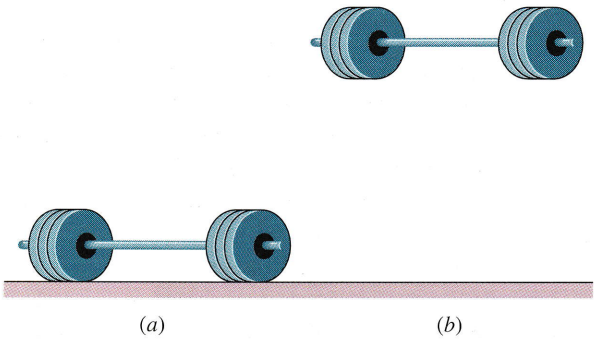
8
Potenciální energie a zákon zachování energie

Jedním z nebezpečných „sportů" je bungee-jumping (v překladu „zaražené skákání"). Skokan, připoutaný za kotníky ke speciálnímu pružnému lanu, se vrhá dolů z velké výšky, většinou z vysokých mostních konstrukcí. Napínající se lano způsobí zbrzdění střemhlavého letu. Lze vůbec zjistit, jaké největší hloubky skokan dosáhne? Odpověď na tuto otázku je pochopitelně obecně zajímavá, pro skokana však navíc životně důležitá.

8.1 POTENCIÁLNÍ ENERGIE

V kap. 7 jsme definovali kinetickou energii částice, resp. bodového objektu a přesvědčili jsme se, že její změny bezprostředně souvisejí se silami, jimiž na částici působí její okolí. Změna kinetické energie částice je totiž rovna výsledné práci všech těchto sil. Uvědomili jsme si také, že v případě soustavy částic či tělesa, které nelze považovat za bodový objekt, přispěje ke změně kinetické energie nejen práce sil, jimiž působí na částice soustavy její okolí, ale i práce interakčních sil, jimiž na sebe částice soustavy působí navzájem. V této kapitole se budeme problémem práce těchto *vnitřních sil* zabývat podrobněji a ukážeme, že za jistých podmínek lze pomocí ní definovat nový typ energie *soustavy*, tzv. **potenciální energii** E_p. Vzhledem k její souvislosti s **konfigurací** soustavy (tj. uspořádáním částic) hovoříme někdy o energii konfigurační. Mění-li se konfigurace soustavy, mění se i její potenciální (konfigurační) energie.

Jedním z typů potenciální energie je **tíhová**, případně* **gravitační** potenciální energie, jež souvisí s konfigurací soustavy částic, které na sebe působí tíhovými (gravitačními) silami. Když Vasilij Aleksejev zvedal nad hlavu 562librovou činku, zvyšoval tím vzdálenost mezi činkou a Zemí. Měnil tak konfiguraci soustavy činka + Země a tím i její tíhovou potenciální energii (obr. 8.1).



(a) (b)

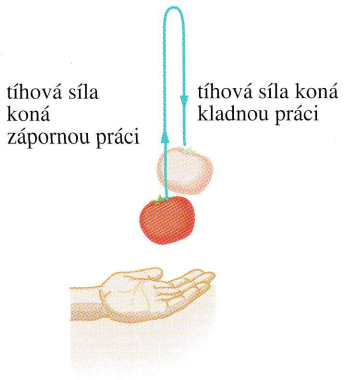
Obr. 8.1 Při zvedání činky nad hlavu zvyšoval V. Aleksejev její vzdálenost od Země a měnil tak konfiguraci soustavy činka + + Země z výchozí konfigurace (a) ve výslednou (b).

Jiným typem potenciální energie je **pružná potenciální energie**, která souvisí se stavem napjatosti (protažení či stlačení) pružných těles, například pružin. Silou, která zde hraje podstatnou roli, je pružná síla. Stlačíme-li nebo napneme-li pružinu, měníme tím vzájemné polohy jejích závitů. Pružná síla působí proti takovým změnám a to vede ke zvýšení pružné potenciální energie pružiny.

* Jemný rozdíl mezi nimi vyložíme v čl. 14.4.

Práce a potenciální energie

Pro úvahy o souvislosti práce vnitřních sil působících v soustavě částic a změnách potenciální energie zvolíme nejprve nejjednodušší možný model, soustavu libovolné těleso + Země. Vraťme se proto k příkladu jablíčka, vrženého svisle vzhůru podle obr. 8.2. Pro jednoduchost zanedbejme otáčení Země kolem Slunce i její rotaci kolem vlastní osy a popisujme vše v takové inerciální soustavě, v níž jsou obě tělesa Země + jablíčko zpočátku v klidu. V kap. 7 jsme konstatovali, že ve fázi výstupu je práce W_g vykonaná tíhovou silou působící na jablíčko záporná a kinetická energie jablíčka vzhledem k Zemi klesá.



Obr. 8.2 Rajské jablíčko je vrženo vzhůru. Při výstupu koná tíhová síla zápornou práci a kinetická energie jablíčka vzhledem k Zemi klesá. Roste však tíhová potenciální energie soustavy jablíčko + Země. Při sestupu je práce tíhové síly působící na jablíčko kladná, jeho kinetická energie vzhledem k Zemi roste a tíhová potenciální energie soustavy klesá.

Můžeme zřejmě očekávat, že potenciální energie soustavy jablíčko + Země, kterou se snažíme definovat jako energii závislou na vzájemné poloze obou částic, roste právě na úkor kinetické energie.

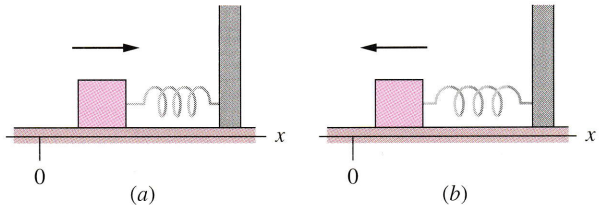
V další fázi pokusu se jablíčko zpomaluje, zastaví se a začíná padat, neboť je k Zemi přitahováno tíhovou silou. Při pádu se energiové poměry obrátí: práce W_g vykonaná tíhovou silou je nyní kladná, kinetická energie jablíčka roste a tíhová potenciální energie soustavy jablíčko+Země klesá. Úvahy z kap. 7 nyní zpřesníme.

Při pohybu tělesa v blízkosti povrchu Země je změna ΔE_p tíhové potenciální energie soustavy těleso + Země definována jako záporně vzatá práce vykonaná interakčními tíhovými silami $\boldsymbol{F}_g$ a $-\boldsymbol{F}_g$. Píšeme

$$\Delta E_p = -W_g. \qquad (8.1)$$

Veličinu E_p nazýváme **tíhovou potenciální energií soustavy** těleso + Země nebo také **potenciální energií tělesa**

v tíhovém poli Země. Při užívání druhého z obou názvů bychom si měli neustále připomínat, že potenciální energie přísluší *soustavě* obou objektů, tělesa i Země, neboť je definována pomocí práce *obou* interakčních sil. Stejný vztah platí pro soustavu kostka+pružina s upevněným koncem (obr. 8.3), přesněji řečeno pro soustavu kostka + Země s přidanou pružnou interakcí, zprostředkovanou pružinou. Jestliže náhle udeříme do kostky směrem vpravo a uvedeme ji tak do pohybu, koná pružná síla působící na kostku během pohybu vpravo zápornou práci. Kinetická energie kostky klesá a na její úkor roste pružná potenciální energie soustavy. (Vzhledem k tomu, že tato potenciální energie je určena výhradně změnou délky pružiny, hovoříme někdy stručně o potenciální energii pružiny.) Kostka se zpomaluje, zastaví se a začne se vlivem pružné síly pohybovat v opačném směru. Směr energiových změn se obrátí, kinetická energie kostky roste na úkor pružné potenciální energie soustavy.



Obr. 8.3 Kostka, která je připevněná k pružině a je zpočátku v klidu v poloze $x = 0$, je uvedena do pohybu směrem vpravo. (a) Při pohybu kostky vpravo (vyznačeno šipkou) koná pružná síla působící na kostku zápornou práci. Kinetická energie kostky klesá a potenciální energie pružiny roste. Kostka se zastaví v okamžiku, kdy je její kinetická energie nulová. (b) Poté se kostka pohybuje zpět směrem k poloze $x = 0$, pružná síla koná kladnou práci, kinetická energie kostky roste za současného poklesu potenciální energie pružiny.

Konzervativní a nekonzervativní síly

Shrňme klíčové prvky diskuse týkající se předchozích dvou situací:

1. *Soustava* se skládá ze dvou nebo více objektů.
2. Sledovaná částice (jablíčko, resp. kostka) a zbytek soustavy na sebe navzájem působí *interakčními silami*.
3. Mění-li se konfigurace soustavy, konají interakční síly práci W_1 a kinetická energie soustavy E_k se mění.
4. Obrátí-li se směr změn konfigurace soustavy, konají interakční síly práci W_2.

Jestliže za všech okolností platí $W_1 = -W_2$, lze pomocí práce interakčních sil definovat potenciální energii soustavy. O interakčních silách hovoříme v takovém případě jako o **silách konzervativních**. Jak se dalo tušit, jsou tíhová i pružná síla silami konzervativními (jinak bychom nemohli mluvit o tíhové či pružné potenciální energii).

Ne všechny síly jsou ovšem konzervativní. Představme si například kostku, jak klouže po podlaze, která není dokonale hladká. Při pohybu kostky koná dynamická třecí síla zápornou práci. Pohyb kostky se zpomaluje, její kinetická energie klesá. Nakonec se kostka zastaví a její kinetická energie je nulová. Práce třecích sil, jimiž na sebe navzájem působí kostka a podlaha podél styčných ploch, se spotřebovala na zvýšení vnitřní energie soustavy kostka + podlaha (dokladem toho je zahřátí obou těles). Experimentálně je však prokázáno, že opačný proces není možný: kostku nedokážeme uvést do pohybu tím, že ji ochladíme. I když tedy v soustavě kostka + podlaha působí interakční (třecí) síly, které konají práci na úkor kinetické energie soustavy, nelze tuto práci vyjádřit jako změnu nějakého druhu potenciální energie. Vnitřní energie soustavy kostka + podlaha není energií potenciální, síly tření jsou silami **nekonzervativními**.

Působí-li na částici výhradně konzervativní síly, můžeme jinak složitý problém jejího pohybu značně zjednodušit. V následujícím článku formulujeme kritéria, na základě nichž lze rozpoznat konzervativní síly, a vyjasníme si, v čem zmíněné zjednodušení spočívá.

8.2 NEZÁVISLOST PRÁCE KONZERVATIVNÍCH SIL NA TRAJEKTORII

K formulaci základního kritéria umožňujícího rozhodnout, zda daná síla je či není konzervativní, dospějeme postupnými úvahami: předpokládejme nejprve pro jednoduchost, že na částici pohybující se po *uzavřené trajektorii* působí jediná síla. Počáteční a koncová poloha částice na uzavřené trajektorii splývají, částice vykoná *„okružní cestu"*, která začíná a končí v tomtéž bodě. Síla působící na částici je konzervativní právě tehdy, je-li kinetická energie částice na počátku i na konci tohoto okruhu stejná. Práce, kterou síla vykoná při oběhu částice po uzavřené trajektorii je tedy nulová. Jako jeden z přirozených příkladů takové situace poslouží oběh Země kolem Slunce po prakticky kruhové trajektorii (nebo i komety po protáhlé eliptické trajektorii), který se skutečně děje vlivem jediné síly působící na planetu. Tou je gravitační síla, jíž na planetu působí Slunce. Jiným příkladem je pohyb jablíčka vrženého svisle vzhůru v tíhovém poli Země.

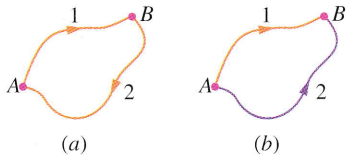
Obecně bychom ovšem měli umět určit práci zkoumané síly $\boldsymbol{F}$ při pohybu částice po *libovolné* trajektorii. Sama síla $\boldsymbol{F}$ však k zajištění takového předem naplánovaného pohybu obvykle nestačí. Musíme proto doplnit další, vhodně zvolenou sílu. Je výhodné, je-li tato síla kolmá k požadované trajektorii, protože potom nekoná práci. Typic-

kým příkladem takové *vazební síly* je tlaková síla vhodně tvarované podložky umístěné v tíhovém poli Země, po níž pouštíme těleso jako po skluzavce.

Předpokládejme tedy, že jsme studovanou sílu $\boldsymbol{F}$ doplnili vhodně zvolenou vazební silou. Sílu $\boldsymbol{F}$ nazveme konzervativní, je-li její příspěvek ke změně kinetické energie při každém oběhu částice po jakékoli uzavřené cestě nulový. Jinými slovy:

Práce vykonaná konzervativní silou působící na částici pohybující se po libovolné uzavřené trajektorii je nulová.

Experimenty ukazují, že tíhová síla toto kritérium splňuje. Příkladem je hra s jablíčkem na obr. 8.2. Jablíčko opouští výchozí bod s rychlostí o velikosti v_0 a kinetickou energií $\frac{1}{2}mv_0^2$. Tíhová síla Země jablíčko zpomaluje až do zastavení a jablíčko padá nazpět. V okamžiku návratu do výchozího bodu je velikost jeho rychlosti opět v_0 a kinetická energie má hodnotu $\frac{1}{2}mv_0^2$. Tíhová síla tedy během výstupu jablíčka spotřebovala stejně velkou práci ($W_1 < 0$), jako vykonala při jeho zpětném pádu do výchozího bodu ($W_2 > 0$, $W_1 = -W_2$). Tíhová síla, jíž působí Země na jablíčko, vykoná při jeho oběhu po uzavřené trajektorii celkově nulovou práci.



Obr. 8.4 (a) Částice, na niž působí mj. konzervativní síla $\boldsymbol{F}$, se pohybuje po okruhu z bodu A do bodu B po cestě 1 a vrací se zpět po cestě 2. (b) Částice může přejít z bodu A do bodu B jak po cestě 1, tak po cestě 2.

Obr. 8.4a znázorňuje oběh částice po obecně zvolené uzavřené trajektorii. Jednou ze sil působících na částici je i síla $\boldsymbol{F}$, jejíž konzervativnost studujeme. Částice se pohybuje z počátečního bodu A do bodu B po cestě 1 a vrací se do bodu A po cestě 2. Síla $\boldsymbol{F}$ koná jistou práci při pohybu částice po jakékoli trajektorii. Aniž bychom specifikovali, pro které části vyznačené trajektorie je tato práce kladná, resp. záporná, označme jako $W_{AB,1}$ práci, kterou uvažovaná síla vykonala při pohybu částice z bodu A do bodu B po cestě 1, a jako $W_{BA,2}$ práci vykonanou při pohybu z B do A po cestě 2. Je-li síla konzervativní, pak výsledná práce, kterou vykoná při pohybu částice po celém okruhu, musí být nulová:

$$W_{AB,1} + W_{BA,2} = 0,$$

tj.

$$W_{AB,1} = -W_{BA,2}. \tag{8.2}$$

Vyjádřeno slovy, práce, kterou síla vykoná při cestě částice z bodu A do bodu B, musí být rovna záporně vzaté práci vykonané při návratu částice.

Uvažujme nyní práci $W_{AB,2}$, kterou síla vykoná při pohybu částice z bodu A do bodu B, avšak po cestě 2 (obr. 8.4b).

Je-li síla $\boldsymbol{F}$ konzervativní, je tato práce až na znaménko rovna práci $W_{BA,2}$:

$$W_{AB,2} = -W_{BA,2}. \tag{8.3}$$

Dosazením $W_{AB,2}$ namísto $-W_{BA,2}$ do vztahu 8.2 dostaneme

$$W_{AB,1} = W_{AB,2}. \tag{8.4}$$

Tato jednoduchá rovnost představuje velmi silný výsledek, neboť umožňuje zjednodušit obtížné problémy pohybu částic v případě, že na ně působí pouze konzervativní síly. Vyplývá z ní totiž, že práce konzervativní síly při pohybu částice z určitého počátečního bodu A do koncového bodu B nezávisí na tom, po *jaké konkrétní cestě* se tento pohyb děje.

Práce konzervativní síly působící na částici při jejím pohybu mezi dvěma body je nezávislá na trajektorii částice.

Předpokládejme, že potřebujeme vypočítat práci konzervativní síly působící na částici při jejím pohybu po určité trajektorii spojující dva zadané body. Může se stát, že přímý výpočet je pro tuto konkrétní trajektorii složitý. Výsledek však lze získat pro jinou trajektorii spojující oba body, avšak zvolenou způsobem, který vede k usnadnění výpočtu. Tuto skutečnost dokumentuje př. 8.1.

PŘÍKLAD 8.1

Obr. 8.5a znázorňuje balíček o hmotnosti 2,0 kg, jak klouže po dokonale hladké skluzavce z bodu A do bodu B. Celková dráha, kterou po skluzavce urazí, je 2,0 m. Svislá vzdálenost bodů A a B je 0,80 m. Jakou práci vykoná při pohybu balíčku tíhová síla?

ŘEŠENÍ: Dejme tomu, že známe konkrétní tvar skluzavky $\mathscr{C}$. Počítejme práci tíhové síly podle vztahu (7.31):

$$W = \int_{\mathscr{C}} m\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathscr{C}} (0 \cdot \mathrm{d}x + (-mg)\,\mathrm{d}y) =$$

$$= -mg \int_{y_i}^{y_f} \mathrm{d}y = -mg(y_f - y_i).$$

Integrál tedy na tvaru skluzavky vůbec nezávisí.

Protože je tíhová síla konzervativní, můžeme určit hledanou práci mnohem snadněji. Pro výpočet vybereme jinou

trajektorii spojující body A a B tak, abychom jej zjednodušili. Zvolme trajektorii složenou ze dvou přímých úseků, které jsou v obr. 8.5b vyznačeny přerušovanou čarou. Podél vodorovného úseku je úhel φ konstantní a je roven 90°. I když neznáme posunutí balíčku ve vodorovném směru, můžeme ze vztahu (7.16) usoudit, že práce tíhové síly po vodorovném úseku je nulová:

$$W_h = mgd\cos 90^\circ = 0.$$

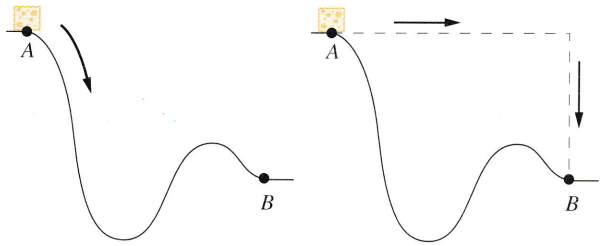
Posunutí balíčku podél svislého úseku je $d = 0{,}80$ m. Úhel φ mezi vektory $\boldsymbol{d}$ a $m\boldsymbol{g}$ je opět konstantní a roven 0°. Podle (7.16) je tedy práce vykonaná tíhovou silou při pohybu balíčku po svislém úseku

$$W_v = mgd\cos 0^\circ = (2{,}0\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(0{,}80\,\text{m})(1) = \\ = 15{,}7\,\text{J}.$$

Celková práce vykonaná tíhovou silou působící na balíček při jeho pohybu z bodu A do bodu B po cestě vyznačené přerušovanou čarou je tedy

$$W = W_h + W_v = 0 + 15{,}7\,\text{J} \doteq 16\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

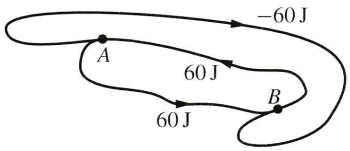
Tato práce je ovšem stejná jako při pohybu balíčku z A do B po skluzavce.



(a) (b)

Obr. 8.5 Příklad 8.1. (a) Balíček klouže po dokonale hladké skluzavce z bodu A do bodu B. (b) Výpočet práce vykonané při tomto pohybu tíhovou silou je snažší pro případ trajektorie vyznačené přerušovanou čarou než pro skutečnou trajektorii. Výsledky jsou však stejné.

KONTROLA 1: Obrázek ukazuje tři cesty spojující body A a B. Síla $\boldsymbol{F}$ působící na částici koná při pohybu částice po jednotlivých úsecích práci, jejíž hodnoty jsou v obrázku vyznačeny. Rozhodněte, zda je síla $\boldsymbol{F}$ konzervativní.*



* Dokázali byste rozhodnout i v případě, že by údaj u nejníže zakresleného úseku byl −60 J?

8.3 URČENÍ HODNOT POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Uvažujme nyní bodový objekt (třeba meloun), který náleží do soustavy (řekněme meloun+Země), v níž působí konzervativní interakční síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. Změna potenciální energie soustavy ΔE_p při přechodu z počáteční do koncové konfigurace je rovna záporně vzaté práci, kterou při této změně konfigurace vykonaly interakční síly. Tuto skutečnost jsme již vyjádřili vztahem (8.1) ($\Delta E_p = -W$). Práce, kterou vykonají konzervativní interakční síly uvnitř soustavy přitom závisí pouze na její výchozí a výsledné konfiguraci, nikoli však na způsobu, jakým ke změně konfigurace došlo. V případě částice (meloun), jejíž pohyb neovlivní konfiguraci zbytku soustavy (Země), je konfigurace určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}(t)$ této částice vzhledem k vybranému bodu zbytku soustavy (polohový vektor melounu vůči středu Země). Změna potenciální energie soustavy při přesunu částice z polohy $\boldsymbol{r}_i$ do polohy $\boldsymbol{r}_f$ po křivce $\mathscr{C}$ je

$$\Delta E_p = -W = -\int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \qquad (8.5)$$

Tento integrál však díky konzervativnosti interakčních sil $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ a $-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ nezávisí na tvaru křivky $\mathscr{C}$ a změna potenciální energie souvisí pouze s polohou jejího počátečního a koncového bodu. Znamená to tedy, že každé konfiguraci soustavy lze přisoudit určitou hodnotu potenciální energie E_p? Odpověď je kladná.

Velmi často se setkáváme se zvlášť jednoduchými případy soustav, jejichž konfiguraci lze popsat jedinou skalární veličinou, tzv. **konfigurační proměnnou**. Označme ji pro jednoduchost symbolem x, i když nemusí nutně jít o x-ovou souřadnici. (V případě soustavy meloun+Země jí může být například vzdálenost melounu od povrchu Země, pro soustavu vzniklou připoutáním tělesa k Zemi pružinou může mít x význam prodloužení pružiny, u soustavy planeta + Země pak význam vzdálenosti středů obou těles, apod.) Závisí-li navíc konzervativní interakční síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ pouze na této jediné proměnné, velmi často se výpočet změny potenciální energie zjednodušuje do tvaru analogického rov. (7.27):

$$\Delta E_p = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (8.6)$$

Tíhová potenciální energie

Uvažujme nyní částici o hmotnosti m pohybující se v blízkosti povrchu Země. Soustavu souřadnic zvolme tak, aby osa y směřovala svisle vzhůru. Za konfigurační proměnnou soustavy částice + Země můžeme zvolit y-ovou souřadnici částice. Při pohybu částice z bodu (x_i, y_i, z_i) do

bodu (x_f, y_f, z_f) závisí totiž práce interakčních sil $m\boldsymbol{g}$ a $-m\boldsymbol{g}$ pouze na hodnotách y_i a y_f (př. 8.1). Odpovídající změnu tíhové potenciální energie soustavy lze tedy určit užitím vztahu (8.6), v němž zaměníme x za y a dosadíme $F = -mg$. Dostáváme

$$\Delta E_p = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)\,dy = mg\int_{y_i}^{y_f} dy = mg[y]_{y_i}^{y_f},$$

a tedy

$$\Delta E_p = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y. \qquad (8.7)$$

Fyzikální význam má pouze změna ΔE_p tíhové potenciální energie (či potenciální energie jiného typu). Abychom však zjednodušili výpočet i další diskusi, můžeme požadovat, aby s každou konfigurací soustavy byla spojena určitá hodnota potenciální energie. Řekněme, že v případě soustavy částice + Země označíme jako E_p hodnotu tíhové potenciální energie příslušnou té konfiguraci, při které je částice v poloze o souřadnici y. Přepišme vztah (8.7) do tvaru

$$E_p - E_{p,i} = mg(y - y_i). \qquad (8.8)$$

Hodnotu $E_{p,i}$ pak chápeme jako tíhovou potenciální energii soustavy v tzv. **referenční konfiguraci**, při níž se částice nachází v **referenčním bodě** o y-ové souřadnici y_i. Obvykle klademe $E_{p,i} = 0$ pro $y_i = 0$. Podle vztahu (8.8) pak je

$$E_p - 0 = mg(y - 0),$$

a tedy

$$E_p(y) = mgy \quad \text{(tíhová potenciální energie).} \qquad (8.9)$$

Ze vztahu (8.9) je vidět, že tíhová potenciální energie soustavy částice+Země závisí pouze na svislé poloze y částice vzhledem k referenční poloze o souřadnici $y = 0$ (tj. na výšce částice nad referenčním bodem).

Pružná potenciální energie

Zabývejme se nyní soustavou kostka + (pružina) + Země, znázorněnou na obr. 8.3. Tuhost pružiny je k. Za konfigurační proměnnou soustavy zvolíme souřadnici x. Při pohybu kostky z bodu x_i do bodu x_f vykonají interakční pružné síly jistou práci. Odpovídající změna potenciální energie soustavy je opět dána vztahem (8.6), do kterého však tentokrát dosadíme $F = -kx$,

$$\Delta E_p = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = \tfrac{1}{2}k[x^2]_{x_i}^{x_f},$$

tj.

$$\Delta E_p = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2. \qquad (8.10)$$

Abychom mohli hovořit o potenciální energii E_p v obecné konfiguraci soustavy určené polohou kostky x, zvolme jako referenční bod rovnovážnou polohu kostky $x_i = 0$ a přisuďme jí nulovou potenciální energii $E_{p,i} = 0$. Ze vztahu (8.10) pak dostaneme

$$E_p - 0 = \tfrac{1}{2}kx^2 - 0,$$

odkud

$$E_p(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \quad \text{(pružná potenciální energie).} \qquad (8.11)$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 8.1: *Užití pojmu „potenciální energie"*

Potenciální energie je spojena se soustavou jako celkem. Za jistých okolností ji však můžeme spojovat s některou z částí soustavy. Můžeme třeba říci: „Jablko na stromě má tíhovou potenciální energii 30 J." Taková tvrzení jsou často přijatelná (například u soustav tvořených dvěma částicemi s velmi rozdílnými hmotnostmi). Musíme však mít stále na paměti, že potenciální energie je charakteristikou celé soustavy, v našem případě soustavy jablko+Země. Dále nesmíme zapomínat, že hovořit o potenciální energii objektu či soustavy (v příkladu s jablkem na stromě hodnota 30 J) má smysl *jen tehdy*, je-li zvolené referenční konfiguraci přisouzena referenční hodnota potenciální energie.

PŘÍKLAD 8.2

Lenochod o hmotnosti 2,0 kg se drží větve, která je 5,0 m vysoko nad zemí (obr. 8.6).

(a) Jaká je tíhová potenciální energie E_p soustavy lenochod+ +Země, volíme-li za referenční bod místo o souřadnici $y = 0$, ležící (1) na povrchu Země, (2) na podlaze balkonu, jejíž úroveň je ve výšce 3,0 m nad zemí, (3) na větvi, (4) ve výšce 1,0 m nad větví? Bodu $y = 0$ přisuzujeme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie.

ŘEŠENÍ: Pomocí vztahu (8.9) vypočteme E_p pro každou volbu polohy počátku souřadnicové osy y, $y = 0$. V případě (1) je lenochod v poloze $y = 5{,}0$ m a platí

$$E_p = mgy = (2{,}0\,\text{kg}) \cdot (9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(5{,}0\,\text{m}) = \\ = 98\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V dalších případech je

(2) $E_p = mgy = mg(2{,}0\,\text{m}) = 39\,\text{J}$,

(3) $E_p = mgy = mg(0) = 0\,\text{J}$,

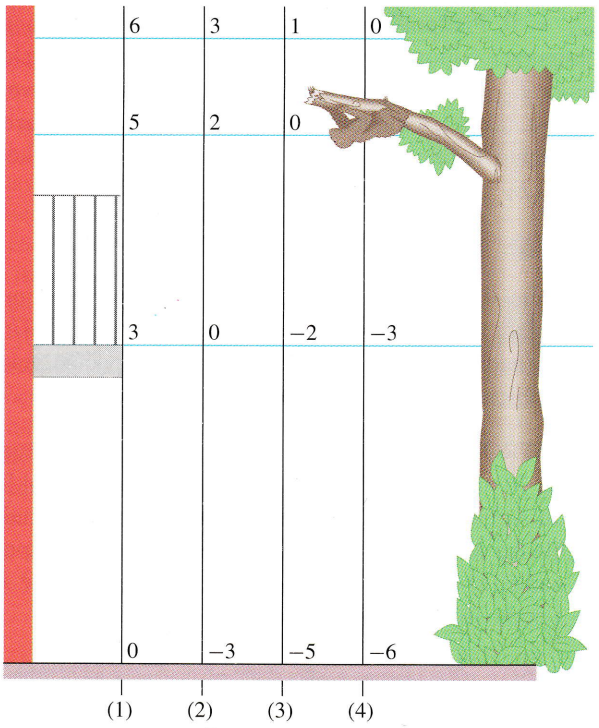
(4) $E_p = mgy = mg(-1{,}0\,\text{m}) = -19{,}6\,\text{J} \doteq \\ \doteq -20\,\text{J}.$ (Odpověď)

(b) Lenochod spadne na zem. Pro každou z předchozích možností volby referenčního bodu určete změnu potenciální energie soustavy lenochod + Země, ke které při pádu lenochoda došlo.

ŘEŠENÍ: Ve všech čtyřech situacích je $\Delta y = -5{,}0\,\text{m}$, takže pro každou z nich podle (8.7) platí

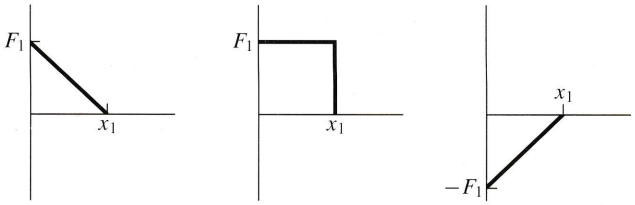
$$\Delta E_p = mg\Delta y = (2{,}0\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})(-5{,}0\,\text{m}) = \\ = -98\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

I když hodnota E_p závisí na volbě polohy počátku soustavy souřadnic, je *změna* potenciální energie na ní nezávislá. Připomeňme, že fyzikální význam má pouze změna ΔE_p potenciální energie, nikoli samotná hodnota E_p, která je závislá na libovůli při volbě referenční konfigurace.



Obr. 8.6 Příklad 8.2. Čtyři možnosti volby referenčního bodu $y = 0$. Osa y je ve všech případech cejchována v metrech.

KONTROLA 2: Částice se pohybuje po ose x z bodu $x = 0$ do bodu x_1. Působí na ni konzervativní síla, která má směr osy x. Obrázek ukazuje tři případy závislosti této síly na souřadnici x. Uspořádejte tyto situace sestupně podle odpovídající změny potenciální energie.



8.4 ZÁKON ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE

Mechanická energie E soustavy je definována jako součet její potenciální energie E_p a celkové kinetické energie E_k všech jejích objektů:

$$E = E_p + E_k \qquad \text{(mechanická energie).} \qquad (8.12)$$

V tomto článku se budeme zabývat otázkou, co se děje s mechanickou energií soustavy, ve které působí výhradně konzervativní interakční síly. (Teprve později budeme uvažovat o vlivu sil nekonzervativních.)

Uvažujme nyní soustavu částic, které neinteragují s okolními objekty (tzv. **izolovaná soustava**). Práce W, kterou konají konzervativní interakční síly, jimiž na sebe navzájem působí částice soustavy, určuje změnu kinetické energie soustavy. Současně ji však lze vyjádřit jako záporně vzatou změnu energie potenciální. Kinetická energie soustavy se tedy mění na úkor její energie potenciální. Skutečně, podle vztahu (7.4) je změna kinetické energie

$$\Delta E_k = W \qquad (8.13)$$

a pro změnu potenciální energie platí podle (8.1)

$$\Delta E_p = -W. \qquad (8.14)$$

Kombinací posledních dvou vztahů dostáváme

$$\Delta E_k = -\Delta E_p. \qquad (8.15)$$

Jinými slovy, vzrůst jedné z obou forem energie je přesně vyvážen poklesem druhé.

Vztah (8.15) lze přepsat takto:

$$E_{k,2} - E_{k,1} = -(E_{p,2} - E_{p,1}), \qquad (8.16)$$

kde se indexy 1 a 2 vztahují ke dvěma různým okamžikům, tj. ke dvěma různým konfiguracím soustavy. Úpravou (8.16) dostaneme

$$E_{k,2} + E_{p,2} = E_{k,1} + E_{p,1} \qquad \text{(zákon zachování mechanické energie).} \qquad (8.17)$$

Levá a pravá strana rovnosti (8.17) představují mechanickou energii v různých okamžicích, a tedy ve dvou různých konfiguracích soustavy. Vztah (8.17) vyjadřuje rovnost obou hodnot:

Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, mění se její kinetická a potenciální energie tak, že jejich součet, tj. mechanická energie soustavy, je stálý.

Kdysi se eskymáci z Aljašky nechali vyhazovat do vzduchu napnutou plachtou, aby po široké pláni dohlédli co nejdále. Dnes se to dělá jen pro zábavu. Všimněme si však, co se při takovém pohybu (viz fotografie) děje z fyzikálního hlediska. Při vzestupu klesá kinetická energie dítěte vzhledem k Zemi a roste tíhová potenciální energie soustavy dítě + Země. Maximální výška výstupu odpovídá situaci, kdy je kinetická energie nulová. Během pádu se sled energiových změn obrací: kinetická energie roste na úkor energie potenciální.

Tento výsledek vyjadřuje **zákon zachování mechanické energie**. (Z toho vidíme, jak vznikl termín „konzervativní" síla: uchovává (lat. conservare) energii.) Pomocí vztahu (8.15) můžeme zákon zachování mechanické energie ještě přepsat ve tvaru

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \qquad (8.18)$$

Tento zákon umožňuje řešit problémy, jejichž řešení pomocí samotných Newtonových zákonů by bylo obtížné:

Zachovává-li se mechanická energie soustavy, můžeme porovnávat součet celkové kinetické a potenciální energie v různých okamžicích, *aniž bychom uvažovali o pohybu soustavy v intervalu mezi těmito okamžiky* a *počítali práci interakčních sil částic soustavy.*

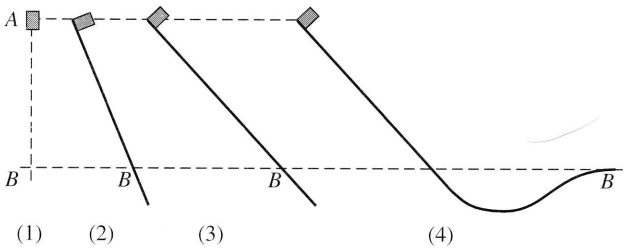
Obr. 8.7 znázorňuje případ, kdy je vhodné zákon zachování mechanické energie použít: kmity kyvadla v tíhovém poli Země. Při kmitavém pohybu kyvadla se mění kinetická i potenciální energie soustavy kyvadlo+Země tak, že součet $E_k + E_p$ je konstantní. Známe-li tíhovou potenciální energii soustavy v konfiguraci, kdy je kulička kyvadla v nejvyšším bodě své trajektorie (obr. 8.7c, g), můžeme určit kinetickou energii kuličky (vzhledem k Zemi) v nejnižším bodě (obr. 8.7a, e) užitím vztahu (8.17).

Zvolme například konfiguraci, při níž je kulička v nejnižší poloze, za referenční a přisuďme jí potenciální energii $E_{p,2} = 0$. Předpokládejme, že při této volbě referenční konfigurace odpovídá nejvyšší poloze kuličky potenciální energie $E_{p,1} = 20\,\text{J}$. Kulička má v nejvyšším bodě nulovou rychlost, takže její kinetická energie je $E_{k,1} = 0$. Dosazením těchto hodnot do vztahu (8.17) zjistíme kinetickou energii $E_{k,2}$ v nejnižším bodě:

$$E_{k,2} + 0 = 0 + 20\,\text{J}, \qquad \text{tj.} \qquad E_{k,2} = 20\,\text{J}.$$

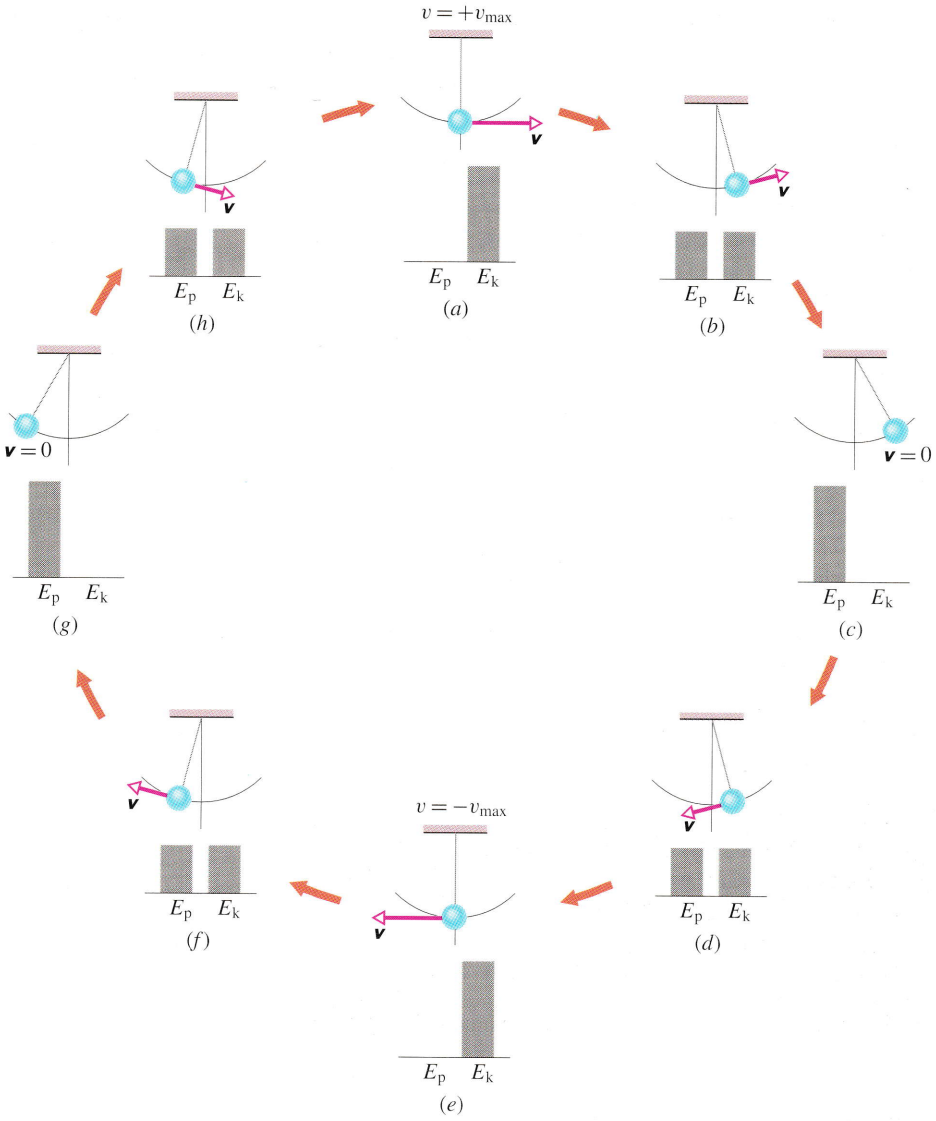
Všimněte si, že tento výsledek jsme získali, aniž bychom se zajímali o pohyb kyvadla mezi nejnižším a nejvyšším bodem (např. obr. 8.7d) a aniž bychom museli počítat práci sil působících na tělesa soustavy.

