikosti rychlosti, kterou musí mít kámen při průchodu nejvyšším bodem dráhy, nemá-li se vlákno pokrčit.

65Ú. Pevnost šňůry je dána největší přípustnou velikostí tahové síly 40 N. Dítě přivázalo na šňůru kámen o hmotnosti 0,37 kg a roztočilo jej ve svislé rovině tak, aby kámen obíhal po kružnici o poloměru 1,0 m. Postupně zvyšovalo rychlost oběhu, až šňůra praskla. (a) Ve kterém bodě své trajektorie byl kámen v okamžiku, kdy se šňůra přetrhla? (b) Jak velká byla v tomto okamžiku jeho rychlost?

66Ú. Letadlo zatáčí rychlostí o velikosti 480 km/h po kružnici ležící ve vodorovné rovině. Křídla letadla svírají s vodorovnou rovinou úhel 40° (obr. 6.47). Jaký je poloměr zatáčky? Předpokládejte, že potřebná výsledná síla působící na letadlo je plně realizována aerodynamickou vztlakovou silou, která je kolmá ke křídlům letadla.

67Ú. Fregatka plachtí po vodorovné kruhové trajektorii. Úhel sklonu jejích křídel vzhledem k vodorovné rovině je přibližně 25°. Pták obletí celou kružnici za 13 s. (a) Určete rychlost jeho letu a (b) poloměr jeho trajektorie.

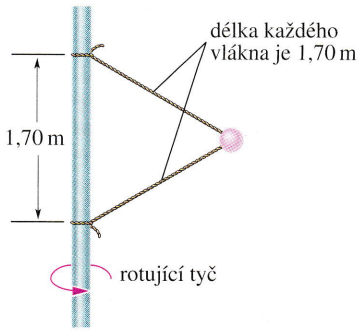
68Ú. Model letadla o hmotnosti 0,75 kg létá rovnoměrně po vodorovné kružnici ve výšce 18 m a vykoná 4,4 obletu na minutu. Model je připoután na šňůře délky 30 m, jejíž druhý konec je připevněn na zemi. Křídla letadélka jsou vodorovná, takže vztlaková síla vzduchu směřuje svisle vzhůru. (a) Jaké je zrychlení modelu? (b) Jakou silou je napínána šňůra? (c) Jaká je celková vztlaková síla působící na křídla letadla?



Obr. 6.47 Úloha 66

69Ú. Stará tramvaj projíždí neklopenou zatáčkou. Poloměr zatáčky je 30 stop a rychlost tramvaje má velikost 10 mil za hodinu (užijte převodní tabulky). Jaký úhel svírají volně visící kožená držadla se svislým směrem?

70Ú. Koule o hmotnosti 1,34 kg je pomocí dvou šňůr zanedbatelné hmotnosti připojena ke svislé rotující tyči (obr. 6.48). Šňůry jsou přivázány k tyči, jsou napjaté a tvoří dvě strany rovnostranného trojúhelníka. Tahová síla v horní šňůře je 35 N. (a) Nakreslete silový diagram koule. (b) Jakou silou je napínána spodní šňůra? (c) Určete výslednici sil působících na kouli v okamžiku zachyceném na obr. 6.48 a (d) rychlost koule.



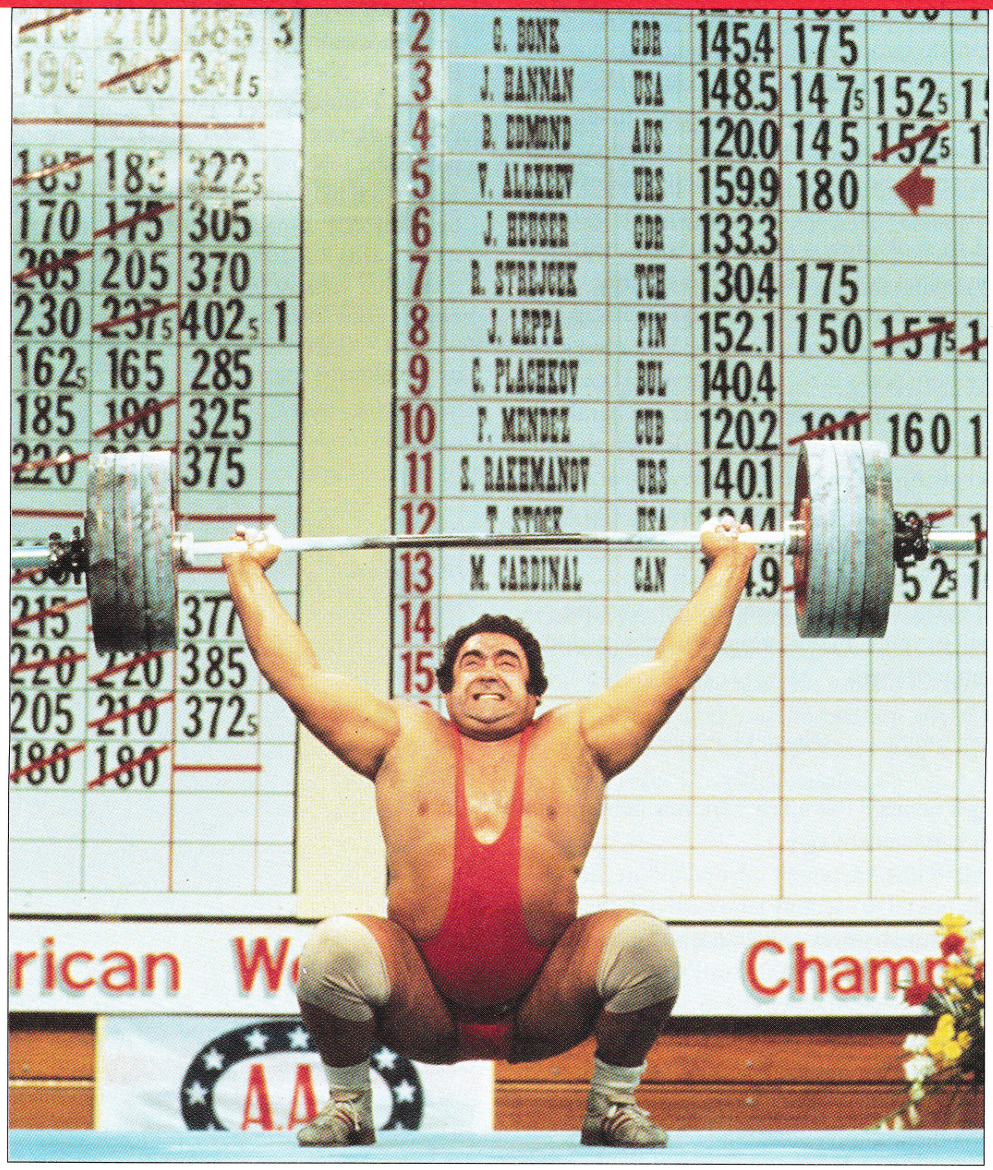
Obr. 6.48 Úloha 70

71Ú. Předpokládejme, že na těleso o hmotnosti standardního kilogramu by na rovníku při hladině moře působila tíhová síla přesně 9,8 N, kdyby se Země neotáčela. Ve skutečnosti Země rotuje, takže těleso se pohybuje po kružnici o poloměru $6{,}40 \cdot 10^6$ m (zemský poloměr) rychlostí o stálé velikosti 465 $m \cdot s^{-1}$. (a) Určete dostředivou sílu udržující standardní kilogram na této kruhové dráze. (b) Určete sílu, jíž působí standardní kilogramové těleso na pružinu siloměru, na který je zavěsíme (údaj na siloměru udává „zdánlivou váhu" tělesa).

72Ú. Předpokládejme, že vesmírná stanice z otázky 12 má poloměr 500 m. (a) Jaká musí být velikost rychlosti v_s obvodové stěny stanice, má-li být zdánlivá tíhová síla působící na kosmonauta u stěny 300 N, váží-li kosmonaut na Zemi 600 N? (b) Určete zdánlivou tíhovou sílu působící na kosmonauta běžícího podél stěny rychlostí o velikosti 10 $m \cdot s^{-1}$ (vzhledem ke stěně) ve směru souhlasném s $\boldsymbol{v}_s$.

7

Práce a kinetická energie



Při soutěži vzpěračů na olympijských hrách v roce 1976 byl celý sportovní svět doslova ohromen výkonem Vasilije Aleksejeva. Vzpěrač dokázal zvednout 562librovou činku (2 500 N) z podlahy nad hlavu do výšky asi 2 m. Téměř o dvacet let předtím mohli diváci žasnout nad výkonem Paula Andersona. Ten se sehnul pod nákladní plošinu vyrobenou ze dřeva vyztuženého ocelí, opřel si ruce o stoličku a zády nadzvedl asi o centimetr plošinu i s nákladem 6 270 liber (27 900 N)! Zdá se, že tyto dva výkony snad ani nelze srovnávat. A přece: kdo vykonal při zvedání předmětů větší práci, Aleksejev nebo Anderson?

7.1 KINETICKÁ ENERGIE

Pojem energie, jedné z klíčových veličin nejen mechaniky, ale celé fyziky, je velmi široký. Slovo *energie* užíváme v běžné řeči naprosto samozřejmě a do značné míry i volně. Definovat energii jako fyzikální veličinu však vůbec není snadné. Není prostě schůdné vyslovit nějakou jednoduchou definici, která by zahrnovala všechny aspekty tohoto pojmu. Je třeba jej postupně vybudovat, od jeho nejjednodušší podoby v mechanice až po úroveň zcela obecných úvah. Na samém začátku se spokojíme s velmi hrubou a neúplnou charakteristikou pojmu energie: **Energie** je skalární veličina, jejíž hodnota je určena stavem fyzikální soustavy (objektu). Pojem *stav* jsme v této formulaci použili v obvyklém významu: je to soubor podmínek, v nichž se objekt nachází, tj. soubor hodnot veličin (parametrů), jimiž je charakterizován. V této kapitole se soustředíme na jeden typ energie, **kinetickou energii** E_k, která souvisí s *pohybovým stavem* částice či tělesa. Pohybuje-li se těleso rychleji, má kinetickou energii větší. Je-li v klidu, je jeho kinetická energie nulová.

Kinetickou energii částice o hmotnosti m, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ velmi malou ve srovnání s rychlostí světla, definujeme vztahem

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(kinetická energie).} \qquad (7.1)$$

Kinetická energie nemůže být nikdy záporná, neboť m ani v^2 záporných hodnot nenabývají.

Tutéž definici můžeme použít i pro těleso nezanedbatelných rozměrů, pokud se všechny jeho části pohybují stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}$, tj. konají *posuvný* neboli *translační* pohyb. (Těleso tedy nesmí rotovat, ani se deformovat.) Z hlediska definice kinetické energie se takové těleso chová jako částice. Někdy je nazýváme **bodovým objektem** a o jeho kinetické energii vypočtené podle vztahu (7.1) hovoříme jako o *translační* kinetické energii. Úvahy této kapitoly se týkají právě bodových objektů.

Jednotkou kinetické energie (a každého jiného typu energie) v soustavě SI je **joule** (J), pojmenovaný podle anglického vědce 18. století Jamese Prescotta Joula. Je odvozen přímo z jednotek hmotnosti a rychlosti:

$$1\,\text{joule} = 1\,\text{J} = 1\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}. \qquad (7.2)$$

Vhodnou jednotkou energie v oblasti atomové fyziky a fyziky subatomových částic je **elektronvolt** (eV):

$$1\,\text{elektronvolt} = 1\,\text{eV} = 1{,}60\cdot10^{-19}\,\text{J}. \qquad (7.3)$$

Nečastěji užívanými násobky elektronvoltu jsou kiloelektronvolt ($1\,\text{keV} = 10^3\,\text{eV}$), megaelektronvolt ($1\,\text{MeV} = 10^6\,\text{eV}$) a gigaelektronvolt ($1\,\text{GeV} = 10^9\,\text{eV}$).

PŘÍKLAD 7.1

Psal se rok 1896 a ve městě Waco v Texasu se odehrával neobvyklý experiment. Před zraky třiceti tisíc diváků jej předvedl pracovník železniční společnosti „Katy" Wiliam Crush. Postavil dvě lokomotivy na opačných koncích trati dlouhé 6,4 km, roztopil jejich kotle a zablokoval záklopky strojů tak, aby zůstaly otevřené. Pak pustil lokomotivy plnou parou proti sobě (obr. 7.1). Čelný náraz měl nedozírné následky. Stovky lidí byly zraněny odletujícími úlomky, několik osob bylo dokonce usmrceno. Předpokládejme, že každá z lokomotiv vážila $1{,}2\cdot10^6$ N a jejich zrychlení při rozjezdu mělo konstantní velikost $0{,}26\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Jaká byla celková kinetická energie obou lokomotiv těsně před srážkou?



Obr. 7.1 Příklad 7.1. Následky srážky lokomotiv v roce 1896

ŘEŠENÍ: Abychom určili kinetickou energii lokomotivy, potřebujeme znát její hmotnost a velikost rychlosti těsně před srážkou. Pro stanovení velikosti rychlosti v můžeme použít vztahu (2.16), v němž položíme $v_x = v$, $v_{0x} = v_0$ a $a_x = a$:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Dosadíme $v_0 = 0$ a $x - x_0 = 3{,}2\cdot10^3$ m (polovina počáteční vzdálenosti lokomotiv) a dostaneme

$$v^2 = 0 + 2(0{,}26\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(3{,}2\cdot10^3\,\text{m}),$$

tj.

$$v = 40{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 147\,\text{km/h}.$$

Hmotnost lokomotivy zjistíme vydělením její váhy (tj. tíhové síly, jíž na ni působí Země) tíhovým zrychlením:

$$m = \frac{(1{,}2\cdot10^6\,\text{N})}{(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})} = 1{,}22\cdot10^5\,\text{kg}.$$

Pomocí vztahu (7.1) nyní vypočteme celkovou kinetickou energii obou lokomotiv bezprostředně před srážkou:

$$E_k = 2(\tfrac{1}{2}mv^2) = (1{,}22\cdot 10^5\ \mathrm{kg})(40{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 = \\ = 2{,}0\cdot 10^8\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato energie je ekvivalentní výbuchu asi 45 kg TNT.

7.2 PRÁCE

I když jsme při budování pojmu energie učinili zatím pouze první krůček (definovali jsme kinetickou energii částice), zdá se nám být nepochybné, že energie objektu v obecném smyslu musí mít jednu zcela přirozenou vlastnost: bude se měnit při jeho interakci s okolím. Stejně samozřejmě lze očekávat, že se bude měnit i energie okolí. Hovoříme o **výměně** nebo **přenosu** energie mezi objektem a jeho okolím. Přenos energie mezi jakoukoli fyzikální soustavou a jejím okolím může být zprostředkován silovým působením nebo tepelnou výměnou při různých dějích, které mohou v soustavě probíhat. (**Dějem** neboli procesem jednoduše rozumíme posloupnost stavových změn soustavy.) Výměnou tepla se budeme zabývat až v kapitole 19, zde si všimneme pouze dějů souvisejících se silovým působením a nazývaných souhrnně konáním **práce**.

Působíme-li na těleso určitou silou (silami) tak, že velikost jeho rychlosti přitom roste, roste i jeho kinetická energie ($= \frac{1}{2}mv^2$). A naopak, jestliže se těleso vlivem výsledné síly zpomaluje, klesá i jeho kinetická energie. V takových případech říkáme, že *síla koná na částici (soustavě částic či tělese) práci* W.

Formálnějším způsobem můžeme definovat práci takto: Kinetická energie částice se vlivem silového působení jejího okolí obecně mění. Říkáme, že síly působící na částici **konají práci**. Jestliže síla $\boldsymbol{F}$ zmenšila (nezměnila, zvětšila) kinetickou energii částice, říkáme, že vykonala kladnou (nulovou, zápornou) práci, případně říkáme, že síla práci koná (nekoná, spotřebovává) a pak udáváme už jen velikost práce v joulech, bez znaménka. (Je-li například $W = -6{,}0$ J, můžeme říci, že síla *spotřebovala* práci 6,0 J.)

V nejširším smyslu představuje „práce" tu část energie, kterou těleso získává prostřednictvím silového působení jeho okolí. Proces, při němž k takovému přenosu dochází, nazýváme obecně „konáním práce". Práce je skalární veličinou a měříme ji ve stejných jednotkách jako energii.

Slovo „přenos" může být někdy matoucí, není-li správně pochopena jeho souvislost se změnami energie tělesa a jeho okolí. Zatím známe přenos *hmoty* – substance, která se zachovává, nevzniká ani nezaniká a může se jen přemísťovat v prostoru. Hovoříme-li však o přenosu energie, neznamená to, že se na těleso nebo z tělesa do okolí přenáší nějaký „materiál". Analogii bychom mohli hledat spíše v proceduře elektronického převodu peněz mezi dvěma bankovními účty: údaj na jednom bankovním účtu vzroste, zatímco na druhém poklesne, a přitom se mezi účty nepřemisťuje nic „hmatatelného". Uvědomme si také, že slovo „práce" ve fyzice nemá svůj obvyklý význam, podle nějž je prací jakákoli tělesná či duševní činnost. Kdybychom například silně tlačili na stěnu, unaví nás udržovat svaly napjaté. V obvyklém smyslu tedy „pracujeme". Nedochází však ke změně energie stěny a to znamená, že síla našich svalů nekoná ve smyslu předchozí definice žádnou práci. (Ostatně stát delší dobu v pozoru je dost vyčerpávající, i když se člověk přitom navenek ani nepohne. *Fyzikální práce* je prostě něco jiného než *fyziologická námaha*.)

7.3 PRÁCE A KINETICKÁ ENERGIE

Pokusme se nyní formulovat vztah mezi prací, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykonala na studovaném objektu, a změnou jeho kinetické energie. Kinetickou energii částice či bodového objektu jsme již jednoduše a jasně definovali. Mění-li se velikost rychlosti částice, mění se podle této jednoduché definice i její kinetická energie. Ke změně rychlosti částice však nemůže dojít jinak než působením síly $\boldsymbol{F}$. Je proto zcela přirozené prohlásit, že změna kinetické energie částice ΔE_k je rovna práci W vykonané silou $\boldsymbol{F}$:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W \qquad \text{(vztah mezi prací a kinetickou energií).} \qquad (7.4)$$

Symbolem $E_{k,i}$ jsme označili počáteční kinetickou energii částice ($= \frac{1}{2}mv_0^2$) a $E_{k,f}$ představuje její výslednou kinetickou energii ($\frac{1}{2}mv^2$). Později uvidíme, že vztah (7.4), který vlastně *definuje* práci síly $\boldsymbol{F}$, lze přirozeně zobecnit i na případy, kdy na částici působí více sil. Znak $\boldsymbol{F}$ pak bude symbolizovat jejich výslednici.

Rovnost (7.4) můžeme přepsat ve tvaru

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W. \qquad (7.5)$$

Vztahy (7.4) a (7.5) představují ekvivalentní formulace **vztahu mezi prací a kinetickou energií**.

Při jejich používání je třeba mít neustále na paměti, že byly formulovány pro částici nebo tzv. bodový objekt a jejich platnost je také tímto předpokladem omezena.