KONTROLA 3: Následující obrázek ukazuje čtyři situace. V prvé z nich kostka, která byla zpočátku v klidu, volně padá a v ostatních třech sjíždí po dokonale hladké skluzavce. Uspořádejte tyto situace sestupně podle (a) hodnoty kinetické energie kostky v bodě B a podle (b) velikosti rychlosti kostky v bodě B.



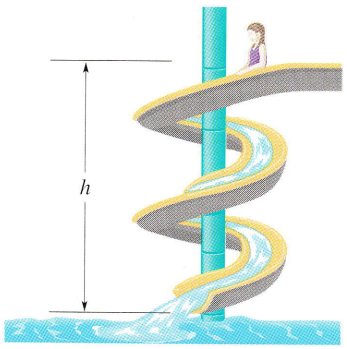
PŘÍKLAD 8.3

Na obr. 8.8 se dítě spouští z vrcholu vodní skluzavky. Dítě je zpočátku v klidu a nejvyšší bod skluzavky je ve výšce $h = 8{,}5\,\text{m}$ nad jejím ústím do bazénu. Předpokládejme, že



Obr. 8.7 Kyvadlo, jehož hmotnost je soustředěna v kuličce upevněné na konci vlákna, koná kmitavý pohyb. Obrázek zachycuje jednu periodu tohoto pohybu. Během periody se hodnoty kinetické i potenciální energie soustavy kyvadlo + Země spojitě mění, ale její celková mechanická energie zůstává zachována. Pro názornost můžeme použít i takovou představu, že se celková energie E spojitě „přelévá" z jedné formy v druhou (potenciální v kinetickou a naopak). Ve stavech (a) a (e) je celková energie dána pouze energií kinetickou. Kulička je v nejnižším bodě a má největší rychlost. Ve stavech (c) a (g) je naopak celková energie rovna energii potenciální, neboť kulička je v nejvyšším bodě a její rychlost je v tom okamžiku nulová. V případech (b), (d), (f) a (h) tvoří jak kinetická, tak potenciální energie právě polovinu energie celkové. Pokud by se při kmitech kyvadla uplatňovaly třecí síly v závěsu nebo odporová síla vzduchu, energie E by se nezachovávala a kyvadlo by se nakonec zastavilo.

skluzavka je dokonale hladká díky proudu vody, který po ní stéká. Určete, s jakou rychlostí dítě vklouzne do bazénu.



Obr. 8.8 Příklad 8.3. Dítě sjíždí po vodní skluzavce z výšky h.

ŘEŠENÍ: Pokud bychom chtěli tuto úlohu řešit pouze na základě znalostí z kap. 2 až kap. 6, museli bychom obecně pracovat s neznámým vyjádřením tvaru skluzavky a k výsledku, který je na tvaru skluzavky nezávislý, bychom nakonec dospěli po zbytečných výpočtech. Užitím závěrů kap. 7 a kap. 8 ji však vyřešíme snadno. Nejprve si uvědomme, že zanedbáváme třecí sílu. Jedinou silou, kterou na dítě působí skluzavka, je tedy normálová (tlaková) síla, která je neustále kolmá k povrchu skluzavky. Dítě se ovšem pohybuje *podél* skluzavky. Normálová síla je proto stále kolmá k vektoru posunutí a nekoná práci.

Při pohybu dítěte po skluzavce konají práci pouze tíhové síly, které jsou konzervativní. Mechanická energie soustavy dítě + Země se tedy při jízdě dítěte po skluzavce zachovává.

Její hodnota E_d v okamžiku, kdy je dítě v dolním bodě

skluzavky, je stejná jako hodnota E_v v okamžiku, kdy je na vrcholu, tj. $E_d = E_v$. Vyjádříme-li tuto skutečnost pomocí vztahu (8.17), dostaneme

$$E_{k,d} + E_{p,d} = E_{k,v} + E_{p,v},$$

tj.

$$\tfrac{1}{2}mv_d^2 + mgy_d = \tfrac{1}{2}mv_v^2 + mgy_v.$$

Po vydělení této rovnice hmotností m a úpravě máme

$$v_d^2 = v_v^2 + 2g(y_v - y_d)$$

a po dosazení $v_v = 0$ a $y_v - y_d = h$ dostaneme

$$v_d = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(8{,}5\,\mathrm{m})} = \\ = 13\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Stejně velké rychlosti by dítě dosáhlo, kdyby z výšky 8,5 m spadlo. Na skutečné skluzavce se však přece jen nějaké třecí síly uplatňují, takže rychlost dítěte nebude tak velká.

Již jsme se zmínili, že řešení tohoto problému pomocí Newtonových zákonů by sice bylo možné, ale zbytečně zdlouhavé. Užitím zákona zachování mechanické energie jsme je získali velmi jednoduše. Kdybychom se však zajímali o to, za jak dlouho dítě po skluzavce sjede, pak by nás „energiová metoda" k výsledku nepřivedla. Abychom dobu jízdy zjistili, museli bychom znát tvar skluzavky a provést poměrně složitý výpočet.

PŘÍKLAD 8.4

Pružina nabité vzduchovky je oproti výchozímu nenapjatému stavu stlačena o délku $d = 3{,}2\,\mathrm{cm}$. Náboj má hmotnost $m = 12\,\mathrm{g}$. S jakou rychlostí opustí náboj po výstřelu hlaveň? Tuhost pružiny je $k = 7{,}5\,\mathrm{N\cdot cm^{-1}}$. Předpokládejme, že hlaveň je při výstřelu vodorovná, tření při pohybu náboje je zanedbatelné a že po výstřelu zůstane pružina v nenapjatém stavu.

ŘEŠENÍ: Označme E_i mechanickou energii soustavy náboj + puška v počátečním stavu (před výstřelem) a E_f její mechanickou energii v koncovém stavu (poté, co náboj opustil hlaveň). V počátečním stavu je mechanická energie dána pouze potenciální energií stlačené pružiny $E_{p,i} = \tfrac{1}{2}kd^2$, v koncovém stavu pak pouze kinetickou energií náboje $E_{k,f} = \tfrac{1}{2}mv^2$. Poněvadž se mechanická energie soustavy zachovává, platí

$$E_i = E_f,$$
$$E_{p,i} + E_{k,i} = E_{p,f} + E_{k,f},$$

a tedy

$$\tfrac{1}{2}kd^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}mv^2.$$

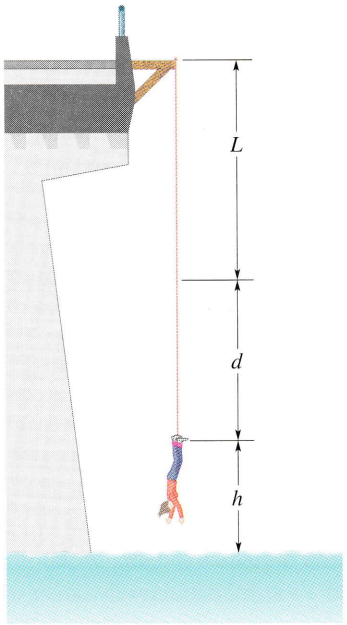
Řešením této rovnice vzhledem k neznámé v dostáváme

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (0{,}032\,\mathrm{m})\sqrt{\frac{(750\,\mathrm{N\cdot m^{-1}})}{(12{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{kg})}} = \\ = 8{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 8.5

Vyznavač bungee-jumpingu se chystá ke skoku z mostu vysokého 45,0 m. Jeho hmotnost je $m = 61{,}0\,\mathrm{kg}$ a pružné lano, které hodlá použít, má v nenapjatém stavu délku $L = 25{,}0\,\mathrm{m}$. Předpokládejme, že se lano řídí Hookovým zákonem* a jeho tuhost je $160\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Tělo skokana považujeme při pohybu za bodový objekt.

(a) Jaká je výška chodidel skokana nad hladinou řeky, tekoucí pod mostem, v okamžiku, kdy se jeho let zastaví v dolním bodě obratu?



Obr. 8.9 Příklad 8.5. Skokan bungee-jumpingu v dolním bodě obratu.

ŘEŠENÍ: V souhlasu s obr. 8.9 označme d prodloužení lana v okamžiku dosažení bodu obratu. Změna tíhové potenciální energie soustavy skokan + Země vzhledem k počátečnímu stavu, kdy skokan stál na mostě, je

$$\Delta E_{p,g} = mg\Delta y = -mg(L + d).$$

Změna pružné potenciální energie je

$$\Delta E_{p,p} = \tfrac{1}{2}kd^2.$$

Počátečnímu stavu i bodu obratu přísluší nulová kinetická energie.

* Ve skutečnosti se guma chová mnohem složitěji. Nesvěřujte svůj život první aproximaci.

Užitím (8.18) dostáváme pro soustavu skokan + Země vztahy

$$\Delta E_k + \Delta E_{p,p} + \Delta E_{p,g} = 0,$$
$$0 + \tfrac{1}{2}kd^2 - mg(L + d) = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}kd^2 - mgL - mgd = 0.$$

Dosazením zadaných údajů pak získáme kvadratickou rovnici

$$\tfrac{1}{2}(160\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})d^2 - (61{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(25{,}0\,\mathrm{m}) - \\ - (61{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})d = 0.$$

Jejím řešením dostaneme

$$d = 17{,}9\,\mathrm{m}.$$

(Druhý kořen rovnice je záporný a pro naši úlohu nemá význam.) Chodidla skokana tedy budou v hloubce $(L + d) = 42{,}9$ m pod úrovní mostu, a tedy

$$h = 45{,}0\,\mathrm{m} - 42{,}9\,\mathrm{m} = 2{,}1\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Velmi vysoký skokan by se tedy mohl i namočit.*

(b) Jaká je výsledná síla působící na skokana v nejnižším bodě? (Je nulová?)

ŘEŠENÍ: Na skokana působí směrem dolů tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ o velikosti $mg = 597{,}8$ N a směrem vzhůru pružná síla, jejíž velikost v bodě obratu je podle Hookova zákona rovna

$$F = kd = (160\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}})(17{,}9\,\mathrm{m}) = 2\,864\,\mathrm{N}.$$

Celková síla má velikost

$$2\,864\,\mathrm{N} - 597{,}8\,\mathrm{N} \doteq 2\,270\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná síla, která působí na skokana v nejnižším bodě jeho trajektorie, je tedy v porovnání s jeho váhou téměř čtyřnásobná. Umíte si jistě představit, jak to s ním „trhne" vzhůru.

* V případě, že výšku skokana l nepovažujeme za zanedbatelnou, měli bychom výpočet zpřesnit. Hmotný bod, kterým skokana nahrazujeme při použití zákona zachování mechanické energie, umístíme do jeho těžiště, které leží zhruba v polovině jeho výšky. Za předpokladu, že před seskokem odvážlivec na mostě stojí a v bodě obratu naopak visí na laně podle obr. 8.9, je $\Delta y = -(L+d+l)$. V kvadratické rovnici pro neznámou veličinu d je pak třeba zaměnit člen $-mgL$ za $-mg(L+l)$. Proveďte tuto záměnu a rovnici vyřešte. Vezměte v úvahu přesnost zadání výchozích hodnot a posuďte, má-li toto zpřesnění vliv na výsledek.

RADY A NÁMĚTY

Bod 8.2: *Zachování mechanické energie*

Při řešení úloh pomocí zákona zachování mechanické energie si vždy položme následující otázky:

Jak je definována soustava, na kterou hodláme zákon zachování mechanické energie aplikovat? Je třeba, abychom uměli vymezit soustavu a její okolí. Představme si vždy uzavřenou plochu zakreslenou tak, že všechno, co je uvnitř, patří do naší soustavy, zatímco všechno ostatní náleží jejímu okolí. V př. 8.3 tvoří soustavu *dítě + Země*. V př. 8.4 je to dvojice *náboj + puška*. V př. 8.5 pak *skokan + (lano) + Země*.

Jsou ve hře třecí nebo odporové síly? Působí-li uvnitř soustavy třecí nebo odporové síly, její mechanická energie se nezachovává.

Platí pro naši soustavu zákon zachování mechanické energie? Zákon zachování mechanické energie platí především pro *izolované soustavy*, tj. v situacích, kdy na objekty soustavy nepůsobí žádné *vnější síly* (částice soustavy neinteragují s jejím okolím). Pro soustavy neizolované jej lze použít ve speciálních případech, kdy vnější síly nekonají práci. Kdybychom třeba v př. 8.4 zvolili jako zkoumanou soustavu samotný náboj, nebylo by možné zákona zachování mechanické energie použít. Na náboj totiž působí pružná síla, která koná práci. Jeho mechanická energie, která je shodná s jeho energií kinetickou, se nezachovává.

Jaký je počáteční a koncový stav soustavy? Stav soustavy se s časem mění. Z jistého počátečního stavu (či konfigurace) dospěje soustava do stavu koncového. Při aplikaci zákona zachování mechanické energie obvykle využíváme skutečnosti, že mechanická energie má v obou těchto stavech stejnou hodnotu E. Je však třeba si předem ujasnit, jak jsou tyto dva stavy definovány.

8.5 INTERPRETACE KŘIVKY POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Vraťme se k problematice izolované soustavy, v níž působí konzervativní interakční síly. Mechanická energie takové soustavy, daná součtem její celkové kinetické energie a všech typů její energie potenciální, se zachovává. Uvažujme velmi speciální situaci, kdy hmotnost jedné z částic soustavy je velmi malá ve srovnání s celkovou hmotností ostatních objektů, jako např. u soustavy typu jablko+Země. V tomto přiblížení (čl. 8.1) je změna kinetické energie soustavy dána změnou kinetické energie uvažované částice, tj. prací konzervativních sil působících na částici. Předpokládejme dále, že pohyb částice je vázán na osu x. V uvedeném přiblížení lze vyjádřit potenciální energii soustavy $E_p(x)$ jako funkci polohy částice x, která tak hraje roli konfigurační proměnné. Ukazuje se, že celou řadu informací

o pohybu částice lze získat již z průběhu křivky $E_p(x)$. Než se však do takové diskuse pustíme, potřebujeme ještě další vztahy.

Analytické vyjádření síly

Vztah (8.6) umožňuje vyjádřit potenciální energii v jednorozměrné situaci, známe-li sílu $F(x)$. Uvažujme však opačný problém. Předpokládejme, že známe průběh potenciální energie $E_p(x)$ a potřebujeme vyjádřit sílu.

Síla $F(x)$, působící na částici pohybující se podél osy x, vykoná při jejím posunutí o Δx práci $W = F(x)\Delta x$. Podle rov. (8.1) je

$$\Delta E_p(x) = -W = -F(x)\Delta x.$$

Vyjádříme $F(x)$ a provedeme limitní přechod $\Delta x \to 0$. Dostaneme

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \qquad \text{(jednorozměrný pohyb).} \qquad (8.19)$$

Tento výsledek můžeme ověřit například pro pružnou potenciální energii $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Podle očekávání dostaneme ze vztahu (8.19) výraz pro pružnou sílu $F(x) = -kx$, tj. Hookův zákon. Podobně pro tíhovou potenciální energii $E_p(x) = mgx$ částice o hmotnosti m ve výšce x nad zemským povrchem dostaneme z (8.19) tíhovou sílu $F(x) = -mg$ působící na částici.

Křivka potenciální energie

Na obr. 8.10a vidíme graf závislosti potenciální energie $E_p(x)$ na poloze částice, která koná jednorozměrný pohyb, při kterém na ni působí konzervativní síla $F(x)$ (resp. konzervativní síly, jejichž výslednice je $F(x)$). Průběh síly $F(x)$ můžeme snadno určit graficky tak, že budeme zjišťovat směrnici křivky $E_p(x)$ v jejích různých bodech (vztah (8.19)). Na obr. 8.10b je graf funkce $F(x)$ získaný právě takovým způsobem.

Body obratu

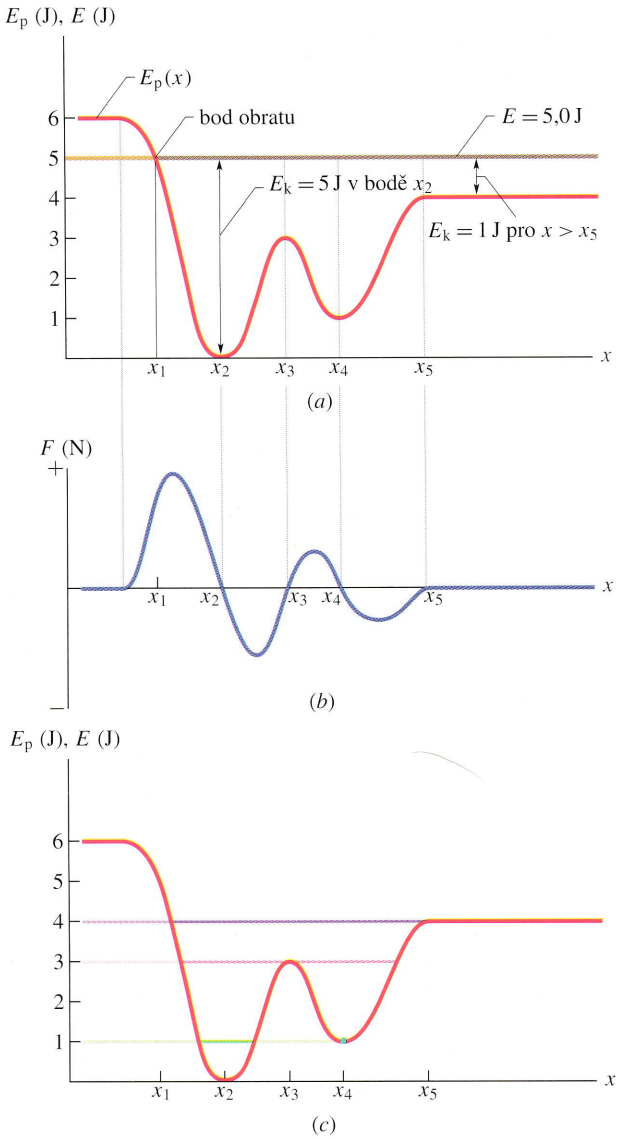
Nepůsobí-li v izolované soustavě nekonzervativní síly, její mechanická energie E se zachovává:

$$E_p(x) + E_k(x) = E. \qquad (8.20)$$

Funkce $E_k(x)$ popisuje *závislost kinetické energie* částice na její poloze x. Vztah (8.20) můžeme přepsat do tvaru

$$E_k(x) = E - E_p(x). \qquad (8.21)$$

Předpokládejme, že hodnota E (mějme na paměti, že je konstantní) činí 5,0 J. Tato hodnota je vyznačena vodorovnou přímkou, která prochází značkou 5,0 J na energiové ose (obr. 8.10a).



Obr. 8.10 (a) Graf závislosti potenciální energie $E_p(x)$ soustavy na poloze částice, která se pohybuje po ose x. Částice náleží do soustavy. Nepůsobí-li v soustavě třecí síly, zachovává se její mechanická energie. (b) Graf závislosti síly $F(x)$, působící na částici, na její poloze. Graf je konstruován z hodnot směrnic tečen ke křivce $E_p(x)$ v různých bodech. (c) Graf $E_p(x)$ s vyznačením tří různých hodnot energií E.

Rovnice (8.21) dává návod, jak určit kinetickou energii částice v poloze x: na křivce $E_p(x)$ najdeme hodnotu E_p odpovídající této poloze a odečteme ji od E. Je-li částice např.

v kterémkoli bodě vpravo od x_5, je $E_k = 1{,}0\,\text{J}$. Nejvyšší hodnoty (5 J) nabývá E_k, je-li částice v bodě x_2 a nejnižší (0 J), je-li v bodě x_1.

Protože kinetická energie nemůže být záporná (hodnota v^2 je vždy kladná), nemůže se částice nikdy ocitnout vlevo od bodu x_1 (v této oblasti poloh by byl rozdíl $E - E_p$ záporný). Blíží-li se částice k bodu x_1, její kinetická energie klesá, částice se zpomaluje. Při $E_k = 0$ je její rychlost nulová.

Všimněme si, že v okamžiku, kdy částice dosáhne bodu x_1, působí na ni síla, daná vztahem (8.19). Tato síla míří ve směru kladné osy x (směrnice dE_p/dx je záporná). To znamená, že částice nezůstane v klidu v bodě x_1, ale začne se pohybovat doprava, tj. opačným směrem. Polohu x_1 proto nazveme **bodem obratu**, tj. místem, kde kinetická energie částice nabývá nulové hodnoty a směr jejího pohybu se obrací.

Vpravo od bodu x_1 již žádný bod obratu není. Pohyb částice směrem vpravo bude pokračovat donekonečna.

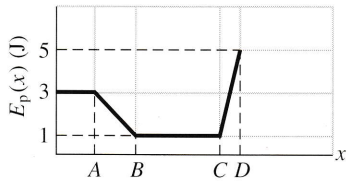
Rovnovážné konfigurace

V grafu potenciální energie $E_p(x)$ na obr. 8.10c jsou vyznačeny tři další hodnoty mechanické energie E. Všimněme si podrobněji jednotlivých situací, abychom zjistili, jaký vliv má volba hodnoty E na pohyb částice. Je-li $E = 4{,}0\,\text{J}$ (fialová čára), posune se bod obratu z polohy x_1 do nové polohy, která leží mezi x_1 a x_2. Dále vidíme, že v každém bodě ležícím napravo od x_5 je potenciální energie konstantní a její hodnota splývá s hodnotou energie mechanické. Kinetická energie částice je nulová, stejně jako síla $\boldsymbol{F}(x)$. Částice setrvává v klidu. V takovém případě hovoříme o **volné** (neboli indiferentní) **rovnovážné poloze**. Příkladem je kulička ležící na vodorovném stole.

Pro $E = 3{,}0\,\text{J}$ (růžová čára) existují dva body obratu. Jeden z nich leží mezi x_1 a x_2, druhý mezi x_4 a x_5. V bodě x_3 je navíc $E_k = 0$. Nachází-li se částice právě v tomto bodě, je $F(x) = 0$ a částice setrvává v klidu. Při sebemenším vysunutí částice z této polohy na kteroukoli stranu (například působením náhodných vlivů) však vznikne nenulová síla $F(x)$ ve směru původní náhodné výchylky a částice se začne pohybovat. Takovou polohu proto nazýváme **vratkou** (neboli labilní) **rovnovážnou polohou**. Ve vratké rovnovážné poloze je například malá kulička položená na vrch velké kulečníkové koule.

Nakonec uvažujme chování částice při hodnotě $E = 1{,}0\,\text{J}$ (zelená čára). Vložíme-li částici do polohy x_4, částice v ní setrvá a sama od sebe se z ní nemůže vychýlit v žádném směru. Všem bodům v blízkém okolí x_4 by totiž odpovídala záporná kinetická energie. Vysuneme-li částici z polohy x_4 vlevo či vpravo, začne na ni působit vratná síla a částice se bude pohybovat zpět k bodu x_4. Hovoříme o tzv. **stálé** (neboli stabilní) **rovnovážné poloze**. Příkladem může být kulička na dně duté polokoule. Částice na dně *potenciálové jámy* tvaru „poháru" s minimem v bodě x_2 se bude pohybovat v rozmezí bodů obratu ležících někde mezi x_2 a x_1, resp. x_2 a x_3.

KONTROLA 4: Na obrázku je křivka potenciální energie $E_p(x)$ pro případ jednorozměrného pohybu částice. (a) Uspořádejte úseky AB, BC a CD sestupně podle velikosti síly působící na částici. (b) Jaký směr má síla působící na částici v úseku AB?



Mechanická energie dvoučásticové soustavy

V tomto odstavci se přesnějšími úvahami vracíme k problematice zákona zachování mechanické energie dvoučásticových izolovaných soustav s konzervativní interakcí a k podrobnější diskusi o oprávněnosti přiblížení, jichž jsme používali u soustav typu těleso + Země, charakterizovaných velmi malou hodnotou poměru hmotností m/M.

Uvažujme tedy libovolnou izolovanou soustavu složenou ze dvou těles o hmotnostech m a M, která na sebe navzájem působí interakčními (vnitřními, interními) silami jakékoli povahy. Nechť $\boldsymbol{F}_{int}$ je síla, jíž působí těleso M na m a $-\boldsymbol{F}_{int}$ označuje působení tělesa m na M. Při změnách konfigurace soustavy konají obě tyto síly práci. Práce síly $\boldsymbol{F}_{int}$ je podle vztahu (7.4) rovna změně kinetické energie tělesa m, zatímco práce síly $-\boldsymbol{F}_{int}$ určuje změnu kinetické energie tělesa M. Celková práce interakčních sil W_{int} tedy představuje změnu kinetické energie soustavy vzhledem k libovolně zvolené inerciální vztažné soustavě. Předpokládejme nejprve pro jednoduchost, že jiné interakční síly než $\boldsymbol{F}_{int}$ a $-\boldsymbol{F}_{int}$ v naší soustavě nepůsobí, a označme zrychlení těles m a M jako $\boldsymbol{a}_m$ a $\boldsymbol{a}_M$. Platí

$$m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{F}_{int}$$

a

$$M\boldsymbol{a}_M = -\boldsymbol{F}_{int}.$$

Odtud

$$m\boldsymbol{a}_m + M\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{0}.$$

Označíme-li $\Delta\boldsymbol{v}_m$ a $\Delta\boldsymbol{v}_M$ změny rychlosti těles m a M při určité změně konfigurace soustavy, vidíme, že

$$m\Delta\boldsymbol{v}_m + M\Delta\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{0}$$

a veličina

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_m + M\boldsymbol{v}_M,$$

zvaná **hybnost** soustavy, se tedy zachovává. Tato skutečnost umožňuje zvolit pro řešení našeho problému takovou inerciální vztažnou soustavu* $\mathscr{S}$, ve které je $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

Opravdu, pokud bychom jako $\bar{\boldsymbol{v}}_m$ a $\bar{\boldsymbol{v}}_M$ označili rychlosti těles m a M vzhledem k inerciální vztažné soustavě $\bar{\mathscr{S}}$, na jejíž konkrétní volbu jsme nekladli žádné požadavky, bude celková hybnost soustavy těles nulová v každé vztažné soustavě $\mathscr{S}$, která se vůči $\bar{\mathscr{S}}$ pohybuje rychlostí

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{m\bar{\boldsymbol{v}}_m + M\bar{\boldsymbol{v}}_M}{m + M}.$$

Tato rychlost bude konstantní, neboť celková hybnost $\bar{\boldsymbol{p}}_0$ izolované soustavy dvou těles se zachovává. Rychlosti těles v nové vztažné soustavě jsou $\boldsymbol{v}_m = \bar{\boldsymbol{v}}_m - \boldsymbol{v}_0$ a $\boldsymbol{v}_M = \bar{\boldsymbol{v}}_M - \boldsymbol{v}_0$. Platí

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= m\boldsymbol{v}_m + M\boldsymbol{v}_M = m(\bar{\boldsymbol{v}}_m - \boldsymbol{v}_0) + M(\bar{\boldsymbol{v}}_M - \boldsymbol{v}_0) = \\
&= m\left(\bar{\boldsymbol{v}}_m - \frac{m\bar{\boldsymbol{v}}_m + M\bar{\boldsymbol{v}}_M}{m + M}\right) + M\left(\bar{\boldsymbol{v}}_M - \frac{m\bar{\boldsymbol{v}}_m + M\bar{\boldsymbol{v}}_M}{m + M}\right) = \\
&= \frac{m}{m + M}(m\bar{\boldsymbol{v}}_m + M\bar{\boldsymbol{v}}_m - m\bar{\boldsymbol{v}}_m - M\bar{\boldsymbol{v}}_M) + \\
&\quad + \frac{M}{m + M}(m\bar{\boldsymbol{v}}_M + M\bar{\boldsymbol{v}}_M - m\bar{\boldsymbol{v}}_m - M\bar{\boldsymbol{v}}_M) = \\
&= \frac{mM}{m + M}(\bar{\boldsymbol{v}}_m - \bar{\boldsymbol{v}}_M) + \frac{mM}{m + M}(\bar{\boldsymbol{v}}_M - \bar{\boldsymbol{v}}_m) = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Rychlosti $\boldsymbol{v}_m$ a $\boldsymbol{v}_M$ nyní vyjádříme pomocí rychlosti $\boldsymbol{v}$ tělesa m vzhledem k tělesu M,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_M.$$

Ve vztažné soustavě $\mathscr{S}$ platí

$$m\boldsymbol{v}_m + M\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{0}.$$

Řešením posledních dvou rovnic vzhledem k neznámým $\boldsymbol{v}_m$ a $\boldsymbol{v}_M$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_m &= \frac{M\boldsymbol{v}}{m + M}, \\
\boldsymbol{v}_M &= -\frac{m\boldsymbol{v}}{m + M}.
\end{aligned}$$

Celková kinetická energie soustavy těles měřená vzhledem k $\mathscr{S}$ je pak

$$\begin{aligned}
E_\mathrm{k} &= \tfrac{1}{2}mv_m^2 + \tfrac{1}{2}Mv_M^2 = \\
&= \frac{1}{2}\frac{m(Mv)^2}{(m + M)^2} + \frac{1}{2}\frac{M(-mv)^2}{(m + M)^2} = \frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}v^2.
\end{aligned}$$

* Nazývá se **těžišťová**, protože vůči ní je v klidu těžiště soustavy; to však zavedeme až v čl. 9.2. Srovnej př. 9.10.

Veličina

$$m_\mathrm{red} = \frac{mM}{m + M}$$

charakterizuje soustavu jako celek a nazývá se **redukovaná hmotnost** soustavy. Změna kinetické energie naší soustavy při změně její konfigurace je určena celkovou prací W_int interakčních sil $\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$ a $-\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$, tj.

$$\tfrac{1}{2}m_\mathrm{red}\Delta(v^2) = W_\mathrm{int}.$$

Tento závěr je platný bez ohledu na povahu interakčních sil. Pohybuje-li se během změny konfigurace soustavy těleso m po křivce $\mathscr{C}_m$ a těleso M po křivce $\mathscr{C}_M$, platí

$$W_\mathrm{int} = \int_{\mathscr{C}_m} \boldsymbol{F}_\mathrm{int} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_m + \int_{\mathscr{C}_M} -\boldsymbol{F}_\mathrm{int} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_M.$$

Označíme-li jako $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_M$ vektor, který udává polohu tělesa m vzhledem k M a určuje tedy konfiguraci soustavy, dostaneme

$$W_\mathrm{int} = \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}_\mathrm{int} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

kde $\mathscr{C}$ je křivka, po které se pohybuje těleso m vzhledem k M. (Pro lepší pochopení předchozího výpočtu se vraťte k poznámce o křivkových integrálech v čl. 7.5.)

Jsou-li však síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$ a $-\boldsymbol{F}_\mathrm{int}$ konzervativní, lze jejich práci W_int zapsat jako záporně vzatou změnu odpovídajícího typu potenciální energie soustavy:

$$W_\mathrm{int} = -\Delta E_\mathrm{p}.$$

Dostáváme tak zákon zachování mechanické energie dvoučásticové izolované soustavy ve tvaru

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}\Delta(v^2) + \Delta E_\mathrm{p} = 0.$$

Působí-li v soustavě více typů konzervativních interakčních sil, je třeba náš výsledek zobecnit:

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}\Delta(v^2) + \Delta E_{\mathrm{p},1} + \Delta E_{\mathrm{p},2} + \ldots = 0.$$

Vyjádření zákona zachování mechanické energie lze zobecnit i na vícečásticové soustavy. Pojem redukované hmotnosti, který je velmi užitečný při praktických výpočtech u dvoučásticových soustav, však nemá analogii u soustav vícečásticových.

Mechanická energie dvoučásticové (resp. vícečásticové) izolované soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly, je definována jako součet kinetických energií obou (všech) částic a všech typů potenciální energie soustavy, příslušejících jednotlivým dvojicím konzervativních interakčních sil. Při změnách konfigurace soustavy se mechanická energie nemění.

S pojmem redukované hmotnosti je užitečné se vrátit k úvahám o přiblíženích, o nichž jsme se již předběžně zmínili v článku 8.1 při rozboru energiové bilance soustav typu těleso + Země. Tyto soustavy se vyznačují mizivou hodnotou poměru m/M. Upravme výraz pro redukovanou hmotnost na tvar:

$$m_{\mathrm{red}} = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+\frac{m}{M}}.$$

Z tohoto vyjádření je ihned patrný vliv podílu m/M na odchylku redukované hmotnosti soustavy od hmotnosti tělesa m. Veličina $x = \frac{m}{M}$ je velmi malá, takže v rozvoji funkce

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots$$

lze členy s vyššími mocninami proměnné x zanedbat. Pro redukovanou hmotnost dvoučásticové soustavy pak dostáváme

$$m_{\mathrm{red}} \approx m\left(1 - \frac{m}{M}\right) \approx m.$$

Náhradou redukované hmotnosti hmotností méně hmotného tělesa se tedy při výpočtu kinetické energie soustavy dopouštíme relativní chyby m/M. Tato hodnota například pro soustavu tvořenou tělesem o hmotnosti $m = 5\,\mathrm{kg}$ a Zemí, jejíž hmotnost je $M \doteq 6{\cdot}10^{24}\,\mathrm{kg}$, je zhruba 10^{-24}. Namísto o celkové kinetické energii soustavy těleso + Země pak můžeme hovořit o kinetické energii tělesa vzhledem k Zemi (kap. 7).

Na závěr toho odstavce si uvědomme ještě jeden aspekt pojmu redukovaná hmotnost. Pozorovatel spojený s tělesem M a sledující pohyb částice m nemůže pro tuto částici přímo použít druhý Newtonův zákon, neboť vztažná soustava spojená s M je neinerciální (na těleso M působí síla $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$). Pomocí druhého Newtonova zákona lze však vyjádřit zrychlení $\boldsymbol{a}_m$ a $\boldsymbol{a}_M$ (viz výše) a určit zrychlení $\boldsymbol{a}$ částice m vzhledem k vztažné soustavě spojené s M:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_M = \frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}}{m} - \frac{(-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}})}{M} =$$
$$= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}} = \frac{1}{m_{\mathrm{red}}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}},$$

odkud

$$m_{\mathrm{red}}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}.$$

Tento vztah má formálně tvar zápisu druhého Newtonova zákona pro částici o hmotnosti m_{red}, na kterou působí síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$. Neinerciálnost vztažné soustavy spojené s tělesem M, způsobenou přítomností tělesa m, lze tedy při formulaci pohybového zákona pro těleso m „vykompenzovat" záměnou jeho skutečné hmotnosti redukovanou hmotností soustavy. Víme již, že relativní chyba, které se dopustíme zanedbáním této neinerciálnosti a dosazením $m_{\mathrm{red}} \approx m$, je řádu m/M. Je-li v roli tělesa M Země, je tato nepřesnost opět zcela neměřitelná. Je zřejmé, že neinerciálnost laboratorní vztažné soustavy, spojené s povrchem Země, je v daleko větší míře způsobena pohybem Země kolem Slunce a především její vlastní rotací (pozn. pod čarou u čl. 5.2).

8.6 PRÁCE VNĚJŠÍCH A NEKONZERVATIVNÍCH SIL

Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, je její mechanická energie konstantní. Jsou-li však interakční síly v soustavě nekonzervativní, nebo působí-li na částice soustavy vnější síly, které konají nenulovou práci, nebude se mechanická energie soustavy zachovávat. V takových případech *nemůžeme* použít vztahů (8.17) a (8.18). Co potom můžeme říci o změnách energie soustavy? Abychom na tuto otázku odpověděli, všimneme si odděleně obou situací, v nichž se mechanická energie soustavy nezachovává. Zvláštní pozornost budeme věnovat případu, kdy v soustavě působí třecí síly.

Práce nekonzervativních interakčních sil

Představme si, že zvedáme kuželkovou kouli svisle vzhůru. Soustavu koule+člověk+Země můžeme opět považovat za izolovanou. Můžeme si představit, že koule a Země takto interagují prostřednictvím vazby, kterou zajišťuje člověk. Působí-li člověk na kouli silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$, změní se tlaková síla, jíž působí na podložku pod svýma nohama, o vektor $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$. Obě tyto síly jsou *vnitřními* silami soustavy. Při zvedání koule dochází ke změnám konfigurace soustavy. Tíhové síly při tom vykonají práci W_{g}, která určuje změnu tíhové potenciální energie soustavy $\Delta E_{\mathrm{p,g}} = -W_{\mathrm{g}}$. Celkovou práci *obou* sil $\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ i $-\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ označme W_{int}. Pokud tyto síly nejsou konzervativní, nelze jim přisoudit potenciální energii. Víme, že mechanická energie soustavy je součtem kinetických energií všech objektů a všech druhů potenciální energie příslušných *konzervativním interakčním silám*. Mechanická energie naší soustavy je tedy součtem její tíhové potenciální energie a kinetických energií koule a zbytku soustavy. Ukážeme, že se nebude zachovávat, ale bude se měnit právě na úkor práce nekonzervativních sil

$\boldsymbol{F}_{\text{int}}$ a $-\boldsymbol{F}_{\text{int}}$: vzhledem k zanedbatelnému poměru hmotnosti koule a zbytku soustavy je změna kinetické energie soustavy při zvedání koule dána změnou kinetické energie koule samotné. Ze zkušenosti víme, že kouli můžeme v rámci tohoto experimentu považovat za bodový objekt. Užitím vztahu (7.15) mezi prací a kinetickou energií dostaneme změnu kinetické energie koule:

$$\Delta E_{\text{k}} = W_{\text{int}} + W_{\text{g}}.$$

Tíhová síla je konzervativní, a tak můžeme práci W_{g} zapsat pomocí odpovídající změny tíhové potenciální energie soustavy koule + člověk + Země:

$$W_{\text{g}} = -\Delta E_{\text{p,g}}. \tag{8.22}$$

Dosazením za W_{g} do rov. (8.22) dostaneme

$$\Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p,g}} = W_{\text{int}}. \tag{8.23}$$

Levá strana této rovnice představuje změnu ΔE mechanické energie soustavy koule + člověk + Země. Vlivem nekonzervativních interakčních sil v soustavě se tedy obecně mění mechanická energie soustavy.

Práce vnější síly

Stejně jako v předchozím odstavci uvažujme i nyní soustavu koule + Země. Místo člověka, který byl součástí soustavy a působil na kouli silou $\boldsymbol{F}_{\text{int}}$, bude však na kouli působit jiné těleso, které do soustavy nepatří (je součástí jejího okolí). Soustava koule + Země tedy *nebude* izolovaná a o síle $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, kterou působí na kouli vnější těleso, budeme hovořit jako o síle **vnější** (externí). Označme W_{ext} práci, kterou tato síla koná při změnách vzdálenosti koule od povrchu Země. Podle (7.15) opět platí

$$\Delta E_{\text{k}} = W_{\text{ext}} + W_{\text{g}}.$$

Užitím (8.22) dostaneme

$$\Delta E_{\text{k}} = W_{\text{ext}} - \Delta E_{\text{p,g}}$$

a nakonec

$$\Delta E = W_{\text{ext}}. \tag{8.24}$$

Vidíme, že změna mechanické energie neizolované soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly, je rovna práci vykonané vnějšími silami.

Získané závěry lze zobecnit i pro soustavy, které nejsou izolované a v nichž působí jak konzervativní, tak nekonzervativní interakční síly:

Změna mechanické energie soustavy je rovna celkové práci nekonzervativních interakčních sil soustavy a vnějších sil, jimiž na objekty soustavy působí její okolí.

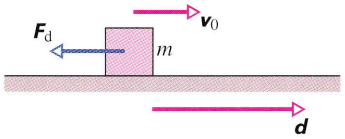
Platí

$$\Delta E = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}. \tag{8.25}$$

Tento vztah platí pro libovolnou soustavu, ať již je tvořena jediným objektem jako v kap. 7, nebo dvěma (či více) objekty, jako například u soustavy koule + Země, jíž jsme se zabývali před chvílí.

Práce třecí síly

Kostka o hmotnosti m na obr. 8.11 klouže po podlaze, která není dokonale hladká. Počáteční rychlost kostky má velikost v_0. Vlivem dynamické třecí síly $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$ se kostka zastaví poté, co urazila dráhu d. Z experimentu víme, že působením třecí síly klesá kinetická energie kostky a soustava kostka + podložka + Země se zahřeje. V kap. 19 až 21 uvidíme, že toto zahřátí souvisí se změnou vnitřní energie těles, způsobenou urychlením neuspořádaného pohybu částic, z nichž jsou tělesa složena.



Obr. 8.11 Kostka o hmotnosti m klouže po podlaze, která není dokonale hladká, počáteční rychlostí v_0. Vlivem dynamické třecí síly $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$ se kostka zpomaluje a po posunutí d se zcela zastaví.

Z experimentu je známo i to, že takový proces vzrůstu vnitřní energie soustavy na úkor její energie kinetické je nevratný. Říkáme, že kinetická energie kostky je *rozptylována* (disipována) působením síly $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$, nebo že dochází k energiovým ztrátám. Práce W_{f} třecích sil $\boldsymbol{F}_{\text{d}}$ a $-\boldsymbol{F}_{\text{d}}$, které jsou *nekonzervativními vnitřními* silami soustavy kostka + podložka + Země, je záporná a její velikost je rovna úbytku kinetické energie kostky vzhledem k podložce. Tento úbytek představuje rozptýlenou energii (energiovou ztrátu) a přispívá ke zvýšení vnitřní energie jak kostky, tak i podložky.

Předchozí úvahu objasníme ještě na příkladu kostky z obr. 8.11. Dejme tomu, že jsme při měření změny kinetické energie kostky získali hodnotu $\Delta E_{\text{k}} = -100\,\text{J}$. Tato hodnota představuje současně i práci W_{d} vykonanou silami dynamického tření. Rozptýlená energie je tedy 100 J. O tuto hodnotu vzroste vnitřní energie soustavy kostka + + podložka + Země, tj. $\Delta E_{\text{int}} = 100\,\text{J}$. Předpokládejme dále, že jsme bezprostředně po zastavení kostky zjistili

pomocí přesných kalorimetrických měření, že při brzdění došlo ke zvýšení její vnitřní energie o 60 J. Je zřejmé, že vnitřní energie podložky se zvýšila o 40 J.

Situace na obr. 8.11 je podobná jako na obr. 7.2 v čl. 7.3. Můžeme tedy použít vztah (7.8) se dvěma obměnami. Velikost síly je nyní F_d namísto F a úhel φ mezi silou a posunutím je 180°. Vztah (7.8) pak nabude tvaru

$$\Delta E_k = F_d d \cos 180° = -F_d d. \qquad (8.26)$$

Hodnota součinu $-F_d d$ tedy představuje pokles kinetické energie kostky na obr. 8.11 vlivem působení třecích sil. Kdyby se měnila i potenciální energie soustavy (kostka by například sjížděla po šikmé rampě), představovala by tato hodnota pokles mechanické energie soustavy E vlivem třecích sil, tj. energiovou ztrátu:

$$\Delta E = -F_d d \qquad \text{(rozptýlená mechanická energie).} \qquad (8.27)$$

Rozptýlená energie přispěje částečně ke zvýšení vnitřní energie kostky (zahřátí), částečně ke zvýšení vnitřní energie podložky.

PŘÍKLAD 8.6

Vadný robot o hmotnosti $m = 40$ kg je tažen na laně po stěně sopečného kráteru (obr. 8.12). Stěna svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°. Tažná síla lana **F** má velikost 380 N, velikost dynamické třecí síly působící proti pohybu robota je 140 N. Robot se posune o vzdálenost $d = 0{,}50$ m podél stěny kráteru.

(a) Jaká je ztráta mechanické energie soustavy robot + Země způsobená vlivem třecích sil při posunutí robota o vektor **d**?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (8.27) a zadaných údajů dostaneme

$$\Delta E = -F_d d = -(140\,\text{N})(0{,}50\,\text{m}) = \\ = -70\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vnitřní energie robota a podložky se tedy zvýšila o 70 J.

(b) Jakou práci vykonají při posunutí robota tíhové síly?

ŘEŠENÍ: Podle vztahů (8.1) a (8.7) je

$$W_g = -\Delta E_p = -mg\Delta y. \qquad (8.28)$$

Na obr. 8.12 vidíme, že změna y-ové souřadnice robota, v obrázku označená jako h, je $h = d \sin 30°$. Dosazením tohoto výrazu do (8.28) a užitím zadaných hodnot dostáváme

$$W_g = -mgh = -mgd \sin 30° = \\ = -(40\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m·s}^{-2})(0{,}50\,\text{m})0{,}5 = \\ = -98\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

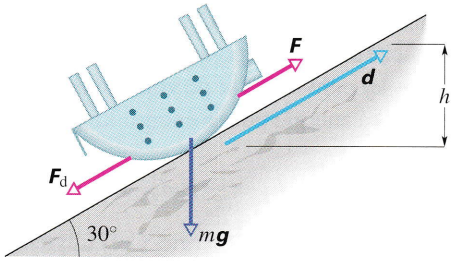
Potenciální energie soustavy robot + Země vzrostla během posunutí robota o 98 J.

(c) Jakou práci vykonala síla **F**?

ŘEŠENÍ: Práce síly **F** je prakticky rovna celkové práci W_{int} sil **F** a $-$**F**. (Silou $-$**F** působí robot prostřednictvím tažného lana na naviják, který je pevně spojen se stěnou kráteru a náleží tedy rovněž do studované soustavy.) Pro její výpočet užijeme vztahu (7.9) ($W = Fd \cos\varphi$). Úhel φ mezi vektory **F** a **d** je 0°. Dosazením do (7.9) dostáváme:

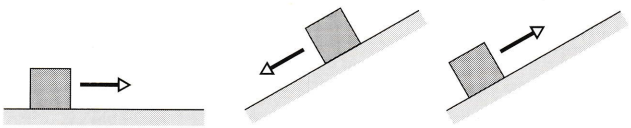
$$W_{int} = Fd \cos\varphi = (380\,\text{N})(0{,}50\,\text{m}) \cos 0° = \\ = 190\,\text{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Působením sil **F** a $-$**F** při posunutí robota došlo ke zvýšení mechanické energie soustavy robot + Země o 190 J.



Obr. 8.12 Příklad 8.6. Vadný robot je tažen na laně po šikmé stěně sopečného kráteru silou **F**, proti pohybu působí dynamická třecí síla F_d. Robot se posune podél nakloněné roviny o vektor **d**, jeho výška nad dnem kráteru při tom vzroste o h.

KONTROLA 5: Obrázek ukazuje tři možnosti pohybu kostky po nakloněné rovině, která není dokonale hladká. Ve všech případech je velikost počáteční rychlosti kostky stejná. Pohyb kostky sledujeme až do zastavení. Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti rozptýlené mechanické energie.



(1) (2) (3)

8.7 ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE

Představme si kostku, která klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze. Soustavu tvořenou samotnou kostkou můžeme považovat za izolovanou v tom smyslu, že žádná ze sil, které na ni působí (tíhová síla a tlaková síla podložky), nekoná práci. Na tuto jednoduchou soustavu lze samozřejmě rovněž aplikovat zákon zachování energie: energie kostky se zachovává.

Nyní nechme kostku klouzat po podlaze, která není dokonale hladká. Uvažujeme-li opět soustavu tvořenou samotnou kostkou, musíme konstatovat, že tentokrát se o izolovanou soustavu nejedná. Dynamická třecí síla, která na kostku působí, je z hlediska zvolené soustavy silou vnější. Energie soustavy (kostky) se nezachovává.

Můžeme však soustavu rozšířit tak, že do ní zahrneme jak kostku, tak podložku pevně spojenou se Zemí. V této soustavě jsou již třecí síly silami vnitřními, soustava je izolovaná a její energie se zachovává. Zobecníme-li náležitě představy o tom, co rozumíme *soustavou*, můžeme formulovat nový zákon zachování energie, který umožňuje uvažovat o různých energiových přeměnách.

Dospějeme k němu pomocí vztahu (8.27) pro vyjádření mechanické energie rozptýlené třecími silami $\boldsymbol{F}_d$ a $-\boldsymbol{F}_d$. V případě kostky pohybující se po vodorovné podlaze zahrnuje mechanická energie pouze energii kinetickou a vztah (8.27) má tvar

$$\Delta E_k = -F_d d, \tag{8.29}$$

kde ΔE_k je změna kinetické energie. Celý úbytek kinetické energie přispěje ke zvýšení vnitřní energie kostky a podložky (obě se zahřejí). Změna vnitřní energie soustavy je tedy

$$\Delta E_{int} = -\Delta E_k, \tag{8.30}$$

odkud

$$\Delta E_k + \Delta E_{int} = 0. \tag{8.31}$$

A tak i když se mechanická energie kostky nezachovává, je součet její mechanické energie a vnitřní energie soustavy kostka+podložka konstantní. Tento součet představuje *celkovou energii* soustavy kostka + podložka. Nově získaný vztah pro zachovávající se energii nazýváme **zákonem zachování energie**. Užitím vztahu (8.31) jej můžeme zapsat ve tvaru

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_{int} = 0. \tag{8.32}$$

Působí-li navíc v soustavě konzervativní interakční síly, máme opět poněkud širší a obecnější pojem izolované soustavy, ve které může kromě změn kinetické a vnitřní energie jednotlivých objektů docházet i ke změnám energie potenciální. Celková energie se bude opět zachovávat a zákon zachování nabude tvaru

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{int} = 0 \quad \text{(izolovaná soustava, zákon zachování celkové energie).} \tag{8.33}$$

Objevíme-li ještě jiné formy energie, můžeme je vždy zahrnout do zákona zachování energie a přepsat vztah (8.33) takto:

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{int} + \Delta E_{ostatní} = 0. \tag{8.34}$$

Uvědomme si, že tento obecný zákon zachování energie jsme *nijak* neodvodili. Naopak, vyplývá z nesčetných experimentů. Vědci ani konstruktéři dosud neobjevili žádnou výjimku z tohoto zákona. Jeho značná účinnost při analýze obtížných situací spočívá právě v tom, že přisuzuje celkové energii úlohu zachovávající se veličiny i v situacích, kdy se dílčí energie různých typů mění.

Obr. 8.13 Při sestupu se snižuje tíhová potenciální energie soustavy horolezkyně s výstrojí + Země. Lano je provlečeno kovovými karabinami a tře se o ně. Podstatná část úbytku potenciální energie tak přispěje ke vzrůstu vnitřní energie soustavy a kinetická energie horolezkyně se prakticky nezvyšuje.

V izolované soustavě může docházet ke změnám všech typů energie, které lze soustavě přisoudit. Celková energie však zůstává zachována.

Chceme-li tuto skutečnost vyjádřit méně formálně, můžeme říci, že energie nemůže záhadně mizet ani se objevovat.

Nad obr. 8.13 můžeme například uvažovat tak, že do soustavy zahrneme jak horolezkyni s kompletní výstrojí, tak Zemi. Při slaňování po skalní stěně musí horolezkyně řídit pokles potenciální energie soustavy (tato energie nemůže najednou záhadně zmizet). Část jejího úbytku se jistě může projevit přírůstkem kinetické energie horolezkyně, ten však nesmí být příliš velký. V tom tkví podstata slaňování: lano je provlečeno kovovými karabinami. Třecí síly mezi lanem a karabinami řízeně a pomalu rozptylují

převážnou část mechanické energie soustavy a zvyšují tak energii vnitřní.

Není-li soustava izolovaná a vnější síly konají práci, nelze vztahy (8.33) a (8.34) použít. Je třeba je nahradit obecnějším vztahem

$$W = \Delta E_{\text{celk}} = \Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p}} + \Delta E_{\text{int}}, \qquad (8.35)$$

kde W je celková práce vnějších sil působících na objekty soustavy. Kdybychom například lano horolezkyně (obr. 8.13) nezahrnuli do soustavy, bylo by třeba třecí sílu, jíž působí lano na karabiny, považovat za vnější sílu, jejíž práce W přispívá ke změně kinetické, potenciální a vnitřní energie soustavy.

Výkon

Poté, co jsme podrobně prodiskutovali problematiku a mechanismy energiových přeměn a uvědomili jsme si přitom existenci různých typů energie, můžeme rozšířit i definici výkonu formulovanou v čl. 7.7. Tam jsme výkon definovali jako „rychlost", s jakou síla koná práci, tj. vykonanou práci vztaženou k časové jednotce. V obecnějším smyslu bude výkon veličinou, která určuje, jak „rychle" dochází ke změnám energie. Označíme-li ΔE změnu energie soustavy, k níž došlo působením jisté síly za dobu Δt, můžeme definovat **průměrný výkon** této síly jako podíl

$$\overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \qquad (8.36)$$

Analogicky definujeme **okamžitý výkon** síly

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \qquad (8.37)$$

PŘÍKLAD 8.7

Cvičený pudl (obr. 8.14) o hmotnosti 6,0 kg vběhl rychlostí o velikosti $v_0 = 7{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na levý okraj skluzavky, který leží ve výšce 8,5 m nad podlahou. Při skluzu po ní se dostal do bodu obratu, ležícího ve výšce $y = 11{,}1$ m nad podlahou. Jaký byl při tom přírůstek vnitřní energie soustavy pudl + + skluzavka + Země?

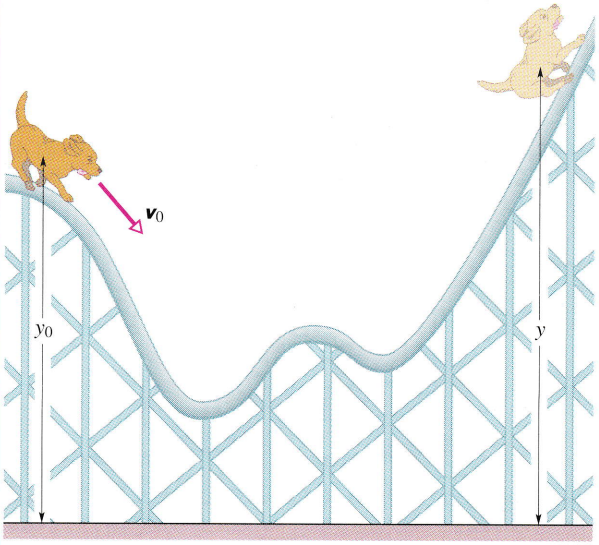
ŘEŠENÍ: Soustavu pudl + skluzavka + Země můžeme považovat za izolovanou a použít vztahu (8.33), neboť jedinými silami, které v soustavě působí, jsou síly tíhové, normálové (tlakové) a třecí. Tíhové síly jsou konzervativní a jsou spjaty se změnami tíhové potenciální energie soustavy. Vlivem třecích sil dochází při pohybu pudla po skluzavce k rozptylu mechanické energie soustavy za současného přírůstku vnitřní energie soustavy o hodnotu ΔE_{int}. Normálové síly nekonají práci, neboť jsou trvale kolmé k trajektorii pudla. Nepřispívají tedy k energiovým změnám.

V bodě obratu má pudl nulovou rychlost a tedy i nulovou kinetickou energii. Užitím vztahu (8.33) pro soustavu pudl + + skluzavka + Země dostáváme:

$$\Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p,g}} + \Delta E_{\text{int}} = 0,$$
$$(0 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) + mg(y - y_0) + \Delta E_{\text{int}} = 0.$$

Odtud určíme ΔE_{int}:

$$\Delta E_{\text{int}} = \tfrac{1}{2}mv_0^2 - mg(y - y_0) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(6{,}0\ \mathrm{kg})(7{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 -$$
$$-(6{,}0\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(11{,}1\ \mathrm{m} - 8{,}5\ \mathrm{m}) \doteq$$
$$\doteq 30\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 8.14 Příklad 8.7. Pudl klouže po skluzavce z výšky y_0 s počáteční rychlostí o velikosti v_0 a dosáhne bodu obratu ve výšce y.

PŘÍKLAD 8.8

Ocelová kulka o hmotnosti 5,2 g je vystřelena svisle dolů z výšky $h_1 = 18$ m. Její počáteční rychlost má velikost $v_0 = 14\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (obr. 8.15a). Kulka se zaryje do písku a zastaví se v hloubce $h_2 = 21$ cm.

(a) K jaké změně mechanické energie kulky přitom došlo?

ŘEŠENÍ: V místě, kde se kulka zastavila, je její rychlost, a tedy i kinetická energie, nulová. Změna mechanické energie kulky je dána vztahem

$$\Delta E = \Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p,g}}. \qquad (8.38)$$

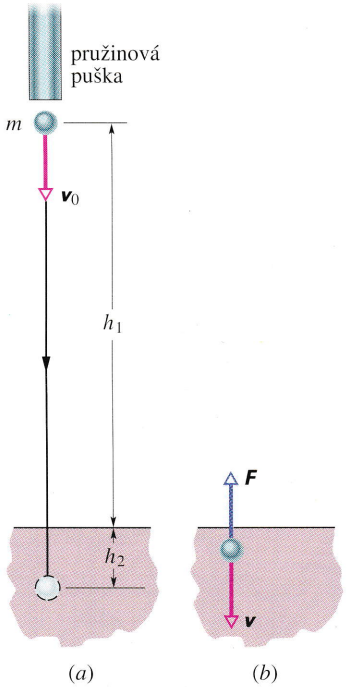
Odtud užitím vztahu (8.8) ($\Delta E_{\text{p,g}} = mg\Delta y$) dostáváme

$$\Delta E = (0 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) - mg(h_1 + h_2),$$

kde $-(h_1 + h_2)$ je celkové posunutí kulky. Dosazením zadaných údajů určíme hodnotu ΔE:

$$\Delta E = -\tfrac{1}{2}(5{,}2\cdot10^{-3}\,\mathrm{kg})(14\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 - \\ -(5{,}2\cdot10^{-3}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(18\,\mathrm{m} + 0{,}21\,\mathrm{m}) = \\ = -1{,}437\,\mathrm{J} \doteq -1{,}4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(Všimněte si, že jsme v této úloze hovořili o potenciální energii kulky, místo abychom ji správně přisuzovali soustavě kulka + Země. Jedná se o přiblížení, jehož oprávněnost jsme již zdůvodnili v bodě 8.1.)



Obr. 8.15 Příklad 8.8. (a) Kulka je vystřelena svisle dolů a zabrzdí se v písku. Její mechanická energie se při pohybu po dráze h_1 zachovává, při brzdění po dráze h_2 působí na kulku odporová síla $\boldsymbol{F}$. (b) Při působení odporových sil klesá mechanická energie kulky a roste vnitřní energie soustavy kulka + písek.

(b) Jaká je změna vnitřní energie soustavy kulka + pískoviště + Země?

ŘEŠENÍ: Soustavu kulka + pískoviště + Země po výstřelu lze považovat za izolovanou. Jedinými vnitřními silami jsou síly tíhové a odporové síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$, jimiž na sebe vzájemně působí kulka a částečky písku (obr. 8.15b). Lze tedy použít vztah (8.33). Dosazením ze vztahu (8.38) do (8.33) získáme pro soustavu kulka + pískoviště + Země vztah

$$\Delta E + \Delta E_{\mathrm{int}} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{\mathrm{int}} = -\Delta E = -(-1{,}437\,\mathrm{J}) \doteq \\ \doteq 1{,}4\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při průchodu kulky pískem konají odporové síly práci a dochází k rozptylu mechanické energie soustavy. Vnitřní energie soustavy roste.

(c) Jaká je velikost průměrné odporové síly $\boldsymbol{F}$?

ŘEŠENÍ: Mechanická energie soustavy se nemění, dokud kulka nedoletí k pískovišti. Při zarytí kulky do hloubky h_2 se však změní o hodnotu ΔE. Vztah (8.27) ($-F_{\mathrm{d}}d = \Delta E$) lze přepsat do tvaru

$$-Fh_2 = \Delta E.$$

Řešením vzhledem k neznámé F dostaneme

$$F = \frac{\Delta E}{-h_2} = \frac{(-1{,}437\,\mathrm{J})}{(-0{,}21\,\mathrm{m})} = 6{,}84\,\mathrm{N} \doteq 6{,}8\,\mathrm{N}. \text{ (Odpověď)}$$

Hodnotu F bychom mohli určit také užitím postupů vyložených v kap. 2: zjistili bychom velikost rychlosti kulky těsně nad pískovištěm a její průměrné zrychlení při brzdění v písku. Užitím druhého Newtonova zákona bychom zjistili F. Tento postup by však vyžadoval provedení většího počtu algebraických výpočtů.

8.8 HMOTNOST A ENERGIE

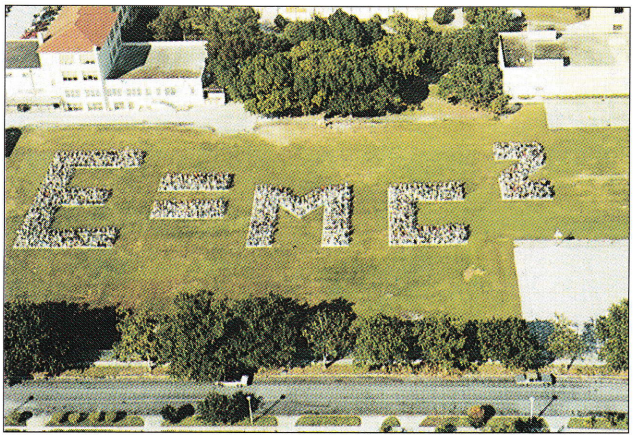
Klasická chemie byla založena na předpokladu, že při chemických reakcích se zachovává jak energie, tak hmotnost. V roce 1905 však ukázal Albert Einstein v rámci své speciální teorie relativity, že hmotnost lze ekvivalentně vyjádřit pomocí energie a že zákon zachování energie říká jinými slovy totéž, co zákon zachování hmotnosti.

Při chemických reakcích jsou ovšem změny hmotnosti odpovídající změnám energie ve smyslu Einsteinovy teorie tak nepatrným zlomkem celkové hmotnosti látek, které se reakce účastní, že není naděje na jejich registraci ani při nejpřesnějších laboratorních analýzách. Situace se tedy *jeví* tak, že hmotnost i energie se skutečně zachovávají odděleně. Během reakcí jaderných však často dochází k uvolnění energie až milionkrát větší a změny hmotnosti lze měřit docela snadno. Úvahy o souvislostech změn hmotnosti a energie při jaderných reakcích se již staly součástí laboratorní rutiny.

Vztah mezi hmotností a energií je zcela jistě nejznámější rovnicí fyziky (obr. 8.16):

$$E = mc^2, \qquad (8.39)$$

kde E je energie ekvivalentní hmotnosti m (tzv. **energiový ekvivalent hmotnosti**), c je rychlost světla ve vakuu. (Při hlubším studiu fyziky mimo rámec této knihy se jistě časem setkáte s hlubším rozborem vztahu mezi hmotností a energií a pravděpodobně i s různými názory na jeho správnou interpretaci.)



Obr. 8.16 Takto vzdali hold Albertu Einsteinovi studenti střední školy Shenandoah Junior v Miami (Florida) při oslavách stého výročí jeho narození v roce 1979. Slavnou formuli vytvořili svými těly.

Tabulka 8.1 shrnuje energiové ekvivalenty hmotností vybraných objektů. Energie uložená v běžných objektech je obrovská. Například výroba energiového ekvivalentu tří-gramové mince by stála desítky milionů korun. Také hmotnostní ekvivalenty některých typických hodnot energie jsou šokující. Například celá roční produkce elektrické energie v USA odpovídá hmotnosti pouhých několika stovek kilogramů látky (kamení, brambor, prostě čehokoliv!).

Tabulka 8.1 **Energiové ekvivalenty vybraných objektů**

OBJEKT	HMOTNOST (kg)	ENERGIOVÝ EKVIVALENT
Elektron	$9{,}11\cdot10^{-31}$	$8{,}2\cdot10^{-14}$ J (= 511 keV)
Proton	$1{,}67\cdot10^{-27}$	$1{,}5\cdot10^{-10}$ J (= 938 MeV)
Atom uranu	$4{,}0\cdot10^{-25}$	$3{,}6\cdot10^{-8}$ J (= 225 GeV)
Prachová částice	$1\cdot10^{-13}$	$1\cdot10^{4}$ J (= 2 kcal)
Mince	$3{,}1\cdot10^{-3}$	$2{,}8\cdot10^{14}$ J (= 78 GW·h)

Chceme-li použít vztah (8.39) pro chemické či jaderné reakce, je vhodné jej přepsat do tvaru

$$Q = -\Delta m\, c^2, \tag{8.40}$$

kde Q je energie uvolněná (kladná hodnota), nebo pohlcená (záporná hodnota) při reakci a Δm je odpovídající úbytek, či přírůstek hmotnosti částic v důsledku reakce. Při jaderném štěpení, kdy se větší jádra rozpadnou v jádra s nižším atomovým číslem, činí hmotnostní úbytek méně než 0,1% původní hmotnosti. Při chemických reakcích je toto procento zhruba milionkrát nižší.

Při praktických výpočtech pomocí vztahu (8.40) se jen zřídka užívá jednotek SI, neboť jsou pro tento účel příliš velké. Hmotnost obvykle udáváme v atomových jednotkách (zkratka u, čl. 1.6), kde

$$1\,\mathrm{u} = 1{,}66\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}. \tag{8.41}$$

Obvyklou jednotkou energie je elektronvolt či jeho násobky. Podle (7.3) je

$$1\,\mathrm{eV} = 1{,}60\cdot10^{-19}\,\mathrm{J}. \tag{8.42}$$

V jednotkách definovaných vztahy (8.41) a (8.42) má kvadrát rychlosti světla hodnotu

$$c^2 = 9{,}315\cdot10^{8}\,\mathrm{eV\cdot u^{-1}} = 9{,}315\cdot10^{5}\,\mathrm{keV\cdot u^{-1}} = \\ = 931{,}5\,\mathrm{MeV\cdot u^{-1}}. \tag{8.43}$$

PŘÍKLAD 8.9

Při *jaderném štěpení*

$$\mathrm{n} + {}^{235}\mathrm{U} \rightarrow {}^{140}\mathrm{Ce} + {}^{94}\mathrm{Zr} + \mathrm{n} + \mathrm{n}$$

je neutron (n) zachycen jádrem uranu (^{235}U). Vznikne nestabilní jádro, které se rozštěpí na dvě menší jádra (^{140}Ce a ^{94}Zr) za současného uvolnění dvou neutronů. Hmotnosti zúčastněných elementů jsou

$$\begin{aligned} \text{hmotnost } ({}^{235}\mathrm{U}) &= 235{,}04\,\mathrm{u}, \\ \text{hmotnost } ({}^{94}\mathrm{Zr}) &= 93{,}91\,\mathrm{u}, \\ \text{hmotnost } ({}^{140}\mathrm{Ce}) &= 139{,}91\,\mathrm{u}, \\ \text{hmotnost (n)} &= 1{,}008\,67\,\mathrm{u}. \end{aligned}$$

(a) Jaká je relativní změna hmotnosti interagujících částic?

ŘEŠENÍ: Změnu hmotnosti Δm získáme odečtením hmotnosti částic, které vstupují do reakce od hmotnosti částic, které jsou výsledkem reakce:

$$\Delta m = (139{,}91 + 93{,}91 + 2\cdot 1{,}008\,67)\,\mathrm{u} - \\ - (235{,}04 + 1{,}008\,67)\,\mathrm{u} = \\ = -0{,}211\,\mathrm{u}.$$

Hmotnost částic vstupujících do reakce je

$$M = 235{,}04\,\mathrm{u} + 1{,}008\,67\,\mathrm{u} = 236{,}05\,\mathrm{u}.$$

Tomu odpovídá relativní úbytek hmotnosti

$$\frac{|\Delta m|}{M} = \frac{0{,}211\,\mathrm{u}}{236{,}05\,\mathrm{u}} = \\ = 0{,}000\,89, \quad \text{tj. asi } 0{,}1\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jakkoli je tato veličina malá, je poměrně snadno měřitelná.

(b) Jaká energie se při štěpné reakci uvolní?

ŘEŠENÍ: Ze vztahu (8.40) dostaneme

$$Q = -\Delta m\, c^2 = -(-0{,}211\ \mathrm{u})(931{,}5\ \mathrm{MeV\cdot u^{-1}}) = \\ = 197\ \mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Za c^2 jsme dosadili hodnotu uvedenou ve vztahu (8.43). Uvolněná energie 197 MeV, připadající na jednu reakci, je mnohonásobně větší než typické hodnoty energie uvolněné při chemických reakcích, které se pohybují v jednotkách elektronvoltů.

PŘÍKLAD 8.10

Jádro atomu deuteria (tzv. těžký vodík) se nazývá **deuteron**. Je složeno z protonu a neutronu. Jak velká energie se uvolní, či absorbuje při procesu, při němž dojde k odtržení neutronu a protonu? Hmotnosti částic účastnících se reakce jsou:

$$\left.\begin{array}{r} \text{deuteron: } m_\mathrm{d} = 2{,}013\,55\ \mathrm{u} \\ \text{proton: } m_\mathrm{p} = 1{,}007\,28\ \mathrm{u} \\ \text{neutron: } m_\mathrm{n} = 1{,}008\,67\ \mathrm{u} \end{array}\right\} 2{,}015\,95\ \mathrm{u}$$

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že celková hmotnost volného protonu a volného neutronu je větší než hmotnost deuteronu, je při štěpení deuteronu nutno energii dodat. Přírůstek hmotnosti při reakci činí

$$\Delta m = (m_\mathrm{p} + m_\mathrm{n}) - m_\mathrm{d} = \\ = (1{,}007\,28 + 1{,}008\,67)\ \mathrm{u} - (2{,}013\,55)\ \mathrm{u} = 0{,}002\,40\ \mathrm{u}.$$

Odpovídající energie je dána vztahem (8.40):

$$Q = -\Delta m\, c^2 = -(0{,}002\,40\ \mathrm{u})(931{,}5\ \mathrm{MeV\cdot u^{-1}}) = \\ = -2{,}24\ \mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

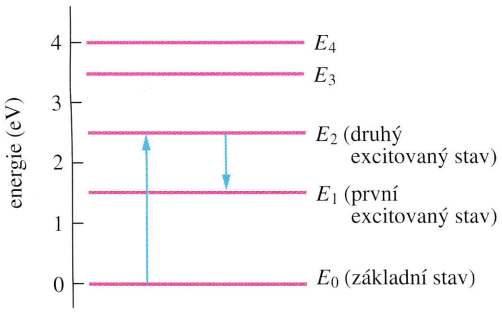
Znaménko minus ve výsledku potvrzuje, že při této reakci se energie absorbuje. Hodnota 2,24 MeV se nazývá *vazební energie* deuteronu. Vazební energie jádra je definována jako energie, kterou by bylo třeba jádru dodat, aby se rozštěpilo na volné protony a neutrony, resp. energie, která by se musela uvolnit, kdybychom měli jádro z volných protonů a neutronů vytvořit.

KONTROLA 6: Představme si, že bychom nějakým způsobem dokázali přimět šest volných protonů a stejný počet volných neutronů, aby se spojily v jádro uhlíkového atomu ^{12}C. Byla by hmotnost jádra větší, či menší než celková hmotnost volných částic?

8.9 KVANTOVÁNÍ ENERGIE

Dosud jsme předpokládali, že energie soustavy může nabývat *jakýchkoli* hodnot. Tento předpoklad je nepochybně rozumný u soustav, s nimiž se setkáváme v každodenním životě. Pro soustavy z oblasti mikrosvěta, jako jsou atomy nebo i tzv. *kvantové tečky* (laboratorně vyrobené shluky elektronů, které se atomům podobají), však nevyhovuje. Vnitřní energie takových mikrosoustav je **kvantována**, může nabývat jen některých hodnot. Přísluší-li soustavě určitá hodnota energie, říkáme, že se soustava nachází v **kvantovém stavu** s touto energií.

Obr. 8.17 ukazuje typický diagram hodnot energie (tzv. *energiových hladin*) atomu.* Energie je vynesena na svislé stupnici a každá z pěti nejnižších energiových hladin $E_0, E_1, \ldots, E_4$ je vyznačena vodorovnou čarou (odtud název *hladiny*). Energie atomu nemůže nabývat žádné hodnoty ležící mezi povolenými hladinami. Kvantový stav spojený s nejnižší hladinou, označenou na obr. 8.17 jako E_0, se nazývá *základním stavem* atomu. (V obr. 8.17 je mu přisouzena nulová hodnota energie.) Kvantové stavy s vyšší energií se nazývají *excitované*. Stav s energií E_1 je první excitovaný stav, stav s energií E_2 druhý excitovaný stav atd.



Obr. 8.17 Diagram energiových hladin atomu, znázorňující kvantované hodnoty energie (energiové hladiny). Každá hladina odpovídá jistému kvantovému stavu atomu. Nejnižší energie, označená jako E_0, přísluší základnímu stavu. Šipka směřující vzhůru symbolizuje kvantový přechod atomu ze základního stavu do druhého excitovaného stavu, jemuž odpovídá energie E_2. Šipka směřující dolů odpovídá kvantovému přechodu z druhého do prvního excitovaného stavu o energii E_1.

Atomy mají tendenci zaujímat konfiguraci základního stavu, jemuž odpovídá nejnižší energie (podobně jako se koule kutálí po svahu dolů). Atom může přejít do excitovaného stavu s vyšší energií jen tehdy, je-li mu z vnějšího zdroje dodána energie daná rozdílem mezi excitovaným a základním stavem. Atom může tuto energii získat na-

* I když ve zkratce hovoříme o energiových hladinách atomu, máme většinou na mysli možné hodnoty energie jednotlivých elektronů jeho elektronového obalu.

příklad při srážce s jiným atomem nebo volným elektronem, případně při pohlcení (absorpci) světla. Každopádně je třeba, aby získaná energie postačovala pro přechod na některou z vyšších hladin. Kvantovány jsou tedy nejen hodnoty energie samotné, ale i jejich možné změny (přírůstky i ztráty). Při změnách energie dochází ke kvantovým *přechodům* neboli *přeskokům* atomu mezi jednotlivými energiovými hladinami.