Zkusme posoudit, jakým způsobem může dojít k porušení jejich platnosti, budeme-li uvažovat o zcela libovolném tělese. U takového obecného objektu musíme především respektovat, že se jeho různé části pohybují různými rychlostmi. Stačí si představit rotující nebo deformující se

těleso. Pro výpočet jeho kinetické energie samozřejmě nemůžeme použít vztahu (7.1), ale musíme kinetické energie jednotlivých částí nějak sečíst. Poté, co se nám podaří kinetickou energii obecného tělesa vyjádřit, přijdou na řadu úvahy o jejích změnách prostřednictvím silového působení, tj. při procesu „konání práce". Je zřejmé, že na tomto procesu se budou podílet nejen *vnější* síly, jimiž na těleso působí jeho okolí, ale i síly vzájemného působení jednotlivých částí tělesa, tzv. síly *vnitřní*. Později uvidíme, že práci vnitřních sil určitého typu (gravitačních, elektrostatických, sil pnutí apod.) je často možné a dokonce vhodné považovat za určitý typ energie tělesa. Vztahy (7.4) a (7.5) v takových případech platit nebudou, neboť práce W vykonaná *vnější* silou $\boldsymbol{F}$ přispěje nejen ke změně kinetické energie tělesa, ale i ke změně ostatních „druhů" energie. Uveďme příklad: uvažujme o bruslaři, který se odstrčil od mantinelu, nebo o plavci, který se při obrátce odrazil od stěny bazénu. Bruslařovy dlaně či plavcova chodidla, na něž bezprostředně působí tlaková síla stěny (vnější síla), jsou během odrazu v klidu. Můžeme tedy usuzovat, že tlaková síla stěny nekoná práci. A přesto se kinetická energie sportovce změní. K této změně přispívá práce (vnitřních) sil svalstva, kterou můžeme interpretovat jako jeden z druhů energie tělesa. Podobná situace vzniká třeba při odrazu míče od stěny či od podlahy. Můžeme tedy vyslovit předběžný závěr:

Mění-li se vlivem působící síly i energie tělesa jiného typu než kinetická, pak vztahy (7.4) *a* (7.5) *nemusejí platit.*

Samostatnou úvahu si zaslouží případy, kdy na pohybující se těleso působí síly tření. Právem si můžeme klást otázku, zda v takových případech zůstanou vztahy (7.4) a (7.5) v platnosti, či nikoliv. Z experimentu totiž víme, že se těleso při působení třecích sil zahřívá. Se vzrůstem jeho teploty celkem přirozeně spojujeme další druh jeho energie, tzv. vnitřní energii. Tato veličina velmi úzce souvisí s mikrostrukturou tělesa, konkrétně s náhodným pohybem jeho atomů či molekul a jejich vzájemnými vazbami. O mechanismu třecích sil již leccos víme z kap. 6, a tak si umíme představit, že mikroskopické narušení materiálu troucích se ploch je doprovázeno změnami či uvolněním vazební energie mezi povrchovými atomy či molekulami a odpovídajícím zvýšením jejich kinetické energie. V makroskopickém měřítku se to projeví jako zvýšení teploty tělesa. Pro naše další úvahy zahrnující působení sil tření je však podstatné, že i přes zdánlivé komplikace s vnitřní energií můžeme vztahů (7.4) a (7.5) využívat. Mechanismus třecích sil sice souvisí výhradně s mikroskopickou strukturou objektů, avšak nakonec je přece jen možné vyjádřit třecí síly mezi nimi *makroskopickým* silovým zákonem $F_d = f_d N$, obsahujícím empiricky definovaný koeficient tření.

O dynamické třecí síle v souvislosti se změnami energie budeme podrobněji uvažovat v kap. 8 a o vnitřních přeměnách energie se zmíníme v kap. 9.

KONTROLA 1: Částice se pohybuje po ose x. Rozhodněte, zda se její kinetické energie zvýší, sníží, nebo se zachová, změní-li se rychlost částice (a) z $-3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na $-2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, (b) z $-2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na $2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (c) Pro každou z uvedených situací rozhodněte, zda je práce vykonaná silami působícími na částici kladná, záporná, nebo nulová.

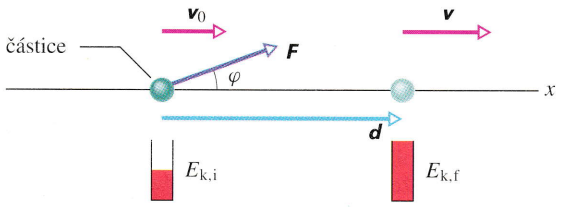
Práce síly

Uvedeme nyní do souvislosti změnu kinetické energie objektu ΔE_k se silou $\boldsymbol{F}$, která tuto změnu způsobila. Všimneme si nejprve situace, kdy sledovaným objektem je částice. Jediným typem energie, který tomuto nejjednoduššímu objektu přísluší, je energie kinetická. Na obr. 7.2 se částice pohybuje podél osy x po vodorovné dokonale hladké podlaze. Působí na ni stálá síla $\boldsymbol{F}$, která svírá s její trajektorií úhel φ. Zrychlení částice podél osy x je dáno vodorovnou složkou této síly $F\cos\varphi$. Rychlost částice a tedy i její kinetická energie se mění. Počáteční rychlost označme $\boldsymbol{v}_0$. Působení síly sledujeme v průběhu posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$. Velikost v výsledné rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ lze určit pomocí vztahu (2.16)

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \tag{7.6}$$

Vynásobením obou stran rovnice (7.6) hmotností částice m a úpravou dostaneme

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = ma_x d. \tag{7.7}$$



Obr. 7.2 Na částici působí stálá síla $\boldsymbol{F}$, která svírá s vektorem $\boldsymbol{d}$ posunutí částice úhel φ. Rychlost částice se změní z $\boldsymbol{v}_0$ na $\boldsymbol{v}$. „Měrka kinetické energie" ukazuje, že došlo ke změně kinetické energie částice z hodnoty $E_{k,i}$ na hodnotu $E_{k,f}$.

Na levé straně rovnosti (7.7) vystupuje rozdíl kinetických energií $E_{k,f}$ $(= \frac{1}{2}mv^2)$ a $E_{k,i}$ $(= \frac{1}{2}mv_0^2)$ příslušných koncovému a počátečnímu pohybovému stavu částice. Tento rozdíl představuje změnu kinetické energie částice vyvolanou působením síly $\boldsymbol{F}$ podél úseku trajektorie

spojujícího počáteční a koncovou polohu částice. Náhradou součinu ma_x výrazem $F\cos\varphi$ (v souladu s platností druhého Newtonova zákona) dostaneme

$$\Delta E_k = Fd\cos\varphi. \tag{7.8}$$

Porovnáme-li nyní vztahy (7.8) a (7.4), vidíme, že pravá strana rovnosti (7.8) vyjadřuje práci W, kterou vykonala síla $\boldsymbol{F}$ při přemístění částice z počátečního do koncového stavu. Můžeme tedy psát

$$W = Fd\cos\varphi \quad \text{(práce konstantní síly).} \tag{7.9}$$

Je-li úhel φ menší než 90°, je práce W kladná a kinetická energie částice *roste*. Je-li φ větší než 90° (až do 180°), je práce W záporná a kinetická energie částice klesá. (Pro $\varphi = 90°$ je $W = 0$ a kinetická energie částice se nemění.) Síla $\boldsymbol{F}$ samozřejmě není v uvažovaném případě jedinou silou působící na částici. Pohyb částice je totiž přímočarý a jeho směr není shodný se směrem síly $\boldsymbol{F}$. Je proto zřejmé, že na částici nutně působí ještě alespoň jedna další síla, která kompenzuje průmět síly $\boldsymbol{F}$ do osy y. Celkovou práci dvou kompenzujících se sil však můžeme zcela jistě pokládat za nulovou.

Ze vztahu (7.9) je zřejmé, že kromě jednotky joule můžeme v soustavě SI používat také jednotku Newton·metr (N·m). Odpovídající jednotkou v britském systému jednotek je stopa·libra (ft·lb). Vztah (7.2) tedy můžeme ještě doplnit takto:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}} = 1\,\mathrm{N{\cdot}m} = 0{,}738\,\mathrm{ft{\cdot}lb}. \tag{7.10}$$

Pravá strana rovnosti (7.9) představuje výraz pro skalární součin $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}$ vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$. Vektorový zápis vztahu (7.9) má tedy tvar

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} \quad \text{(práce konstantní síly).} \tag{7.11}$$

(V tomto místě textu jsme poprvé použili skalárního součinu. Pro zopakování je vhodné připomenout si čl. 3.7.) Vztah (7.11) je zvláště užitečný, jsou-li vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ zapsány pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic.

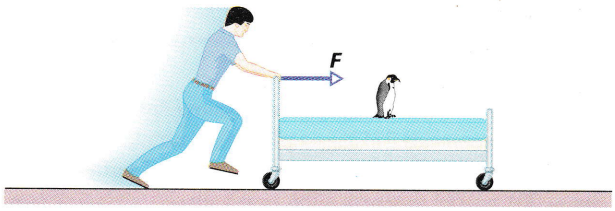
Vztahy (7.9) a (7.11) vyjadřují práci *konstantní* síly $\boldsymbol{F}$ působící na *částici* nebo *bodový objekt*. Jejich platnost však lze rozšířit i na případ konstantní síly působící na libovolné těleso, budeme-li symbolem $\boldsymbol{d}$ rozumět posunutí *působiště* síly $\boldsymbol{F}$. Práce síly $\boldsymbol{F}$ vykonaná na tělese pak bude opět dána vztahy (7.9), resp. (7.11), nebude však již obecně rovna změně kinetické energie uvažovaného tělesa.

Zdůrazněme ještě jednu důležitou možnost zobecnění vztahů (7.9) a (7.11). Přestože jsme je odvodili pro částici, která se pohybuje přímočaře, zůstanou v případě konstantní síly v platnosti i při pohybu po libovolné křivce. Budeme se o tom moci přesvědčit v čl. 7.5, kde se budeme zabývat výpočtem práce zcela obecně.

Úvahy týkající se práce síly působící na těleso můžeme prozatím shrnout takto:

> Práce stálé síly $\boldsymbol{F}$ působící na dané těleso v bodě, jehož posunutí je $\boldsymbol{d}$, je dána vztahy (7.9) a (7.11). V případě, že tělesem je částice nebo bodový objekt, je tato práce rovna změně jeho kinetické energie.

Na obr. 7.3 je například vyobrazen student, jak pohání postel při školních závodech o nejrychlejšího běžce s postelí. Vyjadřují vztahy (7.9) a (7.11) práci vykonanou silou, jíž působí student na postel, je-li tato síla konstantní? Uvedených vztahů pro výpočet práce samozřejmě použít můžeme. Snadno se přesvědčíme, že větší část této práce, ne však všechna, skutečně přispívá ke změně kinetické energie postele i s tučňákem, který se na ní veze. Jistá malá část je však potřebná pro urychlení rotačního pohybu koleček. Jestliže považujeme tento příspěvek za zanedbatelný, můžeme postel považovat za bodový objekt a použít i vztahů (7.4) a (7.5).



Obr. 7.3 Závody s postelemi. Pro výpočet práce, kterou vykoná student, stačí nahradit postel hmotným bodem.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje čtyři možnosti působení síly na kostku, která klouže po vodorovné dokonale hladké podložce směrem vpravo. Velikosti sil jsou stejné, různé orientace jsou schematicky vyznačeny v obrázcích. Uspořádejte obrázky podle práce (sestupně), kterou působící síla vykoná při posunutí kostky o vzdálenost d.



Práce vykonaná několika silami

Působí-li na částici několik sil $\boldsymbol{F}_j$, jejichž výslednice je konstantní, můžeme jejich celkovou práci určit tak, že ve

vztahu (7.11) nahradíme výraz $\boldsymbol{F}$ touto výslednicí $\sum_j \boldsymbol{F}_j$, tj.

$$\sum_j \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \dots , \qquad (7.12)$$

kde $\boldsymbol{F}_j$ jsou jednotlivé síly.

$$W = \left(\sum_j \boldsymbol{F}_j\right) \cdot \boldsymbol{d} \qquad (7.13)$$

je tedy práce vykonaná výslednicí sil při posunutí $\boldsymbol{d}$ částice. Jsou-li konstantní i jednotlivé síly $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \dots$, můžeme vztah (7.13) přepsat pomocí rov. (7.12) ve tvaru

$$W = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_3 \cdot \boldsymbol{d} + \dots = \\ = W_1 + W_2 + W_3 + \dots \quad \text{(celková práce).} \qquad (7.14)$$

Tento vztah vyjadřuje skutečnost, že celková práce vykonaná na částici je součtem prací vykonaných jednotlivými silami, které na ni působí. Vztah (7.4) nyní můžeme přepsat takto:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots . \qquad (7.15)$$

Změna ΔE_k kinetické energie částice je tedy rovna celkové práci vykonané všemi silami, které na částici působí.

PŘÍKLAD 7.2

Na obr. 7.4a jsou nakresleni dva průmysloví špioni, kteří sunou sejf o hmotnosti 225 kg po přímce do vzdálenosti 8,5 m k přistavenému nákladnímu autu. (Zpočátku byl sejf v klidu.) Špion 001 působí tlakovou silou $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti 12,0 N, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 30° a míří dolů. Špion 002 působí na sejf tahovou silou $\boldsymbol{F}_2$ o velikosti 10,0 N směrem vzhůru pod úhlem 40° vzhledem k vodorovné rovině. Sejf klouže po podlaze bez tření.

(a) Jakou celkovou práci vykonají síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ při posunutí sejfu o 8,5 m?

ŘEŠENÍ: Na obr. 7.4b je silový diagram sil zkonstruovaný pro sejf, který aproximujeme částicí. Celkovou práci sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ určíme tak, že vypočteme práci každé z nich a získané hodnoty sečteme. Podle vztahu (7.9) je práce síly $\boldsymbol{F}_1$ rovna

$$W_1 = F_1 d \cos\varphi_1 = (12{,}0\,\text{N})(8{,}50\,\text{m})\cos 30^\circ = \\ = 88{,}33\,\text{J},$$

práce síly $\boldsymbol{F}_2$ je

$$W_2 = F_2 d \cos\varphi_2 = (10{,}0\,\text{N})(8{,}50\,\text{m})\cos 40^\circ = 65{,}11\,\text{J}.$$

Podle (7.14) je celková práce W dána jejich součtem

$$W = W_1 + W_2 = 88{,}33\,\text{J} + 65{,}11\,\text{J} = \\ = 153{,}4\,\text{J} \doteq 153\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při posunutí sejfu o 8,5 m tedy špioni vykonají práci 153 J. O tuto hodnotu se zvýší kinetická energie sejfu.

(b) Jakou práci W_g vykoná při posunutí $\boldsymbol{d}$ tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a jaká je práce W_N normálové síly $\boldsymbol{N}$, jíž působí na sejf podlaha?

ŘEŠENÍ: Síly $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{N}$ jsou kolmé k posunutí. Podle vztahu (7.9) je

$$W_g = mgd \cdot \cos 90^\circ = mgd \cdot 0 = 0 \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$W_N = Nd \cdot \cos 90^\circ = Nd \cdot 0 = 0.$$

Práce vykonaná každou ze sil $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{N}$ je nulová. Působení těchto sil při posunutí sejfu o vektor $\boldsymbol{d}$ nevede ke změně jeho kinetické energie.

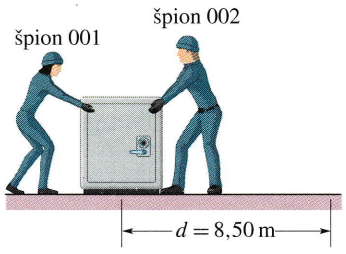
(c) Sejf byl zpočátku v klidu. Jak velká je jeho rychlost na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Změna velikosti rychlosti sejfu souvisí se změnou jeho kinetické energie, a tedy i s celkovou prací vykonanou silami, které na sejf působí. Spojením vztahů (7.4) a (7.1) dostaneme

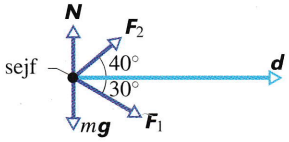
$$W = E_{k,f} - E_{k,i} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Počáteční rychlost je nulová, celková práce W je rovna 153 J. Řešením předchozí rovnice vzhledem k neznámé v dostaneme po dosazení zadaných údajů

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(153{,}4\,\text{J})}{(225\,\text{kg})}} = \\ = 1{,}17\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



(a)

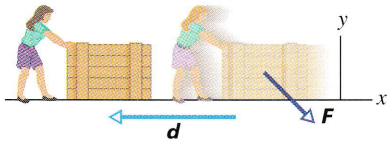


(b)

Obr. 7.4 Příklad 7.2. (a) Dva špioni posouvají sejf. (b) Silový diagram s vyznačením posunutí $\boldsymbol{d}$.

PŘÍKLAD 7.3

Ujíždějící bedna švestek klouže po vodorovné podlaze směrem k ženě, která se ji snaží zbrzdit tak, že ji odtlačuje silou $\boldsymbol{F} = (2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}$ a ustupuje před ní (obr. 7.5). Bedna se při tom posune o vektor $\boldsymbol{d} = (-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}$.



Obr. 7.5 Příklad 7.3. Brzdění bedny silou $\boldsymbol{F}$ při posunutí $\boldsymbol{d}$.

(a) Jakou práci vykonala síla $\boldsymbol{F}$ při posunutí $\boldsymbol{d}$?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (7.11) je hledaná práce rovna

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} = [(2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j}]\cdot[(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}].$$

Ze všech skalárních součinů navzájem kolmých jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou pouze tři nenulové, konkrétně $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$ (viz článek 3.7). Dostáváme tedy

$$W = (2{,}0)(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + (-6{,}0\,\mathrm{N})(-3{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} =$$
$$= (-6{,}0\,\mathrm{J})(1) + 0 = -6{,}0\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Síla $\boldsymbol{F}$ vykoná práci $-6{,}0\,\mathrm{J}$ a kinetická energie bedny o 6,0 J klesne.

(b) Jaká je kinetická energie bedny na konci posunutí, měla-li na začátku hodnotu 10 J?

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.5) pro hodnoty $E_{k,i} = 10\,\mathrm{J}$ a $W = -6{,}0\,\mathrm{J}$ dostaneme

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W = 10\,\mathrm{J} + (-6{,}0\,\mathrm{J}) = 4{,}0\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

7.4 PRÁCE TÍHOVÉ SÍLY

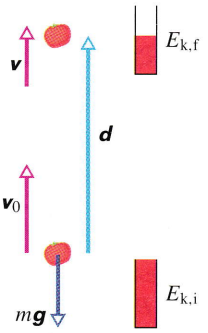
Nyní se pokusíme zjistit, jakou práci koná síla zcela určitého typu. Konkrétně půjde o sílu tíhovou. Rajské jablíčko o hmotnosti m na obr. 7.6, které lze považovat za bodový objekt, vyhodíme svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti v_0 vzhledem k Zemi. Má tedy počáteční kinetickou energii $E_{k,i} = \frac{1}{2}mv_0^2$. Během výstupu se jeho pohyb působením tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ zpomaluje a kinetická energie klesá. Experiment potvrzuje, že je-li tíhová síla jedinou silou, která na jablíčko působí (odporová síla vzduchu je nějakým způsobem eliminována), pak jedině práce tíhové síly přispívá ke změně jeho kinetické energie. Abychom tuto práci W_g určili, dosadíme za F do vztahu (7.9) velikost tíhové síly mg. Pak

$$W_g = mgd\cos\varphi \qquad \text{(práce tíhové síly).} \qquad (7.16)$$

Jestliže sledovaná částice stoupá, jako je tomu v našem případě, míří tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ proti posunutí $\boldsymbol{d}$ (obr. 7.6). Pak je $\varphi = 180°$ a

$$W_g = mgd\cdot\cos 180° = mgd\cdot(-1) = -mgd. \qquad (7.17)$$

Znaménko minus signalizuje, že kinetická energie stoupající částice klesne působením tíhové síly po dráze d o hodnotu mgd. To je zcela v souhlasu se skutečností, že se pohyb částice zpomaluje.



Obr. 7.6 Rajské jablíčko o hmotnosti m (bodový objekt) je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. Vlivem tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ se během posunutí $\boldsymbol{d}$ jeho pohyb zpomalí na rychlost $\boldsymbol{v}$. „Energiová odměrka" znázorňuje výslednou změnu kinetické energie jablíčka z počáteční hodnoty $E_{k,i} = \frac{1}{2}mv_0^2$ na hodnotu $E_{k,f} = \frac{1}{2}mv^2$.

Poté, co částice dosáhla maximální výšky a padá zpět dolů, je úhel φ mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím $\boldsymbol{d}$ nulový. Pak platí

$$W_g = mgd\cdot\cos(0°) = mgd\cdot(+1) = +mgd. \qquad (7.18)$$

Znaménko plus nás informuje, že nyní kinetická energie objektu vzrostla. Výsledek je opět v souhlasu se skutečností, neboť velikost rychlosti tělesa při pádu roste. (Ve skutečnosti se přesvědčíme v kapitole 8, že při stoupání či pádu tělesa v tíhovém poli Země nestačí brát v úvahu změny kinetické energie jen tělesa samotného, nýbrž je třeba uvažovat o soustavě těleso + Země. Bez přítomnosti Země by slova „stoupání" a „klesání" samozřejmě pozbyla významu.)

Práce při stoupání a klesání tělesa

Představme si nyní, že na bodový objekt působíme silou $\boldsymbol{F}$ a zvedáme jej. Při jeho posunutí směrem vzhůru koná síla $\boldsymbol{F}$ kladnou práci W_a, zatímco tíhová síla koná práci zápornou, W_g. To znamená, že síla $\boldsymbol{F}$ se „snaží" zvýšit kinetickou energii objektu, působení síly tíhové ji naopak snižuje.

Vztah (7.15) umožňuje vyjádřit změnu kinetické energie tělesa způsobenou oběma uvažovanými silami:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_a + W_g, \qquad (7.19)$$

kde $E_{k,f}$, resp. $E_{k,i}$ je kinetická energie tělesa na konci, resp. na počátku posunutí. Tento vztah platí i v případě, že těleso klesá. Působením tíhové síly se však nyní kinetická energie tělesa zvyšuje, zatímco působení síly $\boldsymbol{F}$ vede k jejímu poklesu (síla $\boldsymbol{F}$ směřuje stále vzhůru).

Obvyklá situace nastává, je-li objekt v klidu na začátku i na konci posunutí (například zvedneme-li knihu z podlahy a položíme ji na polici). Pak jsou hodnoty $E_{k,i}$ i $E_{k,f}$ nulové a vztah (7.19) se zjednoduší do tvaru

$$W_a + W_g = 0,$$

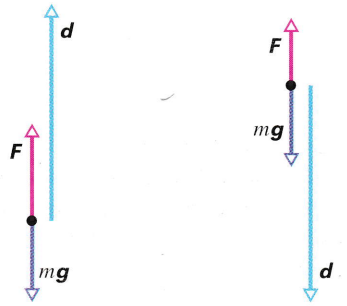
tj.

$$W_a = -W_g. \qquad (7.20)$$

Stejný výsledek dostaneme i při nenulových, avšak shodných hodnotách $E_{k,i}$ a $E_{k,f}$. Má-li tedy těleso na počátku i na konci posunutí stejnou kinetickou energii, je práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při tomto posunutí rovna záporně vzaté práci vykonané tíhovou silou. Síla $\boldsymbol{F}$ vyvolá stejně velkou změnu kinetické energie tělesa jako síla tíhová, avšak opačného znaménka. Užitím (7.16) můžeme vztah (7.20) přepsat do tvaru

$$W_a = -mgd\cos\varphi \qquad \begin{matrix}\text{(práce při vzestupu a pádu}\\ \text{tělesa při } E_{k,i} = E_{k,f}),\end{matrix} \qquad (7.21)$$

přičemž φ je úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím $\boldsymbol{d}$. Míří-li vektor posunutí svisle vzhůru (obr. 7.7a), je $\varphi = 180°$ a práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ je mgd. Při svislém posunutí směrem dolů (obr. 7.7b) je $\varphi = 0°$ a práce této síly je $-mgd$.



(a) (b)

Obr. 7.7 Na těleso působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ a síla $\boldsymbol{F}$. (a) Těleso stoupá. Jeho posunutí $\boldsymbol{d}$ svírá úhel $\varphi = 180°$ s tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$. Síla $\boldsymbol{F}$ koná kladnou práci. (b) Těleso klesá. Úhel mezi posunutím $\boldsymbol{d}$ a tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ je $\varphi = 0°$. Síla $\boldsymbol{F}$ koná zápornou práci.

Vztahy (7.20) a (7.21) jsou použitelné pro stoupající i klesající těleso, které je na počátku i na konci posunutí v klidu. Jejich platnost je nezávislá na konkrétním průběhu velikosti síly $\boldsymbol{F}$ během pohybu. Když například Vasilij Alexejev zvedal nad hlavu rekordní činku 2 500 N, musela se síla, kterou na ni během tohoto úkonu působil, výrazně měnit. Činka ovšem byla na začátku i na konci celé akce v klidu. Vzpěrač tedy nepochybně vykonal práci danou vztahy (7.20) a (7.21), kde mg představuje zátěž, kterou zvedl, a d velikost jejího posunutí.



Pomocí postroje zvedá Paul Anderson 30 osob o celkové váze 2 400 lb.

PŘÍKLAD 7.4

Ještě jednou se vraťme k výkonům Vasilije Aleksejeva a Paula Andersona.

(a) Aleksejev zvedl činku o váze 2 500 N do výšky 2,0 m. Jakou práci přitom vykonala tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působící na činku?

ŘEŠENÍ: Velikost tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ je mg. Úhel φ mezi vektorem tíhové síly a vektorem posunutí $\boldsymbol{d}$ má hodnotu 180°. Ze vztahu (7.16) vyplývá, že práce tíhové síly je

$$W_g = mgd\cos\varphi = (2\,500\text{ N})(2{,}0\text{ m})\cos 180° = \\ = -5\,000\text{ J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykonala síla, jíž působil na činku Aleksejev?

ŘEŠENÍ: Protože byla činka v klidu na počátku i na konci úkonu, můžeme použít vztah (7.20) a dostaneme

$$W_{VA} = -W_g = +5\,000\text{ J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jakou práci vykonala síla, kterou působil Aleksejev na činku, když ji držel nad hlavou?

ŘEŠENÍ: Když vzpěrač držel činku nad hlavou, byla v klidu. Její posunutí bylo nulové a podle (7.9) byla tedy nulová i práce působící síly (i když držet činku bylo jistě velmi únavné).

(d) Jakou práci vykonala síla, jíž působil Paul Anderson při zvednutí zátěže 27 900 N o 1 cm?

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.21) a hodnot $mg = 27\,900\,\text{N}$ a $d = 1{,}0\,\text{cm}$ dostaneme

$$W_{PA} = -mgd\cos\varphi = -mgd\cos 180^\circ = \\ = -(27\,900\,\text{N})(0{,}01\,\text{m})(-1) = 280\,\text{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Andersonův výkon vyžadoval sice obrovskou sílu, ale vykonaná práce byla díky velmi malému posunutí nákladu pouhých 280 J.

PŘÍKLAD 7.5

Bedna, která byla zpočátku v klidu, je tažena na laně směrem vzhůru po dokonale hladké šikmé rampě. Pohyb tažného lana se zastavil poté, co bedna urazila vzdálenost $L = 5{,}70\,\text{m}$ a zvedla se tak do výšky $h = 2{,}50\,\text{m}$ nad počáteční úroveň (obr. 7.8a).

(a) Jakou práci přitom vykonala tíhová síla?

ŘEŠENÍ: Hledanou práci vypočteme podle vztahu (7.16) pro velikost posunutí $d = L$. Úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a posunutím je $\theta + 90^\circ$ (viz silový diagram na obr. 7.8b). Dostáváme

$$W_g = mgL\cos(\theta + 90^\circ) = -mgL\sin\theta.$$

Z obr. 7.8a vidíme, že $L\sin\theta$ je právě výška h, o kterou se bedna zvedla. Je tedy

$$W_g = -mgh. \qquad (7.22)$$

Znamená to, že práce vykonaná tíhovou silou závisí pouze na posunutí bedny ve svislém směru, zatímco vodorovné posunutí není rozhodující. (K tomuto závěru se ještě vrátíme v kapitole 8.) Dosazením zadaných údajů do rov. (7.22) dostaneme

$$W_g = -(15{,}0\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(2{,}50\,\text{m}) = \\ = -368\,\text{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykonala tahová síla lana $\boldsymbol{T}$?

ŘEŠENÍ: Bedna je na začátku i na konci posunutí v klidu, změna její kinetické energie ΔE_k je tedy nulová. Podle (7.15) je pak

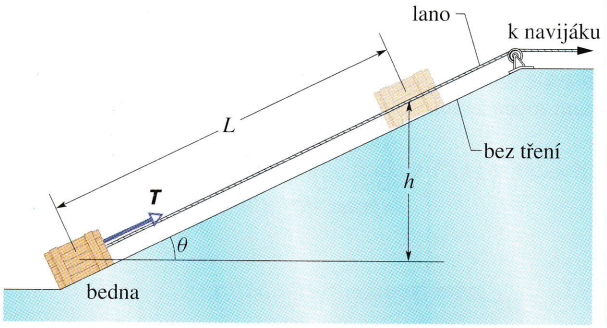
$$\Delta E_k = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots. \qquad (7.23)$$

Vidíme, že celková práce všech sil působících na bednu musí být nulová. Kromě tíhové síly působí na bednu pouze dvě další síly: tahová síla lana $\boldsymbol{T}$ a normálová síla podložky $\boldsymbol{N}$. Síla $\boldsymbol{N}$ je kolmá k posunutí a proto nekoná práci. Označíme-li W_T práci tahové síly lana, dostáváme užitím vztahu (7.23)

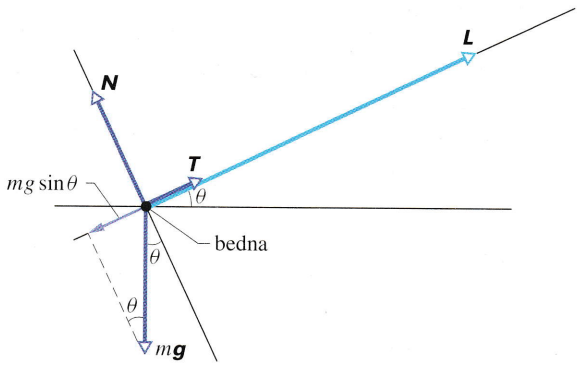
$$0 = W_g + W_T.$$

Dosazením $W_g = -368\,\text{J}$ získáme hledanou práci W_T:

$$W_T = 368\,\text{J}. \quad \text{(Odpověď)}$$



(a)



(b)

Obr. 7.8 Příklad 7.5. (a) Bedna je tažena po dokonale hladké rampě. Tahová síla lana je s rampou rovnoběžná. (b) Silový diagram bedny s vyznačením všech sil, které na ni působí. Vyznačeno je i posunutí $\boldsymbol{L}$.

KONTROLA 3: Představme si, že jsme bednu z příkladu 7.5 vytáhli do stejné výšky h, avšak po delší rampě. (a) Je práce síly $\boldsymbol{T}$ nyní větší, menší, či stejná jako v př. 7.5? (b) Rozhodněte, zda je velikost síly $\boldsymbol{T}$ větší, menší, či stejná jako v př. 7.5.

PŘÍKLAD 7.6

Kabina výtahu o hmotnosti 500 kg klesá rychlostí o velikosti $v_i = 4{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Tažné lano začne najednou klouzat a pokles kabiny se urychluje, přičemž $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}/5$ (obr. 7.9a).

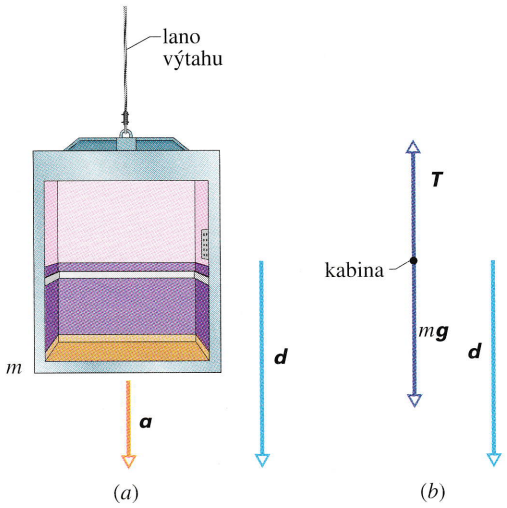
(a) Jakou práci vykoná tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působící na padající kabinu při posunutí o velikosti $d = 12\,\text{m}$?

ŘEŠENÍ: Silový diagram kabiny při poklesu o 12 m je znázorněn na obr. 7.9b. Úhel mezi posunutím $\boldsymbol{d}$ a tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ je 0°. Pomocí rov. (7.16) dostaneme

$$W_1 = mgd\cos 0° = (500\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m·s}^{-2})(12\,\text{m})(1) = \\ = 5{,}88{\cdot}10^4\,\text{J} \doteq 5{,}9{\cdot}10^4\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou práci vykoná při témže posunutí kabiny tahová síla lana?

ŘEŠENÍ: Situace se liší od př. 7.4 a 7.5 tím, že kinetická energie kabiny na začátku a na konci posunutí není stejná. Rovnic (7.20) a (7.21) nelze použít: práce vykonaná silou $\boldsymbol{T}$ není rovna záporně vzaté práci tíhové síly.



Obr. 7.9 Příklad 7.6. Kabina výtahu, klesající rychlostí o velikosti v_i, se najednou začne urychlovat směrem dolů. (a) Kabina se posune o vektor $\boldsymbol{d}$ se zrychlením $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}/5$. (b) Silový diagram kabiny s vyznačením posunutí.

Práci W_2 síly $\boldsymbol{T}$ musíme určit pomocí vztahu (7.9) ($W = Fd\cos\varphi$). Nejprve zjistíme velikost síly $\boldsymbol{T}$. Užitím druhého Newtonova zákona pro pohyb kabiny dostáváme

$$\sum_j F_j = T - mg = ma.$$

Protože zrychlení $\boldsymbol{a}$ má velikost $g/5$ a míří dolů, je

$$T = m(g + a) = m(g - g/5) = \\ = (500\,\text{kg})(\tfrac{4}{5})(9{,}8\,\text{m·s}^{-2}) = 3\,920\,\text{N}.$$

Pro výpočet práce použijeme nyní vztahu (7.9). Úhel mezi silou $\boldsymbol{T}$ a posunutím kabiny $\boldsymbol{d}$ je 180°. Síla $\boldsymbol{T}$ má velikost 3 920 N, velikost posunutí je 12 m. Dostáváme

$$W_2 = Td\cos 180° = (3\,920\,\text{N})(12\,\text{m})(-1) = \\ = -4{,}70{\cdot}10^4\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je celková práce všech sil působících na kabinu?

ŘEŠENÍ: Podle (7.14) je celková práce algebraickým součtem prací obou sil:

$$W = W_1 + W_2 = (5{,}88{\cdot}10^4\,\text{J}) - (4{,}70{\cdot}10^4\,\text{J}) = \\ = 1{,}18{\cdot}10^4\,\text{J} \doteq 1{,}2{\cdot}10^4\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Během posunutí kabiny o 12 m se její kinetická energie zvýší o $1{,}2{\cdot}10^4$ J.

Práci W můžeme určit i jinak. Užitím druhého Newtonova zákona zjistíme nejprve výslednici sil působících na kabinu:

$$\sum F = ma = (500\,\text{kg})\left(-\frac{9{,}8\,\text{m·s}^{-2}}{5}\right) = -980\,\text{N}.$$

Výslednice míří dolů a svírá s posunutím úhel 0°. Práce, kterou vykoná, je

$$W = (980\,\text{N})(12\,\text{m})\cos 0° = \\ = 1{,}18{\cdot}10^4\,\text{J} \doteq 1{,}2{\cdot}10^4\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká je kinetická energie kabiny na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie na začátku posunutí, tj. při rychlosti o velikosti $v_i = 4{,}0\,\text{m·s}^{-1}$, je

$$E_{k,i} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 = \tfrac{1}{2}(500\,\text{kg})(4{,}0\,\text{m·s}^{-1})^2 = 4\,000\,\text{J}.$$

Kinetická energie $E_{k,f}$ na konci posunutí je dána vztahem (7.5):

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W = 4\,000\,\text{J} + 1{,}18{\cdot}10^4\,\text{J} = \\ = 1{,}58{\cdot}10^4\,\text{J} \doteq 1{,}6{\cdot}10^4\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(e) Jaká je velikost rychlosti v_f na konci posunutí?

ŘEŠENÍ: Z (7.1) dostaneme

$$E_{k,f} = \tfrac{1}{2}mv_f^2,$$

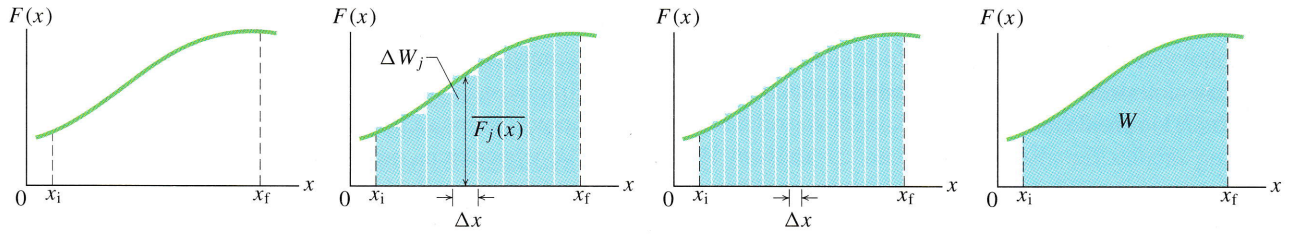
odkud pro v_f máme

$$v_f = \sqrt{\frac{2E_{k,f}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}58{\cdot}10^4\,\text{J})}{(500\,\text{kg})}} = \\ = 7{,}9\,\text{m·s}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

7.5 PRÁCE PROMĚNNÉ SÍLY

Jednorozměrný případ

Vraťme se k situaci na obr. 7.2. Předpokládejme však nyní, že síla $\boldsymbol{F}$, která působí na částici a koná při jejím pohybu jistou práci, směřuje podél osy x a její velikost se mění s polohou částice. Síla je tedy *proměnná*. V uvažovaném



Obr. 7.10 (a) Graf obecné závislosti síly působící na částici na její poloze. Částice se pohybuje po přímce (osa x), její poloha je popsána souřadnicí x v intervalu mezi počátečním a koncovým bodem x_i, resp. x_f. Síla je rovnoběžná s osou x. (b) Obrázek (a) s vyznačením rozdělení plochy pod grafem funkce $F(x)$ na úzké proužky. (c) Jemnější dělení než na obr. (b). (d) Limitní případ. Práce vykonaná působící silou je dána vztahem (7.27) a geometricky reprezentována vybarvenou plochou, omezenou osou x a grafem funkce $F(x)$ mezi hodnotami x_i a x_f.

speciálním případě se však mění pouze její velikost, zatímco její směr je stálý. Velikost síly navíc závisí pouze na souřadnici x, určující polohu částice, a není explicitní funkcí času.