Šipka mířící v obr. 8.17 vzhůru představuje kvantový skok ze základního do druhého excitovaného stavu. Podle diagramu je pro takový přechod třeba, aby atom získal energii 2,5 eV. Při absorpci fotonu s touto energií foton zanikne a celá jeho energie přispěje k přírůstku energie atomu. Světlo tedy musí mít energii právě 2,5 eV, aby byl atom schopen je pohltit. Je-li energie světla o něco větší či menší, k absorpci nedojde.

Aby došlo k absorpci světla atomem, musí být energie absorbovaného fotonu rovna rozdílu energiových hladin odpovídajících výslednému a výchozímu stavu atomu.

Přejde-li atom do excitovaného stavu, nesetrvá v něm, ale je rychle *deexcitován*. Ztrácí energii buď při srážkách nebo vyzářením (emisí) světla. Světlo vyzářené při deexcitaci atomu při ní skutečně *vzniká* (předtím neexistovalo). Při kterémkoli z obou deexcitačních procesů je však třeba, aby atom ztratil přesně definovanou energii, a mohl tak přejít na některou z nižších energiových hladin.

Energie světla emitovaného atomem je vždy rovna rozdílu energií výchozí hladiny atomu a některé nižší hladiny.

Šipka, směřující v obr. 8.17 dolů, označuje kvantový přechod z druhého do prvního excitovaného stavu. Energie světla vyzářeného při tomto přechodu je 1,0 eV. Poté atom přejde do základního stavu a znovu vyzáří světlo, tentokrát o energii 1,5 eV. Místo tohoto dvoustupňového procesu mohl také atom přejít do základního stavu rovnou a vyzářit světlo o energii 2,5 eV.

KONTROLA 7: Bylo zjištěno, že kvantový systém vyzářil světlo čtyř různých energií, aniž byl mezitím znovu excitován. Tři hodnoty energie emitovaného světla byly změřeny: 1,1 eV, 1,4 eV a 2,8 eV. Pořadí emisí není známo. Energiové hladiny systému jsou tyto:

$E_8 = 7{,}7\,\text{eV}$ $E_5 = 4{,}8\,\text{eV}$ $E_2 = 2{,}7\,\text{eV}$
$E_7 = 6{,}6\,\text{eV}$ $E_4 = 4{,}2\,\text{eV}$ $E_1 = 1{,}3\,\text{eV}$
$E_6 = 5{,}5\,\text{eV}$ $E_3 = 3{,}9\,\text{eV}$ $E_0 = 0{,}0\,\text{eV}$

(a) Jaký byl počáteční stav systému a (b) jakou energii mělo světlo vyzářené při čtvrté emisi?

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Konzervativní síly

Síla působící na částici je **konzervativní**, je-li celková práce, kterou vykoná při pohybu částice po libovolné uzavřené trajektorii, nulová. Ekvivalentní vyjádření: Síla působící na částici je konzervativní, jestliže práce, kterou vykoná při přemístění částice mezi dvěma zadanými body, nezávisí na trajektorii, po které se částice pohybovala. Tíhová síla a pružná síla jsou konzervativní. Dynamická třecí síla je *nekonzervativní*.

Potenciální energie

Potenciální energie souvisí s konfigurací soustavy, v níž působí konzervativní interakční síly. Změna potenciální energie soustavy je definována jako záporně vzatá práce, kterou konzervativní interakční síly vykonají při odpovídající změně konfigurace soustavy

$$\Delta E_p = -W_g. \tag{8.1}$$

Je-li konfigurace soustavy (poloha částice vzhledem ke zvolenému bodu zbytku soustavy) určena jedinou skalární proměnnou x a závisí-li konzervativní síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ popisující interakci částice se zbytkem soustavy pouze na této proměnné, je často možné vyjádřit změnu potenciální energie vztahem

$$\Delta E_p = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx, \tag{8.6}$$

kde x_i je počáteční a x_f koncová poloha částice.

Tíhová potenciální energie

Potenciální energie soustavy s tíhovou interakcí se nazývá **tíhová potenciální energie**. Jedná-li se o soustavu zahrnující Zemi a částici, která se pohybuje v blízkosti jejího povrchu, hovoříme o **tíhové potenciální energii**. Při přechodu částice mezi body ležícími ve výškách y_i a y_f nedaleko od povrchu Země je změna tíhové potenciální energie soustavy částice + Země rovna

$$\Delta E_p = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y. \tag{8.7}$$

Je-li **referenční konfigurace** soustavy zvolena tak, že $y_i = 0$, a je-li jí přisouzena nulová hodnota tíhové potenciální energie $E_{p,i} = 0$, můžeme tíhovou potenciální energii soustavy v obecné konfiguraci (resp. tíhovou potenciální energii částice v obecné poloze vzhledem k Zemi) vyjádřit vztahem

$$E_p = mgy. \tag{8.9}$$

Pružná potenciální energie

Pružná potenciální energie je spojena se stavem napjatosti (při napínání či stlačování) pružných objektů. Pro pružinu, která vyhovuje lineárnímu vztahu pro pružnou sílu $F(x) = -kx$, je pružná potenciální energie

$$E_p(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{8.11}$$

Tento vztah platí pro případ, že referenční konfigurace odpovídá nenapjaté pružině a je jí přisouzena nulová potenciální energie. Je tedy $E_p = 0$ pro $x = 0$.

Mechanická energie

Mechanickou energii E soustavy definujeme jako součet její kinetické energie E_k a potenciální energie E_p:

$$E = E_k + E_p. \tag{8.12}$$

Kinetická energie soustavy je součtem kinetických energií všech jejích objektů. Potenciální energie je součtem všech příspěvků odpovídajících konzervativním interakčním silám uvnitř soustavy. Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, nemění se její mechanická energie E. Tuto skutečnost nazýváme **zákonem zachování mechanické energie** a píšeme

$$E_{k,2} + E_{p,2} = E_{k,1} + E_{p,1}. \tag{8.17}$$

Indexy 1 a 2 odpovídají různým okamžikům v průběhu energiových změn. Zákon zachování mechanické energie lze zapsat i ve tvaru

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \tag{8.18}$$

Křivky potenciální energie

Je-li sledovaná částice v soustavě popsána svou polohou x a známe-li závislost potenciální energie E_p soustavy na této poloze, můžeme vyjádřit výslednou sílu, kterou zbytek soustavy působí na částici:

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{8.19}$$

Při zadání funkce $E_p(x)$ grafem lze pro libovolnou hodnotu x zjistit hodnotu $F(x)$ jako záporně vzatou směrnici tohoto grafu. Kinetickou energii částice lze pak spočítat ze vztahu

$$E_k(x) = E - E_p(x), \tag{8.21}$$

kde E je mechanická energie soustavy. **Bodem obratu** rozumíme takovou polohu x, v níž se obrací směr pohybu částice (tj. $E_k = 0$). Částice je v **rovnováze** v každém bodě, v němž je směrnice grafu funkce $E_p(x)$ nulová ($F(x) = 0$).

Práce vnějších a nekonzervativních sil

Uvažujme částici, která je součástí soustavy. Působí-li na ni vnější síla $\boldsymbol{F}$, která při změně konfigurace soustavy vykoná práci W, změní se o tuto hodnotu mechanická energie soustavy:

$$W = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E. \tag{8.24, 8.25}$$

Působí-li v soustavě dynamické třecí síly $\boldsymbol{F}_d$ a $-\boldsymbol{F}_d$, je změna celkové mechanické energie soustavy dána vztahem

$$\Delta E = -F_d d, \tag{8.27}$$

kde d je velikost posunutí sledované částice při změně konfigurace soustavy. O úbytku mechanické energie, k níž vlivem třecích sil došlo, hovoříme jako o **energii rozptýlené** třecími silami. Rozptýlená energie je rovna práci sil $\boldsymbol{F}_d$ a $-\boldsymbol{F}_d$.

Zákon zachování energie

V izolované soustavě může docházet ke změnám různých typů energie, avšak celková energie soustavy E_{celk} se zachovává. Tento zákon zachování lze zapsat ve tvaru

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{int} + \Delta E_{ostatní} = 0. \tag{8.34}$$

ΔE_{int} je změna vnitřní energie soustavy a zahrnuje změny vnitřní energie všech jejích objektů.

Není-li soustava izolovaná, dochází vlivem působení vnějších sil ke změnám její celkové energie. Změna celkové energie soustavy je rovna práci vykonané vnějšími silami

$$W = \Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{int}. \tag{8.35}$$

Výkon

Výkon síly udává, s jakou „rychlostí" dochází při jejím působení ke změnám energie soustavy. Dojde-li za dobu Δt ke změně energie o ΔE (tato změna je rovna práci, kterou síla za dobu Δt vykonala), je **průměrný výkon** síly roven

$$\overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \tag{8.36}$$

Okamžitý výkon síly je dán vztahem

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{8.37}$$

Hmotnost a energie

Energiovým ekvivalentem E hmotnosti m rozumíme energii danou vztahem

$$E = mc^2, \tag{8.39}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Pro výpočet energiového ekvivalentu v megaelektronvoltech je třeba údaj o hmotnosti zadaný v atomových jednotkách (u) vynásobit faktorem $931{,}5\ \mathrm{MeV \cdot u^{-1}}$. Energii uvolněnou či pohlcenou při jaderných nebo chemických reakcích vyjadřujeme vztahem

$$Q = -\Delta m\, c^2, \tag{8.40}$$

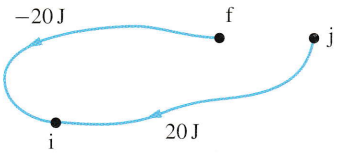
kde Δm je odpovídající úbytek, či přírůstek hmotnosti. (Hodnota Q je kladná, jestliže se při reakci energie uvolňuje, a záporná, je-li reakce doprovázena pohlcením energie.)

Kvantování energie

Energie v mikroskopických soustavách, jakými jsou např. atomy, je **kvantována** (nabývá pouze některých hodnot). Soustava se může nacházet v **kvantových stavech** charakterizovaných povolenými hodnotami energie. Energie soustavy nenabývá žádných jiných hodnot. Nejnižší energie odpovídá **základnímu stavu** soustavy, vyšší hodnoty energie příslušejí jejím **excitovaným stavům**. Jestliže soustava získává, či ztrácí energii pohlcením (absorpcí), či vyzářením (emisí) světla, je energie světla vždy rovna rozdílu některých povolených hodnot energie soustavy.

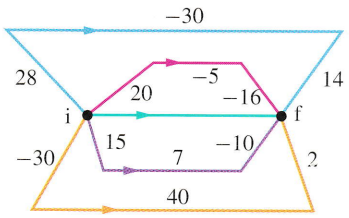
OTÁZKY

1. Částice na obr. 8.18 se pohybuje mezi polohami (f) a (i), resp. (j) a (i) ve vyznačených směrech. Přitom na ni působí konzervativní síla $\boldsymbol{F}$, která při jednotlivých přesunech částice vykoná práci, jejíž hodnoty jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Jakou práci by síla $\boldsymbol{F}$ vykonala při přemístění částice z polohy (f) do polohy (j)?



Obr. 8.18
Otázka 1

2. Částice na obr. 8.19 se může dostat z polohy (i) do polohy (f) různými cestami. V obrázku je vyznačena jedna přímá cesta a čtyři možnosti pohybu částice po lomených čarách. Při pohybu po přímé cestě a po třech ze čtyř lomených čar působí na částici pouze konzervativní síla $\boldsymbol{F}_c$. Při pohybu po čtvrté trajektorii se přidá ještě působení nekonzervativní síly $\boldsymbol{F}_{nc}$. Každý z přímých úseků jednotlivých lomených trajektorií je opatřen údajem o práci (v joulech), kterou vykonala výslednice sil působících na částici při jejím pohybu po tomto úseku. (a) Jakou práci vykonaly všechny síly působící na částici při jejím pohybu z (i) do (f) po přímé trajektorii? (b) Jakou práci vykonala nekonzervativní síla $\boldsymbol{F}_{nc}$ při pohybu částice po čtvrté trajektorii?

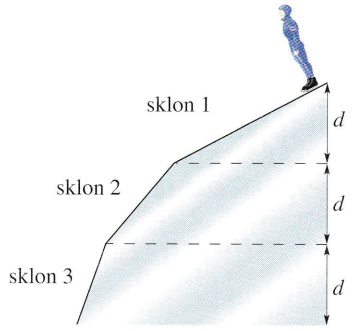


Obr. 8.19
Otázka 2

3. Pružina je oproti nenapjatému stavu protažena o 3,0 cm. Uvažujeme čtyři možné koncové stavy pružiny: (a) protažena o 2,0 cm, (b) stlačena o 2,0 cm, (c) stlačena o 4,0 cm, (d) protažena o 4,0 cm. Uspořádejte tyto možnosti sestupně podle změny potenciální energie pružiny při přechodu z počátečního do koncového stavu.

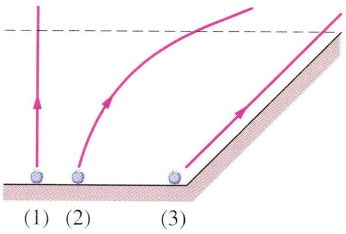
4. Odvážný bruslař na obr. 8.20 sjíždí po ledovém svahu se třemi různými sklony. Výška všech úseků je stejná a rovna d. Uspořádejte jednotlivé úseky sestupně podle (a) práce vykonané tíhovou silou působící na bruslaře, (b) změny jeho kinetické energie.

5. Kokosový ořech je vržen ze skalního útesu do širokého plochého údolí s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}$ o velikosti $8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Následující možnosti volby směru počáteční rychlosti uspořádejte sestupně (a) podle počáteční kinetické energie ořechu, (b) podle kinetické energie ořechu při jeho dopadu na dno údolí: (1) vektor $\boldsymbol{v}$ směřuje téměř svisle vzhůru, (2) $\boldsymbol{v}$ směřuje vzhůru pod úhlem 45° vzhledem k vodorovné rovině, (3) směr vektoru $\boldsymbol{v}$ je vodorovný, (4) $\boldsymbol{v}$ směřuje dolů pod úhlem 45° vzhledem k vodorovné rovině, (5) $\boldsymbol{v}$ směřuje téměř svisle dolů.



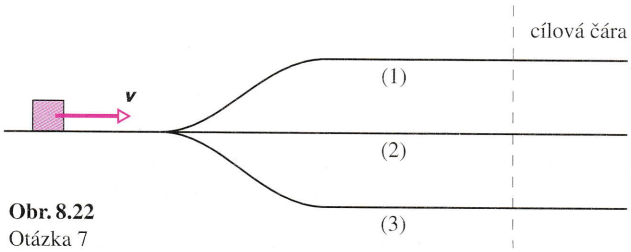
Obr. 8.20
Otázka 4

6. Na obr. 8.21 jsou tři švestky, které jsou vymrštěny z míst ležících na stejné vodorovné úrovni rychlostmi o stejných velikostech. Jedna z nich se pohybuje svisle vzhůru, druhá je vržena pod malým úhlem vzhledem ke svislému směru a třetí klouže po dokonale hladké nakloněné rovině. Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti výsledné rychlosti švestek při dosažení úrovně vyznačené přerušovanou čarou.



Obr. 8.21
Otázka 6

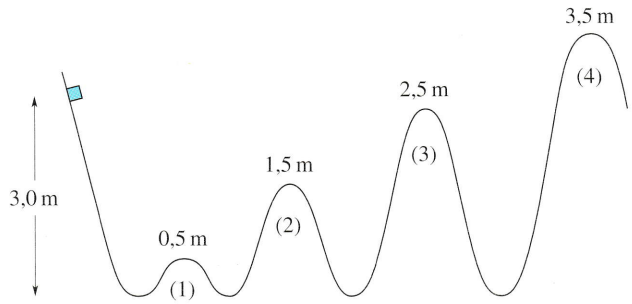
7. Kostku pohybující se zpočátku po vodorovné podložce (obr. 8.22) je možné navést na kteroukoli ze tří vyznačených drah



Obr. 8.22
Otázka 7

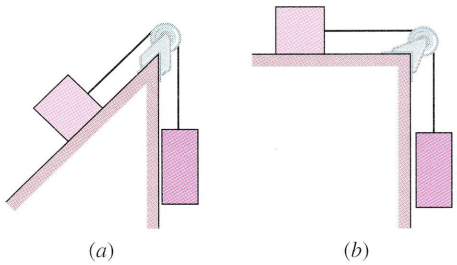
vedených v různých úrovních vzhledem k původní vodorovné rovině. Ve všech případech je podložka dokonale hladká. Kostku sledujeme do okamžiku, než dospěje k cílové čáře (zakreslena přerušovaně). Uspořádejte dráhy sestupně (a) podle velikosti rychlosti kostky v okamžiku průchodu cílovou čarou, (b) podle doby pohybu.

8. Malá krychlička je volně vypuštěna z bodu ve výšce 3,0 m nad základní úrovní po dokonale hladké trati (obr. 8.23). V obrázku jsou vyznačeny výšky vrcholků, které jsou na trati vymodelovány. Všechny pahorky mají v okolí nejvyššího bodu stejný kruhový tvar. Předpokládáme, že krychlička v žádném bodě neztratí kontakt s dráhou. (a) Přes který pahorek krychlička nepřejde? (b) Jaký bude její další pohyb? (c) Na kterém z vrcholků má krychlička největší dostředivé zrychlení a (d) na kterém z nich na ni podložka působí nejmenší tlakovou silou?



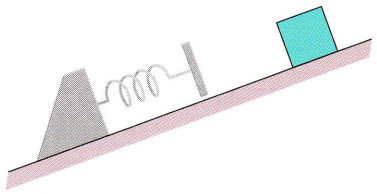
Obr. 8.23 Otázka 8

9. Na obr. 8.24 vidíme dvě uspořádání dvou experimentů s dvojicí kostek. Kostky jsou spojeny lankem vedeným přes kladku zanedbatelné hmotnosti, která se může otáčet bez tření. Podložka, po které se pohybuje světlejší kostka, je v obou případech dokonale hladká. V obou případech visutá kostka po uvolnění soustavy klesá. Uvažujme celkovou energii kostek v časovém intervalu, během něhož kostka klesne o vzdálenost d. Rozhodněte, zda kinetická energie kostek v uspořádání (a) je po uplynutí tohoto intervalu větší, menší, nebo stejná jako v uspořádání (b).



Obr. 8.24 Otázka 9

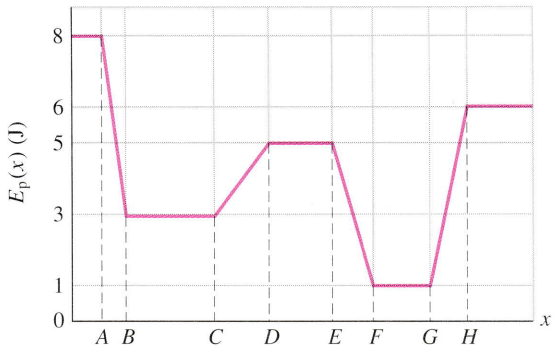
10. Kostku zakreslenou na obr. 8.25 jsme v okamžiku t_1 vypustili z klidu po dokonale hladké nakloněné rovině. V okamžiku t_2 narazí kostka na pružinu zanedbatelné hmotnosti, připevněnou k nakloněné rovině, a stlačuje ji. Stlačení pružiny je maximální v okamžiku t_3. Jak se v časovém intervalu od t_1 do t_3 mění (a) kinetická energie kostky, (b) tíhová potenciální energie soustavy kostka + Země, (c) pružná potenciální energie pružiny, (d) mechanická energie soustavy tvořené jen kostkou a Zemí, (e) mechanická energie pružiny, (f) mechanická energie soustavy kostka + pružina + Země?



Obr. 8.25 Otázka 10

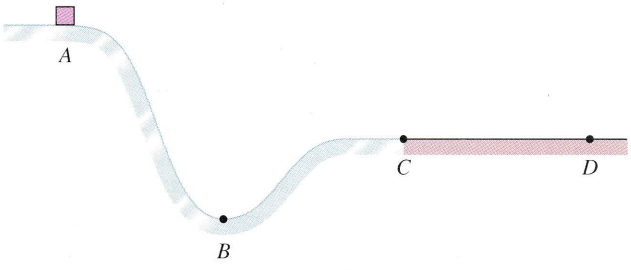
11. Jakou hodnotu nesmí překročit mechanická energie E a kinetická energie E_k částice v kontrole 4, (a) má-li být částice uvězněna v potenciálové jámě, (b) má-li být umožněn pohyb částice pouze vlevo od bodu D?

12. Na obr. 8.26 je graf potenciální energie částice. (a) Uspořádejte úseky AB, BC, CD a DE sestupně podle velikosti síly působící na částici. Jakou hodnotu nesmí překročit mechanická energie částice E, má-li částice (b) být uvězněna v levé potenciálové jámě, (c) v pravé potenciálové jámě, (d) mít možnost pohybu mezi jámami, ale nedostat se vpravo za bod H? V případě situace (d) určete, ve kterém z úseků má částice (e) největší kinetickou energii, (f) nejmenší rychlost.



Obr. 8.26 Otázka 12

13. Kostka sjíždí po skluzavce znázorněné na obr. 8.27. Mezi body A a C je skluzavka dokonale hladká, mezi body C a D působí na kostku třecí síla. Rozhodněte, zda v jednotlivých úsecích dráhy kinetická energie kostky roste, klesá, nebo zůstává konstantní: (a) AB, (b) BC, (c) CD. (d) Jak je tomu v každém z těchto úseků s mechanickou energií kostky?



Obr. 8.27 Otázka 13

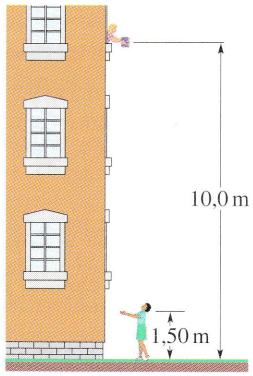
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 8.3 Určení hodnot potenciální energie

1C. Částice náleží do soustavy, v níž působí pouze konzervativní interakční síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$. Je-li částice v bodě A, je potenciální energie soustavy rovna 40 J. Během pohybu částice z bodu A do bodu B vykonají interakční síly práci +25 J. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku, kdy je částice v bodě B?

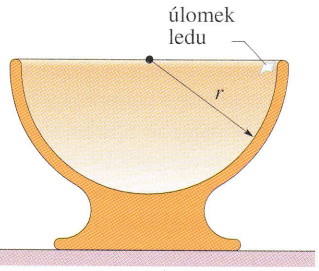
2C. Jaká je tuhost pružiny, jejíž potenciální energie je 25 J při stlačení o 7,5 cm vzhledem k nenapjatému stavu?

3C. Student hodil kamarádovi z okna knihu, jejíž hmotnost je 2,00 kg. Přítel stojí pod oknem a drží ruce ve výšce 1,5 m nad zemí, aby knihu zachytil (obr. 8.28). (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na knihu od okamžiku jejího vypuštění do chvíle, kdy ji přítel chytil? (b) Jak se přitom změnila potenciální energie soustavy kniha + Země? Zvolme nulovou hladinu tíhové potenciální energie této soustavy na zemském povrchu. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku (c) vypuštění knihy, (d) zachycení knihy?



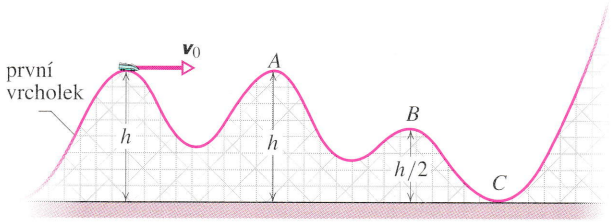
Obr. 8.28 Cvičení 3 a 12

4C. Ledový úlomek o hmotnosti 2,00 g jsme volně vypustili z bodu na vnitřním okraji polokulového poháru o poloměru $r = 22{,}0$ cm (obr. 8.29). Tření mezi ledem a stěnou poháru je zanedbatelné. (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na úlomek při jeho přesunutí na dno poháru? (b) Jak se přitom změnila potenciální energie soustavy úlomek + Země? (c) Konfiguraci, v níž je úlomek na dně poháru, přisoudíme nulovou potenciální energii. Jaká je potenciální energie soustavy v okamžiku vypuštění ledového úlomku? (d) Jaká je hodnota potenciální energie soustavy v okamžiku, kdy je úlomek na dně poháru, jestliže pro změnu přisoudíme její nulovou hodnotu konfiguraci, v níž je na jeho okraji?



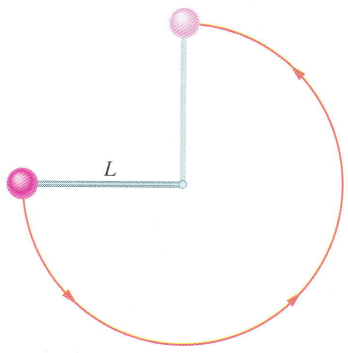
Obr. 8.29 Cvičení 4 a 13

5C. Vozík horské dráhy má hmotnost m a pohybuje se po dráze bez tření. Prvním vrcholkem dráhy (obr. 8.30) projíždí rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. Jakou práci vykoná tíhová síla, která působí na vozík, od tohoto počátečního okamžiku do okamžiku průjezdu vozíku (a) bodem A, (b) bodem B, (c) bodem C? Tíhové potenciální energii soustavy vozík + Země přisoudíme nulovou hodnotu v konfiguraci, v níž je vozík v bodě C. Jaká je její hodnota při průjezdu vozíku (d) bodem B, (e) bodem A?



Obr. 8.30 Cvičení 5 a 14

6C. Koule o hmotnosti m je upevněna na konci tenké tyčky o délce L (obr. 8.31), jejíž hmotnost je zanedbatelná. Druhý konec tyčky je uchycen tak, aby se koule mohla pohybovat po kružnici ve svislé rovině. Tyčku nastavíme do vodorovné polohy a udělíme kouli směrem dolů takovou rychlost, aby prošla částí kružnice vyznačenou na obrázku a dosáhla nejvyššího bodu právě s nulovou rychlostí. Určete práci, kterou vykonala tíhová síla působící na kouli mezi počátečním bodem a (a) nejnižším bodem trajektorie, (b) nejvyšším bodem trajektorie, (c) bodem ležícím na protilehlé straně trajektorie na stejné úrovni s počátečním bodem. (d) Konfiguraci soustavy koule + Země, v níž je koule v počátečním bodě, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie. Jaká hodnota tíhové potenciální energie odpovídá konfiguracím (a), (b) a (c)?

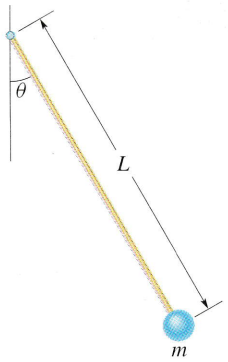


Obr. 8.31 Cvičení 6 a 15

7Ú. Pružina o tuhosti $3\,200\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ je protažena tak, že její pružná potenciální energie je 1,44 J. (Pro nenapjatou pružinu klademe $E_p = 0$.) Jaká bude změna pružné potenciální energie, změní-li se stav pružiny tak, že pružina bude (a) napjata o 2,0 cm, (b) stlačena o 2,0 cm, (c) stlačena o 4,0 cm?

8Ú. Sněhovou kouli o hmotnosti 1,50 kg házíme ze skály vysoké 12,5 m. Počáteční rychlost koule svírá s vodorovnou rovinou úhel 41,0°, míří vzhůru a má velikost $14{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Jakou práci vykoná tíhová síla, která působí na kouli, od počátečního okamžiku do okamžiku jejího dopadu na vodorovný povrch pod skálou? (b) Jak se během letu koule změní tíhová potenciální energie soustavy koule+Země? (c) Konfiguraci, v níž je koule na vrcholku skály, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie soustavy koule + Země. Jaká je její hodnota při dopadu koule na zem?

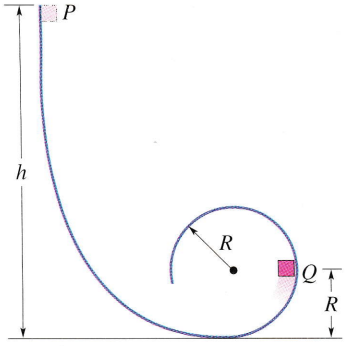
9Ú. Tenká tyč délky L a zanedbatelné hmotnosti je na konci uchycena tak, aby se mohla otáčet ve svislé rovině, podle obr. 8.32. K jejímu druhému konci je upevněna těžká koule o hmotnosti m. Tyč odchýlíme od svislého směru o úhel θ a volně vypustíme. Uvažme časový interval mezi uvolněním tyče a okamžikem, kdy koule prochází nejnižším bodem své trajektorie. (a) Jakou práci vykoná v tomto intervalu tíhová síla působící na kouli? (b) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy koule+Země? (c) Jaká hodnota tíhové potenciální energie odpovídá konfiguraci soustavy koule + Země, v níž je koule v krajní poloze, přisoudíme-li nejnižší poloze koule nulovou hodnotu této energie?



Obr. 8.32 Úlohy 9 a 20

10Ú. Malá kostka o hmotnosti m může klouzat bez tření po dráze tvaru „smyčky smrti", znázorněné na obr. 8.33. Kostku vypustíme z klidové polohy v bodě P, který leží ve výšce $h = 5R$ nade dnem smyčky. Jakou práci vykoná tíhová síla působící na kostku od okamžiku jejího vypuštění z bodu P do okamžiku průchodu (a) bodem Q, (b) vrcholem smyčky? Konfiguraci soustavy kostka + Země, v níž je kostka na dně smyčky, přisoudíme nulovou hodnotu tíhové potenciální energie. Jaká je tíhová potenciální energie soustavy, je-li kostka (c) v bodě P, (d) v bodě Q, (e) ve vrcholu smyčky?

11Ú. Částice se pohybuje podél osy x z bodu $x = 1{,}0\,\mathrm{m}$ do bodu $x = 4{,}0\,\mathrm{m}$ a pak zpět do výchozího bodu $x = 1{,}0\,\mathrm{m}$. Jednou



Obr. 8.33 Úlohy 10 a 39

ze sil, které na ni při tom působí, je síla $\boldsymbol{F}$, která má rovněž směr osy x. Jakou práci vykoná tato síla při každém takovém oběhu částice, jestliže její složka ve směru osy x nabývá při pohybu z počátečního bodu do bodu obratu, resp. při návratu, těchto hodnot: (a) pohyb k bodu obratu: $F_x = 3{,}0\,\mathrm{N}$, resp. pohyb zpět: $F_x = -3{,}0\,\mathrm{N}$, (b) 5,0 N, resp. 5,0 N, (c) $2{,}0x$, resp. $-2{,}0x$, (d) $3{,}0x^2$, resp. $3{,}0x^2$? Souřadnice x je zadávána v metrech a údaje o síle $\boldsymbol{F}$ v newtonech. (e) Ve kterých z uvedených případů by mohla být síla $\boldsymbol{F}$ konzervativní?

ODST. 8.4 Zákon zachování mechanické energie

12C. (a) Jak velkou rychlost má kniha, o níž jsme uvažovali ve cvič. 3, v okamžiku, kdy ji zachytí člověk pod oknem? (b) Jaká by v okamžiku zachycení byla rychlost knihy, jejíž hmotnost by byla dvojnásobná?

13C. (a) Jak velkou rychlost má na dně poháru úlomek ledu, kterým jsme se zabývali ve cvič. 4? (b) Jak velkou rychlost by měl na dně poháru jiný úlomek, jehož hmotnost by byla dvojnásobná?

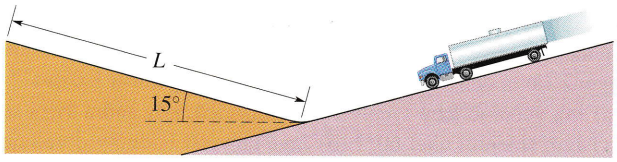
14C. Určete rychlost vozíku horské dráhy ze cvič. 5 v bodech (a) A, (b) B a (c) C. (d) Poslední, nejvyšší, pahorek již vozík nepřekoná. Do jaké výšky vyjede po jeho svahu? (e) Zodpovězte znovu otázky (a) až (d) pro vozík o dvojnásobné hmotnosti.

15C. (a) Jakou počáteční rychlost jsme udělili kouli ve cvič. 6? Jaká byla její rychlost (b) v nejnižším bodě trajektorie, (c) v bodě protilehlém k počátečnímu bodu?

16C. Člověk o hmotnosti 70,0 kg vyskočil z okna a dopadl do záchranné plachty rozestřené a uchycené v hloubce 11,0 m pod oknem. Během brzdění pádu se plachta napínala a v okamžiku, kdy člověk dosáhl nulové rychlosti, bylo její dno 1,50 m pod původní úrovní. Předpokládejme, že se mechanická energie soustavy člověk+plachta+Země během popsaného děje zachovává a že chování pružné plachty lze popsat pomocí modelu ideální pružiny. Určete pružnou energii plachty ve stavu, kdy je napjata o 1,50 m.

17C. Nákladní automobil s vadnými brzdami sjíždí po svahu (obr. 8.34). V okamžiku, kdy jej řidič navádí na bezpečnostní nájezd o sklonu 15°, ukazuje tachometr údaj $130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jakou nejmenší délku L by musel nájezd mít, aby na něm automobil

ještě dosáhl nulové okamžité rychlosti? Proč bývají bezpečnostní nájezdy obvykle pokryty silnou vrstvou písku, nebo štěrku?



Obr. 8.34 Cvičení 17

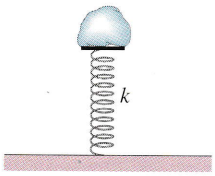
18C. Proud sopečného popela se pohybuje po vodorovném povrchu a dorazí ke svahu se stoupáním 10°. Čelo proudu urazí podél svahu ještě 920 m a zastaví se. Dejme tomu, že plyny unášené proudem jej nadnášejí a minimalizují tak tření mezi částečkami popela a zemským povrchem. Předpokládejme také, že mechanická energie souboru částic v oblasti čela proudu se zachovává. Jaká je počáteční rychlost čela proudu?

19Ú. Balon naplněný vodou o hmotnosti 1,50 kg je vyhozen svisle vzhůru počáteční rychlostí 3,00 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je v tom okamžiku kinetická energie balonu? (b) Jakou práci vykoná tíhová síla působící na balon během jeho výstupu k bodu obratu? (c) Jak se během výstupu změní tíhová potenciální energie soustavy balon + Země? (d) Jaká je tíhová potenciální energie této soustavy v okamžiku, kdy balon dosáhne nejvyššího bodu, přisoudíme-li nulovou hodnotu této energie konfiguraci, v níž je soustava v počátečním okamžiku? (e) Položme naopak $E_p = 0$ v konfiguraci, v níž je balon v nejvyšším bodě své trajektorie. Jaká byla potenciální energie soustavy balon + Země v okamžiku vyhození balonu? (f) Jaké výšky nad povrchem Země balon dosáhne?

20Ú. Jaká je rychlost koule z úlohy 9 v nejvyšším bodě její trajektorie, je-li $L = 2{,}00$ m a $\theta = 30°$?

21Ú. (a) Určete velikost rychlosti sněhové koule z úlohy 8 v okamžiku jejího dopadu na vodorovný povrch pod skaliskem. Při řešení úlohy je samozřejmě možné použít výsledků kap. 4. Vyjděte však raději z energiových úvah. (b) Jak by se změnil výsledek úlohy (a), kdyby byla koule vyhozena opět pod úhlem 41,0° vzhledem k vodorovné rovině, avšak směrem *dolů*?

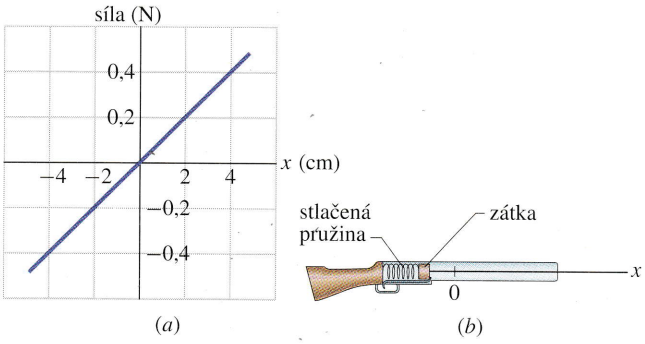
22Ú. Na obr. 8.35 je vyobrazen kámen o hmotnosti 8 kg spočívající na svislé pružině. Pružina je kamenem stlačena o 10,0 cm. (a) Jaká je tuhost pružiny? (b) Pružinu stlačíme o dalších 30,0 cm a uvolníme. Bod, v němž se kámen nachází v tomto okamžiku, označme U. Jaká je pružná potenciální energie soustavy bezprostředně před uvolněním pružiny? (c) Jaká změna tíhové potenciální energie soustavy kámen + Země odpovídá přemístění kamene z bodu U do nejvyššího bodu nad povrchem Země, jehož kámen dosáhne? (d) Jaká je největší výška kamene nad bodem U?



Obr. 8.35 Úloha 22

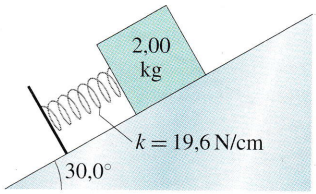
23Ú. Kulka o hmotnosti 5,0 g je vystřelena ze vzduchovky svisle vzhůru. Má-li kulka právě doletět k terči umístěnému ve výšce 20 m nad místem, v němž se nacházela před výstřelem (spočívala na horním konci stlačené svislé pružiny), musí být pružina před výstřelem stlačena o 8,0 cm. (a) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy kulka + Země během výstupu kulky? (b) Jak se změní pružná potenciální energie pružiny během výstřelu? (c) Jaká je tuhost pružiny?

24Ú. Graf závislosti pružné síly na prodloužení pružiny na obr. 8.36a odpovídá dětské špuntovce z obr. 8.36b. Pružina připravená k výstřelu je stlačena o 5,5 cm, hmotnost zátky sloužící jako náboj je 3,8 g. (a) S jak velkou rychlostí opustí zátka hlaveň za předpokladu, že ztrácí s pružinou kontakt v okamžiku, kdy konec pružiny prochází polohou odpovídající nenapjatému stavu? (b) Předpokládejme pro změnu, že se zátka k pružině přilepila a ještě ji o 1,5 cm protáhne, než s ní ztratí kontakt. Jaká bude rychlost vystřelené zátky nyní?



Obr. 8.36 Úloha 24

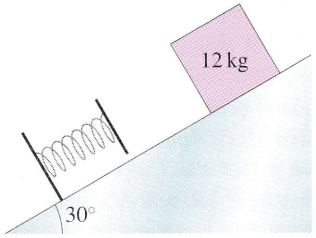
25Ú. Dvoukilogramová kostka spočívá na dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30,0° a proti sklouznutí je zajištěna pružinou (obr. 8.37). Pružinu, jejíž tuhost je 19,6 $\mathrm{N \cdot cm^{-1}}$, stlačíme tak, aby její celkové stlačení bylo 20,0 cm, a uvolníme. (a) Jaká je pružná potenciální energie stlačené pružiny? (b) Jak se změní tíhová potenciální energie soustavy kostka + Země od okamžiku uvolnění pružiny do okamžiku, kdy kostka dostoupí při pohybu podél nakloněné roviny do nejvyššího bodu své trajektorie? (c) Jakou dráhu urazí kostka podél nakloněné roviny během pohybu popsaného v části (b)?



Obr. 8.37 Úloha 25

26Ú. Kostku o hmotnosti 12 kg položíme na nakloněnou rovinu o úhlu sklonu $\theta = 30°$ a vypustíme s nulovou počáteční rychlostí. Na nakloněné rovině je připevněna pružina (obr. 8.38), jejíž tuhost je taková, že ji silou o velikosti 270 N dokážeme stlačit

o 2,0 cm. Kostka narazí na pružinu a stlačuje ji. V okamžiku, kdy je rychlost kostky nulová, je pružina stlačena o 5,5 cm. (a) Jakou dráhu urazila kostka podél nakloněné roviny od okamžiku, kdy byla vypuštěna, do okamžiku, kdy dosáhla bodu obratu? (b) S jakou rychlostí narazila do pružiny?



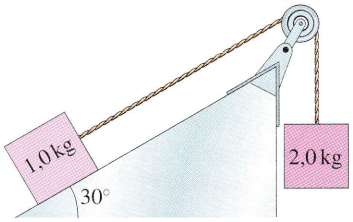
Obr. 8.38 Úloha 26

27Ú. Střela o hmotnosti 0,55 kg je vystřelena z hrany skalního útesu s počáteční kinetickou energií 1 550 J. Nejvyšší bod, kterého střela dosáhne, leží ve výšce 140 m nad ústím hlavně. (a) Jaká je vodorovná složka rychlosti střely? (b) Jaká je svislá složka její rychlosti bezprostředně po výstřelu? (c) V jistém okamžiku má svislá složka rychlosti velikost 65 $m \cdot s^{-1}$. Jaká je v tomto okamžiku poloha střely vzhledem k ústí hlavně (vodorovná vzdálenost a výška, resp. hloubka)?

28Ú. Z okna vyletěl 50 g míček s počáteční rychlostí 8,0 $m \cdot s^{-1}$ vzhůru pod elevačním úhlem 30°. Pomocí energiové metody určete (a) kinetickou energii míčku na vrcholu jeho dráhy, (b) jeho rychlost v okamžiku, kdy je 3 m pod oknem. Závisí tato rychlost na (c) hmotnosti míčku, (d) počátečním úhlu?

29Ú. Pružina dětské vzduchovky má tuhost 7,0 $N \cdot cm^{-1}$. Dítě vystřelilo kulku o hmotnosti 30 g pod úhlem 30° šikmo vzhůru. Kulka dosáhla maximální výšky 1,8 m nad ústím hlavně. (a) Jakou rychlostí opustila kulka hlaveň? (b) Jaké bylo stlačení pružiny před výstřelem?

30Ú. Nakloněná rovina v experimentu na obr. 8.39 je dokonale hladká, kladka má zanedbatelnou hmotnost a může se otáčet bez tření. Tělesa spojená napjatou nepružnou šňůrou jsou nejprve v klidu a pak je uvolníme. Jaká je celková kinetická energie soustavy v okamžiku, kdy těleso o hmotnosti 2,0 kg pokleslo o 25 cm?

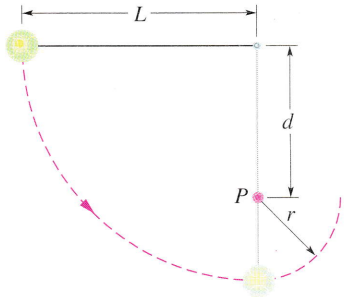


Obr. 8.39 Úloha 30

31Ú. Sněhovou kouli o hmotnosti 1,50 kg jsme vyhodili šikmo vzhůru pod elevačním úhlem 34,0° s počáteční rychlostí o velikosti 20,0 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jaká je její počáteční kinetická energie? (b) Jak se změní potenciální energie soustavy koule + Země od počátečního okamžiku do okamžiku, kdy koule dosáhne největší výšky nad výchozím místem? (c) Určete tuto výšku.

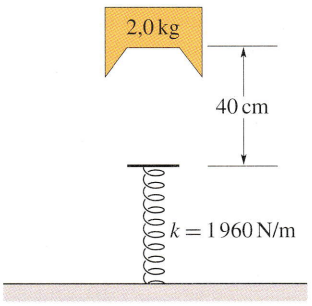
32Ú. Kyvadlo je vyrobeno z kamene o hmotnosti 2,0 kg, který se může houpat na nehmotné šňůře o délce 4,0 m. Při průchodu nejnižším bodem své trajektorie má kámen rychlost 8,0 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jak velká je jeho rychlost v okamžicích, kdy šňůra svírá se svislým směrem úhel 60°? (b) Jaké největší hodnoty dosahuje během pohybu kyvadla úhel mezi šňůrou a svislým směrem? (c) Určete celkovou mechanickou energii soustavy kyvadlo + + Země, přisoudíme-li nulovou hodnotu její potenciální energie konfiguraci, v níž je kámen v nejnižší poloze.

33Ú. Délka šňůry kyvadla na obr. 8.40 je $L = 120$ cm. V bodě P je umístěn pevný kolík, jehož vzdálenost od bodu závěsu kyvadla je $d = 75{,}0$ cm. Kuličku kyvadla zvedneme tak, aby šňůra byla vodorovná a volně ji vypustíme (obr. 8.40). Kulička se pohybuje po trajektorii vyznačené v obrázku přerušovanou čarou. Jaká je její rychlost v okamžiku, kdy dosáhne (a) nejnižšího bodu trajektorie, (b) nejvyššího bodu poté, co se šňůra zachytí o kolík.



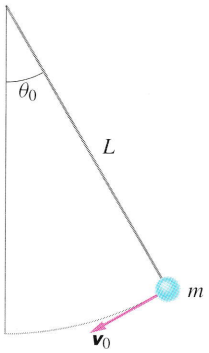
Obr. 8.40 Úlohy 33 a 41

34Ú. Kostka o hmotnosti 2,0 kg je upuštěna z výšky 40 cm a dopadne na svislou pružinu o tuhosti $k = 1\,960$ $N \cdot m^{-1}$ (obr. 8.41). Určete největší stlačení pružiny.



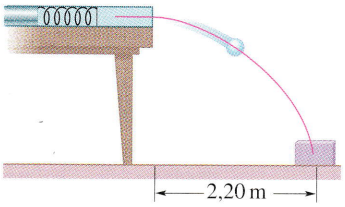
Obr. 8.41 Úloha 34

35Ú. Na obr. 8.42 je nakresleno kyvadlo délky L. Kulička, která prakticky nese veškerou hmotnost kyvadla, má rychlost $\boldsymbol{v}_0$ v okamžiku, kdy šňůra svírá se svislým směrem úhel θ_0. (a) Odvoďte vztah pro rychlost kuličky v nejnižším bodě její trajektorie. Jaká je nejmenší možná hodnota v_0, má-li kyvadlo (b) dosáhnout polohy, v níž je šňůra vodorovná, (c) projít nejvyšším bodem nad místem závěsu tak, aby se šňůra nepokrčila?



Obr. 8.42 Úloha 35

36Ú. Dvě děti hrají hru, při níž se snaží kuličkou z dětské pušky, připevněné ke stolu, trefit do malé krabičky na podlaze (obr. 8.43). Krabička leží ve vzdálenosti 2,20 m od stolu. Honza stlačil pružinu pušky o 1,10 cm a kulička dopadla 27,0 cm před střed krabičky. Jak musí stlačit pružinu Eva, aby zasáhla cíl?



Obr. 8.43 Úloha 36

37Ú. Velikost gravitační síly, jíž na sebe působí dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2, je dána vztahem

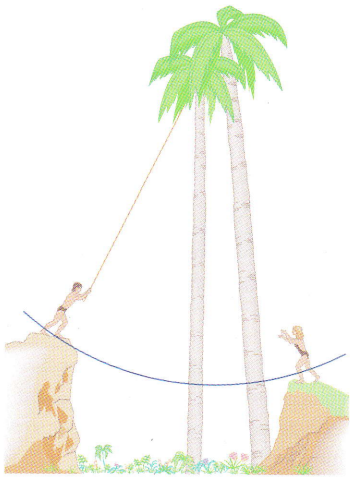
$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2},$$

kde G je konstanta a x je vzdálenost částic. (a) Najděte odpovídající funkci pro potenciální energii $E_p(x)$. Předpokládejte, že $E_p(x) \to 0$ pro $x \to \infty$. (b) Jakou práci vykonají síly, jimiž je třeba na částice působit, abychom jejich vzdálenost zvýšili z hodnoty x_1 na hodnotu $x = x_1 + d$ (beze změny jejich kinetické energie)?

38Ú. Na těleso o hmotnosti 20 kg, které je součástí izolované soustavy, působí ve směru osy x konzervativní síla $F = -3{,}0x - 5{,}0x^2$, kde F je v newtonech a x v metrech. Potenciální energii soustavy spojenou s tímto silovým působením považujeme za nulovou při $x = 0$. (a) Jaká je potenciální energie soustavy pro $x = 2{,}0$ m? (b) V okamžiku, kdy je poloha tělesa určena souřadnicí $x = 5{,}0$ m, má jeho rychlost velikost $4{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a je nesouhlasně rovnoběžná s osou x. Jaká je velikost rychlosti tělesa v okamžiku, kdy prochází počátkem soustavy souřadnic? (c) Odpovězte na otázky (a) a (b) za předpokladu, že konfiguraci $x = 0$ přisoudíme potenciální energii $-8{,}0$ J.

39Ú. (a) Jaká je výslednice sil, které působí na kostku z úlohy 10, v okamžiku jejího průchodu bodem Q? (b) Z jaké výšky h je třeba kostku volně vypustit, aby ztratila kontakt se smyčkou právě při průchodu jejím vrcholem? (*Ztráta kontaktu se smyčkou* je charakterizována tím, že tlaková síla smyčky na kostku se právě anuluje.)

40Ú. Představme si románového hrdinu Tarzana, jak se zhoupne ze skalního výběžku na liáně dlouhé 18 m (obr. 8.44). Nejnižší bod trajektorie leží 3,2 m pod úrovní výběžku. Liána vydrží zátěž 950 N, Tarzan váží 688 N. (a) Přetrhne se liána? (b) Jestliže ne, zjistěte, jak velká je největší síla, která ji napíná během zhoupnutí.

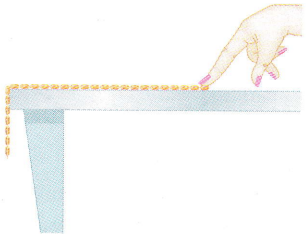


Obr. 8.44 Úloha 40

41Ú. Ukažte, že kulička na obr. 8.40 může oběhnout pevný kolík (při napjaté šňůře) jedině tehdy, je-li $d > 3L/5$. (*Tip*: Kulička musí mít v nejvyšším bodě kruhové trajektorie stále ještě nenulovou rychlost. Víte proč a jak velkou?)

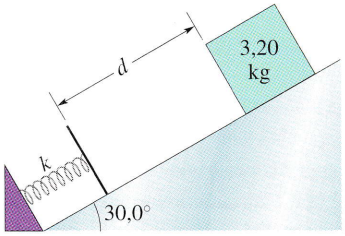
42Ú. Kyvadlo je tvořeno kuličkou o hmotnosti m připevněnou na konci tuhé tyče délky L. Hmotnost tyče je zanedbatelná. Kuličku zvedneme tak, aby tyčka mířila přímo vzhůru, a pak uvolníme. (a) Jaká je rychlost kuličky v nejnižším bodě její trajektorie? (b) Jakou silou je napínána tyč při průchodu kuličky tímto bodem? (c) Kyvadlo nyní vychýlíme tak, aby tyč byla vodorovná, a opět uvolníme. Jaký úhel svírá tyč se svislým směrem v okamžiku, kdy jsou tíhová síla a tahová síla tyče působící na kuličku stejně velké?

43Ú*. Řetěz přidržujeme na dokonale hladkém vodorovném stole tak, že jedna čtvrtina jeho délky visí přes okraj (obr. 8.45). Řetěz má délku L a hmotnost m. Jak velkou práci musíme vykonat, abychom vytáhli celý řetěz zpět na stůl?



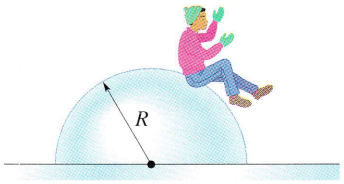
Obr. 8.45 Úloha 43

44Ú*. Kostka o hmotnosti 3,20 kg může klouzat po dokonale hladké nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Na nakloněné rovině leží pružina o tuhosti 431 $N \cdot m^{-1}$, připevněná k jejímu spodnímu okraji (obr. 8.46). Kostka je vypuštěna s nulovou počáteční rychlostí z místa, jehož vzdálenost od volného konce pružiny, měřená podél nakloněné roviny, je d. Kostka narazí do pružiny a urazí ještě 21,0 cm, než se dostane do bodu obratu (její rychlost je v tom okamžiku nulová). (a) Určete vzdálenost d. (b) Určete vzdálenost mezi bodem prvního kontaktu kostky s pružinou a bodem, v němž je rychlost kostky největší.



Obr. 8.46 Úloha 44

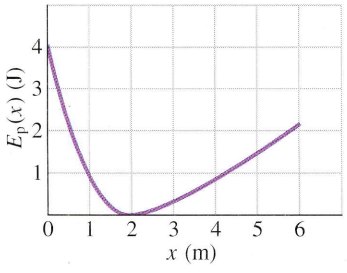
45Ú*. Chlapec si sedl na vršek polokulového ledového náspu (obr. 8.47). Nepatrně se odrazil a začal klouzat dolů. Tření považujte za zanedbatelné a ukažte, že chlapec ztratil kontakt s ledovou polokoulí v bodě ležícím ve výšce $2R/3$ nad vodorovnou podložkou. (*Tip*: Při ztrátě kontaktu se anuluje tlaková síla podložky.)



Obr. 8.47 Úloha 45

ODST. 8.5 Interpretace křivky potenciální energie

46C. Na částici pohybující se podél osy x působí konzervativní síla $F(x)$. Na obr. 8.48 je graf závislosti příslušné potenciální energie E_p na poloze částice. (a) Nakreslete závislost $F(x)$. Použijte stejnou stupnici proměnné x jako na obr. 8.48. (b) Mechanická energie soustavy E je 4,0 J. Nakreslete graf závislosti kinetické energie $E_k(x)$ částice na poloze x.



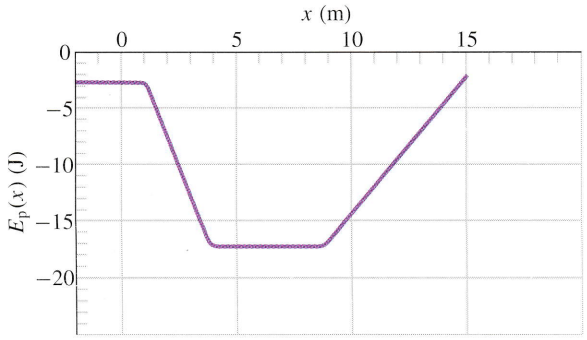
Obr. 8.48 Cvičení 46

47Ú. Potenciální energie dvouatomové molekuly (např. H_2 nebo O_2) je dána vztahem

$$E_p = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6},$$

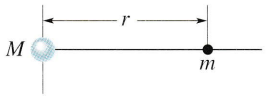
kde r je vzdálenost atomů v molekule a A a B jsou kladné konstanty. Tato potenciální energie souvisí s interakčními (vazebními) silami, které drží molekulu pohromadě. (a) Určete *rovnovážnou vzdálenost* atomů, tj. vzdálenost, jíž odpovídají nulové interakční síly. Rozhodněte, zda je výsledná síla vzájemného působení atomů odpudivá, nebo přitažlivá, jestliže je vzdálenost atomů (b) menší, (c) větší než vzdálenost rovnovážná.

48Ú. Na částici o hmotnosti $m = 2$ kg pohybující se podél osy x působí konzervativní síla $F(x)$. Graf odpovídající potenciální energie je na obr. 8.49.

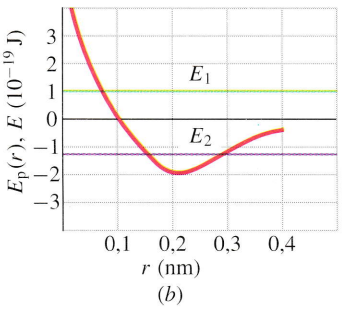


Obr. 8.49 Úloha 48

V poloze $x = 2{,}0$ m má částice rychlost $v_x = -1{,}5\ m \cdot s^{-1}$. (a) Jakou velikost a směr má v této poloze síla $F(x)$? (b) Mezi jakými krajními hodnotami x se částice pohybuje? (c) Jaká je rychlost částice v bodě $x = 7{,}0$ m?



(*a*)



(*b*)

Obr. 8.50 Úloha 49

49Ú. Na obr. 8.50a je dvouatomová molekula. Hmotnosti atomů jsou m a M ($m \ll M$) a jejich vzdálenost je r. Na obr. 8.50b je graf závislosti potenciální energie molekuly $E_p(r)$ na vzdálenosti r. Popište pohyb atomů, (a) je-li celková mechanická

energie molekuly E kladná (např. E_1), (b) záporná (např. E_2). Pro $E_1 = 1{\cdot}10^{-19}$ J a $r = 0{,}3$ nm určete (c) potenciální energii soustavy, (d) celkovou kinetickou energii obou atomů, (e) sílu (velikost a směr) působící na každý atom. Pro jaké hodnoty r je interakce atomů (f) odpudivá, (g) přitažlivá, (h) nulová?

ODST. 8.6 Práce nekonzervativních sil

50C. Pes vleče svou boudu vodorovnou silou 8,0 N. Na boudu působí dynamická třecí síla o velikosti 5,0 N. (a) Jakou práci vykoná síla, jíž působí na boudu pes, a (b) jak velká mechanická energie bude rozptýlena vlivem třecí síly při posunutí boudy o 0,70 m?

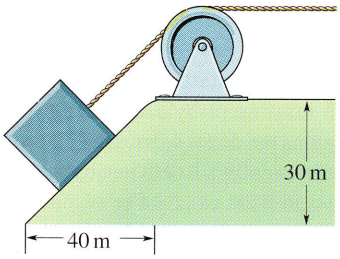
51C. Na kostku z umělé hmoty působí vodorovná síla o velikosti 15 N. Kostka se pohybuje po podlaze stálou rychlostí, přičemž je průběžně zaznamenávána její teplota. Zjistilo se, že při posunutí o 3,0 m se zvýšila vnitřní energie kostky o 20 J. Jakou práci vykonala dynamická třecí síla působící na kostku?

52Ú. Dělník sune bednu o hmotnosti 27 kg po vodorovné podlaze stálou rychlostí. Síla, kterou na ni při tom působí, svírá s vodorovnou rovinou úhel 32° a míří dolů. (a) Jakou práci vykoná tato síla při posunutí bedny o 9,2 m, je-li koeficient dynamického tření mezi bednou a podlahou 0,20? (b) Určete mechanickou energii rozptýlenou třecími silami.

53Ú. Stroj tlačí kmen o hmotnosti 50 kg stálou rychlostí vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Síla, kterou stroj na kmen působí, je stálá a má vodorovný směr. Koeficient tření mezi kmenem a nakloněnou rovinou je 0,20. (a) Určete práci, kterou vykoná síla stroje při posunutí kmenu o 6,0 m, a (b) práci tíhové síly působící na kmen. (c) Jaká energie je rozptýlena třecími silami?

54Ú. Kostka o hmotnosti 3,57 kg je tažena na laně po vodorovné podlaze stálou rychlostí. Tahová síla lana má velikost 7,68 N a míří vzhůru po úhlem 15° vzhledem k vodorovné rovině. Vypočtěte (a) práci tahové síly lana při posunutí kostky o 4,06 m a (b) koeficient dynamického tření mezi kostkou a podlahou. (c) Jaká energie je přitom rozptýlena třecími silami?

55Ú. Žulový blok o hmotnosti 1 400 kg je tažen pomocí navijáku po nakloněné rovině stálou rychlostí 1,34 m·s^{-1} (obr. 8.51). Koeficient dynamického tření mezi blokem a nakloněnou rovinou je 0,40. Jaký je výkon tahové síly lana?



Obr. 8.51 Úloha 55

ODST. 8.7 Zákon zachování energie

56C. Fotbalista o hmotnosti 70 kg běží rychlostí 10 m·s^{-1}, sklouzne po trávníku a zastaví se vlivem třecích sil. (a) Jak velká energie je třecími silami rozptýlena? (b) Jaká je změna vnitřní energie fotbalisty a podložky, po níž klouže?

57C. Dítě vyhodilo míček o hmotnosti 75 g z místa ve výšce 1,1 m nad zemí. Udělilo mu přitom rychlost o velikosti 12 m·s^{-1}. Ve výšce 2,1 m nad zemí měla rychlost míčku velikost 10,5 m·s^{-1}. (a) Jakou práci vykonala tíhová síla působící na míček? (b) K jaké energiové ztrátě došlo vlivem odporu vzduchu?

58C. Brankář vyhodil míč rychlostí o velikosti 35 m·s^{-1}. Bezprostředně před tím, než míč zachytil ve stejné výšce útočník, byla velikost rychlosti míče 28 m·s^{-1}. Zjistěte, k jaké ztrátě energie míče došlo vlivem odporu prostředí. Hmotnost míče je 0,3 kg.

59C. Hráč vyhodil míč o hmotnosti 0,63 kg počáteční rychlostí 14 m·s^{-1}. Míč vystoupil do výšky 8,1 m. Jakou energiovou ztrátu způsobil odpor prostředí?

60C. Střela o hmotnosti 9,4 kg byla vystřelena svisle vzhůru. Během jejího výstupu došlo vlivem odporu prostředí k energiové ztrátě 68 kJ. O kolik metrů výše by střela vystoupila při zanedbatelném odporu prostředí?

61C. Výška peřejí na řece je 15 m. Velikost rychlosti toku řeky nad peřejemi je 3,2 m·s^{-1}, pod nimi 13 m·s^{-1}. Jaká část změny tíhové potenciální energie soustavy voda+Země (v procentech), k níž došlo při pádu vody, přispěla k přírůstku energie kinetické? (*Tip*: Úvahu proveďte pro zvolené množství vody, řekněme 10 kg.)

62C. Niagarským vodopádem protéká přibližně $5{,}5{\cdot}10^6$ kg vody za sekundu. (a) K jak velkému poklesu tíhové potenciální energie soustavy voda + Země každou sekundu dochází, padá-li voda z výšky 50 m? (b) Představme si, i když je to nemožné, že by se této energie využilo pro výrobu elektřiny. Jak velký elektrický výkon by byl dodáván do sítě? (c) Kolik bychom získali ročně, kdyby cena jedné kilowatthodiny elektrické energie byla 30 haléřů?

63C. Vodopádem o výšce 100 m proteče 1 200 m^3 vody za každou sekundu. Tři čtvrtiny kinetické energie, kterou voda získá pádem z této výšky, se využijí pro výrobu elektrické energie ve vodní elektrárně. Jaký je výkon generátoru?

64C. Rozloha pevninské části USA je asi $8{\cdot}10^6$ km^2, průměrná nadmořská výška je 500 m. Průměrné roční srážky činí 75 cm. Dvě třetiny dešťové vody se opět odpaří do atmosféry, zbytek se dostává do oceánu. Představme si, že by odpovídající přírůstek tíhové potenciální energie soustavy voda + Země mohl být plně využit pro výrobu elektrické energie. Jaký by byl průměrný výkon pomyslné elektrárny?

65C. Výsadkář o hmotnosti 68 kg padá s konstantní mezní rychlostí 59 m·s^{-1}. (a) Jak rychle klesá tíhová potenciální energie soustavy výsadkář + Země? (b) Jak rychle dochází ke ztrátám mechanické energie (energiová ztráta za sekundu)?

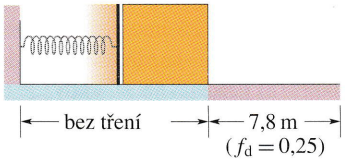
66C. Medvídek o hmotnosti 25 kg sjel ze stromu o výšce 12 m. V počátečním okamžiku byla jeho rychlost nulová, těsně před dopadem na zem měla velikost 5,6 m·s^{-1}. (a) Jak se změnila

potenciální energie soustavy medvídek + Země? (b) Jakou kinetickou energii měl medvídek těsně nad zemí? (c) Jak velká průměrná třecí síla na něj působila?

67C. Kámen o hmotnosti 520 kg sjíždí po svahu dlouhém 500 m a vysokém 300 m. Kámen je zpočátku v klidu. Koeficient dynamického tření mezi kamenem a svahem je 0,25. Zvolme hladinu nulové tíhové potenciální energie soustavy kámen + Země na úpatí svahu. (a) Jaká byla potenciální energie soustavy, než se kámen dal do pohybu? (b) K jaké ztrátě mechanické energie soustavy došlo během skluzu vlivem tření? (c) Jaká je kinetická energie kamene na úpatí svahu? (d) Jaká je jeho rychlost?

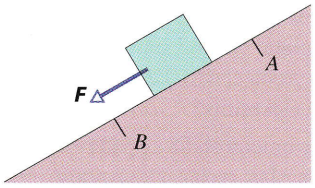
68C. Střela o hmotnosti 30 g letící vodorovnou rychlostí o velikosti $500\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ se zaryla 12 cm hluboko do stěny. (a) Jak se změnila její mechanická energie? (b) Jaká byla velikost průměrné brzdící síly působící na střelu?

69Ú. Kostka o hmotnosti 3,5 kg na obr. 8.52 je urychlována stlačenou pružinou. Tuhost pružiny je $640\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. V okamžiku, kdy je pružina nenapjatá, ztrácí s ní kostka kontakt a pohybuje se dále po vodorovné podložce. Podložka je zčásti dokonale hladká, zčásti je vyrobena z materiálu, který působí na kostku třecí silou charakterizovanou koeficientem tření 0,25. Poloha rozhraní obou částí je shodná s polohou volného konce nenapjaté pružiny (obr. 8.52). Po ztrátě kontaktu s pružinou urazí kostka ještě 7,8 m a zastaví se. (a) K jaké ztrátě mechanické energie došlo při brzdění kostky vlivem třecích sil? (b) Jaká byla největší hodnota kinetické energie kostky? (c) Jaké bylo stlačení pružiny na začátku pokusu?



Obr. 8.52 Úloha 69

70Ú. Kostka na obr. 8.53 se posune po nakloněné rovině z bodu A do bodu B, vzdáleného o 5,0 m. Kromě tíhové, tlakové a třecí síly působí na kostku ještě síla F o velikosti 2,0 N, rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Velikost třecí síly je 10 N. Při přesunu mezi body A a B vzrostla kinetická energie kostky o 35 J. Jakou práci vykonala tíhová síla?

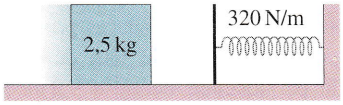


Obr. 8.53 Úloha 70

71Ú. Jeden konec pružiny upevníme ke stropu a na druhý připevníme hlávku zelí. Hlávku pomalu uvolňujeme, až přejde do rovnovážné polohy, v níž je pružná síla kompenzována silou tíhovou. Ukažte, že změna tíhové potenciální energie soustavy hlávka + Země je rovna dvojnásobku přírůstku pružné potenciální energie. Jak to, že se tyto dvě veličiny nerovnají?

72Ú. Kostku o hmotnosti 2,0 kg přitiskneme k volnému konci vodorovné pružiny a stlačíme pružinu o 15 cm. Poté kostku uvolníme. Kostka bude klouzat po vodorovném stole a zastaví se ve vzdálenosti 75 cm od místa, kde byla uvolněna. Tuhost pružiny je $200\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Určete koeficient tření mezi kostkou a deskou stolu.

73Ú. Kostka o hmotnosti 2,5 kg narazí na konec vodorovné pružiny o tuhosti $320\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$ (obr. 8.54). V okamžiku, kdy je kostka v bodě obratu, je pružina stlačena o 7,5 cm. Koeficient dynamického tření mezi kostkou a podložkou je 0,25. (a) Jakou práci vykonala pružná síla působící na kostku během jejího brzdění? (b) K jak velké ztrátě mechanické energie došlo vlivem třecích sil? (c) Jaká byla rychlost kostky v okamžiku nárazu na pružinu?



Obr. 8.54 Úloha 73

74Ú. Výšky dvou zasněžených vrcholků nad údolím jsou 850 m a 750 m. Lyžař sjede z vyššího z nich, zamíří do protisvahu a vyjede na nižší vrcholek. Urazí přitom celkovou dráhu 3,2 km. Průměrný sklon obou svahů je 30° (obr. 8.55). (a) Předpokládejme, že lyžař odstartuje z vyššího vrcholku s nulovou rychlostí, a zanedbejme vliv tření. Jakou rychlost má na nižším vrcholku, neodráží-li se holemi? (b) Jaký by musel být koeficient tření mezi lyžemi a sněhovou pokrývkou, aby se lyžař na nižším vrcholku právě zastavil?

Obr. 8.55 Úloha 74

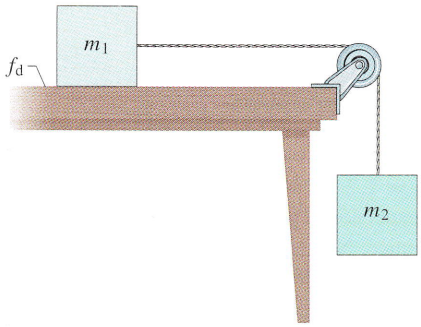
75Ú. V továrně došlo nešťastnou náhodou k uvolnění bedny o hmotnosti 0,2 tuny, která byla upevněna v nejvyšším bodě šikmé rampy. Rampa má délku 4,0 m a její úhel sklonu vzhledem k vodorovné podložce je 39°. Koeficient dynamického tření mezi rampou a bednou je 0,28. (a) Jaká je rychlost bedny na konci rampy? (b) Jak daleko bude bedna klouzat po vodorovné podlaze? (Předpokládáme, že kinetická energie bedny se v okamžiku sklouznutí z rampy na podlahu nezmění.) (c) Vysvětlete, proč jsou odpovědi na otázky (a) i (b) nezávislé na hmotnosti bedny?

76Ú. Dvě kostky spojené šňůrou podle obr. 8.56 jsou uvolněny z klidového stavu. Ukažte, že velikost rychlosti kostek je v zá-

vislosti na uražené dráze L dána vztahem

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - f_d m_1)gL}{m_1 + m_2}},$$

kde f_d je koeficient dynamického tření mezi kostkou m_1 a deskou stolu. Předpokládáme, že kladka má zanedbatelnou hmotnost a otáčí se bez tření.



Obr. 8.56 Úloha 76

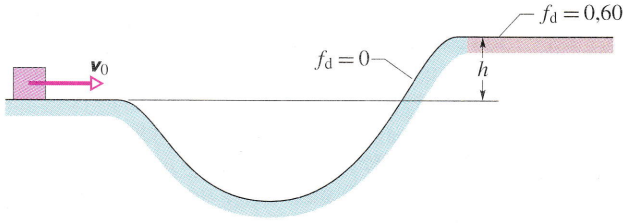
77Ú. Balík o hmotnosti 4,0 kg je uveden do pohybu směrem vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 30°. Jeho počáteční kinetická energie je 128 J. Jak daleko bude balík klouzat po nakloněné rovině, je-li koeficient tření 0,30?

78Ú. Nádoba se pohybuje vzhůru po nakloněné rovině o úhlu sklonu 40°. V bodě ležícím ve vzdálenosti 0,55 m od jejího dolního konce (měřeno podél nakloněné roviny) je rychlost nádoby 1,4 m·s^{-1}. Koeficient dynamického tření mezi nádobou a nakloněnou rovinou je 0,15. (a) Jak daleko se bude nádoba podél nakloněné roviny ještě pohybovat? (b) Jaká bude její rychlost poté, co opět sklouzne k dolnímu konci nakloněné roviny?

79Ú. Experimentátor zjistil, že pružina používaná k pokusům *nevyhovuje* Hookovu zákonu. Pružná síla (v newtonech) má při prodloužení o vzdálenost x (v metrech) velikost $52{,}8x + 38{,}4x^2$ a působí proti prodloužení. (a) Vypočtěte práci potřebnou k prodloužení pružiny z hodnoty $x = 0{,}500$ m na hodnotu $x = 1{,}00$ m. (b) Jeden konec pružiny upevníme a k druhému připojíme částici o hmotnosti 2,17 kg. Pružinu protáhneme o $x = 1{,}00$ m a uvolníme. Určete rychlost částice v okamžiku, kdy je pružina prodloužena o $x = 0{,}500$ m. (c) Rozhodněte, zda síla, jíž působí pružina na částici, je konzervativní či nikoliv. Zdůvodněte.

80Ú. Dívenka vážící 267 N se vozí po dětské skluzavce. Skluzavka měří 6,1 m a svírá s vodorovnou rovinou úhel 20°. Koeficient dynamického tření je 0,10. (a) Jakou práci vykoná během jedné „jízdy" tíhová síla působící na holčičku? (b) Určete energiovou ztrátu způsobenou třecími silami. (c) Jak velkou rychlost bude mít holčička na konci skluzavky, jestliže na jejím vrcholu startuje s rychlostí o velikosti 0,457 m·s^{-1}?

81Ú. Kostka se pohybuje po vodorovném úseku kolejnic na obr. 8.57 rychlostí $v_0 = 6{,}0$ m·s^{-1}, projede dolíkem a vyjede na plošinu vyvýšenou nad původní úroveň o $h = 1{,}1$ m. Na horní plošině je kostka brzděna třecí silou, charakterizovanou koeficientem dynamického tření $f_d = 0{,}60$ a zastaví se poté, co urazila vzdálenost d. Určete tuto vzdálenost.

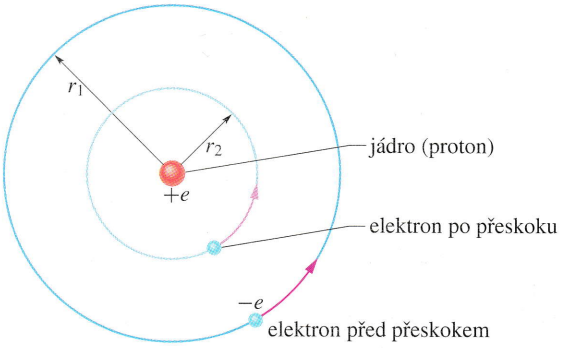


Obr. 8.57 Úloha 81

82Ú. Velikost přitažlivých elektrostatických sil, jimiž na sebe vzájemně působí kladně nabité jádro (proton) a záporně nabitý elektron ve vodíkovém atomu, je dána vztahem

$$F = k\frac{e^2}{r^2},$$

kde e je velikost náboje elektronu a protonu, k je konstanta a r je vzdálenost elektronu od jádra. Předpokládejme, že jádro je nepohyblivé. Představme si, že elektron, který zpočátku obíhal kolem jádra po kružnici o poloměru r_1, náhle „přeskočí" na kruhovou dráhu o menším poloměru r_2 (obr. 8.58). (a) Určete změnu kinetické energie elektronu užitím druhého Newtonova zákona. (b) Na základě znalosti vztahu mezi silou a potenciální energií určete změnu potenciální energie atomu. (c) Jaký je pokles celkové energie atomu při tomto ději? (Celková energie atomu musí klesnout, neboť při popsaném přechodu elektronu vyzáří atom světlo.)



Obr. 8.58 Úloha 82

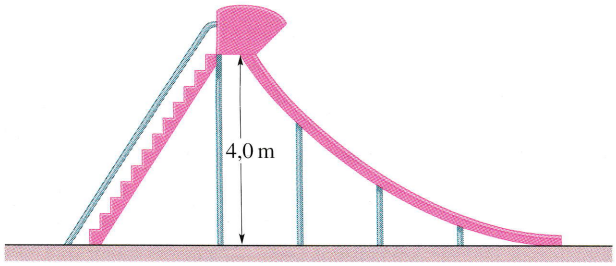
83Ú. Kámen o váze G (v newtonech) je vržen svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0. Předpokládáme, že na letící kámen působí stálá odporová síla vzduchu o velikosti F. (a) Ukažte, že kámen dosáhne maximální výšky

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + \frac{F}{G})}.$$

(b) Dále ověřte, že rychlost kamene bezprostředně před dopadem na zem je

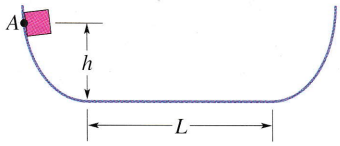
$$v = v_0\left(\frac{G - F}{F + G}\right)^{1/2}.$$

84Ú. Skluzavka ve tvaru kruhového oblouku o poloměru 12 m je vysoká 4,0 m a dotýká se povrchu Země (obr. 8.59). Dítě o hmotnosti 25 kg sjede z vrcholu skluzavky. Při nulové počáteční rychlosti je velikost jeho rychlosti na konci skluzavky 6,2 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. (a) Jaká je délka skluzavky? (b) Jaká je průměrná velikost třecí síly působící na dítě? Představme si nyní, že by skluzavka byla umístěna tak, aby svislá přímka procházející jejím nejvyšším bodem byla tečnou ke kruhovému oblouku. (c) Jaká by byla v tomto případě délka skluzavky a (d) průměrná velikost třecí síly působící na dítě při skluzu?