Takový jednorozměrný příklad proměnné síly znázorňuje obr. 7.10. Jak určíme práci této síly při přesunutí částice z počáteční polohy o souřadnici x_i do polohy x_f? Vztah (7.9) použít nemůžeme, neboť platí jen pro konstantní sílu $\boldsymbol{F}$. Výpočet vyžaduje nový přístup: rozdělíme celkové posunutí částice na velký počet intervalů o šířce Δx. Zvolme tuto šířku natolik malou, abychom funkci $F(x)$ mohli v každém z intervalů považovat za konstantní. Nechť $\overline{F_j(x)}$ je střední hodnota veličiny $F(x)$ v j-tém intervalu.

Elementární práci ΔW_j vykonanou silou $\boldsymbol{F}$ v j-tém intervalu již vztahem (7.9) můžeme vyjádřit:

$$\Delta W_j \approx \overline{F_j(x)}\Delta x. \tag{7.24}$$

V grafu na obr. 7.10b je $\overline{F_j(x)}$ výška j-tého proužku a Δx jeho šířka. Elementární práce ΔW_j je číselně rovna obsahu proužku.

Celkovou práci W síly $\boldsymbol{F}$ působící na částici při jejím přemístění z polohy x_i do polohy x_f vyjádříme přibližně jako součet obsahů všech proužků ležících mezi x_i a x_f. Je tedy

$$W = \sum \Delta W_j \approx \sum \overline{F_j(x)}\Delta x. \tag{7.25}$$

Vztah (7.25) je přibližný, neboť přerušovaná modrá čára tvořená horními základnami pravoúhlých proužků v obrázku 7.10b pouze aproximuje skutečnou křivku $F(x)$.

Aproximaci můžeme zlepšit, zmenšíme-li šířku Δx a zvýšíme tak počet proužků, jako je tomu na obr. 7.10c. V limitě se šířka proužků blíží nulové hodnotě a počet proužků roste do nekonečna. Získáváme tak přesný výsledek

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \overline{F_j(x)}\Delta x. \tag{7.26}$$

Tato limita představuje integrál z funkce $F(x)$ v mezích x_i a x_f. Vztah (7.26) má tedy tvar

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(práce proměnné síly)}. \tag{7.27}$$

Známe-li funkci $F(x)$, dosadíme ji do integrálu (7.27), opatříme jej mezemi a provedeme integraci. Získáme tak hledanou práci W. (V dod. E je uveden soupis nejznámějších integrálů.) Geometricky je práce dána obsahem plochy omezené grafem funkce $F(x)$ a osou x v intervalu s krajními body x_i a x_f (v obr. 7.10 vyznačeno barevně).

Trojrozměrný případ

Uvažujme nyní o částici, na niž působí obecně zadaná síla

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}, \tag{7.28}$$

jejíž složky F_x, F_y, F_z mohou být závislé na poloze částice (jsou funkcemi této polohy). Označme elementární posunutí částice jako

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}z. \tag{7.29}$$

Elementární práce $\mathrm{d}W$, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykoná při posunutí částice o $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, je podle vztahu (7.11) rovna

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z. \tag{7.30}$$

Celková práce W, vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při přesunutí částice z počáteční polohy $\boldsymbol{r}_i$ o souřadnicích (x_i, y_i, z_i) do koncové polohy $\boldsymbol{r}_f$ o souřadnicích (x_f, y_f, z_f), je pak vyjádřena *křivkovým* integrálem

$$W = \int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}W = \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathscr{C}} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z), \tag{7.31}$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po níž se částice pohybuje mezi body o polohových vektorech $\boldsymbol{r}_\mathrm{i}$ a $\boldsymbol{r}_\mathrm{f}$.* Má-li síla $\boldsymbol{F}$ nenulovou pouze x-ovou složku, jsou výrazy obsahující F_y a F_z nulové a vztah (7.31) přejde na tvar (7.27).

Vztah mezi prací proměnné síly a změnou kinetické energie

Vztahem (7.27) je dána práce proměnné síly působící na částici v jednorozměrném případě. Přesvědčíme se, že jedná-li se o výslednici sil, je tato práce podle očekávání rovna změně kinetické energie částice.

Uvažujme o částici s hmotností m, pohybující se po ose x. Na částici působí výsledná síla $F(x)$ směřující podél osy x. Práce vykonaná touto silou při přesunu částice z počáteční polohy x_i do koncové x_f je podle vztahu (7.27) rovna

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} ma\,\mathrm{d}x. \qquad (7.32)$$

Použili jsme druhého Newtonova zákona a nahradili výslednou sílu $F(x)$ součinem ma. Výraz $ma\,\mathrm{d}x$ za integrálem v (7.32) lze přepsat ve tvaru

$$ma\,\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x. \qquad (7.33)$$

Podle pravidla o derivaci složené funkce platí

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v \qquad (7.34)$$

a v rov. (7.33) lze psát

$$ma\,\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v\,\mathrm{d}x = mv\,\mathrm{d}v. \qquad (7.35)$$

Dosazením z rov. (7.35) do (7.32) dostáváme

$$W = \int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} mv\,\mathrm{d}v = m\int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} v\,\mathrm{d}v = \\ = \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 - \tfrac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2. \qquad (7.36)$$

* Praktický výpočet integrálu (7.31), takzvaného **křivkového integrálu druhého typu**, lze snadno provést, známe-li závislost polohového vektoru částice na čase $\boldsymbol{r}(t)$. Pak lze psát $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ a

$$W = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t,$$

kde t_i a t_f představují okamžiky, v nichž se částice nachází v počáteční a koncové poloze.

Uvědomme si, že při záměně proměnné x novou proměnnou v musíme provést i odpovídající záměnu mezí integrálu. Hmotnost m jsme mohli vytknout před integrál proto, že ji považujeme za konstantní.

Ve výsledku na pravé straně (7.36) poznáváme rozdíl kinetických energií částice v koncovém a počátečním pohybovém stavu. Můžeme proto opět psát známý vztah mezi prací a kinetickou energií

$$W = E_{\mathrm{k,f}} - E_{\mathrm{k,i}} = \Delta E_\mathrm{k}.$$

PŘÍKLAD 7.7

Síla $\boldsymbol{F} = (3x\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (4\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$, kde x je dáno v metrech, působí na částici pohybující se v rovině. Počáteční a koncová poloha částice jsou určeny souřadnicemi (2 m, 3 m) a (3 m, 0 m). Jakou práci vykoná síla $\boldsymbol{F}$? Rozhodněte, zda se velikost rychlosti částice zvětší, zmenší, či zůstane beze změny.

ŘEŠENÍ: Užitím vztahu (7.31) dostáváme

$$W = \int_{\mathscr{C}} (3x\,\mathrm{d}x + 4\,\mathrm{d}y) = \int_{\mathscr{C}} 3x\,\mathrm{d}x + \int_{\mathscr{C}} 4\,\mathrm{d}y,$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po které se částice pohybuje. Vzhledem k tomu, že x-ová složka síly $\boldsymbol{F}$ nezávisí na souřadnici y a y-ová složka nezávisí na x, můžeme psát

$$\int_{\mathscr{C}} 3x\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} 3x\,\mathrm{d}x = \int_2^3 3x\,\mathrm{d}x = 3\int_2^3 x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\mathscr{C}} 4\,\mathrm{d}y = \int_{y_\mathrm{i}}^{y_\mathrm{f}} 4\,\mathrm{d}y = \int_3^0 4\,\mathrm{d}y = 4\int_3^0 \mathrm{d}y.$$

Integrály můžeme vyhledat v dod. E. Dostaneme

$$W = 3[\tfrac{1}{2}x^2]_2^3 + 4[y]_3^0 = \tfrac{3}{2}[3^2 - 2^2] + 4[0 - 3] = \\ = -4{,}5\ \mathrm{J} \doteq -5\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

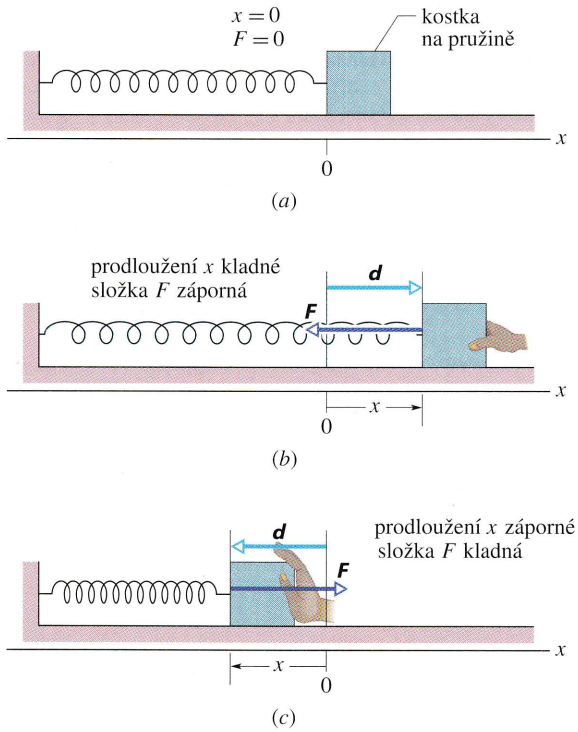
Záporný výsledek ukazuje, že kinetická energie částice, a tedy i velikost její rychlosti, klesne.

7.6 PRÁCE PRUŽNÉ SÍLY

V tomto článku se budeme zabývat výpočtem práce, kterou koná proměnná síla speciálního typu, tzv. **pružná síla**. Jedná se o sílu, jíž na částici působí natažená nebo stlačená pružina. Řada silových zákonů v přírodě má stejný matematický zápis jako zákon pro pružnou sílu. Rozbor tohoto konkrétního případu nám tedy umožní učinit si představu o celé skupině dalších sil s analogickým vyjádřením.

Pružná síla

Pružina na obr. 7.11a je v *nenapjatém stavu*, tj. není protažena ani stlačena. Jeden její konec je upevněn a s druhým, volným koncem je spojen bodový objekt, řekněme malá kostka. Na obr. 7.11b napínáme pružinu tak, že kostku táhneme směrem vpravo. Naopak, podle zákona akce a reakce táhne pružina kostku směrem vlevo „ve snaze" obnovit nenapjatý stav. (Sílu pružiny proto někdy nazýváme *vratnou silou*.) Na obr. 7.11c stlačujeme pružinu tak, že kostku posouváme vlevo. Pružina naopak tlačí kostku vpravo, aby došlo k obnovení nenapjatého stavu.



Obr. 7.11 (a) Pružina v nenapjatém stavu. Počátek osy x je zvolen v poloze volného konce nenapjaté pružiny. K volnému konci je připojena malá kostka. (b) Kostka se posune o vektor $\boldsymbol{d}$ a pružina se prodlouží o délku x. Všimněte si vyznačeného směru vratné síly $\boldsymbol{F}$, jíž působí pružina na kostku. (c) Pružina je stlačena o délku x. Opět si všimněte vyznačené vratné síly.

V celé řadě praktických případů je vratná síla pružiny $\boldsymbol{F}$ v dobrém přiblížení úměrná jejímu prodloužení, tj. posunutí $\boldsymbol{d}$ volného konce pružiny vůči jeho poloze v nenapjatém stavu. *Síla pružiny* je tedy dána vztahem

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{d} \qquad \text{(Hookův zákon)}, \qquad (7.37)$$

známým pod názvem **Hookův zákon** (anglický vědec Robert Hooke patří k nejznámějším fyzikům druhé poloviny 17. století). Znaménko minus ve vztahu (7.37) upozorňuje, že síla pružiny má vždy opačný směr než posunutí jejího volného konce.

Konstanta k se nazývá **tuhostí pružiny** a je skutečně mírou toho, jak je pružina „tuhá". Větší hodnota k znamená tužší pružinu, tj. větší pružnou sílu při daném prodloužení. Jednotkou tuhosti v soustavě SI je newton na metr ($\mathrm{N \cdot m^{-1}}$).

Osa x na obr. 7.11 je zvolena rovnoběžně s pružinou, její počátek ($x = 0$) splývá s polohou volného konce pružiny v nenapjatém stavu. Pro toto běžné uspořádání má vztah (7.37) tvar

$$F = -kx \qquad \text{(Hookův zákon)}. \qquad (7.38)$$

Symbolem F je v předchozím vztahu označena x-ová složka síly $\boldsymbol{F}$, zbývající složky jsou trvale nulové. Všimněte si, že pružná síla je proměnná, závisí na poloze volného konce pružiny. Podobně jako v čl. 7.5 lze psát $F = F(x)$. Uvědomte si také, že Hookův zákon představuje lineární závislost veličiny F na proměnné x.

Práce pružné síly

V dalších úvahách zanedbáme tření mezi kostkou a podložkou a budeme předpokládat, že pružina má ve srovnání s kostkou zanedbatelnou hmotnost (*nehmotná* pružina) a řídí se přesně Hookovým zákonem (*ideální* pružina). Představme si, že jsme do kostky prudce udeřili směrem vpravo a udělili jí tak jistou kinetickou energii. Kostka se začne pohybovat směrem vpravo. Pružná síla $\boldsymbol{F}$ její pohyb zpomaluje a kinetická energie kostky klesá. Experimentálně lze ověřit, že při splnění předpokladů o vlastnostech pružiny a podložky je změna kinetické energie kostky určena výhradně prací pružné síly $\boldsymbol{F}$. K výpočtu této práce musíme ovšem použít vztahu (7.27), neboť pružná síla je proměnná a řídí se silovým zákonem (7.38). Přesune-li se kostka z polohy x_i do polohy x_f, vykoná pružná síla práci

$$W_\mathrm{p} = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} (-kx)\,\mathrm{d}x = -k\int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} x\,\mathrm{d}x =$$
$$= (-\tfrac{1}{2}k)[x^2]_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} = (-\tfrac{1}{2}k)(x_\mathrm{f}^2 - x_\mathrm{i}^2), \qquad (7.39)$$

tj.

$$W_\mathrm{p} = \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{i}^2 - \tfrac{1}{2}kx_\mathrm{f}^2 \qquad \text{(práce pružné síly)}. \qquad (7.40)$$

Práce W_p pružné síly může být jak kladná, tak záporná a souvisí s celkovou změnou kinetické energie kostky při

jejím přemístění z polohy x_i do polohy x_f. Pro $x_i = 0$ obvykle značíme $x_f = x$. Ze vztahu (7.40) pak plyne

$$W_p = -\tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(práce pružné síly).} \qquad (7.41)$$

V dalším myšleném experimentu si představme, že posouváme kostku podél osy x a přitom na ni stále působíme silou $\boldsymbol{F}_a$. Síla $\boldsymbol{F}_a$ koná práci W_a a pružná síla práci W_p. Podle (7.15) je změna kinetické energie kostky dána prací obou těchto sil, tj.

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_a + W_p, \qquad (7.42)$$

kde $E_{k,f}$ a $E_{k,i}$ značí kinetickou energii na konci a na počátku posunutí. Je-li rychlost kostky na počátku i na konci posunutí nulová, jsou hodnoty $E_{k,f}$ i $E_{k,i}$ nulové a vztah (7.42) se zjednoduší na tvar

$$W_a + W_p = 0,$$

tj.

$$W_a = -W_p. \qquad (7.43)$$

Tento výsledek znamená, že práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}_a$ je rovna záporně vzaté práci pružné síly.

Všimněte si, že délka pružiny přímo nevystupuje ani ve vyjádření pružné síly ((7.37) a (7.38)), ani ve vztazích pro její práci ((7.40) a (7.41)). Je však jedním z faktorů, které určují tuhost pružiny k a v uvedených vztazích je tedy obsažena „skrytě“, implicitně.

PŘÍKLAD 7.8

Abychom pružinu na obr. 7.11b udrželi protaženou o 12 mm, musíme na kostku, uchycenou na jejím volném konci, působit silou $\boldsymbol{F}_a$ o velikosti 4,9 N.

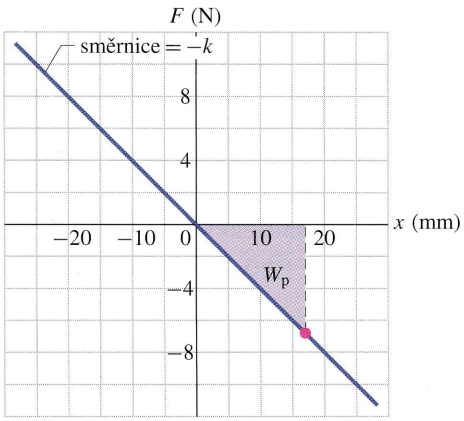
(a) Jaká je tuhost pružiny?

ŘEŠENÍ: Protažená pružina působí na kostku silou $F = -4{,}9\,\text{N}$. Pro hodnotu $x = 12\,\text{mm}$ dostaneme ze vztahu (7.38)

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{(-4{,}9\,\text{N})}{(12{\cdot}10^{-3}\,\text{m})} = 408\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1} \doteq 410\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Znovu si uvědomte, že k určení tuhosti k není třeba znát délku pružiny. Grafické znázornění závislosti (7.38) pro tuto pružinu je na obr. 7.12. Grafem je přímka se směrnicí $-410\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$.

(b) Jakou silou bude působit pružina na kostku, jestliže ji protáhneme o 17 mm?



Obr. 7.12 Graf závislosti pružné síly na prodloužení pružiny v jednorozměrném případě (příklad 7.8). Pružina vyhovuje Hookovu zákonu (vztahy (7.37) a (7.38)). Její tuhost je $k = 410\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$. Význam červeně vyznačeného bodu grafu a vybarvené plochy je objasněn v příkladu 7.8 (b, c).

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (7.38) plyne

$$F = -kx = -(408\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1})(17{\cdot}10^{-3}\,\text{m}) = -6{,}9\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Bod vyznačený v grafu na obr. 7.12 odpovídá vypočtené síle a příslušnému posunutí x. Všimněte si, že posunutí x je kladné, zatímco hodnota F je záporná, právě tak, jak to vyžaduje vztah (7.38).

(c) Jakou práci vykoná pružná síla při protažení pružiny z nenapjatého stavu o 17 mm (úloha (b))?