Obr. 8.59 Úloha 84

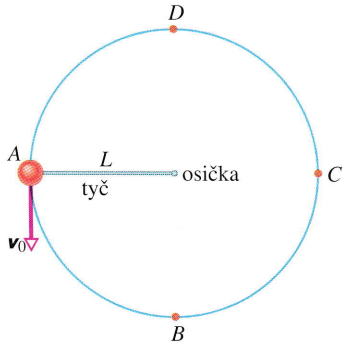
85Ú. Částice může klouzat po kolejnici upravené do tvaru znázorněného na obr. 8.60. Střední vodorovný úsek má délku L. Zakřivené úseky kolejnice jsou dokonale hladké, v rovném úseku však na částici působí třecí síla charakterizovaná koeficientem tření $f_\mathrm{d} = 0{,}20$. Částice je volně vypuštěna z bodu A, ležícího ve výšce $h = L/2$ nad vodorovným úsekem. Kde se částice nakonec zastaví?



Obr. 8.60 Úloha 85

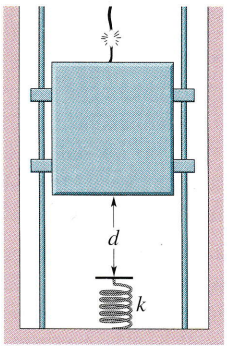
86Ú. Ke konci tenké tuhé tyče o zanedbatelné hmotnosti a délce L je připevněna koule o hmotnosti m (obr. 8.61). Druhý konec tyče je nasazen na tenké osičce tak, aby se koule mohla pohybovat po kružnici ležící ve svislé rovině. Koule je z výchozí polohy A, kdy je tyč vodorovná, uvedena do pohybu počáteční rychlostí o velikosti v_0, směřující dolů. Rychlost koule se anuluje právě v okamžiku jejího průchodu bodem D. (a) Vyjádřete v_0 pomocí L, m a g. (b) Jakou silou je namáhána tyč, je-li koule právě v bodě B? (c) Osičku posypeme jemným pískem, aby otáčení tyče bylo poněkud brzděno třením, a uvedeme kyvadlo do pohybu stejným způsobem jako v předchozím pokusu. Koule však nyní dostoupí pouze do bodu C. Jak velká je ztráta mechanické energie způsobená třením? (d) Po několika kmitech se kyvadlo zastaví v poloze B. Určete celkovou energiovou ztrátu způsobenou třením od okamžiku vypuštění kyvadla z výchozí polohy A.

87Ú. Kabina zdviže na obr. 8.62 váží 20 000 N. Tažné lano zdviže se přetrhlo v okamžiku, kdy zdviž stála v prvním poschodí a její dno bylo ve vzdálenosti $d = 4$ m od konce tlumicí pružiny



Obr. 8.61 Úloha 86

o tuhosti $k = 1{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$. Při přetržení lana bylo uvedeno do chodu bezpečnostní zařízení, které sevřelo kabinu mezi svislé vodicí kolejnice. Na kabinu tak začala působit třecí síla o stálé velikosti 5 000 N, směřující proti jejímu pohybu. (a) Jaká byla rychlost kabiny těsně před nárazem na tlumicí pružinu? (b) Určete maximální stlačení x pružiny. (c) Jakou dráhu urazí kabina od okamžiku odskoku od pružiny do okamžiku, kdy se dostane do bodu obratu a začne opět padat? (d) Pomocí zákona zachování energie určete přibližně celkovou dráhu, kterou kabina urazí od okamžiku přetržení lana do úplného zastavení. Proč může být odpověď pouze přibližná?

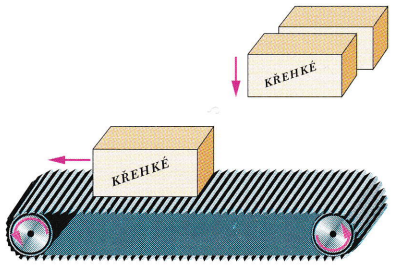


Obr. 8.62 Úloha 87

88Ú. Brusič tlačí kovový nástroj ke kotouči brusky silou o velikosti 180 N. Kotouč má poloměr 20 cm a vykoná 2,5 otáčky za sekundu. Koeficient tření mezi nástrojem a kotoučem je 0,32. Jaký je výkon třecí síly (energiová ztráta způsobená třecí silou za jednu sekundu, která se projeví přírůstkem vnitřní energie soustavy)?

89Ú*. Zboží z balírny se expeduje v krabicích na pásovém přepravníku. Hmotnost krabice se zbožím je 300 kg. Motor přepravníku udržuje velikost rychlosti pásu na stálé hodnotě 1,20 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Balicí stroj uvolňuje krabice tak, aby na pás dopadaly kolmo (obr. 8.63). Koeficient dynamického tření mezi pásem a krabicí je 0,400. Po dopadu pás pod krabicí nejprve prokluzuje. Během velmi krátké doby Δt však prokluzování ustane a krabice se začne pohybovat spolu s pásem. Zvolte vztažnou soustavu spojenou s místností balírny a určete (a) kinetickou energii,

kterou získá krabice za dobu Δt, (b) velikost dynamické třecí síly, kterou působí pás na krabici, (c) energii dodanou soustavě pás + krabice za dobu Δt motorem přepravníku. (d) Vysvětlete, proč se odpovědi (a) a (c) liší.



Obr. 8.63 Úloha 89

ODST. 8.8 Hmotnost a energie

90C. (a) Jaká energie (v joulech) odpovídá hmotnosti 102 g? (b) Kolik let by takový „zdroj energie" mohl zásobovat jednu domácnost, je-li k provozu domácnosti potřeba průměrný výkon 1,00 kW?

91C. „Mohutnost" zemětřesení M v tzv. Richterově stupnici souvisí s uvolněnou energií E (v joulech) vztahem

$$\log E = 5{,}24 + 1{,}44M.$$

(a) V roce 1906 bylo San Francisco postiženo zemětřesením o velikosti 8,2 stupňů Richterovy stupnice (obr. 8.64). Kolik energie se při tomto zemětřesení uvolnilo? (b) Jak velká hmotnost je ekvivalentní této energii?

92C. Celková produkce elektrické energie v USA činila v roce 1983 $2{,}31 \cdot 10^{12}$ kW·h. Určete odpovídající hmotnostní ekvivalent.

93Ú. Jaká nejmenší energie je potřebná k rozštěpení jádra uhlíku ^{12}C (hmotnost 11,996 71 u) na tři jádra helia ^{4}He (hmotnost každého z nich je 4,001 51 u)?

94Ú. Jádro atomu zlata obsahuje 79 protonů a 118 neutronů. Jeho hmotnost je 196,923 2 u. Jaká je jeho vazební energie? Další potřebné údaje najdete v př. 8.10.

95Ú. Při jaderné fúzi popsané rovnicí $\mathrm{d} + \mathrm{t} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n}$ se deuteron (označený symbolem d) sloučí s atomem tritia (označený symbolem t, obsahuje jeden proton a dva neutrony). Vzniká jádro helia (dva protony a dva neutrony) a volný neutron (n). Hmotnosti částic účastnících se reakce jsou tyto:

d: 2,013 55 u	^{4}He: 4,001 51 u
t: 3,015 50 u	n: 1,008 67 u

(a) Rozhodněte, zda při této reakci dochází k uvolnění energie, nebo k jejímu pohlcení. (b) Jak velká je uvolněná, resp. pohlcená energie?

ODST. 8.9 Kvantování energie

96C. V následující tabulce jsou uvedeny energie pěti nejnižších energiových hladin tří typů hypotetických atomů v elektronvoltech:

Typ A	Typ B	Typ C
3,8	3,2	3,1
3,0	2,7	2,9
2,4	2,0	2,2
1,4	1,2	1,5
0	0	0

U každého z těchto „atomů" byly zaznamenány dvě emisní spektrální čáry: (a) 1,4 eV, (b) 1,5 eV. Pro každou z nich najděte odpovídající přechody elektronu v jednotlivých atomech.

Obr. 8.64 Cvičení 91. Oblast Nob Hill v San Francisku zničená zemětřesením v roce 1906. Čára zlomu v oblasti San Andreas měřila přes 400 km.

97C. Přístroj sledující chování hypotetického atomu zaznamenal pět případů emise světla, aniž při tom došlo k nové excitaci atomu. Energie vyzářeného světla ve čtyřech z nich jsou 0,7 eV; 0,8 eV; 0,9 eV a 2,0 eV. Poslední hodnota a údaje o pořadí jednotlivých přechodů se ztratily chybou v počítači. Následující tabulka uvádí dvanáct nejnižších energiových hladin atomu v elektronvoltech:

6,5	4,1	2,6
5,3	3,8	2,0
4,9	3,4	1,5
4,5	2,9	0

(a) Jaká energiová hladina odpovídala kvantovému stavu excitovaného atomu před vyzářením? (b) Jaká byla hodnota energie vyzářeného světla, která se ztratila chybou v počítači?

PRO POČÍTAČ

98Ú. Mezní rychlost kulky o hmotnosti 9,8 g při pohybu ve vzduchu je 7,3 m·s^{-1}. Kulku vystřelíme svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti 15 m·s^{-1}. Numerickou integrací s krokem

$\Delta t = 0{,}1$ s určete polohu a rychlost kulky v libovolném okamžiku $t_n = n \cdot \Delta t$ od výstřelu do okamžiku jejího návratu k místu výstřelu. V každém z okamžiků t_n určete kinetickou energii kulky, její potenciální energii v tíhovém poli Země (potenciální energie soustavy kulka + Země) a celkovou mechanickou energii. K jak velké ztrátě mechanické energie soustavy kulka+Země dojde při výstupu kulky vlivem odporu vzduchu? Jaká je energiová ztráta při pádu kulky? V okamžiku výstřelu přisuzujeme soustavě nulovou potenciální energii.

99Ú. Kostku o hmotnosti 700 g upustíme z výšky h_0 přesně nad koncem svislé pružiny. Pružina má zanedbatelnou hmotnost a její tuhost je $k = 400\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$. Kostka narazí na pružinu a stlačuje ji. V bodě obratu je pružina stlačena o 19,0 cm. Jakou práci vykonala (a) síla, jíž působila kostka na pružinu, (b) síla, jíž působila pružina na kostku? (c) Z jaké výšky h_0 kostka padala? (d) Jaké by bylo maximální stlačení pružiny, kdyby kostka padala z dvojnásobné výšky?

100Ú. Kyvadlo je tvořeno tělesem o hmotnosti 300 g zavěšeným na niti dlouhé 1,4 m. Kyvadlo vychýlíme tak, aby napjatá nit svírala se svislým směrem úhel 30° a uvolníme. Určete (a) rychlost tělesa v okamžiku, kdy nit svírá se svislým směrem úhel 20°, a (b) největší rychlost, jíž těleso dosáhne. (c) Jaký úhel svírá nit se svislým směrem v okamžiku, kdy velikost rychlosti tělesa dosahuje jedné třetiny největší hodnoty?

9

Soustavy částic

Potemnělé hlediště a ozářená scéna. Obecenstvo s obdivem sleduje sólový výstup primabaleríny. Je nadšeno zejména efektními skoky „grand jeté", při nichž se její hlava i trup pohybují takřka vodorovně téměř po celou dobu letu. Baletka se na scéně doslova vznáší. Laik v hledišti asi není podrobně obeznámen s problematikou gravitačního působení a pohybu těles v tíhovém poli Země. Ví však, že kdyby se sám pokusil takto vyskočit, bude dráha jeho trupu i hlavy spíše parabolická, podobně jako je tomu v případě vyhozeného kamene či fotbalového míče po brankářově výkopu. Na scéně se tedy zjevně děje něco velmi neobvyklého. Jak to baletka dokáže, že se jí gravitace příliš „netýká"?

9.1 VÝZNAČNÝ BOD

Fyzikové rádi přemýšlejí nad složitými problémy a hledají v nich něco jednoduchého a známého. Představme si například, že vyhazujeme do vzduchu baseballovou pálku. Pálka se otáčí. Její pohyb je tedy mnohem složitější než třeba pohyb míčku, který se chová jako hmotný bod (obr. 9.1a). Trajektorie jednotlivých elementů pálky jsou navzájem odlišné. Proto ji při popisu jejího pohybu nelze nahradit hmotným bodem. Pálku je třeba chápat jako soustavu hmotných bodů.

Při podrobnějším zkoumání však zjistíme, že jeden z bodů pálky má význačné postavení. Pohybuje se totiž po jednoduché parabolické dráze, stejně jako se pohybuje částice při šikmém vrhu (obr. 9.1b). Jeho pohyb je přesně takový, jako kdyby (1) v něm byla soustředěna veškerá hmota pálky a (2) působila v něm celková tíhová síla působící na pálku. Tento význačný bod se nazývá **střed hmotnosti** pálky neboli **těžiště**.* Obecně platí:

> Těžiště tělesa nebo soustavy těles je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmota tělesa (soustavy) a působily v něm všechny vnější síly působící na těleso (soustavu).

Těžiště baseballové pálky leží na její podélné ose. Můžeme ho najít tak, že si pálku položíme vodorovně na napjatý prst a vyvážíme ji. Těžiště pak bude ležet na ose pálky právě nad prstem.

9.2 TĚŽIŠTĚ

Zabývejme se nyní problémem, jak nalézt těžiště nejrůznějších soustav. Začneme u soustavy složené pouze z několika částic a teprve pak budeme uvažovat o souborech obsahujících velké množství částic (např. baseballová pálka).

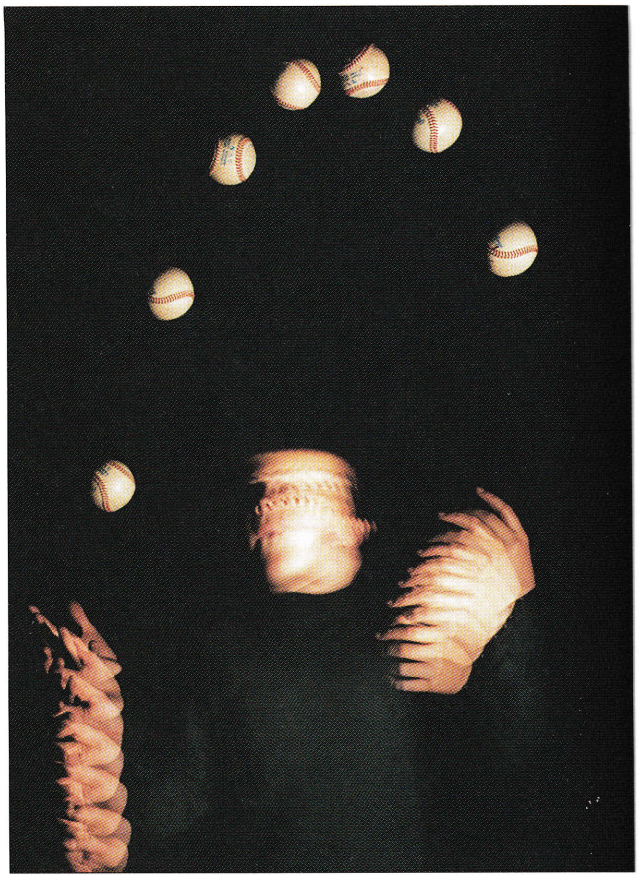
Soustavy částic

Na obr. 9.2a jsou zakresleny dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2. Jejich vzdálenost je d. Počátek osy x, jehož volba není nijak omezena, jsme vybrali tak, aby splýval s částicí m_1. Polohu těžiště této dvoučásticové soustavy *definujeme* vztahem

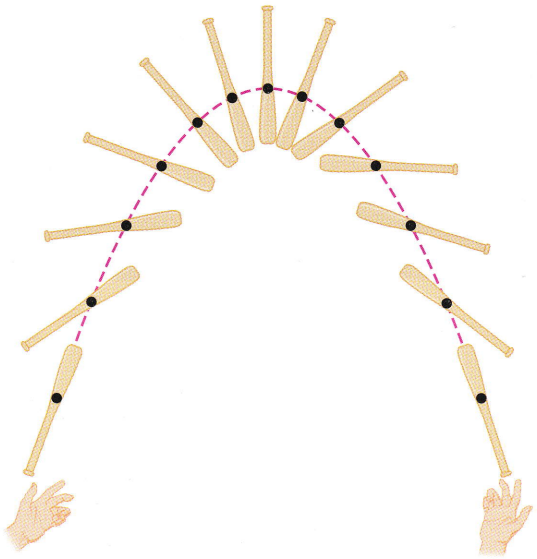
$$x_T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \qquad (9.1)$$

Abychom posoudili, nakolik je tato definice rozumná, uvažujme speciální případy. Zvolme nejprve $m_2 = 0$. Tato volba odpovídá soustavě s jedinou částicí m_1. Její těžiště

* V celé knize užíváme označení „těžiště", „hmotný střed" a „střed hmotnosti" jako synonyma. V čl. 13.3 najdete podrobné zdůvodnění.



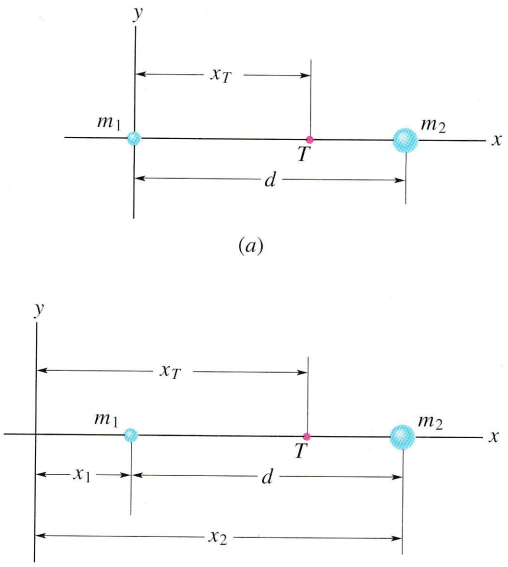
(a)



(b)

Obr. 9.1 (a) Míček vržený šikmo vzhůru se pohybuje po parabolické trajektorii. (b) Těžiště baseballové pálky (černá tečka) vyhozené do vzduchu se rovněž pohybuje po parabole, ostatní body pálky však opisují trajektorie komplikovanější.

by mělo s touto částicí splývat. Z rov. (9.1) skutečně plyne $x_T = 0$. Je-li naopak $m_1 = 0$, obsahuje soustava opět jedinou částici, tentokrát m_2. Podle očekávání dostáváme $x_T = d$. Pro $m_1 = m_2$ by mělo být těžiště uprostřed mezi částicemi. Skutečně tomu tak je, neboť z rov. (9.1) dostáváme $x_T = d/2$. Ze vztahu (9.1) také vyplývá, že pro obecně zvolené nenulové hmotnosti obou částic leží hodnota x_T vždy uvnitř intervalu $(0, d)$. Těžiště tedy v každém případě leží někde mezi oběma částicemi.



Obr. 9.2 (a) Vzdálenost dvou částic o hmotnostech m_1 a m_2 je d. Bod označený symbolem T je těžištěm dvoučásticové soustavy, vypočteným z rov. (9.1). (b) Situace se od obr. (a) liší obecným umístěním počátku soustavy souřadnic. Těžiště je vypočteno z rov. (9.2). Poloha těžiště soustavy vzhledem k oběma částicím je v obou případech stejná.

Na obr. 9.2b je znázorněna situace odpovídající obecnější volbě počátku soustavy souřadnic. Poloha těžiště je v takovém případě definována vztahem

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{9.2}$$

Všimněme si, že pro $x_1 = 0$ přejde rov. (9.2) na jednodušší tvar (9.1). Posunutí počátku soustavy souřadnic nemá vliv na polohu těžiště vzhledem k jednotlivým částicím.

Přepišme rov. (9.2) do tvaru

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \tag{9.3}$$

kde M je celková hmotnost soustavy, $M = m_1 + m_2$. Platnost tohoto vztahu lze snadno zobecnit na případ soustavy n částic umístěných na ose x. Celková hmotnost soustavy je $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ a těžiště je v bodě o souřadnici

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{M} = \\ = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{9.4}$$

Sčítací index i nabývá všech celočíselných hodnot od 1 do n. Představuje pořadové (identifikační) číslo částice a „čísluje" i její hmotnost a x-ovou souřadnici.

Jsou-li částice soustavy rozmístěny v trojrozměrném prostoru, je poloha jejího těžiště určena trojicí souřadnic. Získáme ji zobecněním rov. (9.4) na trojrozměrný případ:

$$x_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \\ y_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \\ z_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{9.5}$$

Polohu těžiště můžeme zapsat i použitím vektorové symboliky. Polohu i-té částice lze totiž zadat buď jejími souřadnicemi x_i, y_i a z_i, nebo polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_i = x_i \boldsymbol{i} + y_i \boldsymbol{j} + z_i \boldsymbol{k}. \tag{9.6}$$

Index i označuje částici, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory kartézské soustavy souřadnic. Těžiště je zadáno polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_T = x_T \boldsymbol{i} + y_T \boldsymbol{j} + z_T \boldsymbol{k}. \tag{9.7}$$

Tři skalární rovnice (9.5) lze tak nahradit jedinou vektorovou rovnicí:

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i. \tag{9.8}$$

O její správnosti se můžeme přesvědčit dosazením z (9.6) a (9.7) a rozepsáním do souřadnic. Dostaneme skalární rovnice (9.5).

Tuhá tělesa

Běžné těleso, jakým je například i baseballová pálka, obsahuje tak obrovské množství částic (atomů), že je přirozenější posuzovat je jako objekt se spojitě rozloženou hmotou. Takový objekt již není tvořen jednotlivými navzájem oddělenými částmi, nýbrž infinitezimálně malými

částicemi (elementy) o hmotnosti dm. Součty v rovnicích (9.5) je třeba nahradit integrály a souřadnice těžiště definovat vztahy

$$x_T = \frac{1}{M}\int x\,dm,\qquad y_T = \frac{1}{M}\int y\,dm,\qquad z_T = \frac{1}{M}\int z\,dm. \tag{9.9}$$

M opět představuje celkovou hmotnost tělesa. Integrály symbolizují „sčítání" všech elementů v celém tělese. Jejich výpočet je ovšem třeba provádět v souřadnicích. Je-li těleso homogenní, lze jeho hustotu ϱ (hmotnost jednotkového objemu) vyjádřit vztahem

$$\varrho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}, \tag{9.10}$$

kde dV je objem elementu hmotnosti dm a V je celkový objem tělesa. V rov. (9.9) můžeme element dm nahradit výrazem $\varrho\,dV$ získaným z rov. (9.10) a dostaneme

$$x_T = \frac{1}{V}\int x\,dV,\qquad y_T = \frac{1}{V}\int y\,dV,\qquad z_T = \frac{1}{V}\int z\,dV. \tag{9.11}$$

Integračním oborem těchto integrálů je objem tělesa, tj. útvar vymezený tímto tělesem v trojrozměrném prostoru (př. 9.4).

Celá řada těles má určitou geometrickou symetrii, například středovou, osovou nebo rovinnou. Poloha těžiště takového symetrického *homogenního* tělesa s jeho symetrií úzce souvisí. Je-li těleso středově symetrické, splývá jeho těžiště se středem symetrie. Těžiště tělesa s osovou (resp. rovinnou) symetrií leží na ose (resp. v rovině) symetrie. Těžiště homogenní koule splývá s jejím geometrickým středem. Těžiště homogenního kužele leží na jeho ose. Těžiště banánu, jehož rovina symetrie jej dělí na dvě zrcadlově stejné části, leží v této rovině.

Těžiště však nemusí nutně ležet v tělese. Tak například v těžišti preclíku není žádné těsto a v těžišti podkovy není žádné železo.

PŘÍKLAD 9.1

Na obr. 9.3 jsou tři částice o hmotnostech $m_1 = 1{,}2\,\text{kg}$, $m_2 = 2{,}5\,\text{kg}$ a $m_3 = 3{,}4\,\text{kg}$ umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně $a = 140\,\text{cm}$. Určete polohu těžiště soustavy.

ŘEŠENÍ: Zvolme souřadnicové osy x a y tak, aby jedna z částic byla umístěna v počátku a osa x splývala s jednou ze stran trojúhelníka. Částice mají tyto souřadnice:

ČÁSTICE	HMOTNOST (kg)	x (cm)	y (cm)
m_1	1,2	0	0
m_2	2,5	140	0
m_3	3,4	70	121

Díky vhodné volbě soustavy souřadnic jsou tři souřadnice v tabulce nulové. Výpočet bude velmi jednoduchý.

Z rov. (9.5) plyne, že souřadnice těžiště jsou

$$x_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} = \frac{(1{,}2\,\text{kg})(0) + (2{,}5\,\text{kg})(140\,\text{cm}) + (3{,}4\,\text{kg})(70\,\text{cm})}{(7{,}1\,\text{kg})} = 83\,\text{cm}$$

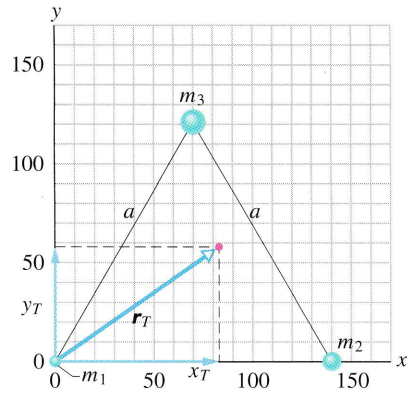
(Odpověď)

a

$$y_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} = \frac{(1{,}2\,\text{kg})(0) + (2{,}5\,\text{kg})(0) + (3{,}4\,\text{kg})(121\,\text{cm})}{(7{,}1\,\text{kg})} = 58\,\text{cm}.$$

(Odpověď)

Těžiště soustavy na obr. 9.3 je určeno polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_T$ o souřadnicích x_T a y_T.



Obr. 9.3 Příklad 9.1. Tři částice s různými hmotnostmi tvoří rovnostranný trojúhelník o straně a. Polohový vektor těžiště je $\boldsymbol{r}_T$.

PŘÍKLAD 9.2

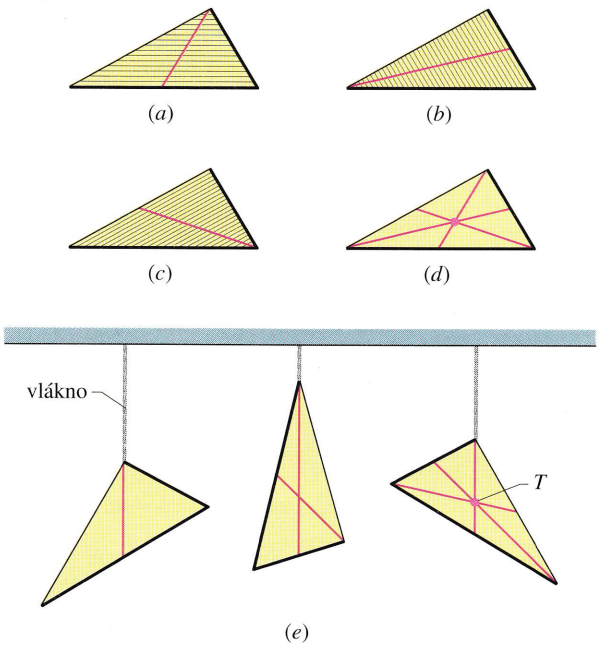
Najděte těžiště homogenní trojúhelníkové desky znázorněné na obr. 9.4.

ŘEŠENÍ: Obr. 9.4a znázorňuje desku rozdělenou na úzké proužky rovnoběžné s jednou z jejích stran. Ze symetrie je

zřejmé, že těžiště úzkého homogenního proužku leží v jeho geometrickém středu. Těžiště trojúhelníkové desky musí proto ležet někde na spojnici středů všech rovnoběžných proužků. Touto spojnicí je přímka spojující vrchol trojúhelníka se středem protilehlé strany, tj. je těžnicí trojúhelníka. Kdybychom desku podepřeli rovným ostřím nože přesně podél těžnice, byla by v rovnováze.

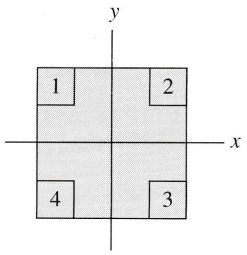
Na obr. 9.4b, c jsme desku rozdělili na proužky rovnoběžné s dalšími dvěma stranami. V každém z těchto případů leží těžiště desky na přímce spojující středy proužků (na těžnici trojúhelníka), podobně jako na obr. 9.4a. Všechny tři těžnice mají společný průsečík. V něm leží těžiště desky (obr. 9.4d).

Předchozí závěr můžeme ověřit jednoduchým pokusem. Využijeme při tom správnou intuitivní představu, že těleso zavěšené v jednom bodě zaujme takovou polohu, v níž jeho těžiště leží pod bodem závěsu. Zavěsíme tedy trojúhelníkovou desku postupně v jednotlivých vrcholech a podle obr. 9.4e vedeme z každého vrcholu svislou přímku. Těžiště desky splývá s průsečíkem těchto tří přímek. Kdybychom desku umístili do vodorovné polohy a podepřeli ji v těžišti hrotem, byla by v rovnováze.



Obr. 9.4 Příklad 9.2. Na obrázcích (a), (b) a (c) je trojúhelníková deska rozdělena na soustavu úzkých proužků rovnoběžných s některou její stranou. Těžiště desky leží na těžnici trojúhelníka, tj. na spojnici středů proužků. (d) Průsečík těžnic splývá s těžištěm desky. (e) Experimentální zjištění polohy těžiště. Trojúhelník postupně zavěšujeme v jeho vrcholech.

KONTROLA 1: Na obrázku je nakreslena homogenní čtvercová deska, z níž byly odříznuty čtyři stejné čtverce. (a) Jaká je poloha těžiště původní desky? (b) Odhadněte polohu těžiště zbylého útvaru po odstranění čtverce 1, (c) čtverců 1 a 2, (d) čtverců 1 a 3, (e) čtverců 1, 2 a 3, (f) všech čtyř čtverců. Neprovádějte žádný přesný výpočet. Využijte pouze symetrie útvaru nebo naopak jeho asymetrie vzniklé odstraňováním čtverců a rozhodněte, v kterém z kvadrantů, na které ose či v kterém bodě těžiště leží.



PŘÍKLAD 9.3

Obr. 9.5a znázorňuje zbytek homogenní kruhové kovové desky o poloměru $2R$, z níž byl vyříznut kotouč o poloměru R. Vzniklé těleso označme X. Jeho těžiště leží na ose x a v obrázku je označeno tečkou. Určete jeho souřadnici.

ŘEŠENÍ: Obr. 9.5b ukazuje desku C před vyjmutím kotouče D. Ze symetrie vyplývá, že těžiště desky C je v jejím středu (obr. 9.5b).

Těleso C je složeno ze dvou částí, D a X. Můžeme předpokládat, že hmotnost každé z nich je soustředěna v jejím těžišti. Těžiště dvoučásticové soustavy $T_D + T_X$ splývá s těžištěm tělesa C. Polohy těžišť těles C, D a X na ose x jsou vyznačeny v obr. 9.5c.

Z rov. (9.2) vyplývá, že těžiště tělesa C je v bodě

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$

kde x_D a x_X jsou souřadnice těžišť těles D a X. Vzhledem k tomu, že je $x_C = 0$, platí

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}. \qquad (9.12)$$

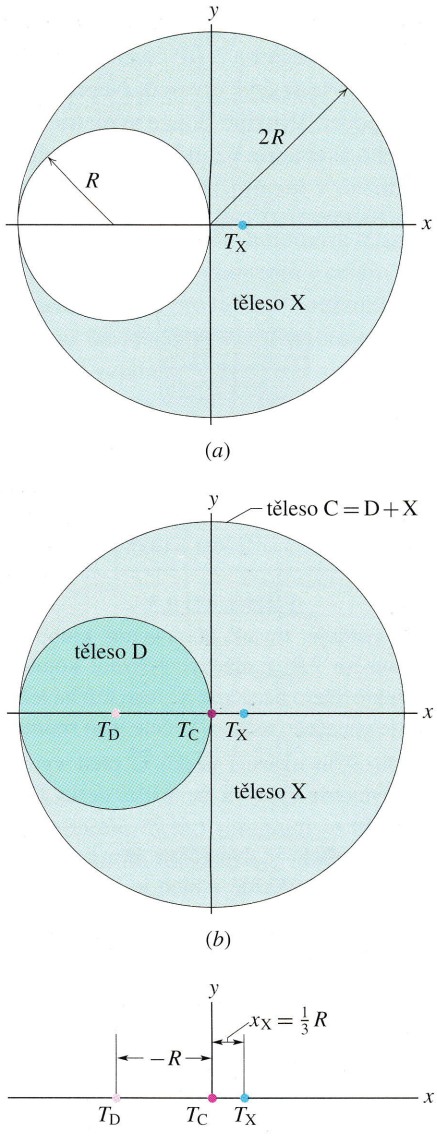
Označme ϱ hustotu materiálu desky a d její (konstantní) tloušťku. Pak

$$m_D = \pi R^2 \varrho d \qquad \text{a} \qquad m_X = \pi(2R)^2 \varrho d - \pi R^2 \varrho d.$$

Uvážíme-li navíc, že $x_D = -R$, dostaneme z rov. (9.12) polohu těžiště tělesa X:

$$x_X = -\frac{(-R)(\pi R^2 \varrho d)}{\pi(2R)^2 \varrho d - \pi R^2 \varrho d} = \frac{1}{3}R. \quad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že konstantní hustota a konstantní tloušťka desky se při výpočtu vykrátily. Na hodnotu x_X tedy nemají vliv.

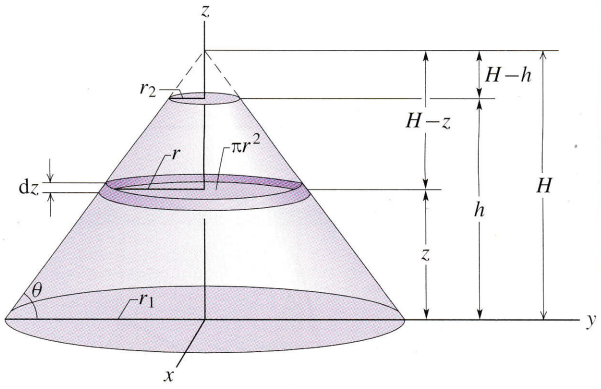


Obr. 9.5 Příklad 9.3. (a) Těleso X, jehož těžiště je označeno T_X, vzniklo vyříznutím kruhového otvoru o poloměru R v kovovém kotouči o poloměru $2R$. (b) Vyjmutý kotouč je označen symbolem D. Jeho těžiště T_D leží v jeho geometrickém středu a má souřadnici $x_D = -R$. Těleso C je složeno z částí X a D. Jeho těžiště je v počátku soustavy souřadnic. (c) Těžiště všech tří těles.

PŘÍKLAD 9.4

Obr. 9.6a zachycuje mohylu Silbury Hill, postavenou na pláních nedaleko Stonehenge před 4 600 lety. Účel stavby není přesně znám, pravděpodobně sloužila jako pohřebiště. Má tvar komolého kužele (obr. 9.6b) o výšce $h = 40\,\text{m}$ a poloměrech podstav $r_2 = 16\,\text{m}$ (horní podstava) a $r_1 = 88\,\text{m}$ (základna). Jeho objem je $V = 4{,}09 \cdot 10^5\,\text{m}^3$. Povrchové přímky kužele svírají s vodorovnou rovinou úhel $\theta = 30°$.

(a)



(b)

Obr. 9.6 Příklad 9.4. (a) Mohyla Silbury Hill v Anglii pochází z mladší doby kamenné. Její stavba si vyžádala asi $1{,}8 \cdot 10^7$ pracovních hodin. (b) Komolý kužel představující Silbury Hill. V obrázku je vyznačena vrstva o poloměru r s infinitezimální tloušťkou dz, ležící ve výšce z nad základnou kužele.

(a) Určete polohu těžiště mohyly.

ŘEŠENÍ: Mohyla je rotačně symetrická, takže její těžiště leží na její ose symetrie, ve výšce z_T nad základnou kužele. K výpočtu této výšky použijeme poslední z rovnic (9.11) a integrál zjednodušíme užitím symetrie mohyly. Uvažme tenkou vodorovnou vrstvu zvolenou podle obr. 9.6b. Vrstva má poloměr r, tloušťku dz a leží ve vzdálenosti z od základny

mohyly. Obsah její podstavy je πr^2 a objem

$$\mathrm{d}V = \pi r^2 \,\mathrm{d}z. \tag{9.13}$$

Mohyla je tvořena všemi takovými vrstvami, jejichž poloměr se mění od největší hodnoty r_1, odpovídající poloměru základny, po hodnotu r_2 poloměru horní podstavy. Výšku celého kužele, z něhož náš komolý kužel vznikl, označme H (obr. 9.6b). Pro poloměr r libovolné vrstvy pak platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{H}{r_1} = \frac{H-z}{r},$$

tj.

$$r = (H-z)\frac{r_1}{H}. \tag{9.14}$$

Dosazením z (9.13) a (9.14) do poslední z rovnic (9.11) dostaneme

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V = \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h z(H-z)^2\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h (z^3 - 2z^2H + zH^2)\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3H}{3} + \frac{z^2H^2}{2}\right]_0^h = \\ &= \frac{\pi r_1^2 h^4}{VH^2}\left[\frac{1}{4} - \frac{2H}{3h} + \frac{H^2}{2h^2}\right]. \end{aligned}$$

Pro zadané číselné hodnoty pak vychází

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{\pi(88\,\mathrm{m})^2(40\,\mathrm{m})^4}{(4{,}09\cdot10^5\,\mathrm{m}^3)(50{,}8\,\mathrm{m})^2}\cdot \\ &\quad\cdot\left[\frac{1}{4} - \frac{2(50{,}8\,\mathrm{m})}{3(40\,\mathrm{m})} + \frac{(50{,}8\,\mathrm{m})^2}{2(40\,\mathrm{m})^2}\right] = \\ &= 12{,}37\,\mathrm{m} \doteq 12\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

(b) Předpokládejme, že průměrná hustota materiálu, z něhož je mohyla Silbury Hill postavena, je $\varrho = 1{,}5\cdot10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jakou práci vykonali dělníci při vršení mohyly, jestliže zeminu zvedali z úrovně základny kužele?

ŘEŠENÍ: K výpočtu elementární práce $\mathrm{d}W$ potřebné k vyzdvižení hmotného elementu $\mathrm{d}m$ do výšky z použijeme rov. (7.21), do níž dosadíme $\varphi = 180°$:

$$\mathrm{d}W = -\mathrm{d}m\,gz\cos 180° = gz\,\mathrm{d}m.$$

Ze vztahu (9.10) vyjádříme $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$ a dosazením do předchozí rovnice dostaneme

$$\mathrm{d}W = \varrho g z\,\mathrm{d}V.$$

Celkovou práci vypočteme pomocí integrálu jako součet elementárních prací $\mathrm{d}W$:

$$W = \int \mathrm{d}W = \int \varrho g z\,\mathrm{d}V = \varrho g \int z\,\mathrm{d}V.$$

Ze vztahů (9.11) je zřejmé, že poslední integrál má hodnotu Vz_T. Nakonec tedy dostáváme

$$W = \varrho V g z_T. \tag{9.15}$$

Práce potřebná k navršení mohyly Silbury Hill je tedy stejná jako práce, kterou bychom museli vykonat při zvednutí stejně hmotného bodového objektu z úrovně základny do těžiště mohyly. Pro číselné hodnoty uvedené v zadání úlohy pak z rov. (9.15) dostaneme:

$$\begin{aligned} W &= (1{,}5\cdot10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}})(4{,}09\cdot10^5\,\mathrm{m}^3)\cdot \\ &\quad\cdot(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(12{,}37\,\mathrm{m}) = \\ &= 7{,}4\cdot10^{10}\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

RADY A NÁMĚTY

Bod 9.1: *Úlohy o těžišti*

V příkladech 9.1 až 9.3 jsme se seznámili se třemi různými způsoby zjednodušení úloh směřujících k výpočtu polohy těžiště: (1) Využití všech prvků symetrie zadaného tělesa (střed symetrie, osy symetrie, roviny symetrie). (2) Těleso lze pro účely výpočtu rozdělit na několik částí a každou z nich nahradit částicí umístěnou v jejím těžišti. (3) Vhodná volba souřadnicových os: volba souřadnic nemá vliv na polohu těžiště soustavy částic vzhledem k těmto částicím. Je proto vhodné volit počátek i osy soustavy souřadnic tak, aby se výpočet co nejvíce zjednodušil. Je-li zadaná soustava tvořena jen několika částicemi, volíme obvykle počátek soustavy souřadnic v některé z nich. Má-li soustava navíc osu symetrie, ztotožníme ji s některou ze souřadnicových os, například s osou x.

9.3 VĚTA O HYBNOSTI

Sledujeme-li srážku dvou kulečníkových koulí, z nichž jedna je zpočátku v klidu, přirozeně očekáváme, že i po srážce bude soustava nějak pokračovat v pohybu ve směru nárazu. Asi bychom se divili, kdyby se obě koule vrátily zpět nebo se třeba pohybovaly obě stejným směrem kolmým k pohybu první koule před srážkou.

Bod, který se stále pohybuje kupředu bez ohledu na srážku, opravdu existuje. Je jím těžiště soustavy našich dvou koulí. Snadno se o tom přesvědčíme přímo při kulečníkové hře. Stačí si uvědomit, že těžiště soustavy dvou stejně hmotných těles leží vždy uprostřed mezi nimi. Ať je srážka jakákoliv — přímá, nebo zcela obecná, těžiště se neochvějně pohybuje kupředu, jako by srážka vůbec nenastala. Sledujme tento jev podrobněji.

Místo dvojice kulečníkových koulí vezměme v úvahu soustavu n částic, jejichž hmotnosti jsou obecně různé. Budeme se zabývat pohybem těžiště této soustavy, *bez ohledu*

na pohyb jednotlivých částic. I když je těžiště pouze geometrickým bodem, můžeme o něm uvažovat jako o částici, jejíž hmotnost je rovna celkové hmotnosti soustavy. Můžeme mu přisoudit polohu, rychlost i zrychlení. Později ukážeme, že vektorová rovnice popisující pohyb těžiště soustavy částic, zvaná **věta o hybnosti** (soustavy částic) neboli **první impulzová věta**,* má tvar

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \tag{9.16}$$

Vztah (9.16) má tvar druhého Newtonova zákona pro těžiště soustavy částic. Skutečně, má stejný tvar ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$) jako druhý Newtonův zákon pro částici. Veličiny vystupující v rov. (9.16) je však třeba správně interpretovat:

1. $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ je *vektorový* součet *všech vnějších sil* působících na soustavu, tj. všech sil, jimiž okolní objekty působí na jednotlivé částice soustavy. Síly, kterými na sebe působí jednotlivé částice, resp. části soustavy navzájem, se nazývají silami *vnitřními*. Ve vztahu (9.16) nevystupují, neboť podle třetího Newtonova zákona je jejich součet roven nule: $\sum \boldsymbol{F}_{\text{int}} = \boldsymbol{0}$.
2. M je *celková hmotnost* soustavy. Předpokládáme, že nedochází k výměně hmoty mezi soustavou a jejím okolím, takže M je konstantní. Taková soustava se nazývá **uzavřená**.
3. $\boldsymbol{a}_T$ je zrychlení *těžiště* soustavy. Vztah (9.16) nedává žádnou informaci o zrychlení jiných bodů soustavy.

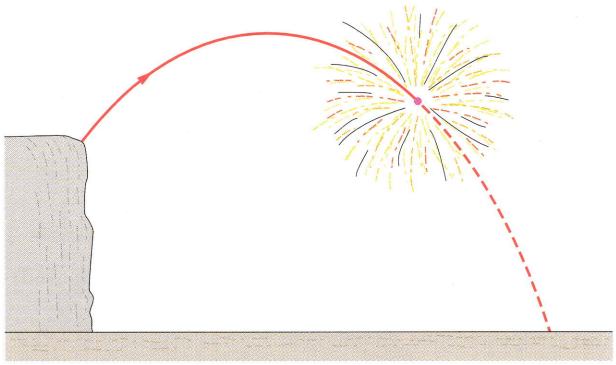
Jako každá vektorová rovnice je i rov. (9.16) ekvivalentní třem rovnicím skalárním pro složky vektorů $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ a $\boldsymbol{a}_T$ vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic:

$$\begin{aligned} Ma_{T,x} &= \sum F_{\text{ext},x}, \\ Ma_{T,y} &= \sum F_{\text{ext},y}, \\ Ma_{T,z} &= \sum F_{\text{ext},z}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Vraťme se nyní k původnímu problému a zkoumejme chování soustavy dvou kulečníkových koulí. Po uvedení první koule do pohybu je výsledná vnější síla působící na soustavu nulová, tj. $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0}$. Podle rov. (9.16) je tedy nulové i zrychlení těžiště soustavy ($\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{0}$). Těžiště soustavy koulí se tedy před srážkou pohybuje konstantní rychlostí. Při srážce na sebe koule působí silami, které jsou z hlediska soustavy silami *vnitřními*. Tyto síly mají sice vliv na pohyb každé z koulí, neovlivní však pohyb těžiště soustavy. Nepřispívají totiž k výrazu $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jehož hodnota tak zůstává stále nulová. Těžiště soustavy se i po srážce pohybuje konstantní rychlostí, shodnou s jeho rychlostí před srážkou.

Rov. (9.16) platí nejen pro soustavu částic, ale i pro tuhé těleso, jakým je např. baseballová pálka na obr. 9.1b. V tomto případě značí M v rov. (9.16) hmotnost pálky a $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ představuje tíhovou sílu $M\boldsymbol{g}$, jíž na pálku působí Země.

Obr. 9.7 ukazuje jiný zajímavý případ. Raketa vystřelená při ohňostroji se pohybuje po parabolické dráze a najednou se roztrhne na malé části. Kdyby k explozi nedošlo, raketa by pokračovala v pohybu po parabole, vyznačené v obrázku. Síly, které způsobily explozi, jsou z hlediska soustavy, tvořené nejprve raketou a poté všemi jejími částmi, silami *vnitřními*, tj. silami vzájemného působení jednotlivých částí soustavy. Zanedbáme-li odpor vzduchu, je výslednice *vnějších* sil působících na soustavu určena výhradně silou tíhovou: $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = M\boldsymbol{g}$, bez ohledu na to, zda raketa explodovala či nikoliv. Z rov. (9.16) je tedy zřejmé, že zrychlení těžiště soustavy úlomků (pokud jsou ještě všechny v pohybu ve vzduchu) je $\boldsymbol{g}$ a těžiště opisuje tutéž parabolickou trajektorii, po jaké by se pohybovala raketa, kdyby se neroztrhla.



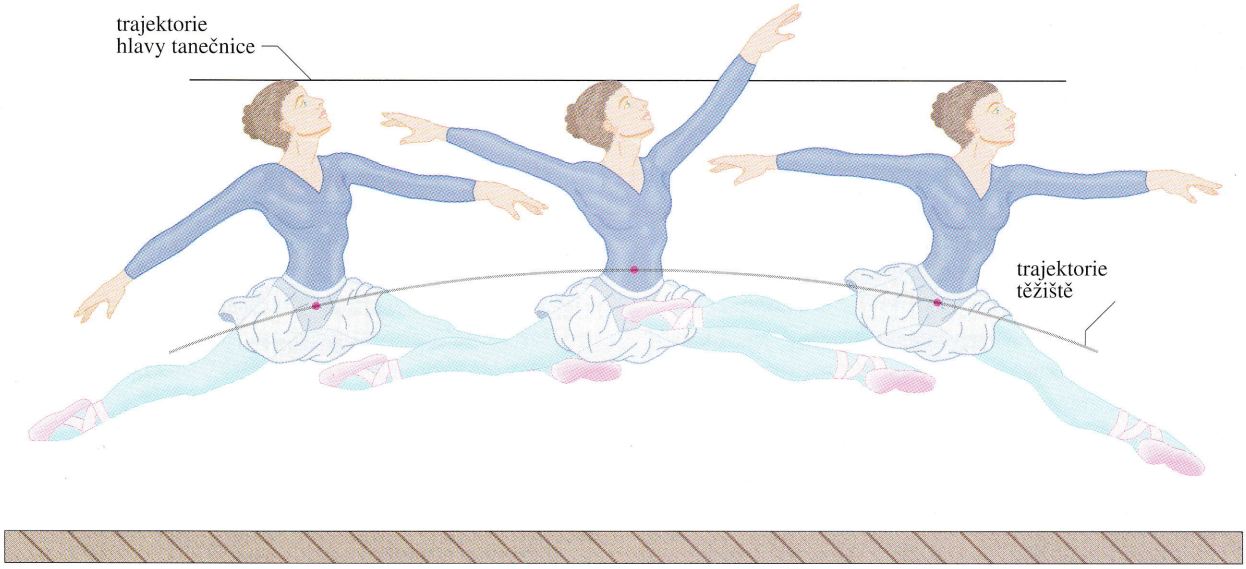
Obr. 9.7 Při ohňostroji exploduje raketa během letu. Zanedbáme-li odpor vzduchu, opisuje těžiště soustavy úlomků původní parabolickou dráhu rakety, dokud některý z úlomků nedopadne na zem.

Při figuře „grand jeté", zvedne baletka ruce a napne nohy do vodorovné polohy (obr. 9.8). Tím posune těžiště uvnitř svého těla co nejvýše. Těžiště samozřejmě věrně sleduje parabolickou trajektorii. Hmotnost tanečnice je však vůči němu rozložena tak, že se její hlava a trup pohybují takřka vodorovně.

Odvození věty o hybnosti

Věta o hybnosti je jednou ze dvou významných pohybových rovnic soustavy částic. V tomto odstavci se věnujeme jejímu odvození. Uvažujme soustavu n částic. Podle

* Její první název pochopíme později z jejího ekvivalentního zápisu (9.28). Druhý název souvisí s rovnicí (10.4).



Obr. 9.8 Baletní skok „grand jeté". (Převzato z Kennet Laws, *The Physics of Dance*, Schirmer Books, 1984.)

rov. (9.8) pro ni platí

$$M\boldsymbol{r}_T = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{r}_n, \qquad (9.18)$$

kde M je její celková hmotnost, $\boldsymbol{r}_T$ polohový vektor jejího těžiště. Derivováním rov. (9.18) podle času dostaneme

$$M\boldsymbol{v}_T = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n. \qquad (9.19)$$

Symbolem $\boldsymbol{v}_i$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i/\mathrm{d}t)$ jsme označili rychlost i-té částice a $\boldsymbol{v}_T$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_T/\mathrm{d}t)$ představuje rychlost těžiště.

Dalším derivováním rov. (9.19) vzhledem k času již dospějeme ke vztahu

$$M\boldsymbol{a}_T = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{a}_n, \qquad (9.20)$$

kde $\boldsymbol{a}_i$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i/\mathrm{d}t)$ je zrychlení i-té částice a $\boldsymbol{a}_T$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{v}_T/\mathrm{d}t)$ zrychlení těžiště. Znovu si uvědomme, že těžiště je pouze geometrickým bodem. Má však smysl mu kromě polohy připisovat i rychlost a zrychlení, jako by se jednalo o hmotnou částici.

Podle druhého Newtonova zákona je součin $m_i\boldsymbol{a}_i$ určen výslednicí $\boldsymbol{F}_i$ všech sil působících na i-tou částici. Vztah (9.20) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$M\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots + \boldsymbol{F}_n. \qquad (9.21)$$

Pravá strana rov. (9.21) zahrnuje kromě vnějších sil, jimiž na jednotlivé částice soustavy působí její okolí, i interakční síly, jimiž na sebe částice působí navzájem (vnitřní síly). Podle třetího Newtonova zákona je však součet vnitřních sil nulový, neboť je tvořen dvojicemi typu akce — reakce, tj. dvojicemi stejně velkých opačně orientovaných sil. Na pravé straně rov. (9.21) tak zůstane pouze vektorový součet *vnějších* sil působících na soustavu, ve shodě s větou o hybnosti (9.16).

KONTROLA 2: František a Eva bruslí ve dvojici. Drží přitom v rukou opačné konce dlouhé tyče. František má dvakrát větší hmotnost než Eva, hmotnost tyče je zanedbatelná. Tření mezi bruslemi a ledem rovněž zanedbáváme. Bruslaři jsou zpočátku v klidu. (a) Potom František začne ručkovat k Evě, zatímco ona drží pevně v rukou svůj konec tyče. Určete polohu bodu, v němž se setkají. (b) Řešte tutéž úlohu za předpokladu, že se Eva přitahuje k Františkovi, a (c) za předpokladu, že ručkují oba. Soustavu souřadnic volíme tak, že její počátek umístíme do počáteční polohy těžiště soustavy a jednu z os namíříme podél tyče.

PŘÍKLAD 9.5

Na obr. 9.9a je soustava tří částic, které jsou zpočátku v klidu. Na každou z nich působí vnější síla, která je v obrázku rovněž vyznačena. Určete zrychlení těžiště soustavy.

ŘEŠENÍ: Podle př. 9.1 vypočteme počáteční polohu těžiště soustavy (obr. 9.9a). Jak napovídá obr. 9.9b, zacházíme s ním jako s částicí o hmotnosti M, shodné s celkovou hmotností soustavy (16 kg), na niž působí všechny vnější síly působící na soustavu. Výslednice všech vnějších sil působících na soustavu $\sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ představuje tedy výslednici všech sil působících na těžiště. Její x-ová, resp. y-ová složka jsou

$$\sum F_{\mathrm{ext},x} = (14\,\mathrm{N}) - (6{,}0\,\mathrm{N}) + (12\,\mathrm{N})\cos 45^\circ = 16{,}5\,\mathrm{N},$$

resp.

$$\sum F_{\mathrm{ext},y} = (12\,\mathrm{N})\sin 45^\circ = 8{,}49\,\mathrm{N}.$$

Výsledná síla má velikost

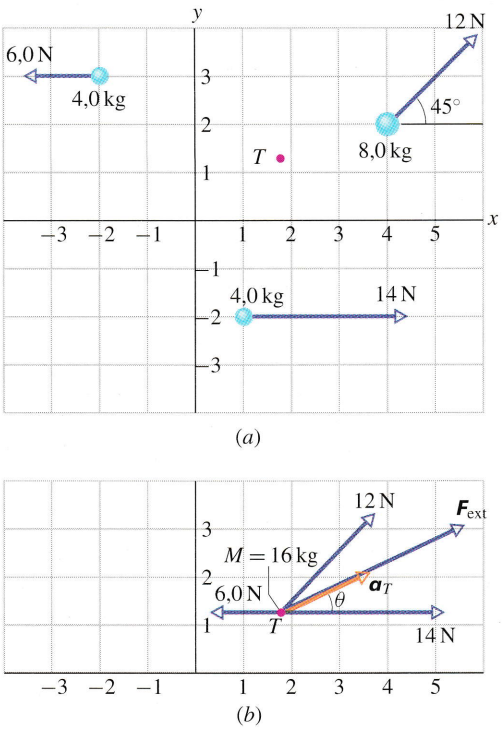
$$\sum F_{\text{ext}} = \sqrt{(16{,}5\,\text{N})^2 + (8{,}49\,\text{N})^2} = 18{,}6\,\text{N}$$

a svírá s osou x úhel

$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{8{,}49\,\text{N}}{16{,}5\,\text{N}}\right) = 0{,}515,$$
$$\theta = 27°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tímto úhlem je určen směr zrychlení těžiště $\boldsymbol{a}_T$, jehož velikost je podle rov. (9.16)

$$a_T = \frac{\sum F_{\text{ext}}}{M} = \frac{(18{,}6\,\text{N})}{(16\,\text{kg})} = 1{,}16\,\text{m·s}^{-2} \doteq$$
$$\doteq 1{,}2\,\text{m·s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 9.9 Příklad 9.5. (a) Na tři částice, které jsou zpočátku v klidu, působí vnější síly. Těžiště soustavy je v bodě označeném T. (b) Vnější síly umístíme do těžiště. Jeho pohyb se řídí stejnými zákonitostmi jako pohyb částice o hmotnosti M shodné s celkovou hmotností soustavy. Obrázek zachycuje výslednici vnějších sil i zrychlení těžiště soustavy částic.

Pohyb každé z částic na obr. 9.9a je přímočarý a rovnoměrně zrychlený, stejně jako pohyb těžiště celé soustavy. Jednotlivá zrychlení jsou však navzájem různá. Poněvadž zpočátku byly částice v klidu, bude se každá z nich pohybovat s rovnoměrně rostoucí rychlostí ve směru síly, která na ni působí. Těžiště se bude pohybovat po přímce rovnoběžné s vektorem $\boldsymbol{a}_T$.

9.4 HYBNOST

Hybnost částice $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \qquad (9.22)$$

kde m je hmotnost částice a $\boldsymbol{v}$ její rychlost. Hmotnost částice je kladná skalární veličina. Vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou tedy souhlasně rovnoběžné. Z rov. (9.22) je také zřejmé, že jednotkou hybnosti v soustavě jednotek SI je kg·m·s^{-1}.

Původní Newtonova formulace druhého zákona již pojem hybnosti obsahovala:

> Časová změna hybnosti částice je rovna výslednici sil, které na částici působí.

Matematické vyjádření tohoto zákona má tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}. \qquad (9.23)$$

Předpokládejme, že hmotnost částice je neproměnná. Dosazením za $\boldsymbol{p}$ z definičního vztahu (9.22) a úpravou pak dostaneme

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}.$$

Vztahy $\sum \boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ tedy představují dvě ekvivalentní vyjádření druhého Newtonova zákona pro pohyb částice s konstantní hmotností v rámci klasické mechaniky.

Hybnost při velmi velkých rychlostech

Víme již, že pro částice s rychlostmi blízkými rychlosti světla nesouhlasí výsledky newtonovské mechaniky s experimenty. V takových případech musíme použít Einsteinovu speciální teorii relativity. Vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}$ zůstane v platnosti i v rámci této obecnější teorie *za předpokladu*, že změníme definici hybnosti takto:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad (9.24)$$

Člen $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ signalizuje relativistický charakter vztahu.

Tabulka 9.1 **Některé definice a zákony v klasické mechanice**

DEFINICE NEBO ZÁKON	JEDNA ČÁSTICE	SOUSTAVA ČÁSTIC
Druhý Newtonův zákon	$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ (5.1)	$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ (9.16)
Hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ (9.22)	$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T$ (9.26)
Druhý Newtonův zákon	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}$ (9.23)	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ (9.28)

Rychlosti běžných makroskopických objektů, jakými jsou například míče, projektily nebo kosmické sondy, jsou ovšem mnohem menší než rychlost světla, takže veličina $(v/c)^2$ v rovnici (9.24) je prakticky nulová. V takovém případě lze (9.24) nahradit klasickou definicí (9.22) a Einsteinova speciální teorie relativity se redukuje na newtonovskou mechaniku. U elektronů a jiných subatomových částic lze však snadno dosáhnout rychlostí velmi blízkých rychlosti světla. Pak *je nutné* použít pro vyjádření hybnosti vztahu (9.24), a to dokonce i při rutinních technických výpočtech.

9.5 HYBNOST SOUSTAVY ČÁSTIC

Uvažujme nyní soustavu n částic, z nichž každá je charakterizována svou hmotností, rychlostí a hybností. Částice mohou vzájemně interagovat a okolní objekty na ně mohou působit vnějšími silami. Soustavě přisoudíme celkovou hybnost $\boldsymbol{P}$, definovanou jako vektorový součet hybností jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 + \ldots + \boldsymbol{p}_n = \\ = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n. \quad (9.25)$$

Porovnáme-li tento vztah s (9.19), vidíme, že platí

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T. \quad (9.26)$$

Hybnost soustavy částic můžeme tedy vyjádřit i jinak:

Hybnost soustavy částic je rovna součinu její celkové hmotnosti M a rychlosti jejího těžiště.

Derivací rov. (9.26) dostaneme

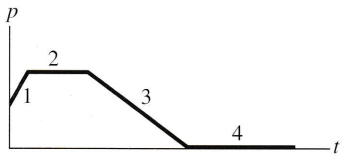
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_T}{\mathrm{d}t} = M\boldsymbol{a}_T. \quad (9.27)$$

Porovnáním rov. (9.26) a (9.27) získáme nakonec ekvivalentní vyjádření věty o hybnosti ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \quad (9.28)$$

Tento výsledek můžeme považovat za zobecnění druhého Newtonova zákona pro částici, zapsaného ve tvaru $(\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t) = \sum \boldsymbol{F}$, na případ soustavy částic. (Uvědomme si, že jsme při formulaci tohoto zobecnění použili i třetího Newtonova zákona.) V tab. 9.1 jsou shrnuty důležité vztahy platné pro jednu částici a odpovídající vztahy odvozené pro soustavu částic.

KONTROLA 3: Na obrázku je znázorněna časová závislost hybnosti částice pohybující se po přímce. Na částici působí síla ve směru této přímky. (a) Seřaďte čtyři označené oblasti sestupně podle velikosti této síly. (b) V které oblasti je částice brzděna?



PŘÍKLAD 9.6

Obr. 9.10a zachycuje dětské autíčko o hmotnosti 2,0 kg před a za zatáčkou. Velikost jeho rychlosti před zatáčkou je $0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, za zatáčkou $0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete odpovídající změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$.

ŘEŠENÍ: K vyjádření počáteční a výsledné hybnosti autíčka použijeme vztahu (9.26). Nejprve však musíme vyjádřit vektor jeho rychlosti $\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$ před zatáčkou a vektor rychlosti $\boldsymbol{v}_\mathrm{f}$ poté, co autíčko zatáčkou projelo. Zvolíme-li soustavu souřadnic podle obr. 9.10a, dostaneme

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{i} = -(0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{v}_\mathrm{f} = (0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i}.$$

Pro odpovídající hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ a $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ pak podle rov. (9.26) platí

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = M\boldsymbol{v}_\mathrm{i} = (2{,}0\,\mathrm{kg})(-0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j} = (-1{,}0\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$$

a

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = M\boldsymbol{v}_\mathrm{f} = (2{,}0\,\mathrm{kg})(0{,}40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} = (0{,}80\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i}.$$

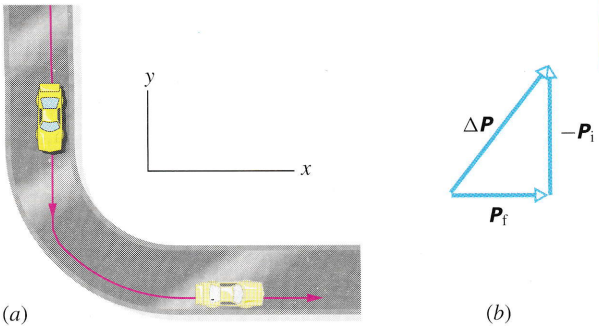
Tyto hybnosti mají různý směr. Proto *nemůžeme* vyjádřit změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$ jako pouhý rozdíl velikostí vektorů $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$. Změna hybnosti je dána vektorovým vztahem

$$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f} - \boldsymbol{P}_\mathrm{i}, \quad (9.29)$$

tj.

$$\Delta \boldsymbol{P} = (0{,}80\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (-1{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j} = \\ = (0{,}8\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j})\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Na obr. 9.10b jsou vyznačeny vektory $\Delta\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a $-\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$. Připomeňme si, že $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ odečítáme od $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ tak, že k vektoru $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ přičteme vektor $-\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$.



Obr. 9.10 Příklad 9.6. (a) Autíčko v zatáčce závodní dráhy. (b) Změna hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$ autíčka je vektorovým rozdílem jeho výsledné hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a počáteční hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$.

9.6 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

Uvažujme soustavu částic, na kterou nepůsobí žádné vnější síly (soustava je izolovaná), anebo je výslednice vnějších sil nulová. Předpokládejme, že částice soustavu neopouštějí ani do ní nevstupují z okolí (soustava je uzavřená). S uvážením skutečnosti, že $\sum \boldsymbol{F}_\mathrm{ext} = \boldsymbol{0}$, dostaneme z rov. (9.28) vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\boldsymbol{P} = \text{konst.} \qquad (9.30)$$

Tento důležitý výsledek představuje **zákon zachování hybnosti** a lze jej vyjádřit také ve tvaru

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}. \qquad (9.31)$$

Indexy (i), resp. (f) označují hybnost soustavy v počátečním, resp. koncovém okamžiku. Vztahy (9.30) i (9.31) vyjadřují, že celková hybnost soustavy částic se nemění, je-li výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová. Toto tvrzení zahrnuje i méně obecnou, avšak rovněž důležitou formulaci zákona zachování hybnosti: hybnost izolované soustavy částic je stálá.

Podobně jako v případě zákona zachování energie, formulovaného v kap. 8, sahá platnost zákona zachování hybnosti za rámec newtonovské mechaniky. Tento zákon totiž platí i v mikrosvětě, kde již s Newtonovými zákony nelze počítat. Nebude porušen ani pro soustavy částic pohybujících se velkými rychlostmi, pro něž je nutné nahradit newtonovskou mechaniku Einsteinovou teorií relativity, pokud hybnost vyjádříme vztahem (9.24) namísto (9.22).

Z rov. (9.26) ($\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T$) je zřejmé, že v případě konstantní celkové hybnosti $\boldsymbol{P}$ je stálá i rychlost těžiště soustavy $\boldsymbol{v}_T$. Znamená to, že jeho zrychlení $\boldsymbol{a}_T$ je nulové, přesně ve shodě s větou o hybnosti uvedenou v tab. 9.1.

Vztahy (9.30) a (9.31) mají vektorový charakter a každý z nich je proto ekvivalentní třem skalárním rovnicím, vyjadřujícím zachování jednotlivých složek vektoru celkové hybnosti. V závislosti na silovém působení okolí na uvažovanou soustavu částic mohou nastat i situace, kdy se zachovává jen jedna nebo dvě složky celkové hybnosti:

Je-li některá složka výslednice *vnějších* sil působících na uzavřenou soustavu nulová, pak se odpovídající složka celkové hybnosti soustavy nemění.

Pro ilustraci si představme letící míč. Při zanedbatelném odporu prostředí je jedinou silou, která na míč při jeho pohybu působí, tíhová síla $m\boldsymbol{g}$. Ta ovšem směřuje svisle dolů. Svislá složka hybnosti míče se tedy mění, zatímco její vodorovná složka se zachovává.

Znovu připomeňme, že celkovou hybnost uzavřené soustavy lze změnit jen působením vnějších sil. Působení vnitřních sil může sice vést ke změnám hybnosti jednotlivých částí soustavy, ke změně celkové hybnosti však nepřispívá.

KONTROLA 4: Předmět spočívající v klidu na vodorovné dokonale hladké podložce explodoval a roztrhl se na dvě části. Jedna z nich se dala do pohybu podél kladné osy x. (a) Jaká byla celková hybnost soustavy po výbuchu? (b) Mohla se druhá část pohybovat po přímce svírající s osou x nenulový úhel? (c) Jaký byl směr vektoru hybnosti druhé části?

PŘÍKLAD 9.7

Záhadná bedna o hmotnosti $m = 6{,}0\,\mathrm{kg}$ klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze podél kladné osy x. Velikost její rychlosti je $v = 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Náhle bedna vybuchne a rozpadne se na dvě části: jedna z nich, o hmotnosti $m_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, se dále pohybuje podél kladné osy x rychlostí o velikosti $v_1 = 8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je rychlost druhé části?

ŘEŠENÍ: Soustava částic, kterou sledujeme, je tvořena nejprve bednou a po jejím roztržení oběma jejími částmi. Jedná se sice o soustavu uzavřenou, nikoli však izolovanou. Na

bednu samotnou i na každou její část působí totiž jednak tíhová síla, jednak tlaková síla podlahy. Všechny tyto síly jsou svislé a nepřispějí proto ke změně vodorovné složky celkové hybnosti soustavy. Síly, jimiž na sebe působí jednotlivé části bedny při explozi, neovlivní celkovou hybnost vůbec, neboť jsou vnitřními silami soustavy. Vodorovná složka hybnosti soustavy se tedy zachovává a platí pro ni vztah (9.31).

Počáteční hybnost soustavy je určena hybností bedny

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = m\boldsymbol{v}.$$

Hybnost soustavy $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ po roztržení bedny je dána vektorovým součtem hybností obou částí:

$$\boldsymbol{P}_{1\mathrm{f}} = m_1\boldsymbol{v}_1 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{P}_{2\mathrm{f}} = m_2\boldsymbol{v}_2,$$
$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = \boldsymbol{P}_{1\mathrm{f}} + \boldsymbol{P}_{2\mathrm{f}} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Pro snazší vyjádření složek vektorů hybnosti spojíme soustavu souřadnic s podlahou a osu x zvolíme ve směru pohybu bedny. Všechny vektory hybnosti mají tedy směr osy x a jejich x-ové složky jsou dány přímo jejich velikostmi opatřenými příslušnými znaménky. Z (9.31) pak dostaneme

$$P_{\mathrm{i},x} = P_{\mathrm{f},x},$$

tj.

$$mv_x = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}.$$

Uvážíme-li, že hmotnost druhé části bedny je $m_2 = m - m_1 = 4{,}0\,\mathrm{kg}$, a dosadíme-li do obecných vztahů vstupní číselné údaje, dostaneme nakonec

$$(6{,}0\,\mathrm{kg})(4{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) = (2{,}0\,\mathrm{kg})(8{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) + (4{,}0\,\mathrm{kg})v_{2x},$$

odkud

$$v_{2x} = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná hodnota je kladná. Znamená to, že se druhá část bedny pohybuje rovněž ve směru kladné osy x.

PŘÍKLAD 9.8

Z děla o hmotnosti $M = 1\,300\,\mathrm{kg}$ byla ve vodorovném směru vypálena koule o hmotnosti $m = 72\,\mathrm{kg}$ (obr. 9.11). Rychlost koule vzhledem k dělu je $\boldsymbol{v}$ a má velikost $v = 55\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Při zpětnému rázu se dělo volně pohybuje vzhledem k Zemi rychlostí $\boldsymbol{V}$.

(a) Určete vektor $\boldsymbol{V}$.

ŘEŠENÍ: Uvažujme soustavu složenou ze dvou těles, děla a koule. Díky této volbě budou síly vzájemného působení děla a koule při výstřelu vnitřními silami soustavy a není třeba se jimi zabývat. Vodorovné složky vnějších sil působících na soustavu jsou nulové a vodorovná složka celkové hybnosti soustavy se při výstřelu zachovává. Rychlost koule vzhledem k Zemi $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$ je rovna vektorovému součtu rychlosti koule vzhledem k dělu a rychlosti děla vzhledem k Zemi, tj.

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{Z} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}.$$

Soustavu souřadnic spojíme se zemským povrchem a osu x namíříme ve směru hlavně (na obr. 9.11 vpravo). Všechny rychlosti mají směr osy x. (V obrázku směřuje rychlost $\boldsymbol{V}$ doleva, její skutečnou orientaci však dosud neznáme.) Pak

$$v_{\mathrm{Z},x} = v_x + V_x. \qquad (9.32)$$

Před výstřelem má soustava nulovou hybnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{0}$. Vodorovnou složku její hybnosti po výstřelu označme $P_{\mathrm{f},x}$. Podle (9.32) pro ni platí

$$P_{\mathrm{f},x} = MV_x + mv_{\mathrm{Z},x} = MV_x + m(v_x + V_x).$$

První člen na pravé straně této rovnosti představuje vodorovnou složku hybnosti děla a druhý vodorovnou složku hybnosti koule vzhledem k Zemi.

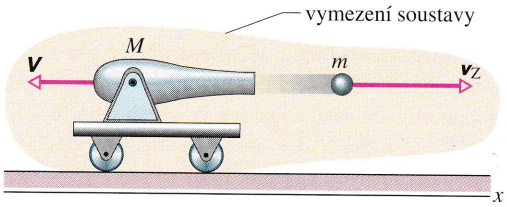
Vodorovná složka celkové hybnosti se ovšem nemění, tj. $P_{\mathrm{f},x} = P_{\mathrm{i},x}$. Platí tedy

$$0 = MV_x + m(v_x + V_x).$$

Řešením této rovnice vzhledem k neznámé V_x dostaneme

$$V_x = -\frac{mv_x}{M+m} = -\frac{(72\,\mathrm{kg})(55\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(1\,300\,\mathrm{kg} + 72\,\mathrm{kg})} =$$
$$= -2{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko potvrzuje očekávání, že se dělo při zpětném rázu pohybuje v opačném směru než koule (v obr. 9.11 vlevo).



Obr. 9.11 Příklad 9.8. Dělo o hmotnosti M vypálilo kouli o hmotnosti m. Koule má rychlost $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$ vzhledem k Zemi a rychlost $\boldsymbol{v}$ vzhledem k dělu. Rychlost zpětného rázu děla vzhledem k Zemi je $\boldsymbol{V}$.

(b) Určete rychlost koule vzhledem k Zemi $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (9.32) vyplývá

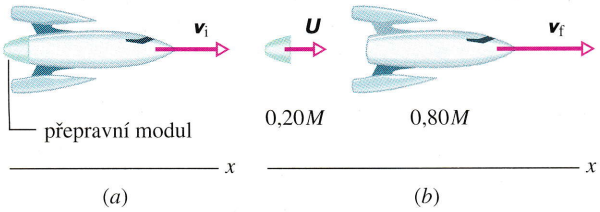
$$v_{\mathrm{Z},x} = v_x + V_x = (55\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) + (-2{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) =$$
$$= 52\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vlivem zpětného rázu děla se koule pohybuje vzhledem k Zemi poněkud pomaleji, než kdyby ke zpětnému rázu nedocházelo.

Při řešení této úlohy jsme si mohli uvědomit důležitost vhodného vymezení studované soustavy částic (*dělo+koule*) i vhodné volby vztažné soustavy, vzhledem k níž vyjadřujeme složky vektorových veličin. (Ze dvou přirozeně se nabízejících možností, spojit soustavu souřadnic buď s povrchem Země, nebo s pohybujícím se dělem, jsme rozumně zvolili prvou možnost.)

PŘÍKLAD 9.9

Představme si vesmírnou loď o celkové hmotnosti M vybavenou přepravním modulem, která letí vesmírem rychlostí $v_i = 2\,100$ km/h vzhledem ke Slunci (obr. 9.12a). Poté, co se přepravní modul o hmotnosti $0{,}20M$ odpoutá od lodi pomocí malého výbuchu (obr. 9.12b), pohybuje se loď o 500 km/h rychleji než modul. (Velikost relativní rychlosti lodi vůči modulu je tedy $v_{rel} = 500$ km/h.) Určete velikost rychlosti lodi v_f vzhledem ke Slunci.



Obr. 9.12 Příklad 9.9. (a) Vesmírná loď s přepravním modulem se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. (b) Přepravní modul se odpoutal od lodi. Loď se nyní pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_f$ a modul rychlostí $\boldsymbol{U}$.

ŘEŠENÍ: Soustava tvořená lodí a modulem je uzavřená a izolovaná. Její celková hybnost se tedy zachovává, tj.

$$P_i = P_f. \tag{9.33}$$

Indexy (i) a (f) označují hybnost soustavy před a po odpoutání modulu. Soustava souřadnic je volena tak, že osa x směřuje ve směru pohybu lodi. Všechny vektorové veličiny popisující pohyb jednotlivých částí soustavy ve všech jeho fázích mají tedy nenulové pouze x-ové složky, které jsou navíc rovny velikostem příslušných vektorů. Platí

$$P_i = Mv_i. \tag{9.34}$$

Označíme-li symbolem $\boldsymbol{U}$ rychlost uvolněného modulu vzhledem ke Slunci, můžeme výslednou hybnost soustavy $\boldsymbol{P}_f$ vyjádřit vztahem

$$P_f = (0{,}20M)U + (0{,}80M)v_f. \tag{9.35}$$

První člen na pravé straně odpovídá hybnosti modulu a druhý hybnosti lodi.