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že pružina byla zpočátku v nenapjatém stavu, použijeme vztahu (7.41):

$$W_p = -\tfrac{1}{2}kx^2 = -\tfrac{1}{2}(408\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1})(17{\cdot}10^{-3}\,\text{m})^2 = -5{,}9{\cdot}10^{-2}\,\text{J} = -59\,\text{mJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Barevně vyznačená plocha v obr. 7.12 představuje velikost vypočtené práce. Tato práce je záporná, neboť pružná síla a posunutí kostky mají v dané úloze opačný směr. Kdybychom pružinu místo protažení o 17 mm o stejnou délku stlačili, byla by práce vykonaná pružnou silou stejná.

(d) Pružinu stlačenou o 17 mm uvolňujeme, až se kostka vrátí do polohy $x = 0$ (obnoví se nenapjatý stav pružiny). Poté pružinu stlačíme o 12 mm. Jakou práci vykonala pružná síla při celkovém posunutí kostky?

ŘEŠENÍ: V popsaném případě platí: $x_i = +17\,\text{mm}$ (v počátečním stavu je pružina napjatá) a $x_f = -12\,\text{mm}$ (v koncovém stavu je pružina stlačená). Ze vztahu (7.40) dostáváme

$$W_s = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 = \tfrac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2) = \tfrac{1}{2}(408\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1})[(17{\cdot}10^{-3}\,\text{m})^2 - (-12{\cdot}10^{-3}\,\text{m})^2] = 0{,}030\,\text{J} = 30\,\text{mJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celková práce vykonaná pružnou silou je kladná. Kladná práce při posunutí kostky z polohy $x_i = +17\,\text{mm}$ do polohy $x = 0$ byla větší než absolutní hodnota záporné práce vykonané při posunutí kostky z polohy $x = 0$ do polohy $x_f = -12\,\text{mm}$.

KONTROLA 4: Pro soustavu pružina + kostka znázorněnou na obr. 7.11 uvažujte o třech situacích s různými počátečními a koncovými polohami kostky (x_i, x_f) a v každé z nich rozhodněte, zda je práce pružné síly kladná, záporná, nebo nulová: (a) $(-3\,\text{cm}, 2\,\text{cm})$, (b) $(2\,\text{cm}, 3\,\text{cm})$, (c) $(-2\,\text{cm}, 2\,\text{cm})$.

PŘÍKLAD 7.9

Kostka o hmotnosti 5,7 kg klouže po vodorovném dokonale hladkém stole konstantní rychlostí o velikosti $1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Narazí na volný konec pružiny (obr. 7.13) a stlačuje ji. V určitém okamžiku je rychlost kostky nulová. Vypočtěte délku d, o kterou je pružina v tomto okamžiku stlačena. Tuhost pružiny je $k = 1\,500\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (7.41) je práce vykonaná silou, jíž *působí pružina* na kostku, při stlačení pružiny o d rovna

$$W_p = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

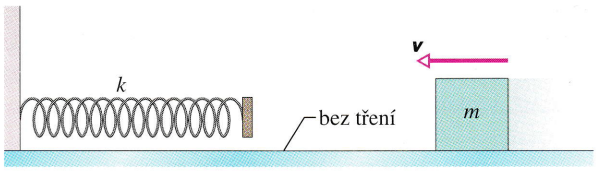
Změna kinetické energie kostky od okamžiku jejího nárazu na pružinu do okamžiku, kdy je její rychlost nulová, je

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Podle vztahu (7.4) mezi prací a kinetickou energií jsou si tyto veličiny rovny. Jejich porovnáním a řešením získané rovnice vzhledem k neznámé d dostaneme:

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\sqrt{\frac{(5{,}7\,\text{kg})}{(1\,500\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1})}} =$$

$$= 7{,}4\cdot10^{-2}\,\text{m} = 7{,}4\,\text{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 7.13 Příklad 7.9. Kostka se pohybuje směrem k pružině rychlostí $\boldsymbol{v}$, narazí na ni a stlačuje ji. V okamžiku, kdy je rychlost kostky nulová, je pružina stlačena o délku d.

RADY A NÁMĚTY

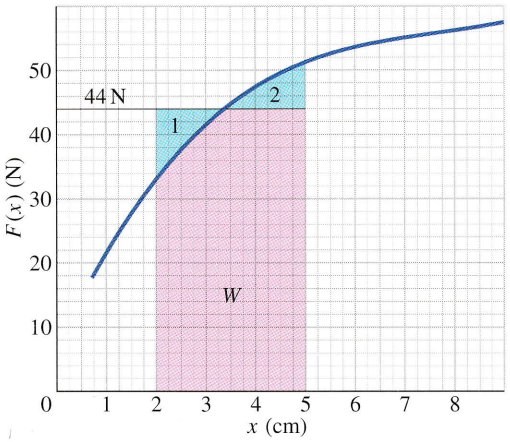
Bod 7.1: *Derivace a integrál, směrnice a plochy*

Pro zadanou funkci $y = F(x)$ umíme vypočítat hodnotu její derivace v libovolném bodě x i hodnotu jejího určitého integrálu v daných mezích proměnné x. Není-li funkce zadána analyticky (vzorcem), nýbrž grafem, lze zjišťovat hodnoty derivace i určitého integrálu graficky. Způsob grafického určení derivace byl vyložen v bodě 2.5. Proto si nyní všimneme jen grafické metody nalezení hodnoty určitého integrálu.

Na obr. 7.14 je znázorněn graf jisté funkce $F(x)$. Řekněme, že tato funkce představuje závislost x-ové složky síly, která působí na částici pohybující se po ose x, na (x-ové) souřadnici částice. Zaměříme se na grafické určení práce, kterou síla vykoná při posunutí částice z počáteční polohy $x_i = 2{,}0\,\text{cm}$ do koncové polohy $x_f = 5{,}0\,\text{cm}$. Podle vztahu (7.27) lze tuto práci vyjádřit integrálem

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx,$$

jehož hodnota je rovna obsahu vybarvené plochy ležící pod křivkou grafu a mezi zadanými krajními polohami x_i a x_f.



Obr. 7.14 Graf síly $F(x)$ v jednorozměrném případě. Vybarvená plocha pod křivkou (její obsah představuje práci síly F) je nahrazena obdélníkem vytvořeným vyjmutím plochy 2 a přidáním plochy 1, jejichž obsahy jsou přibližně shodné.

Tuto plochu lze přibližně nahradit obdélníkem, který vznikne doplněním obrázku o vodorovnou přímku, vedenou v takové poloze, aby obsahy plošek označených „1“ a „2“ byly shodné. Vyslovenému požadavku celkem dobře vyhovuje hodnota $F = 44\,\text{N}$. Odpovídající vodorovná přímka je v obr. 7.14 rovněž vyznačena. Obsah „náhradního“ obdélníka ($= W$) je

$$W = \text{výška} \cdot \text{základna} = (44\,\text{N})(5{,}0\,\text{cm} - 2{,}0\,\text{cm}) =$$

$$= 132\,\text{N}\cdot\text{cm} \doteq 1{,}3\,\text{N}\cdot\text{m} = 1{,}3\,\text{J}.$$

Obsah plochy představující práci W můžeme určit také tak, že spočítáme všechny čtverečky, které leží pod křivkou grafu

ve vybarvené části plochy. Je jich asi 260 a každý z nich představuje (2 N)(0,25 cm) = 0,5 N·cm. Práce W má tedy hodnotu

$$W = (260\,\text{čtverečků})\left(\frac{0{,}5\,\text{N·cm}}{1\,\text{čtvereček}}\right) = 130\,\text{N·cm} = 1{,}3\,\text{J},$$

stejně jako při výpočtu obsahu obdélníka z délek jeho stran. *Pamatujte*: V dvojrozměrném grafickém znázornění funkce jedné proměnné je derivace určena směrnicí grafu a integrál obsahem plochy pod křivkou grafu.

7.7 VÝKON

Na stavbě je třeba zvedat balíky cihel z chodníku na střechu budovy. Na staveništi je k dispozici naviják. Není obtížné spočítat práci, kterou musí při každém vyzvednutí nákladu vykonat síla působící na naviják. Je zde však ještě jeden problém: majiteli stavební firmy jde také o to, jak *rychle* bude tato práce vykonána. Za přijatelnou považuje dobu nejvýše 5 minut. Stihne se to?

Mírou toho, jak „rychle" koná určitá síla práci, je **výkon**. Vykoná-li síla $\boldsymbol{F}$ práci ΔW za dobu Δt, je její **průměrný výkon** v daném časovém intervalu definován poměrem

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \text{(průměrný výkon)}. \qquad (7.44)$$

Okamžitý výkon P odpovídá „okamžité rychlosti" konání práce a je tedy limitním případem průměrného výkonu pro $\Delta t \to 0$:

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad \text{(okamžitý výkon)}. \qquad (7.45)$$

Jednotka výkonu v soustavě SI je joule za sekundu. Tato jednotka se užívá tak často, že dostala samostatný název. Nazývá se **watt** (W) podle Jamese Watta, jenž se v historii zasloužil o velmi výrazné zdokonalení činnosti parních strojů. V britském systému je jednotkou výkonu stopa·libra za sekundu. Někdy se užívá i jednotky zvané koňská síla. Některé vztahy mezi jednotkami výkonu:

$$1\,\text{watt} = 1\,\text{W} = 1\,\text{J·s}^{-1} = 0{,}738\,\text{ft·lb·s}^{-1} \qquad (7.46)$$

a

$$\text{koňská síla} = 1\,\text{HP} = 550\,\text{ft·lb·s}^{-1} = 746\,\text{W}. \qquad (7.47)$$

Ze vztahu (7.44) vidíme, že práci lze vyjádřit jako součin výkonu a času a získat tak její běžně užívanou praktickou jednotku, kilowatthodinu. Platí

$$1\,\text{kilowatthodina} = 1\,\text{kW·h} = (10^3\,\text{W})(3\,600\,\text{s}) = 3{,}60\cdot10^6\,\text{J} = 3{,}6\,\text{MJ}. \qquad (7.48)$$

Někdo si možná při vyslovení slov watt nebo kilowatthodina vybaví spíše elektrické jednotky. Jedná se však o jednotku výkonu a jednotku energie, používané naprosto obecně. Kdybychom třeba učebnici, kterou právě držíme v ruce, zvedli z podlahy a položili ji na stůl, mohli bychom vykonanou práci klidně zapsat údajem $4\cdot10^{-6}$ kW·h (nebo lépe 4 mW·h).

Výkon můžeme také vyjádřit pomocí síly, která působí na částici a koná tak práci, a rychlosti částice. Předpokládejme, že se částice pohybuje po ose x a působí na ni síla $\boldsymbol{F}$, která s osou x svírá úhel φ. Ze vztahu (7.45) dostáváme

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cos\varphi\,dx}{dt} = F\cos\varphi\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

tj.

$$P = Fv\cos\varphi. \qquad (7.49)$$

Po úpravě pravé strany rovnosti (7.49) do tvaru skalárního součinu $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$ můžeme psát

$$P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \qquad \text{(okamžitý výkon)}. \qquad (7.50)$$

Dejme tomu, že tahač na obr. 7.15 působí na naložený přívěs silou $\boldsymbol{F}$. Rychlost přívěsu v daném okamžiku je $\boldsymbol{v}$. Okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F}$, vyjádřený vztahy (7.49) a (7.50), udává, jak



Obr. 7.15 Výkon síly, jíž působí tahač na přívěs s nákladem, je „rychlost", s jakou tato síla koná práci.

„rychle" koná síla $\boldsymbol{F}$ práci právě v tomto okamžiku. Za přijatelné lze považovat i to, budeme-li místo o výkonu síly hovořit o „výkonu tahače". Musíme však mít stále na mysli, o co skutečně jde: výkon je „rychlost", s jakou síla koná práci.

PŘÍKLAD 7.10

V obr. 7.16 jsou vyznačeny síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působící na krabici, která klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze směrem vpravo. Síla $\boldsymbol{F}_1$ je vodorovná a má velikost 2,0 N, síla $\boldsymbol{F}_2$ je od podlahy odkloněna o 60° a její velikost je 4,0 N. Rychlost krabice má v určitém okamžiku velikost $v = 3{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

(a) Jaký je výkon každé z obou sil v tomto okamžiku? Jaký je jejich celkový výkon? Interpretujte získanou hodnotu celkového okamžitého výkonu.

ŘEŠENÍ: Výkon jednotlivých sil zjistíme pomocí vztahu (7.49). Síla $\boldsymbol{F}_1$ svírá s rychlostí $\boldsymbol{v}$ úhel $\varphi_1 = 180°$, takže je

$$P_1 = F_1 v \cos\varphi_1 = (2{,}0\ \mathrm{N})(3{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \cos 180° = \\ = -6{,}0\ \mathrm{J{\cdot}s^{-1}} = -6{,}0\ \mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek ukazuje, že síla $\boldsymbol{F}_1$ *spotřebovává* práci „s rychlostí" 6,0 joulů za sekundu neboli s výkonem 6,0 W. Úhel mezi silou $\boldsymbol{F}_2$ a rychlostí $\boldsymbol{v}$ je $\varphi_2 = 60°$. Platí tedy

$$P_2 = F_2 v \cos\varphi_2 = (4{,}0\ \mathrm{N})(3{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \cos 60° = \\ = 6{,}0\ \mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z výsledku plyne, že síla $\boldsymbol{F}_2$ *koná* (kladnou) práci s výkonem 6,0 W.

Celkový výkon je součtem obou získaných hodnot:

$$P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2 = -6{,}0\ \mathrm{W} + 6{,}0\ \mathrm{W} = 0. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celkový okamžitý výkon sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je v daném okamžiku t nulový. To znamená, že elementární práce $\mathrm{d}W$ vykonaná oběma silami společně v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ od okamžiku t do okamžiku $t+\mathrm{d}t$ je nulová. Výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ nepřispívá v daném okamžiku ke změně kinetické energie krabice. Ze skutečnosti, že hodnota $P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2$ je *v daném okamžiku* nulová, nelze činit žádné další závěry. Soustřeďme se však na zadání úlohy pozorněji. Kromě zadaných sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působí na krabici samozřejmě ještě tíhová síla $\boldsymbol{G}$ a tlaková síla podlahy $\boldsymbol{N}$. Ty jsou trvale kolmé k posunutí krabice, a proto nekonají práci. Ke změně kinetické energie krabice tedy přispívá jen práce sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$.

Výsledná síla působící na krabici je

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N}.$$

Zvolme soustavu souřadnic tak, že osa x je vodorovná a míří vpravo a osa y směřuje svisle vzhůru. Pro složky výsledné síly dostaneme

$$\sum F_x = F_1 \cos\varphi_1 + F_2 \cos\varphi_2 = \\ = (2{,}0\ \mathrm{N}) \cos 180° + (4{,}0\ \mathrm{N}) \cos 60° = \\ = (-2{,}0 + 4{,}0 \cdot 0{,}5)\ \mathrm{N} = 0,$$

$$\sum F_y = F_2 \sin\varphi_2 - mg + N = \\ = (4{,}0\ \mathrm{N}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - mg + N.$$

Z rovnice pro x-ovou složku plyne $a_x = 0$. Vzhledem k tomu, že je pohyb krabice vázán na vodorovnou podlahu, platí také $a_y = 0$ (vazební podmínka). Z rovnice pro y-ovou složku výsledné síly lze pak díky vazební podmínce určit tlakovou sílu podložky

$$N = mg - (4{,}0\ \mathrm{N}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Celkově je $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Rychlost krabice $\boldsymbol{v}$ je tedy konstantní, stejně jako její kinetická energie. Celkový výkon P_{celk} sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ je tedy nulový trvale, nejen v jediném okamžiku zmiňovaném v zadání úlohy.

(b) Řešte úlohu (a) znovu za předpokladu, že velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ je 6,0 N.

ŘEŠENÍ: Pro výkon síly $\boldsymbol{F}_2$ nyní dostáváme

$$P_2 = F_2 v \cos\varphi_2 = (6{,}0\ \mathrm{N})(3{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \cos 60° = \\ = 9{,}0\ \mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

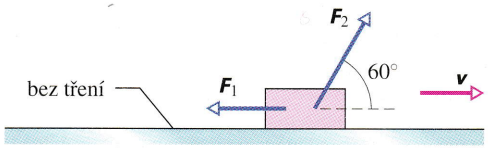
Výkon síly $\boldsymbol{F}_1$ jsme určili už v úloze (a) a jeho hodnota je

$$P_1 = -6{,}0\ \mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Celkový výkon je tedy

$$P_{\mathrm{celk}} = P_1 + P_2 = -6{,}0\ \mathrm{W} + 9{,}0\ \mathrm{W} = \\ = 3{,}0\ \mathrm{W}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladná hodnota celkového výkonu znamená, že kinetická energie i velikost rychlosti krabice v daném okamžiku rostou. Ze vztahu (7.50) a ze skutečnosti, že síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ jsou konstantní, plyne, že v daném okamžiku roste i jejich celkový okamžitý výkon P_{celk}. Ten nabývá vypočtené hodnoty 3,0 W právě jen v okamžiku, kdy je velikost rychlosti krabice rovna $3{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



Obr. 7.16 Příklad 7.10. Síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působí na krabici, která klouže směrem vpravo po dokonale hladké podlaze. Rychlost krabice je $\boldsymbol{v}$.

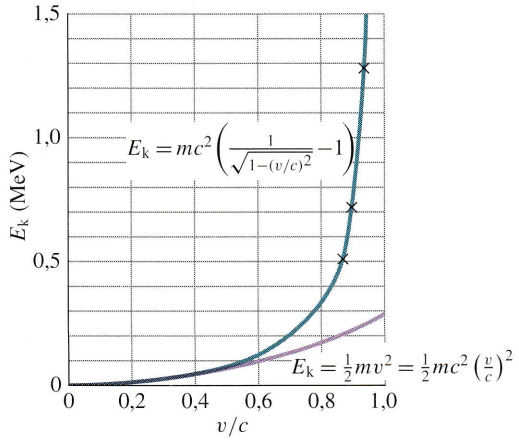
KONTROLA 5: Kostka je uvázána na provaze a pohybuje se rovnoměrně po kružnici, v jejímž středu je druhý konec provazu upevněn. Rozhodněte, zda je výkon tahové síly provazu kladný, záporný, nebo nulový.

7.8 KINETICKÁ ENERGIE PŘI VYSOKÝCH RYCHLOSTECH

V čl. 4.10 jsme se dověděli, že pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla newtonovská mechanika selhává a musí být nahrazena Einsteinovou speciální teorií relativity. Jedním z důsledků této skutečnosti je, že již nemůžeme vyjadřovat kinetickou energii ve tvaru $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Musíme použít relativistického vztahu

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right), \qquad (7.51)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu.



Obr. 7.17 Graf relativistického a klasického vyjádření kinetické energie elektronu (viz (7.51), resp. (7.1)) v závislosti na podílu v/c, kde v je velikost rychlosti elektronu a c je rychlost světla ve vakuu. Všimněte si, že tyto dvě křivky při nízkých rychlostech splývají. Při zvyšující se rychlosti v se však jejich odchylka výrazně zvětšuje. Experimentální body (označené křížkem ×) dokumentují souhlas relativistické křivky s experimentem při vysokých rychlostech. Od nerelativistické křivky se experimentální hodnoty výrazně odchylují.

Obr. 7.17 ukazuje, že tyto dvě formule, které jsou zcela odlišné již na první pohled, dávají skutečně při vysokých rychlostech výrazně různé výsledky. Experiment potvrzuje mimo veškerou pochybnost, že relativistický výraz (7.51) je správný na rozdíl od výrazu klasického (7.1). Při nízkých rychlostech však výsledky obou vzorců prakticky splývají. Speciálně pro $v = 0$ dávají oba vztahy nulovou hodnotu kinetické energie.

Všechny relativistické formule musí při nízkých rychlostech přejít na odpovídající klasický tvar. Ukážeme si to na příkladu vztahu (7.51), který pro snažší porovnání se vztahem (7.1) ještě upravíme:

$$E_k = mc^2\left[(1-\beta^2)^{-1/2} - 1\right]. \qquad (7.52)$$

Pro zjednodušení jsme místo podílu v/c použili bezrozměrového parametru β.

Při velmi malých rychlostech je $v \ll c$, odkud $\beta \ll 1$. Funkci $(1-\beta^2)^{-1/2}$ tedy můžeme rozvinout pomocí binomické věty (bod 7.2) a dostaneme

$$(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \ldots, \qquad (7.53)$$

Dosazení rozvoje (7.53) do (7.52) vede k výsledku

$$E_k = mc^2\left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \ldots\right) - 1\right]. \qquad (7.54)$$

Pro velmi malé hodnoty β rychle klesá velikost členů zastoupených tečkami. Součet v kulaté závorce tedy můžeme s jistou malou chybou nahradit prvními dvěma členy a psát

$$E_k \approx mc^2\left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2\right) - 1\right],$$

nebo, při zpětném dosazení $\beta = \frac{v}{c}$,

$$E_k \approx mc^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2\right) = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Tento výsledek potvrzuje naše očekávání.

RADY A NÁMĚTY

Bod 7.2: *Aproximace pomocí binomické věty*

Často potřebujeme najít přibližnou hodnotu veličiny $(a+b)^n$ za předpokladu, že $b \ll a$. Nejjednodušší je vyjádřit tento výraz ve tvaru konst$\cdot(1+x)^n$, kde x je bezrozměrová veličina mnohem menší než jednička. Můžeme psát

$$(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = (a^n)(1+x)^n,$$

kde $(1+x)^n$ je potřebný výraz s bezrozměrovou proměnnou $x = \frac{b}{a}$. Mocninu $(1+x)^n$ můžeme rozepsat pomocí binomické věty s tím, že vezmeme v úvahu jen tolik členů, kolik je při dané přesnosti úlohy třeba. (Takové rozhodování ovšem vyžaduje jistou zkušenost.)

Binomická věta, uvedená v dod. E, má tvar

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots. \qquad (7.55)$$

Vykřičníky ve vztahu (7.55) představují faktoriály, tj. postupné násobení celých čísel vzniklých z dané hodnoty n odečítáním jednotky. Například $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Výpočet faktoriálů můžete pravděpodobně provádět i na své kalkulačce.

V předchozím textu jsme použili binomického rozvoje v rov. (7.53) pro $x = -\beta^2$ a $n = -\frac{1}{2}$.

Pro procvičení vypočtěte hodnotu $(1+0{,}045)^{-2{,}3}$ jak na kalkulačce, tak použitím rozvoje (7.55), v němž dosadíte $x = 0{,}045$ a $n = -2{,}3$. Vypočtěte si různé členy rozvoje, abyste se přesvědčili o jejich rychlém poklesu.

7.9 VZTAŽNÉ SOUSTAVY

Připomeňme, že Newtonovy zákony platí v inerciálních vztažných soustavách. Tyto preferované vztažné soustavy jsou spojeny s volnými částicemi a navzájem se pohybují rovnoměrně přímočaře.

V případě některých fyzikálních veličin naměří pozorovatelé v různých inerciálních vztažných soustavách tytéž hodnoty. V newtonovské mechanice jsou těmito *invariantními* veličinami síla, hmotnost, zrychlení, čas. Jestliže například jeden z pozorovatelů v inerciální vztažné soustavě zjistí, že hmotnost určité částice je 3,15 kg, je jisté, že pozorovatelé ve všech ostatních inerciálních soustavách naměří stejnou hodnotu. Jiné fyzikální veličiny, například posunutí částice nebo její rychlost, nabývají pro pozorovatele v různých inerciálních vztažných soustavách různých hodnot. Tyto veličiny *nejsou* invariantní.

Jestliže tedy posunutí částice závisí na volbě vztažné soustavy, bude na ní závislá i práce sil, které na částici působí, neboť práce ($W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d}$) je pomocí posunutí definována. Uvažujme například o částici, která se pohybuje podél společného směru osy x tří různých vztažných soustav. Dejme tomu, že její posunutí je v jedné vztažné soustavě $+2{,}47$ m, v jiné je nulové a v další třeba $-3{,}64$ m. Předpokládejme, že na částici působí ve směru jejího pohybu síla $\boldsymbol{F}$. Protože je síla $\boldsymbol{F}$ ve všech třech soustavách stejná (je invariantní), je zřejmé, že její práce měřená pozorovatelem v první soustavě je kladná, v druhé nulová a ve třetí záporná. Co můžeme usoudit o kinetické energii částice? Protože rychlost částice závisí na volbě vztažné soustavy, bude na ní záviset i kinetická energie ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$), která je pomocí rychlosti definována. Znamená to snad, že vztah mezi prací a kinetickou energií je chybný?

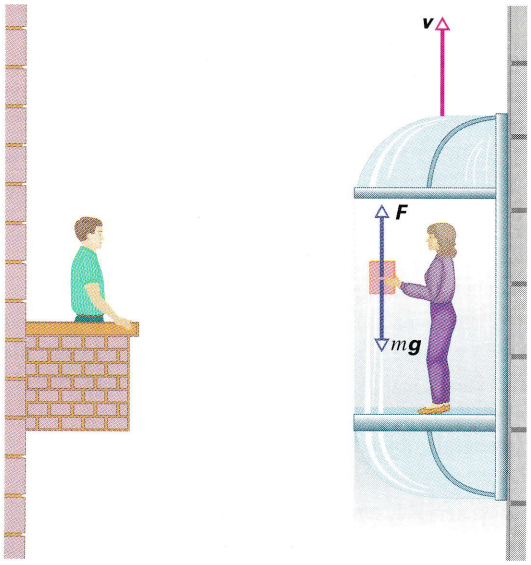
V průběhu doby, která uplynula od Galileiových experimentů až po Einsteinovy objevy, dospěli fyzikové k přesvědčení, že platí tzv. **princip invariance**:

> Fyzikální zákony musí mít stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

Některé *fyzikální veličiny* nabývají sice v různých vztažných soustavách různých hodnot, avšak volba vztažné soustavy nemůže ovlivnit platnost *fyzikálních zákonů*. Intuitivně cítíme, že v tomto formálním tvrzení o invarianci je skryta skutečnost, že dva různí pozorovatelé, kteří budou studovat tutéž událost, musí dojít k závěru, že příroda funguje pro oba naprosto stejně.

Mezi zákony, kterých se princip invariance týká, patří i vztah mezi prací a kinetickou energií. Přestože se hodnoty práce naměřené různými pozorovateli budou lišit, stejně jako hodnoty kinetické energie, budou pozorovatelé zjišťovat, že vztah mezi prací a kinetickou energií platí ve vztažné soustavě každého z nich. Zaměřme se na jednoduchý příklad.

Na obr. 7.18 sledujeme Soňu, jak stoupá v kabině výtahu vzhůru stálou rychlostí a v ruce drží knihu. Štěpán stojí na balkoně a pozoruje, že kabina stoupla do výšky h. Posuďte platnost vztahu mezi prací a kinetickou energií z hlediska obou pozorovatelů, kteří sledují pohyb knihy.



Obr. 7.18 Soňa jede ve výtahu vzhůru a drží knihu. Štěpán ji pozoruje. Každý z nich sleduje ve své vztažné soustavě pohyb knihy a zkoumá platnost vztahu mezi prací a kinetickou energií.

1. *Sonin komentář.* „Mou vztažnou soustavou je kabina výtahu. Na knihu působí moje ruka silou, která směřuje svisle vzhůru. Tato síla však nekoná práci, protože kniha je v mé vztažné soustavě v klidu. Ze stejného důvodu nekoná práci ani tíhová síla, jíž působí na knihu Země. Celková práce všech sil působících na knihu je tedy nulová. V souhlasu se vztahem mezi prací a kinetickou energií se kinetická energie knihy nemění. To je přesně to, co pozoruji: kinetická energie knihy je v mé vztažné soustavě nulová a zachovává se. Všechno je tedy v pořádku."

2. *Štěpánův komentář.* „Mou vztažnou soustavou je balkon. Vidím, že Soňa působí na knihu silou $\boldsymbol{F}$. Vzhledem k mé vztažné soustavě se působiště této síly pohybuje a práce, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykoná při zvednutí knihy do výšky h, je Fh. Protože se kniha pohybuje rovnoměrně přímočaře, musí síla $\boldsymbol{F}$ kompenzovat sílu tíhovou, takže platí $Fh = +mgh$. Vím také, že i tíhová síla, působící na knihu, koná práci. Její hodnota je $-mgh$. Celková práce, kterou vykonají síly

působící na knihu při jejím posunutí do výšky h, je nulová. Ve shodě se vztahem mezi prací a kinetickou energií je kinetická energie knihy neměnná. A právě to pozoruji. V mé vztažné soustavě je kinetická energie knihy konstantní a má hodnotu $\frac{1}{2}mv^2$. Všechno souhlasí."

I když Soňa a Štěpán nezaznamenají shodné výsledky při měření posunutí knihy či její kinetické energie, každý z nich dospívá k závěru, že v jeho vztažné soustavě platí rovnost mezi prací všech sil působících na knihu a změnou její kinetické energie.

Není podstatné, jakou (inerciální) vztažnou soustavu si zvolíme pro řešení úlohy, jestliže (1) si dobře uvědomíme a zapamatujeme, jakou konkrétní soustavu jsme si zvolili, a (2) při řešení úlohy používáme stále tutéž vztažnou soustavu.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Kinetická energie

Kinetická energie E_k částice o hmotnosti m, která se pohybuje velmi malou rychlostí $\boldsymbol{v}$ ve srovnání s rychlostí světla, je

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(kinetická energie).} \qquad (7.1)$$

Práce

Práce W každé ze sil působících na daný objekt přispívá ke změně jeho energie. Je-li práce vykonaná určitou silou kladná (síla práci *koná*), je odpovídající příspěvek ke změně energie objektu *přírůstkem*, je-li záporná (síla práci *spotřebovává*), dochází k *úbytku* energie objektu.

Práce a kinetická energie

Jsou-li podmínky při působení síly na daný objekt takové, že se může měnit pouze jeho kinetická energie, můžeme tuto změnu ΔE_k vyjádřit vztahem

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W \qquad \text{(vztah mezi prací a kinetickou energií),} \qquad (7.4)$$

kde $E_{k,i}$ je počáteční kinetická energie objektu a $E_{k,f}$ je jeho kinetická energie poté, co síla vykonala práci W. Rovnost (7.4) je vhodné přepsat do tvaru

$$E_{k,f} = E_{k,i} + W. \qquad (7.5)$$

Práce konstantní síly

Práce, kterou vykoná konstantní síla $\boldsymbol{F}$ působící na částici při jejím posunutí $\boldsymbol{d}$, je

$$W = Fd\cos\varphi = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d} \qquad \text{(práce konstantní síly),} \qquad (7.9, 7.11)$$

kde φ je konstantní úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$. Působí-li na částici více sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ..., jejichž výslednice je konstantní, je jejich výsledná práce

$$W = \left(\sum_j \boldsymbol{F}_j\right)\cdot\boldsymbol{d} \qquad \text{(práce konstantní výslednice sil).} \qquad (7.13)$$

Tato práce je rovna součtu prací vykonaných jednotlivými silami. Jsou-li tyto síly rovněž konstantní, platí

$$W = \boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_3\cdot\boldsymbol{d} + \ldots = \\ = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \qquad \text{(celková práce).} \qquad (7.14)$$

Dosazením výrazu pro celkovou práci do vztahu mezi prací a kinetickou energií můžeme vyjádřit změnu kinetické energie částice jako celkovou práci všech sil, které na částici působí:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots. \qquad (7.15)$$

Práce tíhové síly

Tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, působící na částici o hmotnosti m, vykoná při posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$ práci

$$W_g = mgd\cos\varphi, \qquad (7.16)$$

kde φ je úhel mezi tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$ a vektorem posunutí $\boldsymbol{d}$.

Práce při vzestupu a poklesu tělesa

Působí-li na částici v blízkosti povrchu Země kromě tíhové síly ještě další síla $\boldsymbol{F}_a$ (či síly o výslednici $\boldsymbol{F}_a$), určuje celková práce těchto sil W_a spolu s prací síly tíhové W_g změnu kinetické energie částice

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_a + W_g. \qquad (7.19)$$

Změní-li se výška částice nad povrchem Země beze změny její kinetické energie, zjednoduší se vztah (7.19) takto:

$$W_a = -W_g. \qquad (7.20)$$

Práce síly $\boldsymbol{F}_a$ a práce tíhové síly se tedy v takovém případě liší pouze znaménkem. Přírůstek kinetické energie částice daný působením síly $\boldsymbol{F}_a$ je roven úbytku, který způsobila síla tíhová.

Práce proměnné síly

Síla $\boldsymbol{F}$, která působí na částici při jejím pohybu po křivce $\mathscr{C}$ z počátečního bodu $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ do koncového bodu $\boldsymbol{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$, může obecně záviset na poloze částice. Práce takové síly je dána křivkovým integrálem

$$W = \int_{\mathscr{C}} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z) = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t. \qquad (7.31)$$

Okamžiky t_i a t_f odpovídají počátečnímu a koncovému bodu křivky $\mathscr{C}$.

V jednorozměrném případě se vztah (7.31) zjednoduší na tvar

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (7.27)$$

Pružná síla

Pro pružnou sílu platí

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{d} \qquad \text{(Hookův zákon)}, \qquad (7.37)$$

kde $\boldsymbol{d}$ je posunutí volného konce pružiny z **nenapjatého stavu** (pružina v tomto stavu není natažena ani stlačena) a k je **tuhost** pružiny. Zvolíme-li osu x podél pružiny a počátek ztotožníme s polohou jejího volného konce v nenapjatém stavu, lze vztah (7.37) přepsat ve tvaru

$$F = -kx \qquad \text{(Hookův zákon)}. \qquad (7.38)$$

Práce pružné síly

Přesune-li se těleso připevněné k volnému konci pružiny z počáteční polohy x_i do koncové polohy x_f, vykoná pružná síla práci

$$W_p = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2. \qquad (7.40)$$

Pro $x_i = 0$ a $x_f = x$ je

$$W_p = -\tfrac{1}{2}kx^2. \qquad (7.41)$$

Výkon

Výkon síly je „*rychlost*“, s jakou tato síla koná práci. Vykoná-li síla v časovém intervalu Δt práci ΔW, je *průměrný výkon* v tomto časovém intervalu definován poměrem

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \qquad (7.44)$$

Okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F}$ je „okamžitá rychlost“ konání práce

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \qquad (7.45)$$

Svírá-li síla $\boldsymbol{F}$ s trajektorií částice úhel φ, je okamžitý výkon roven

$$P = Fv\cos\varphi = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}, \qquad (7.49, 7.50)$$

kde $\boldsymbol{v}$ je okamžitá rychlost částice.

Relativistická kinetické energie

Kinetickou energii objektu pohybujícího se rychlostí blízkou rychlosti světla c je třeba počítat z relativistického vztahu

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \qquad (7.51)$$

Tento vztah přejde na tvar (7.1) v případě, že v je mnohem menší než c.

Princip invariance

Některé veličiny (např. hmotnost, síla, zrychlení a čas v newtonovské mechanice) jsou *invariantní*. To znamená, že při jejich měření v různých inerciálních vztažných soustavách zaznamenáváme stejné hodnoty. Jiné veličiny (například rychlost, kinetická energie, práce) mají v různých vztažných soustavách různé hodnoty. Fyzikální *zákony* však mají stejný *tvar* ve všech inerciálních vztažných soustavách. Tuto skutečnost nazýváme **principem invariance**.

OTÁZKY

1. Uspořádejte následující rychlosti tak, aby odpovídající hodnoty kinetické energie byly řazeny sestupně: (a) $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, (b) $\boldsymbol{v} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, (c) $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, (d) $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$, (e) $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{i}$ a (f) $v = 5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, svírá-li vektor rychlosti s vodorovnou rovinou úhel 30°.

2. Rozhodněte, zda kinetická energie částice roste, klesá, či zůstává neměnná, platí-li pro rychlost částice (a) $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i}$, (b) $v = -4t$, $t > 0$.

3. Rozhodněte, zda kinetická energie částice roste, klesá, či zůstává neměnná, platí-li pro polohu částice (a) $x = 4t^2 - 2$, (b) $x = -3t + 14$, (c) $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j}$, (d) $\boldsymbol{r} = (2t^2 - 3)\boldsymbol{i} + (4t - 2)\boldsymbol{j}$. Ve všech případech je $t > 0$.

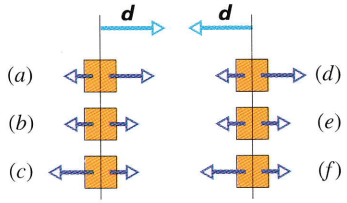
4. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$ ve směru osy x. Částice se posune po ose x o 5 m. Můžeme pro výpočet práce, kterou síla vykonala, použít vztahů (7.9) a (7.11), je-li její velikost (v newtonech) (a) $F = 3$, (b) $F = 2x$, (c) $F = 2t$?

5. Rozhodněte, zda práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při posunutí částice o vektor $\boldsymbol{d}$ je v následujících případech kladná, či záporná: (a) úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ je 30°, (b) úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{d}$ je 100°, (c) $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{d} = -4\boldsymbol{i}$.

6. Částice o hmotnosti 5 kg se pohybuje rovnoměrně po kružnici rychlostí o velikosti 4 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jakou práci vykoná dostředivá síla působící na částici (a) v libovolně zvoleném časovém intervalu, (b) během jednoho oběhu částice?

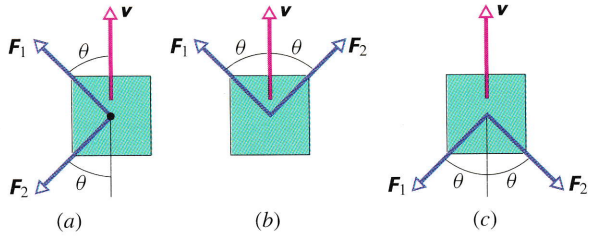
7. Na obr. 7.19 vidíme šest situací, v nichž na krabici pohybující se po vodorovné dokonale hladké podložce působí současně dvě síly. Jedna z nich směřuje vpravo, druhá vlevo. Síly mají velikosti 1 N, resp. 2 N, a v obrázku jsou znázorněny vektory

různých délek. V jednotlivých případech rozhodněte, zda je práce výslednice obou sil při posunutí krabice o vyznačený vektor **d** kladná, záporná, či nulová.



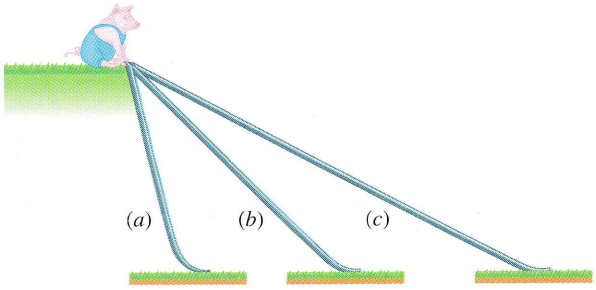
Obr. 7.19 Otázka 7

8. Na obr. 7.20 jsou v pohledu shora zobrazeny tři situace, kdy na krabici působí dvě síly ($\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$) stejných velikostí. Síly svírají s rychlostí krabice stálé úhly. Rozhodněte, zda celková práce, kterou síly konají při pohybu krabice, je kladná, záporná, či nulová.



Obr. 7.20 Otázka 8

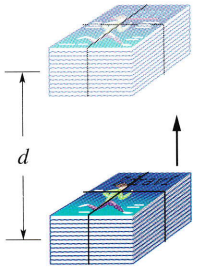
9. Vepřík na obr. 7.21 může sklouznout po jedné ze tří dokonale hladkých skluzavek. Uspořádejte skluzavky sestupně podle velikosti práce, kterou při takové jízdě vykoná tíhová síla působící na vepříka.



Obr. 7.21 Otázka 9

10. Představme si poměrně absurdní situaci. Ulovili jsme pásovce a chceme jej zvednout na mořský útes. Rozhodněte, zda práce vykonaná silou, kterou při tom na pásovce působíme, závisí (a) na jeho hmotnosti, (b) na tíhové síle, kterou na něj působí Země, (c) na výšce útesu, (d) na době, během níž pásovce zvedneme, (e) na tom, zda pásovce vychylujeme do stran, nebo jej zvedáme přímo vzhůru.

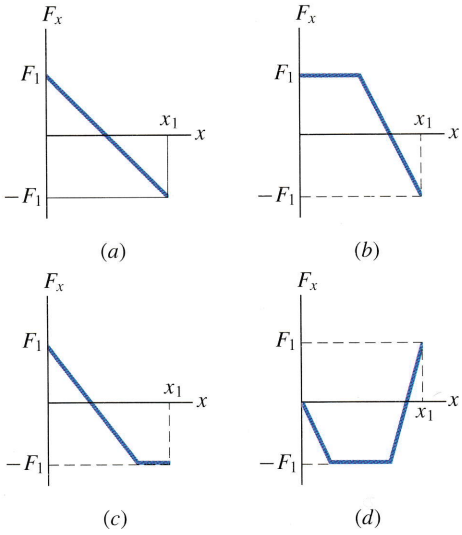
11. Obr. 7.22 zachycuje balík časopisů, který je třeba zvednout do výšky d. Balík zvedáme tahem za provaz, jímž je ovázán. V tabulce je uvedeno šest dvojic hodnot udávajících velikost rychlosti balíku (v metrech za sekundu) v_0, resp. v na počátku, resp. na konci jeho posunutí o svislou vzdálenost d. Uspořádejte tyto dvojice sestupně podle práce vykonané tahovou silou provazu při daném posunutí.



	a	b	c	d	e	f
v =	0	2	2	2	0	1
v_0 =	0	2	0	1	2	2

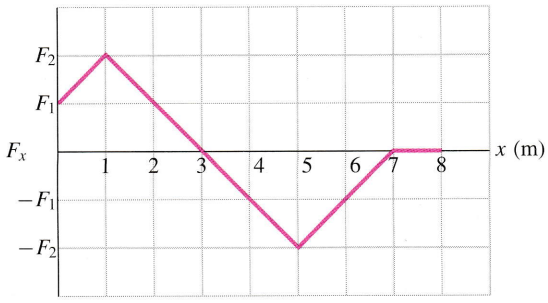
Obr. 7.22 Otázka 11

12. Na obr. 7.23 jsou znázorněny čtyři grafy závislosti proměnné síly $\boldsymbol{F}$, působící na částici pohybující se podél osy x, na poloze této částice. Poloha je určena souřadnicí x, síla $\boldsymbol{F}$ má směr osy x. Stupnice na odpovídajících si osách grafů jsou stejné. Seřaďte grafy sestupně podle hodnoty práce, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykonala při posunutí částice z polohy $x = 0$ do polohy x_1.



Obr. 7.23 Otázka 12

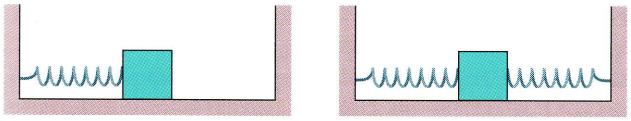
13. Síla $\boldsymbol{F}$ rovnoběžná s osou x působí na částici pohybující se ve směru osy x. Obr. 7.24 znázorňuje závislost této síly na



Obr. 7.24 Otázka 13

poloze částice, zadané souřadnicí x. V počáteční poloze $x = 0$ byla částice v klidu. Jaká je její poloha v okamžiku, kdy má (a) největší kinetickou energii, (b) největší rychlost, (c) nulovou rychlost? (d) Jaký je směr pohybu částice při jejím průchodu bodem o souřadnici $x = 6\,\text{m}$?

14. Kostka je upevněna k volnému konci nenapjaté pružiny podle obr. 7.25a. Tuhost pružiny k je taková, že při posunutí kostky o vektor $\boldsymbol{d}$ vpravo vykoná pružná síla práci W_1. Velikost pružné síly na konci posunutí je F_1. Kostku připojíme na opačné straně ještě k druhé, stejné pružině, podle obr. 7.25b. Vzdálenost uchycení pružin je zvolena tak, aby ve výchozím stavu byly obě nenapjaté. Kostku posuneme opět o vektor $\boldsymbol{d}$. (a) Jaká je velikost výslednice sil, jimiž na kostku působí obě pružiny? (b) Jakou práci vykonaly pružné síly?

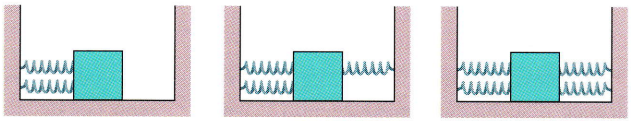


(*a*) (*b*)

Obr. 7.25 Otázka 14

15. Pružina A je tužší než pružina B, tj. $k_A > k_B$. Pružiny stlačujeme působením vnější síly tak, že (a) docílíme jejich stejného stlačení, (b) obě pružiny stlačujeme stejně velkými vnějšími silami. V každém z případů (a) a (b) rozhodněte, která z pružných sil $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ vykonala větší práci.

16. Na obr. 7.26 jsou znázorněny tři situace. V každé z nich je kostka připojena ke stejným pružinám. V okamžiku, kdy je kostka uprostřed, jsou pružiny nenapjaté. Seřaďte situace sestupně podle velikosti výsledné síly, která bude působit na kostku posunutou o vzdálenost d (a) vpravo, (b) vlevo. Seřaďte situace sestupně podle celkové práce pružných sil působících na kostku posunutou o vzdálenost d (a) vpravo, (b) vlevo.



(1) (2) (3)

Obr. 7.26 Otázka 16

17. Jakým násobkem tuhosti pružiny je tuhost každé z pružin, které vzniknou rozpůlením pružiny původní? (*Tip*: Uvažte, jaké protažení každé z poloviční pružin způsobí vnější síla o dané velikosti.)

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 7.1 Kinetická energie

1C. Jaká je kinetická energie rakety Saturn V, spojené s kosmickou stanicí Apollo, je-li jejich celková hmotnost $2{,}9\cdot10^5$ kg a dosáhnou-li společné rychlosti $11{,}2\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$?

2C. Volný elektron (hmotnost $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg) v mědi má při nejnižší dosažitelné teplotě kinetickou energii $6{,}7\cdot10^{-19}$ J. Jak velká je jeho rychlost?

3C. Určete kinetickou energii následujících objektů, pohybujících se danou rychlostí: (a) fotbalový obránce o hmotnosti 110 kg, který běží rychlostí 8,1 m/s, (b) kulka o hmotnosti 4,2 g letící rychlostí 950 m/s, (c) letadlová loď *Nimitz* o výtlaku 91 400 tun při rychlosti 32 uzlů (1 uzel $\doteq 0{,}51\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

4C. Dne 10. srpna 1972 proletěl atmosférou nad východním územím USA a Kanady velký meteorit. Odrážel se od horní vrstvy atmosféry, asi jako když se kamenem házejí žabičky po vodě. Ohnivá koule na obloze byla tak jasná, že byla vidět i ve dne (obr. 7.27). Hmotnost meteoritu byla asi $4\cdot10^6$ kg, velikost jeho rychlosti zhruba $15\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Kdyby meteorit vstoupil do atmosféry ve svislém směru, dosáhl by povrchu Země s přibližně nezměněnou rychlostí. (a) Vypočtěte ztrátu energie meteoritu (v joulech) při jeho zabrzdění po kolmém dopadu na povrch Země. (b) Vyjádřete tuto energii jako násobek energie uvolněné při výbuchu jedné megatuny TNT, která činí $4{,}2\cdot10^{15}$ J. (c) Energie uvolněná při výbuchu atomové bomby svržené na Hirošimu byla ekvivalentní 13 kilotunám TNT. Kolika „hirošimským bombám" odpovídá srážka meteoritu se Zemí?



Obr. 7.27 Cvičení 4. Velký meteorit prolétá atmosférou nad pohořím (vpravo nahoře).

5C. Výbuch na zemském povrchu zanechá kráter, jehož průměr je úměrný třetí odmocnině z energie, která se při tom uvolnila. Při výbuchu jedné megatuny TNT vznikne kráter o průměru 1 km. Pod Huronským jezerem v Michiganu byl objeven starý kráter o průměru 50 km. Jaká byla kinetická energie tělesa, které kráter vytvořilo, vyjádřená (a) v megatunách TNT, (b) v jednotkách odpovídajících ekvivalentu hirošimské bomby (cvič. 4)? (Takový dopad meteoritu nebo komety mohl významně ovlivnit pozemské podnebí či přispět k vyhynutí dinosaurů i jiných forem života.)

6Ú. Proton (hmotnost $m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg) prochází *lineárním urychlovačem* se zrychlením o velikosti $3{,}6\cdot10^{15}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Počáteční rychlost protonu byla $2{,}4\cdot10^{7}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je velikost jeho rychlosti poté, co prošel vzdálenost 3,5 cm? (b) Jaký je přírůstek jeho kinetické energie v elektronvoltech?

7Ú. Otec běží o závod se svým synem. Kinetická energie otce je ve srovnání se synem poloviční, hmotnost dvojnásobná. Jestliže otec zvýší svou rychlost o $1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, bude mít stejnou kinetickou energii jako syn. Určete velikost počáteční rychlosti otce i syna.

8Ú. Jaká je kinetická energie Země při jejím oběhu kolem Slunce? (Potřebné číselné údaje vyhledejte v dodatku C.)

ODST. 7.3 Práce a kinetická energie

9C. Objekt o hmotnosti 102 kg se pohybuje po vodorovné přímce a je brzděn se zpožděním $2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jeho počáteční rychlost má velikost $53\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je velikost brzdící síly? (b) Jakou vzdálenost těleso urazí, než se zastaví? (c) Jakou práci vykoná brzdná síla? (d) Zodpovězte otázky (a) až (c) pro případ, že zpoždění je $4{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

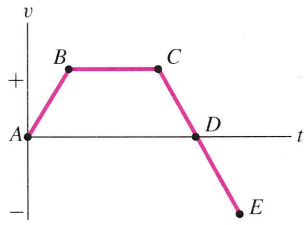
10C. Dělník vleče bednu o hmotnosti 50 kg po dokonale hladké vodorovné podlaze. Působí na ni při tom silou o velikosti 210 N pod úhlem 20° vzhledem k podlaze. Zjistěte, jakou práci vykonaly při posunutí bedny o 3,0 m následující síly: (a) síla, kterou působí na bednu dělník, (b) tíhová síla, (c) tlaková síla, jíž působí na bednu podlaha. (d) Jaká je celková práce všech sil působících na bednu?

11C. Plovoucí ledová kra je hnána proudem vody podél pobřeží. Proud na ni působí silou $\boldsymbol{F} = (210\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (150\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Jakou práci vykoná tato síla při posunutí kry o vektor $\boldsymbol{d} = (15\ \mathrm{m})\boldsymbol{i} - (12\ \mathrm{m})\boldsymbol{j}$?

12C. Částice se posune po přímce o vektor $\boldsymbol{d} = (8\ \mathrm{m})\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}$. Jedna ze sil, které na částici působí, je $\boldsymbol{F} = (2\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (4\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Pro jaké hodnoty c je práce této síly při posunutí $\boldsymbol{d}$ (a) nulová, (b) kladná, (c) záporná?

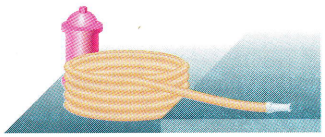
13C. Proton, který byl zpočátku v klidu, byl v cyklotronu urychlen na výslednou rychlost o velikosti $3{,}0\cdot10^{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jakou práci (v elektronvoltech) při tom vykonala elektrická síla, která proton urychlila? (I když velikost zadané rychlosti činí již 1 % rychlosti světla, nepočítejte s relativistickou opravou.)

14C. Na částici pohybující se po přímce působí jediná síla. Obr. 7.28 ukazuje časovou závislost rychlosti částice. Určete znaménko (plus, resp. minus) práce, kterou tato síla vykoná v každém z časových intervalů AB, BC, CD a DE.



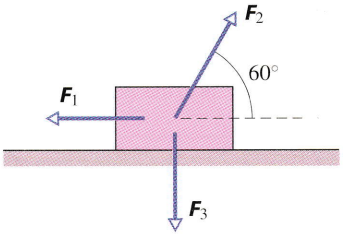
Obr. 7.28 Cvičení 14

15C. Dvanáctimetrovou požární hadici (obr. 7.29) rozvíjíme tak, že její konec s tryskou táhneme po dokonale hladké podlaze stálou rychlostí o velikosti $2{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Hmotnost jednoho metru hadice je 0,25 kg (její délková hustota tedy je $0{,}25\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}}$). Jakou práci vykoná síla působící na hadici při jejím rozvíjení do okamžiku, kdy je celá hadice v pohybu?



Obr. 7.29 Cvičení 15

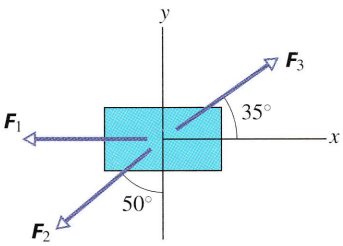
16Ú. Na obr. 7.30 jsou znázorněny tři síly působící na kufr, který se posune o 3,00 m vlevo po dokonale hladké podlaze. Velikosti sil jsou $F_1 = 5{,}00$ N, $F_2 = 9{,}00$ N a $F_3 = 3{,}00$ N. (a) Jaká je celková práce těchto sil při uvedeném posunutí kufru? (b) Rozhodněte, zda kinetická energie kufru vzroste, nebo poklesne.



Obr. 7.30 Úloha 16

17Ú. Síla $\boldsymbol{F}$ působí na částici o hmotnosti 3,0 kg tak, že její poloha závisí na čase vztahem $x = 3{,}0t - 4{,}0t^2 + 1{,}0t^3$. Souřadnice x je zadána v metrech a čas t v sekundách. Určete práci síly $\boldsymbol{F}$ v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 4{,}0$ s. (*Tip*: Určete rychlost částice v obou okamžicích.)

18Ú. Obr. 7.31 představuje pohled shora na nádobu pohybující se po dokonale hladké podlaze, na kterou působí tři síly. Nádoba byla zpočátku v klidu. Velikosti sil jsou $F_1 = 3{,}00$ N, $F_2 = 4{,}00$ N a $F_3 = 10{,}00$ N. Jakou celkovou práci tyto síly vykonají při posunutí nádoby o 4,00 m od okamžiku, kdy se dala do pohybu?



Obr. 7.31 Úloha 18

19Ú. Na částici o hmotnosti 2,0 kg působí stálá síla o velikosti 10 N, která svírá se směrem kladné osy x úhel 150°

(měřeno v kladném smyslu, tj. proti směru otáčení hodinových ručiček). Jakou práci vykoná tato síla při posunutí částice z počátku soustavy souřadnic do bodu o polohovém vektoru $(2{,}0\text{ m})\boldsymbol{i} - (4{,}0\text{ m})\boldsymbol{j}$?

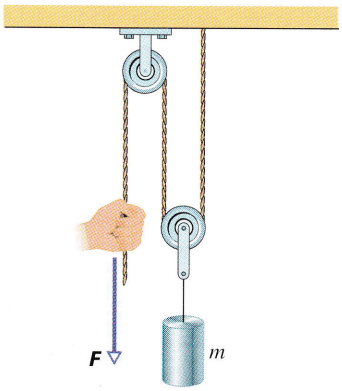
ODST. 7.4 Práce tíhové síly

20C. (a) Při úpravách montrealského velodromu v roce 1975 bylo třeba vycentrovat jeho střechu vážící 41 000 tun. K tomu bylo nutné ji nadzvednout asi o 10 cm. Jakou práci při tom vykonaly síly, které střechu zvedaly? (b) V roce 1960 prý paní Maxwell Rogersová z Tampy na Floridě dokázala nadzvednout jeden konec auta, které spadlo na jejího syna poté, co selhal zvedák. Připusťme, že v takovém šoku byla skutečně schopna nadzvednout automobil o váze 16 000 N silou o velikosti 4 000 N asi o 5 cm. Jakou práci tato síla vykonala?

21C. Dělník tlačí bednu o hmotnosti 25,0 kg vzhůru po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 25,0°. Působí na ni při tom silou o velikosti 209 N, která je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Vypočtěte práci, kterou při posunutí bedny o 1,50 m vykonají síly působící na bednu: (a) síla, kterou působí dělník, (b) tíhová síla, (c) normálová (tlaková) síla nakloněné roviny. (d) Jaká je celková práce, kterou vykonaly síly působící na bednu?

22C. Kostka ledu o hmotnosti 45 kg klouže dolů po nakloněné rovině dlouhé 1,5 m a vysoké 0,91 m. Dělník tlačí kostku silou směřující vzhůru podél nakloněné roviny tak, aby klesala stálou rychlostí. (a) Jakou silou působí dělník na kostku? Určete práci, kterou vykonají síly působící na kostku: (b) síla, kterou působí dělník, (c) tíhová síla, (d) normálová síla, jíž působí na kostku povrch nakloněné roviny, (e) výsledná síla.

23C. Na obr. 7.32 je znázorněno zařízení s volnou kladkou: provaz je veden přes dvě nehmotné kladky, které se mohou otáčet bez tření. Na volné kladce visí nádoba o hmotnosti $m = 20$ kg, na volný konec provazu působíme silou $\boldsymbol{F}$. (a) Jak velká musí



Obr. 7.32 Cvičení 23

být síla $\boldsymbol{F}$, máme-li nádobu zvedat stálou rychlostí? (b) O jakou vzdálenost musíme posunout volný konec provazu, chceme-li nádobu zvednout o 2,0 cm? Určete, jakou práci vykonají při tomto posunutí následující síly: (c) síla $\boldsymbol{F}$, (d) tíhová síla působící na nádobu. (*Tip*: Provaz vedený přes kladku podle obrázku na ni působí celkovou silou, jejíž velikost je rovna dvojnásobku velikosti tahové síly provazu.)

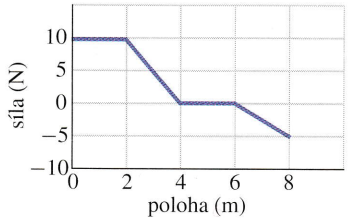
24Ú. Helikoptéra zvedala 72 kg astronauta na laně z hladiny oceánu do výšky 15 m se zrychlením $g/10$. Určete práci, kterou při tom vykonaly síly působící na astronauta: (a) síla, kterou působila helikoptéra, (b) tíhová síla. Jakou (c) kinetickou energii a (d) rychlost astronaut získal?

25Ú. Kostku o hmotnosti M, která byla zpočátku v klidu, spouštíme na laně svisle dolů se zrychlením $g/4$. Jakou práci vykonala (a) tahová síla lana, (b) tíhová síla, do okamžiku, kdy kostka poklesla o vzdálenost d? (c) Jaká je v tomto okamžiku kinetická energie kostky a (d) její rychlost?

26Ú. Speleologická záchranná četa zvedá zraněného průzkumníka ze zborcené jeskyně přímo vzhůru na laně navíjeném pomocí motoru. Akce má tři fáze, z nichž každá vyžaduje zvednutí člověka o svislou vzdálenost 10,0 m: (1) Člověk, který byl zpočátku v klidu, je zvedán s jistým zrychlením, až dosáhne rychlosti o velikosti 5,00 m·s^{-1}. (2) Další zdvih se děje stálou rychlostí, jíž bylo dosaženo v předchozí fázi. (3) Následuje rovnoměrně zpožděný pohyb až do zastavení. Jakou práci vykoná v každé fázi pohybu síla, jíž působí na speleologa tažné lano?

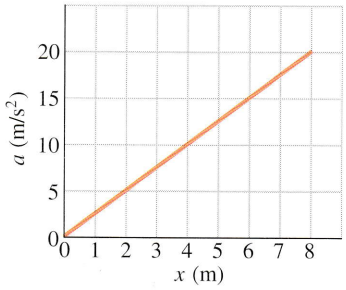
ODST. 7.5 Práce proměnné síly

27C. Kostka o hmotnosti 5,0 kg se pohybuje přímočaře po dokonale hladké vodorovné rovině. Na kostku působí síla, jejíž závislost na poloze kostky je znázorněna na obr. 7.33. Jakou práci vykoná tato síla při přemístění kostky z počátku soustavy souřadnic do polohy o souřadnici $x = 8{,}0$ m?



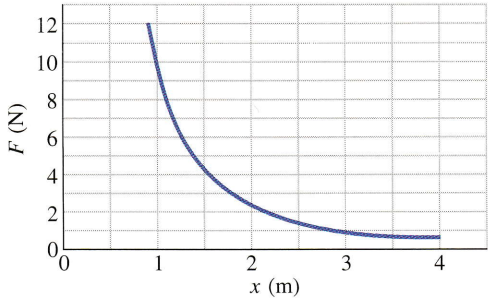
Obr. 7.33 Cvičení 27

28C. Těleso o hmotnosti 10 kg se pohybuje po ose x. Závislost jeho zrychlení na poloze je znázorněna na obr. 7.34. Jaká je celková práce vykonaná silami, které udělují tělesu toto zrychlení, jestliže se těleso přemístí z polohy $x = 0$ do polohy $x = 8{,}0$ m?



Obr. 7.34 Cvičení 28

29Ú. (a) Na částici pohybující se po ose x působí ve směru této osy síla, jejíž závislost na poloze částice je znázorněna v grafu 7.35. Odhadněte práci této síly při přemístění částice z polohy $x = 1\,\text{m}$ do polohy $x = 3\,\text{m}$. Zjemněte použitou metodu tak, abyste si udělali představu, jak blízko se vám podařilo přiblížit se přesné hodnotě 6 J. (b) Rovnice znázorněné křivky má tvar $F = ax^{-2}$, kde $a = 9\,\text{N}\cdot\text{m}^2$. Vypočtěte hledanou práci pomocí integrace.



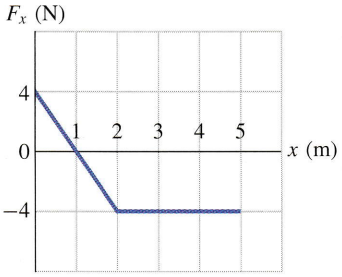
Obr. 7.35 Úloha 29

30Ú. Na částici působí síla $F = F_0(\frac{x}{x_0} - 1)$. Určete práci této síly při přemístění částice z polohy $x = 0$ do polohy $x = 2x_0$ (a) přibližně z grafu závislosti $F(x)$, (b) integrací funkce $F(x)$ v daných mezích proměnné x.

31Ú. Jakou práci vykoná síla $\boldsymbol{F} = (2x\,\text{N})\boldsymbol{i} + (3\,\text{N})\boldsymbol{j}$ působící na částici při jejím posunutí z polohy $\boldsymbol{r}_\text{i} = (2\,\text{m})\boldsymbol{i} + (3\,\text{m})\boldsymbol{j}$ do polohy $\boldsymbol{r}_\text{f} = -(4\,\text{m})\boldsymbol{i} - (3\,\text{m})\boldsymbol{j}$?

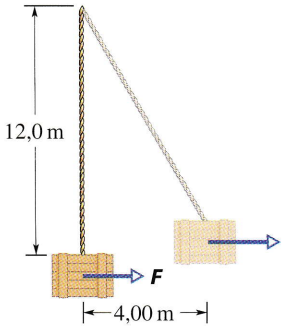
32Ú. Síla $\boldsymbol{F}$ působí na částici pohybující se podél osy x. Síla má směr kladně orientované osy x a závislost její velikosti na poloze částice je popsána funkcí $F(x) = 10\exp(-x/2{,}0)\,\text{N}$, kde proměnná x je zadávána v metrech. Určete práci síly $\boldsymbol{F}$ při posunutí částice z počátku osy x do polohy o souřadnici $x = 2{,}0\,\text{m}$ (a) jako obsah plochy pod grafem funkce $F(x)$, (b) výpočtem pomocí integrálu.

33Ú. Na těleso o hmotnosti 2,0 kg působí při jeho pohybu podél osy x jediná síla. Její závislost na poloze tělesa je znázorněna na obr. 7.36. Rychlost tělesa v bodě $x = 0$ je $v_x = 4{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jaká je kinetická energie tělesa v bodě $x = 3\,\text{m}$? (b) V jaké poloze x má těleso kinetickou energii 8 J? (c) Jaká je největší kinetická energie, které těleso dosáhne během pohybu z polohy $x = 0$ do polohy $x = 5{,}0\,\text{m}$?



Obr. 7.36 Úloha 33

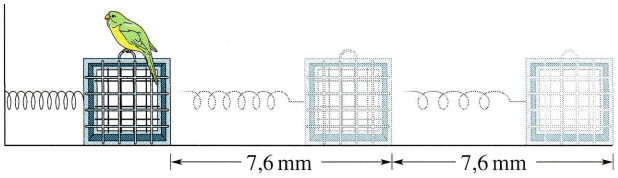
34Ú. Bedna o hmotnosti 230 kg visí na konci lana o délce 12,0 m. Na bednu začneme působit ve vodorovném směru silou $\boldsymbol{F}$ o proměnné velikosti a posuneme ji o 4,00 m ve vodorovném směru, jak ukazuje obr. 7.37. (a) Jaká je velikost síly $\boldsymbol{F}$ v koncové poloze bedny? (b) Jakou celkovou práci vykonaly síly působící na bednu při jejím posunutí? (c) Jakou práci vykonala tíhová síla a (d) tahová síla lana? (e) Za předpokladu, že bedna byla zpočátku v klidu, určete pomocí výsledků (b), (c) a (d) práci síly $\boldsymbol{F}$. (f) Vysvětlete, proč práce síly $\boldsymbol{F}$ není rovna součinu velikosti vodorovného posunutí bedny a velikosti síly $\boldsymbol{F}$ zjištěné v části (a) této úlohy?



Obr. 7.37 Úloha 34

ODST. 7.6 Práce pružné síly

35C. Ke konci pružiny o tuhosti $15\,\text{N}\cdot\text{cm}^{-1}$ je připevněna klec (obr. 7.38). (a) Jakou práci vykoná síla, jíž působí pružina na klec, při stlačení o 7,6 mm z výchozího nenapjatého stavu? (b) Jakou práci vykoná při dalším stlačení o 7,6 mm?



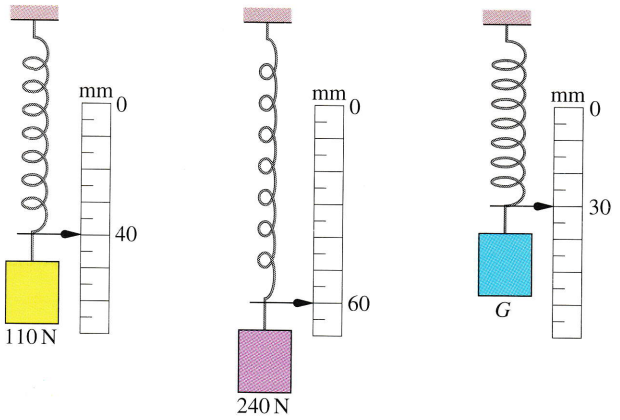
Obr. 7.38 Cvičení 35

36C. Studenti MIT (Massachusetts Institute of Technology, jedna z renomovaných univerzit v USA) obývající dvě sousední budovy studentské koleje East Campus zorganizovali jednou v rámci obvyklých studentských recesí bitvu, při níž používali praků vyrobených z chirurgických hadic, uchycených v okenních rámech. Míč naplněný obarvenou vodou vložili do „kapsy" praku, připevněné k hadici. Hadici pak napjali přes celou šířku pokoje, uvolnili a míč tak vymrštili proti soupeřům bydlícím v protilehlé budově. Předpokládejme, že se napjatá hadice řídí Hookovým zákonem a že její tuhost je $100\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Jakou práci vykoná pružná síla, jíž působí hadice na kapsu s míčem, od okamžiku uvolnění hadice protažené o 5,00 m do okamžiku vymrštění míče, kdy je již hadice v nenapjatém stavu?

37Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg se pohybuje po ose x. x-ová složka jediné síly, která na těleso působí, je tvaru $F_x = -6x\,\text{N}$. Souřadnice x je zadána v metrech. Rychlost tělesa v bodě o souřadnici $x = 3{,}0\,\text{m}$ je $v_x = 8{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jaká je rychlost tělesa

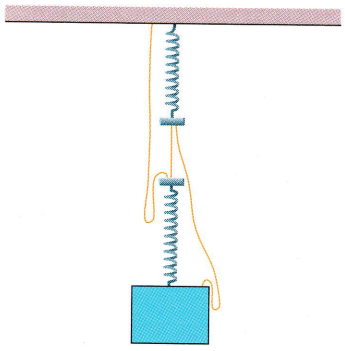
v poloze $x = 4{,}0\,\mathrm{m}$? (b) V jaké poloze má těleso rychlost $v_x = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

38Ú. Pružinový siloměr má stupnici cejchovanou v milimetrech. Na siloměr zavěšujeme postupně tři různá závaží (obr. 7.39). (a) Jakou hodnotu ukáže ukazatel siloměru na stupnici, jestliže závaží sejmeme? (b) Jaká je velikost tíhové síly G?



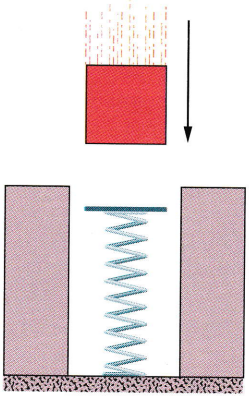
Obr. 7.39 Úloha 38

39Ú. Na obr. 7.40 jsou znázorněny dvě stejné pružiny spojené krátkým vláknem o délce 10 cm. Délka každé z pružin v nenapjatém stavu je 50 cm a tuhost $500\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Horní pružina je připevněna ke stropu, na volném konci dolní pružiny visí krabice o váze 100 N. Další dvě ohebná vlákna, každé o délce 85 cm (v dobrém přiblížení neměnné) jsou k soustavě připojena podle obrázku. Krátké vlákno přepálíme, takže krabice zůstane zavěšena pouze na pružinách a dlouhých vláknech a začne se pohybovat. Vlivem odporové síly prostředí se krabice nakonec zastaví v nové rovnovážné poloze. (a) Rozhodněte, zda tato poloha bude ležet nad, či pod původní rovnovážnou polohou, kterou zaujímala krabice před přepálením krátkého vlákna a (b) určete, jak daleko bude od ní vzdálena. (c) Jakou celkovou práci vykonaly pružné síly obou pružin v časovém intervalu mezi přepálením vlákna a ustálením nové rovnovážné polohy?



Obr. 7.40 Úloha 39

40Ú. Kostka o hmotnosti 250 g dopadne na svislou pružinu o tuhosti $k = 2{,}5\,\mathrm{N{\cdot}cm^{-1}}$ (obr. 7.41) a pevně se s ní spojí. Soustava začne kmitat. V okamžiku, kdy kostka poprvé dosáhne bodu obratu, je stlačení pružiny $d = 12\,\mathrm{cm}$. Určete, jakou práci vykonaly do tohoto okamžiku následující síly působící na kostku: (a) tíhová síla, (b) pružná síla. (c) Jaká byla rychlost kostky bezprostředně před dopadem na pružinu? (Třecí a odporové síly považujeme za zanedbatelné.) (d) Jaké by bylo maximální stlačení pružiny při dvojnásobné rychlosti dopadu kostky?



Obr. 7.41 Úloha 40

ODST. 7.7 Výkon

41C. Plně zatížená kabina výtahu má hmotnost $3{,}0{\cdot}10^3$ kg a stoupá stálou rychlostí. Za 23 s urazí 210 m. Jaký je průměrný výkon tahové síly lana kabiny?

42C. Lyžařský výtah vytáhne 100 lyžařů, z nichž každý má hmotnost průměrně 70 kg, do výšky 150 m za 60 s. Rychlost pohybu je konstantní. Jaký je průměrný výkon tažné síly výtahu?

43C. Kabina nákladní zdviže má hmotnost 4 500 kg, nejvyšší povolená hmotnost nákladu je 1 800 kg. Jaký musí být výkon tahové síly lana zdviže, zvedá-li se plně naložená kabina stálou rychlostí $3{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

44C. (a) Určete okamžitý výkon síly $\boldsymbol{F} = (4{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} - (2{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (9{,}0\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$ působící na částici, v okamžiku, kdy je její rychlost $\boldsymbol{v} = -(2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{k}$. (b) Předpokládejme, že v jiném okamžiku má rychlost částice nenulový průmět pouze do směru vektoru $\boldsymbol{j}$ a že síla $\boldsymbol{F}$ zůstala nezměněna. Jaká je nyní rychlost částice, je-li okamžitý výkon síly $-12\,\mathrm{W}$?

45Ú. Kostka o hmotnosti 100 kg je tažena stálou rychlostí o velikosti $5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ po dokonale hladké podlaze silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 122 N. Síla svírá s podlahou úhel 37° a je orientován směrem vzhůru. Jaký je výkon síly $\boldsymbol{F}$?

46Ú. Kůň táhne vozík silou o velikosti 180 N svírající s vodorovnou rovinou úhel +30°. Jedou stálou rychlostí o velikosti $10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná tažná síla během 10 min jízdy? (b) Jaký je průměrný výkon této síly (ve wattech a v jednotkách HP)?

47Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg, které bylo zpočátku v klidu, se začne pohybovat rovnoměrně zrychleně a během 3,0 s dosáhne rychlosti o velikosti $10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná výsledná urychlující síla během uvedených 3,0 s? Jaký je okamžitý výkon

této síly (b) na konci uvedeného časového intervalu a (c) na konci jeho první poloviny?

48Ú. Síla o velikosti 5,0 N začne působit na těleso o hmotnosti 15 kg, které je zpočátku v klidu. Určete (a) práci, kterou tato síla vykoná během první, druhé a třetí sekundy od počátku pohybu, a (b) okamžitý výkon síly na konci třetí sekundy.

49Ú. Kabina plně naložené nákladní zdviže má hmotnost 1 200 kg. Kabinu je třeba zvednout do výšky 54 m za 3,0 min. Protizávaží má hmotnost pouze 950 kg, takže motor zdviže musí napomáhat k vyvažování kabiny. Jaký musí být průměrný výkon (v jednotkách HP) tažné síly motoru, který působí na kabinu prostřednictvím tažného lana?

50Ú. Síla, kterou je třeba vléci loď, aby se pohybovala rovnoměrně, je úměrná okamžité rychlosti lodi. (Tato síla musí kompenzovat odporovou sílu vody.) Její výkon při rychlosti 4 km/h je 7,5 kW. Jaký okamžitý výkon tažné síly odpovídá rychlosti 12 km/h?

51Ú. Tělísko o hmotnosti 0,30 kg, které může klouzat po vodorovné dokonale hladké podložce, je připevněno k volnému konci pružiny o tuhosti $k = 500\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, jejíž druhý konec je pevný. V okamžiku průchodu rovnovážnou polohou (v tomto okamžiku je pružná síla působící na tělísko nulová) má tělísko kinetickou energii 10 J. (a) Jaký je okamžitý výkon pružné síly při průchodu tělíska rovnovážnou polohou? (b) Jaký je okamžitý výkon pružné síly v okamžiku, kdy je pružina stlačena o 0,10 m a tělísko se vzdaluje od rovnovážné polohy?

ODST. 7.8 Kinetická energie při vysokých rychlostech

52C. Elektron urazí dráhu 5,1 cm za 0,25 ns. (a) Vyjádřete jeho rychlost v jednotkách rychlosti světla a (b) jeho kinetickou energii v elektronvoltech. (c) Jak velké chyby v procentech se dopustíme při výpočtu kinetické energie, použijeme-li klasickou formuli namísto relativistické?

53C. Vztah mezi prací a kinetickou energií lze použít pro částice s libovolnou rychlostí. Jakou práci (v elektronvoltech) je třeba vykonat při urychlení elektronu z klidu na rychlost o velikosti (a) $0{,}500c$, (b) $0{,}990c$, (c) $0{,}999c$?

54Ú. Elektron má rychlost o velikosti $0{,}999c$. (a) Jaká je jeho kinetická energie? (b) O kolik procent vzroste jeho kinetická energie, vzroste-li velikost rychlosti o 0,05 %?

PRO POČÍTAČ

55Ú. Síla $\boldsymbol{F} = (3{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} + (7{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (7{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$ působí na těleso o hmotnosti 2,00 kg, které se posune z počáteční polohy $\boldsymbol{d}_\mathrm{i} = (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (5{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$ do koncové polohy $\boldsymbol{d}_\mathrm{f} = -(5{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (4{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} + (7{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$ za dobu 4,00 s. Určete (a) práci síly $\boldsymbol{F}$ v uvedeném časovém intervalu, (b) její průměrný výkon v tomto intervalu a (c) úhel mezi vektory $\boldsymbol{d}_\mathrm{i}$ a $\boldsymbol{d}_\mathrm{f}$.