Relativní rychlost $\boldsymbol{v}_{rel}$ lodi vzhledem k modulu je rovna rozdílu jejich rychlostí, tj.

$$v_{rel} = v_f - U.$$

Odtud

$$U = v_f - v_{rel}.$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (9.35) a využitím vztahů (9.33) a (9.34) dostaneme

$$Mv_i = 0{,}20M(v_f - v_{rel}) + 0{,}80Mv_f.$$

Odtud již snadno získáme výslednou rychlost lodi:

$$v_f = v_i + 0{,}20v_{rel},$$

tj.

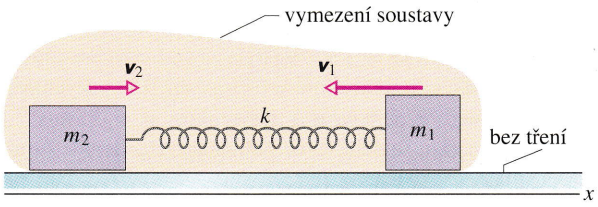
$$v_f = (2\,100\text{ km/h}) + 0{,}20(500\text{ km/h}) = \\ = 2\,200\text{ km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 5: V následující tabulce vztahující se k příkladu 9.9 jsou uvedeny některé hodnoty určující rychlost vesmírné lodi a přepravního modulu vzhledem ke Slunci, resp. relativní rychlost lodi vzhledem k modulu. Doplňte chybějící údaje.

	RYCHLOSTI (km/h)		RELATIVNÍ RYCHLOST (km/h)
	MODUL	LOĎ	
(a)	1 500	2 000	
(b)		3 000	400
(c)	1 000		600

PŘÍKLAD 9.10

Dvě tělesa na obr. 9.13 jsou spojena ideální pružinou a mohou se pohybovat po dokonale hladké vodorovné podložce. Jejich hmotnosti jsou m_1 a m_2. Tělesa nejprve oddálíme (pružina se napne) a poté uvolníme.



Obr. 9.13 Příklad 9.10. Dvě tělesa spojená pružinou a ležící na dokonale hladké vodorovné podložce nejprve oddálíme a poté uvolníme. Vektorový součet jejich hybností zůstává při jejich dalším pohybu nulový. V obrázku je vyznačen i způsob vymezení soustavy.

(a) Jaký je poměr rychlostí v_1/v_2 přibližujících se těles?

ŘEŠENÍ: Sledujeme soustavu obou těles spojených pružinou. Vztažná soustava je spojena s podložkou a osa x směřuje podél pružiny. Počáteční hybnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ soustavy před uvolněním těles je nulová. V libovolném okamžiku po uvolnění těles lze hybnost soustavy zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Ze zákona zachování hybnosti plyne rovnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}$, tj.

$$\boldsymbol{0} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2. \tag{9.36}$$

S ohledem na speciální volbu soustavy souřadnic můžeme psát

$$\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}} = -\frac{m_2}{m_1}. \tag{9.37}$$

Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že rychlosti těles mají v každém okamžiku opačný směr. Rov. (9.37) platí v libovolném okamžiku po uvolnění těles bez ohledu na jejich okamžitou rychlost.

(b) Jaký je poměr kinetických energií $E_{\mathrm{k},1}/E_{\mathrm{k},2}$ přibližujících se těles?

ŘEŠENÍ: Poměr $E_{k,1}/E_{k,2}$ lze zapsat ve tvaru

$$\frac{E_{\mathrm{k},1}}{E_{\mathrm{k},2}} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_{1,x}^2}{\frac{1}{2}m_2v_{2,x}^2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}}\right)^2.$$

Dosazením za $v_{1,x}/v_{2,x}$ z rov. (9.37) a úpravou dostaneme

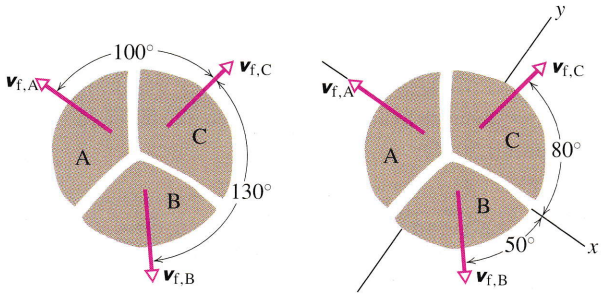
$$\frac{E_{\mathrm{k},1}}{E_{\mathrm{k},2}} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{9.38}$$

Zatímco se tělesa k sobě přibližují, zmenšuje se prodloužení spojovací pružiny. Pružná potenciální energie tak klesá ve prospěch kinetických energií těles. Hodnoty veličin $E_{\mathrm{k},1}$ a $E_{\mathrm{k},2}$ rostou, jejich poměr se však nemění. Podle rov. (9.38) je totiž v každém okamžiku určen podílem hmotností těles. Kinetická energie obou těles je největší ve chvíli, kdy je pružina opět nenapjatá. Poté se pružina začne stlačovat a pružná energie soustavy poroste na úkor energie kinetické. Vztah (9.38) však platí i v této fázi pohybu.

Vztahy (9.36) až (9.38) platí i v jiných situacích, kdy se dvě tělesa přitahují (nebo odpuzují). Můžeme je použít například při sledování pádu kamene k Zemi. V analogii s př. 9.10 a obr. 9.13 bude kámen představovat těleso 1 a Země těleso 2. Vzájemné působení kamene a Země je ovšem popsáno nikoli pružnými, nýbrž gravitačními silami. Vztažnou soustavu spojíme s těžištěm dvojice kámen + Země (takzvaná těžišťová soustava). Z rov. (9.36) je vidět, že vzhledem k takto zvolené vztažné soustavě jsou hybnosti kamene a Země v každém okamžiku stejně velké. Z rov. (9.37) a (9.38) je pak zřejmé, že padající kámen má vzhledem k těžišťové soustavě mnohem větší rychlost i kinetickou energii než Země, neboť $m_2 \gg m_1$.

PŘÍKLAD 9.11

Uvnitř tělesa o hmotnosti M, které leží na vodorovné dokonale hladké podlaze, je umístěna malá rozbuška. Výbuch roztrhne těleso na tři části, které se dají do pohybu po podlaze. Obr. 9.14 ukazuje pohled shora na situaci. Díl C o hmotnosti $0{,}30M$ má po výbuchu rychlost o velikosti $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



Obr. 9.14 Příklad 9.11. Tři díly rozbitého tělesa se pohybují různými směry po dokonale hladké vodorovné podlaze. (a) Pohled na situaci shora. (b) Totéž s vyznačením soustavy souřadnic.

(a) Jaká je rychlost dílu B o hmotnosti $0{,}20M$?

ŘEŠENÍ: Zvolme soustavu souřadnic podle obr. 9.14b: záporný směr osy x splývá se směrem vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,A}}$. Osa x svírá s vektorem $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,C}}$ úhel 80° a s vektorem $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,B}}$ úhel 50°.

Obě složky celkové hybnosti soustavy, tvořené nejprve tělesem a po rozpadu všemi jeho částmi, se zachovávají. Síly působící při výbuchu jsou totiž vnitřními silami soustavy a vnější síly (tíhová a normálová) jsou kolmé k souřadnicové rovině xy. Při výpočtu rychlosti dílu B vyjdeme ze zákona zachování pro y-ovou složku celkové hybnosti:

$$P_{\mathrm{i},y} = P_{\mathrm{f},y}. \tag{9.39}$$

Indexy (i) a (f) symbolizují jako obvykle počáteční a koncový stav soustavy.

Složky počáteční hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ jsou nulové, neboť těleso bylo zpočátku v klidu. Abychom získali $P_{\mathrm{f},y}$, vyjádříme y-ové složky výsledné hybnosti všech dílů tělesa:

$$p_{\mathrm{f,A},y} = 0,$$
$$p_{\mathrm{f,B},y} = -0{,}20Mv_{\mathrm{f,B},y} = -0{,}20Mv_{\mathrm{f,B}}\sin 50°,$$
$$p_{\mathrm{f,C},y} = 0{,}30Mv_{\mathrm{f,C},y} = 0{,}30Mv_{\mathrm{f,C}}\sin 80°.$$

(Uvědomme si, že vzhledem k speciální volbě os soustavy souřadnic je $p_{\mathrm{f,A},y} = 0$.) Vztah (9.39) lze tedy přepsat do tvaru

$$P_{\mathrm{i},y} = P_{\mathrm{f},y} = p_{\mathrm{f,A},y} + p_{\mathrm{f,B},y} + p_{\mathrm{f,C},y}.$$

Dosazením $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dostaneme

$$0 = 0 - 0{,}20Mv_{\mathrm{f,B}}\sin 50° + (0{,}30M)(5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\sin 80°$$

a odtud

$$v_{f,B} = 9{,}64\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 9{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je rychlost části B?

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že se zachovává i x-ová složka celkové hybnosti, můžeme psát

$$P_{i,x} = P_{f,x}. \qquad (9.40)$$

Platí $P_{i,x} = 0$ (těleso bylo zpočátku v klidu). Vyjádříme x-ové složky výsledných hybností jednotlivých dílů tělesa (díl A má hmotnost $0{,}50M$):

$$p_{f,A,x} = -0{,}50M v_{f,A},$$
$$p_{f,B,x} = 0{,}20M v_{f,B,x} = 0{,}20M v_{f,B} \cos 50^\circ,$$
$$p_{f,C,x} = 0{,}30M v_{f,C,x} = 0{,}30M v_{f,C} \cos 80^\circ.$$

Vztah (9.40) nabývá tvaru

$$P_{i,x} = P_{f,x} = p_{f,A,x} + p_{f,B,x} + p_{f,C,x}.$$

Dosadíme $v_{f,C} = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $v_{f,B} = 9{,}64\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a dostaneme

$$0 = -0{,}50M v_{f,A} + 0{,}20M(9{,}64\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \cos 50^\circ + \\ + 0{,}30M(5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}) \cos 80^\circ.$$

Odtud již získáme velikost rychlosti dílu A:

$$v_{f,A} = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Předpokládejme, že těleso v př. 9.11 je urychlováno ve směru záporné osy y (pohybuje se například po nakloněné rovině). Rozhodněte, zda se zachovává (a) x-ová složka jeho celkové hybnosti (podle (9.40)) a (b) y-ová složka jeho celkové hybnosti (vztah (9.39)).

RADY A NÁMĚTY

Bod 9.2: *Zachování hybnosti*

Je vhodné vrátit se k bodu 8.2, který se týkal zákona zachování mechanické energie. Otázky, které v něm byly formulovány, stojí za zamyšlení i v souvislosti s úvahami o zákonu zachování hybnosti.

Při výpočtech vycházejících ze zákona zachování hybnosti se především vždy ujistíme, zda soustava, pro niž chceme zákon zachování hybnosti použít, je uzavřená a izolovaná. *Uzavřenost* znamená, že si soustava nevyměňuje částice se svým okolím (žádná částice neprojde ze soustavy do okolí ani naopak). Soustavu považujeme za *izolovanou*, je-li její interakce s okolními objekty zanedbatelná. Z hlediska zákona zachování hybnosti se jako izolovaná chová i soustava, na kterou její okolí působí silami s nulovou výslednicí. Není-li soustava uzavřená nebo izolovaná, vztahy (9.30) a (9.31) neplatí.

Připomeňme si, že hybnost je vektorová veličina. Má tedy smysl uvažovat o zachování každé z jejích složek odděleně. Daná složka celkové hybnosti soustavy se zachovává za předpokladu, že odpovídající složka výslednice vnějších sil, jimiž na částice soustavy působí její okolí, je nulová. V př. 9.8 byla nulová vodorovná složka výslednice vnějších sil působících na soustavu dělo + koule. Zachovávala se tedy vodorovná složka hybnosti soustavy. Svislá složka výsledné vnější síly ovšem nulová nebyla, neboť na letící kouli působila tíhová síla. Svislá složka hybnosti soustavy byla proměnná.

Vybereme dva vhodné stavy soustavy (počáteční a koncový) a vyjádříme její celkovou hybnost v každém z nich. Přitom bychom si měli stále uvědomovat, v jaké vztažné soustavě pracujeme. Musíme dát pozor, abychom do celkové hybnosti neopomněli zahrnout hybnost některé z částí studované soustavy, nebo naopak do ní omylem nezapočítali hybnost objektů, které do soustavy nepatří. Tak třeba v př. 9.8 jsme se nejprve museli rozhodnout, zda použijeme vztažnou soustavu spojenou se Zemí, nebo s dělem, které se pohybuje vlivem zpětného rázu.

Nakonec výrazy pro $\boldsymbol{P}_i$ a $\boldsymbol{P}_f$ porovnáme a řešením získané rovnice najdeme neznámou veličinu, požadovanou v zadání úlohy.

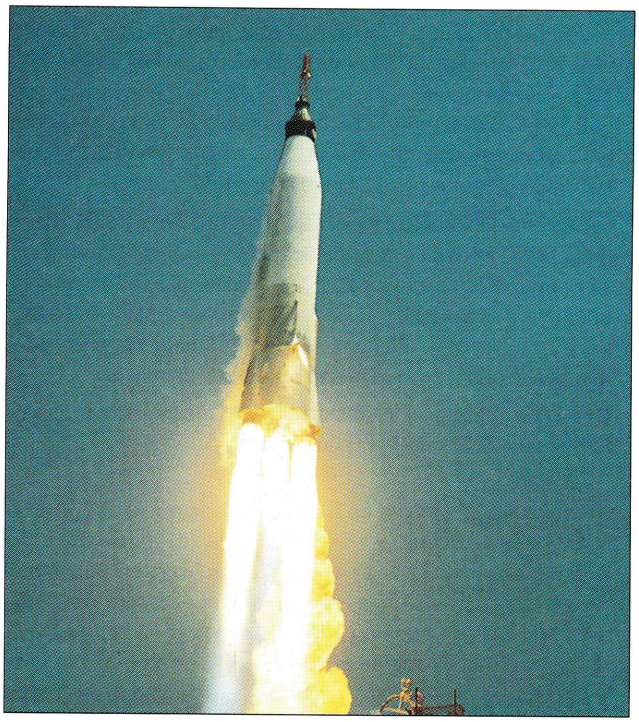
9.7 SOUSTAVY S PROMĚNNOU HMOTNOSTÍ: RAKETA

Prozatím jsme se zabývali soustavami, jejichž celková hmotnost byla konstantní. Tento předpoklad však nebývá vždy splněn. Uvažujme například startující raketu (obr. 9.15). Převážnou část její hmoty před startem tvoří pohonné látky, které se postupně spalují a proudí ven tryskou raketového motoru.

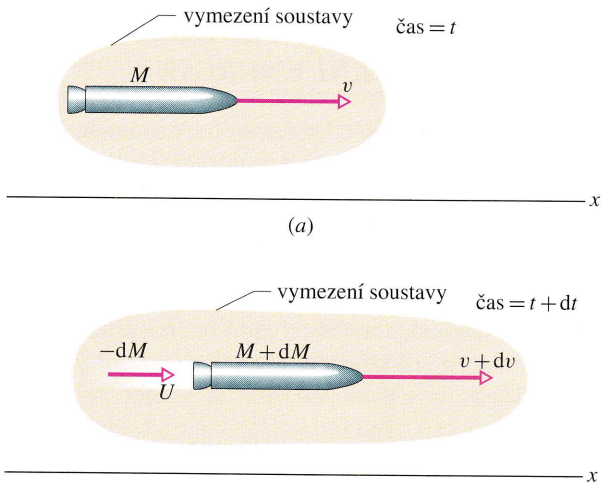
Pro popis pohybu rakety s proměnnou hmotností použijeme větu o hybnosti, nikoli však pro raketu samotnou, nýbrž pro soustavu, do níž kromě rakety zahrneme i zplodiny vzniklé spálením pohonných hmot, které raketu opouštějí. Hmotnost *takto vymezené soustavy* se *nemění*.

Výpočet zrychlení rakety

Sledujme raketu v pozdější fázi jejího pohybu v meziplanetárním prostoru, kde zanedbáme gravitační sílu i odpor prostředí. Přímočarý pohyb rakety budeme popisovat



Obr. 9.15 Start rakety v projektu Mercury



Obr. 9.16 (a) Zrychlený pohyb rakety o hmotnosti M sledujeme v inerciální vztažné soustavě. Obrázek odpovídá okamžiku t. (b) Raketa v okamžiku $t + \mathrm{d}t$. Obrázek znázorňuje i odpad vzniklý spálením pohonných hmot v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ a vypuzený do prostoru.

v inerciální vztažné soustavě a souřadnicovou osu x zvolíme ve směru tohoto pohybu. Označme M hmotnost rakety a v její rychlost (x-ová složka) v libovolném okamžiku t (obr. 9.16a).

Obr. 9.16b zachycuje situaci v pozdějším okamžiku $t + \mathrm{d}t$. Raketa má nyní rychlost $v + \mathrm{d}v$ a její hmotnost je $M + \mathrm{d}M$. Uvědomme si, že změna hmotnosti $\mathrm{d}M$ je *záporná*. Zplodiny vzniklé spálením pohonných látek v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ mají hmotnost $-\mathrm{d}M$ a opouštějí raketu rychlostí U měřenou ve zvolené inerciální vztažné soustavě.

Uvažujme nyní soustavu tvořenou raketou a zplodinami, které ji opustily během časového intervalu $\mathrm{d}t$. Tato soustava je uzavřená a izolovaná. Její hybnost se tedy v intervalu $\mathrm{d}t$ zachovává a platí

$$P_\mathrm{i} = P_\mathrm{f}. \tag{9.41}$$

Indexy (i) a (f) označují celkovou hybnost soustavy na začátku a na konci časového intervalu délky $\mathrm{d}t$. Rov. (9.41) můžeme přepsat do tvaru

$$Mv = -\mathrm{d}M\,U + (M + \mathrm{d}M)(v + \mathrm{d}v), \tag{9.42}$$

kde první člen na pravé straně představuje hybnost zplodin vzniklých v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ a druhý člen značí hybnost rakety na konci tohoto intervalu.

Vztah (9.42) lze ještě zjednodušit zavedením relativní rychlosti u zplodin vzhledem k raketě. Tato rychlost je rozdílem rychlosti $v + \mathrm{d}v$ rakety na konci intervalu $\mathrm{d}t$ a rychlosti zplodin U:

$$u = (v + \mathrm{d}v) - U,$$

tj.

$$U = v + \mathrm{d}v - u. \tag{9.43}$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (9.42) dostáváme po malé úpravě

$$-\mathrm{d}M\,u = M\,\mathrm{d}v. \tag{9.44}$$

Vydělením rov. (9.44) délkou časového intervalu $\mathrm{d}t$ dostaneme:

$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}u = M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{9.45}$$

Výraz $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ vyjadřuje rychlost ubývání hmotnosti rakety. Označme jej symbolem $-R$, kde R ($R > 0$) je rychlost spotřeby paliva v kg/s. Nakonec si uvědomme, že výraz $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ v rov. (9.45) představuje zrychlení a rakety a přepíšeme rovnici ve tvaru

$$Ma = Ru \quad \text{(rovnice Měščerského)}. \tag{9.46}$$

Rovnice (9.46) platí v libovolném okamžiku pro okamžité hodnoty hmotnosti M rakety, rychlosti R spotřeby paliva a zrychlení a rakety.

Její levá strana má rozměr síly ($\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}} = \mathrm{N}$) a závisí pouze na vlastnostech raketového motoru (na rychlosti R spotřeby paliva a na rychlosti u zplodin vzhledem k raketě). Výraz Ru na pravé straně rovnice nazveme **tahem** raketového motoru a označíme jej symbolem T. Rov. (9.46) získává při tomto označení formální podobu druhého Newtonova zákona $Ma = T$, kde a je zrychlení rakety a M její hmotnost.

Výpočet rychlosti rakety

Položme si nyní otázku, jak se mění rychlost rakety při spalování pohonných hmot. Odpověď získáme integrací rovnice (9.44) upravené na tvar

$$\mathrm{d}v = -u\,\frac{\mathrm{d}M}{M}.$$

Dostaneme

$$\int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}} \mathrm{d}v = -u \int_{M_\mathrm{i}}^{M_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}M}{M}.$$

M_i a M_f představují počáteční a výslednou hmotnost rakety. Výpočtem integrálů dostaneme vztah

$$v_\mathrm{f} - v_\mathrm{i} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}} \qquad \text{(vzorec Ciolkovského)}, \qquad (9.47)$$

který vyjadřuje změnu rychlosti rakety při změně její hmotnosti z hodnoty M_i na hodnotu M_f.* Dokumentuje rovněž výhodnost konstrukce vícestupňových raket, jejichž hmotnost M_f klesá nejen spalováním pohonných hmot, ale i uvolněním vyhořelých stupňů. Ideální raketu by v cíli jejího letu měl tvořit pouze užitečný náklad.

PŘÍKLAD 9.12

Raketa, jejíž počáteční hmotnost M_i je 850 kg, spotřebovává palivo rychlostí $R = 2{,}3\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Zplodiny opouštějí raketu relativní rychlostí $u = 2\,800\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

(a) Jaký je tah motoru?

ŘEŠENÍ: Tah motoru je

$$T = Ru = (2{,}3\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}})(2\,800\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}) = \\ = 6\,440\ \mathrm{N} \doteq 6\,400\ \mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaké je počáteční zrychlení rakety?

ŘEŠENÍ: Z pohybové rovnice rakety dostáváme

$$a = \frac{T}{M_\mathrm{i}} = \frac{(6\,440\ \mathrm{N})}{(850\ \mathrm{kg})} = 7{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při startu rakety z povrchu Země musí být tah T motoru větší než tíhová síla, kterou na raketu působí Země. Ta má v našem případě velikost $M_\mathrm{i} g = (850\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}) = \\ = 8\,300\ \mathrm{N}$. Tah motoru je však pouhých $T = 6\,400\ \mathrm{N}$, takže naše raketa nemůže odstartovat. Může však být do meziplanetárního prostoru vynesena nějakou silnější raketou.

(c) Předpokládejme, že naše raketa startuje z vesmírné lodi, která se již nachází v meziplanetárním prostoru. Gravitační síly tedy můžeme zanedbat. Po vyčerpání paliva má raketa hmotnost $M_\mathrm{f} = 180\ \mathrm{kg}$. Jaká je její rychlost vzhledem k lodi v tomto okamžiku? Předpokládejme, že hmotnost vesmírné lodi je tak velká, že start rakety její pohyb neovlivní.

ŘEŠENÍ: Počáteční rychlost rakety vzhledem k vesmírné lodi je $v_\mathrm{i} = 0$. Z rov. (9.47) dostaneme

$$v_\mathrm{f} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}} = \\ = (2\,800\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}) \ln \frac{(850\ \mathrm{kg})}{(180\ \mathrm{kg})} = \\ = (2\,800\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}) \ln 4{,}72 \doteq 4\,300\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že výsledná rychlost rakety může převýšit relativní rychlost zplodin u vzhledem k raketě.

* Symbol „ln" v rovnici (9.47) značí přirozený logaritmus, tj. logaritmus o základu e (= 2,718 ...).

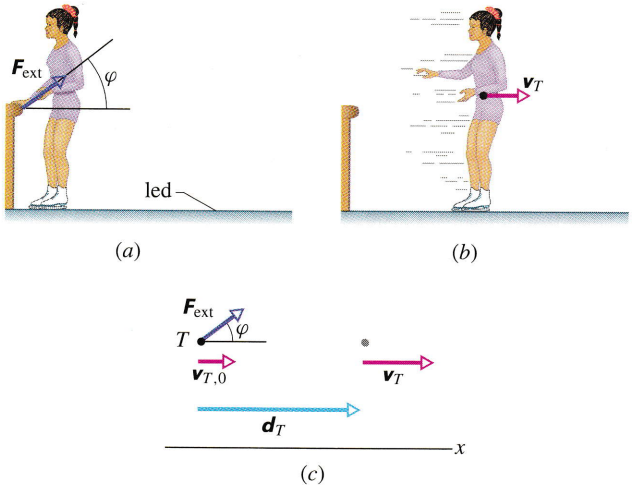
9.8 VNĚJŠÍ SÍLY A ZMĚNY VNITŘNÍ ENERGIE

Krasobruslařka na obr. 9.17a se odráží od mantinelu. Ten na ni působí silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$, svírající s vodorovnou rovinou úhel φ. Bruslařka, která byla zpočátku v klidu, získá vlivem této síly určitou rychlost, s níž se pak vzdaluje od mantinelu (obr. 9.17b). Působením síly se tedy zvýšila kinetická energie bruslařky.

Případ bruslařky se liší od předchozích příkladů, kdy docházelo ke změně kinetické energie tělesa vlivem působení vnějších sil, ve dvou podstatných rysech:

1. V předchozích příkladech byla rychlost všech částí tělesa stejná (těleso jsme mohli při studiu jeho pohybu považovat za bodový objekt). V případě bruslařky již tomu tak není. Například pohyb jejích paží se liší od pohybu jejího trupu.

2. V předchozích příkladech se kinetická energie tělesa měnila vlivem působení vnějších sil na úkor energie okolí. V případě bruslařky dochází ke změně její kinetické energie na úkor energie vnitřní (biochemické). Vnější síla v tomto případě nekoná práci, neboť vektor posunutí jejího působiště je po celou dobu jejího působení nulový (síla působí na ruku bruslařky v pevném bodě mantinelu). Práci konají síly napínající svalstvo, tj. *vnitřní síly soustavy*.



Obr. 9.17 (a) Bruslařka se odráží od mantinelu, který na ni působí silou $\boldsymbol{F}_{ext}$. (b) Její těžiště má v okamžiku ztráty kontaktu s mantinelem rychlost $\boldsymbol{v}_T$. (c) Vnější síla $\boldsymbol{F}_{ext}$ působící na bruslařku při odrazu od mantinelu je zakreslena jako síla působící na její těžiště. Při posunutí těžiště o vektor $\boldsymbol{d}_T$ se jeho rychlost změní z $\boldsymbol{v}_{T,0}$ na $\boldsymbol{v}_T$. Tato změna je určena vodorovnou složkou síly $\boldsymbol{F}_{ext}$.

Zdá se, že tyto rozdíly, odlišující popsaný případ bruslařky od všech ostatních příkladů změny kinetické energie těles, kterými jsme se prozatím zabývali, jsou naprosto zásadní. Přesto však je možné *formálně* vyjádřit změnu kinetické energie bruslařky jako práci síly $\boldsymbol{F}_{ext}$ působící na částici, jejímž pohybem lze nahradit pohyb bruslařky jako *celku*, tj. její **posuvný** neboli **translační** pohyb. Touto „náhradní" částicí je těžiště bruslařky. Situaci ukazuje obr. 9.17c. Předpokládejme, že těžiště bruslařky se pohybuje vodorovně. Svislá složka výslednice sil působících na bruslařku, daná tíhovou silou $M\boldsymbol{g}$, tlakovou silou ledové plochy $\boldsymbol{N}$ a svislým průmětem síly $\boldsymbol{F}_{ext}$, je tedy nulová. Vodorovná složka $F_{ext}\cos\varphi$ síly $\boldsymbol{F}_{ext}$ určuje vodorovné zrychlení $\boldsymbol{a}_T$ těžiště. Za dobu, po kterou tato síla působí, se rychlost těžiště změní z počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_{T,0}$ na výslednou rychlost $\boldsymbol{v}_T$. Odpovídající posunutí těžiště bruslařky označme $\boldsymbol{d}_T$. Podle rov. (2.16) je velikost výsledné rychlosti těžiště dána vztahem

$$v_T^2 = v_{T,0}^2 + 2a_{T,x}d_T. \tag{9.48}$$

Po vynásobení této rovnice hmotností M a malé úpravě dostaneme

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = Ma_{T,x}d_T. \tag{9.49}$$

Levá strana rov. (9.49) představuje změnu kinetické energie $\Delta E_{k,T}$ těžiště bruslařky z počáteční hodnoty $(E_{k,T})_i$ na výslednou hodnotu $(E_{k,T})_f$. Vzhledem k platnosti věty o hybnosti (druhého Newtonova zákona pro těžiště) můžeme nahradit součin $Ma_{T,x}$ vodorovnou složkou vnější síly $F_{ext}\cos\varphi$:

$$\Delta E_{k,T} = F_{ext}d_T\cos\varphi. \tag{9.50}$$

Tento *formální* výsledek lze interpretovat obvyklým způsobem: Kinetická energie příslušná posuvnému pohybu soustavy se mění na úkor práce, kterou koná výslednice vnějších sil umístěná v jejím těžišti.

Zdůrazněme ještě jednou důležitý aspekt problému bruslařky: Vnější síla, která na ni působí při odrazu od mantinelu, ve skutečnosti *nekoná práci*, neboť její skutečné působiště je v klidu. Změna kinetické energie $\Delta E_{k,T}$ musí tedy být doprovázena změnou vnitřní energie ΔE_{int} soustavy. (Předpokládáme, že vnitřní energie bruslařky se změnila jen o biochemickou energii jejích svalů.) V souladu s obecnou formulací zákona zachování energie v kap. 8 platí

$$\Delta E_{k,T} + \Delta E_{int} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{int} = -\Delta E_{k,T}. \tag{9.51}$$

Dosazením z rov. (9.50) do (9.51) dostaneme změnu vnitřní energie bruslařky:

$$\Delta E_{int} = -F_{ext}d_T\cos\varphi. \tag{9.52}$$

Ze vztahů (9.51) a (9.52) je tedy nakonec zřejmé, že kinetická energie bruslařky se mění na úkor její energie vnitřní. Formálně lze tuto změnu vyjádřit výrazem $F_{ext}d_T\cos\varphi$.

Představme si nyní ještě obecnější situaci, při níž se bude těžiště bruslařky pohybovat i ve svislém směru. Bude se při tom měnit i tíhová potenciální energie *izolované* soustavy bruslařka + Země. Označíme-li změnu tíhové potenciální energie jako $\Delta E_{p,T}$, můžeme psát zákon zachování energie ve tvaru

$$\Delta E_{k,T} + \Delta E_{p,T} + \Delta E_{int} = 0. \tag{9.53}$$

Změna vnitřní energie soustavy je dána prací sil napínajících svalstvo bruslařky. Tu můžeme opět formálně zapsat jako práci výslednice vnějších sil působících na bruslařku, umístěné však do jejího těžiště: zvolme soustavu souřadnic tak, aby osa x měla směr vodorovného posunutí těžiště bruslařky, osa y nechť je svislá. Zrychlení těžiště označme $\boldsymbol{a}_T$ a vektor jeho posunutí $\boldsymbol{d}_T$. Stejným postupem, jakým jsme odvodili vztah (9.49), získáme změnu kinetické energie bruslařky ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = Ma_{T,x}d_{T,x} + Ma_{T,y}d_{T,y}.$$

Podle věty o hybnosti je zrychlení těžiště bruslařky určeno výslednicí všech vnějších sil, které na ni působí, tj. tíhové síly, tlakové síly ledové plochy a tlakové síly mantinelu:

$$M\boldsymbol{a}_T = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{\text{ext}}.$$

Této vektorové rovnici odpovídají dvě skalární rovnice pro její složky:

$$Ma_{T,x} = F_{\text{ext}} \cos\varphi, \quad Ma_{T,y} = -Mg + N + F_{\text{ext}} \sin\varphi.$$

Pro změnu kinetické energie bruslařky tedy dostáváme

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = F_{\text{ext}} \cos\varphi d_{T,x} + \\ + (-Mg + N + F_{\text{ext}} \sin\varphi) d_{T,y}.$$

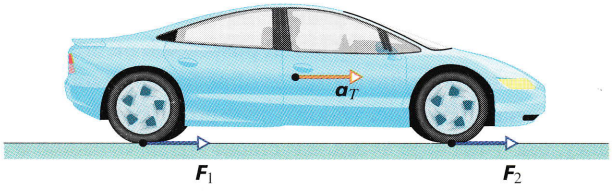
Výraz $-Mgd_{T,y}$ představuje práci tíhové síly, tj. záporně vzatou změnu tíhové potenciální energie soustavy bruslařka + Země. Porovnáme-li předchozí vztah s rov. (9.53), můžeme psát

$$\Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} - \\ - F_{\text{ext}} \cos\varphi d_{T,x} - (N + F_{\text{ext}} \sin\varphi) d_{T,y} = 0,$$

tj.

$$\Delta E = \Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} = (\boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{N}) \cdot \boldsymbol{d}_T. \quad (9.54)$$

ΔE značí změnu mechanické energie soustavy bruslařka + + Země, která se podle rov. (9.54) mění na úkor její vnitřní energie. Formálně lze tuto změnu vyjádřit výrazem $(\boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{N}) \cdot \boldsymbol{d}_T$. (Uvědomme si, že síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jíž působí mantinel na ruku bruslařky, se stala vnitřní silou působící v nově zvolené izolované soustavě bruslařka+Země. Odpovídající reakcí je síla $-\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jíž působí bruslařka na mantinel. Vnitřními silami nové soustavy jsou i tíhové síly $M\boldsymbol{g}$ a $-M\boldsymbol{g}$, vyjadřující gravitační interakci bruslařky se Zemí, a tlakové síly $\boldsymbol{N}$ a $-\boldsymbol{N}$, popisující vzájemné působení bruslařky a ledové plochy.)



Obr. 9.18 Automobil, který je zpočátku v klidu, se rozjíždí směrem vpravo. Silnice působí na povrch pneumatik třecími silami, z nichž dvě $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ jsou v obrázku vyznačeny. Součet těchto sil určuje výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na vozidlo.

Není-li vnější síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ konstantní, nahradíme ji ve vztazích (9.52) a (9.54) odpovídající průměrnou veličinou $\overline{\boldsymbol{F}}_{\text{ext}}$.

Věnujme bruslařce ještě poslední úvahu a zkusme si uvědomit, jakým způsobem dochází ke vzniku silového působení mantinelu na její ruku. Bruslařka položí pokrčenou paži na mantinel a začne se od něj „odtlačovat" napínáním svalů. Svou vůlí tedy řídí vzájemné působení částí soustavy, ovlivňuje *vnitřní* síly. Ruka tlačí na mantinel určitou silou. Podle třetího Newtonova zákona působí naopak mantinel na ruku bruslařky silou opačnou. Tato síla, kterou jsme označili symbolem $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, je ovšem z hlediska bruslařky silou *vnější*.

Vztahy (9.52) a (9.54) platí i pro jiné objekty, u nichž dochází, podobně jako u bruslařky, k vyvolání vnějších sil, či jejich změn prostřednictvím změn sil vnitřních. Pokud tyto vnější síly nekonají práci (například proto, že jejich působiště je v klidu), mění se mechanická energie takových soustav pouze na úkor vnitřní energie.

Uvažujme například rozjíždějící se automobil. Motor pohání kola, jejichž pneumatiky působí na vozovku třecími silami směřujícími proti zrychlení automobilu. Podle třetího Newtonova zákona působí vozovka na povrch pneumatik rovněž třecími silami $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$, avšak ve směru zrychlení (obr. 9.18). Tyto třecí síly tvoří výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na vozidlo (tíhová a normálová síla jsou kompenzovány) a udílí jeho těžišti zrychlení $\boldsymbol{a}_T$. Vnitřní energie automobilu (uvolněná spalováním paliva v motoru) klesá ve prospěch jeho energie kinetické. Je-li síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ konstantní, lze při daném posunutí $\boldsymbol{d}_T$ těžiště vozidla snadno vyjádřit změnu $\Delta E_{\text{k},T}$ kinetické energie pomocí rov. (9.54), položíme-li $\Delta E_{\text{p},T} = 0$ a uvážíme-li, že výsledná vnější síla svírá s vektorem posunutí těžiště úhel $\varphi = 0°$.

Vztah (9.54) platí i v situaci, kdy rozjetý automobil brzdí. Výsledná vnější síla je nyní orientována proti směru pohybu a svírá tedy s vektorem posunutí těžiště úhel $\varphi = 180°$. Kinetická energie těžiště vozidla klesá ve prospěch vnitřní energie (zahřívá se brzdové obložení).

PŘÍKLAD 9.13

Převrátí-li se brouk kovařík náhodou na záda, pomůže si obvykle tak, že prudce vyklene záda a vyskočí vzhůru. Při tom se energie uložená ve svalech „přemění" v kinetickou energii. Tento pohyb je doprovázen slyšitelným cvaknutím, s kterým souvisí anglický název brouka („clik beetle"). Videozáznam výskoku brouka ukázal, že se jeho těžiště během vyklenutí zad těsně před výskokem zvedlo o $d_T = 0{,}77\,\text{mm}$ a při výskoku dosáhlo výšky $h = 0{,}30\,\text{m}$. Hmotnost brouka je $m = 4{,}0 \cdot 10^{-6}\,\text{kg}$. Určete velikost průměrné síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, kterou při výskoku působila podložka na záda brouka.

ŘEŠENÍ: Soustava brouk + Země je izolovaná. Její celková

energie se tedy zachovává. Aplikujme tento zákon zachování na časový interval T měřený od počátku výskoku do okamžiku, kdy těžiště brouka dosáhlo maximální výšky h. Během doby T dojde k následujícím změnám jednotlivých druhů energie: (1) Změna kinetické energie $\Delta E_{k,T}$ je nulová, protože na počátku i na konci uvažovaného časového intervalu je brouk v klidu. (2) Změna $\Delta E_{p,T}$ tíhové potenciální energie soustavy brouk + Země je rovna mgh. (3) Změna vnitřní energie ΔE_{int} svalstva brouka, která během „přípravy k výskoku" vyvolá vnější sílu $\boldsymbol{F}_{ext}$.

Vztah vyjadřující skutečnost, že se energie soustavy brouk + Země v průběhu časového intervalu T zachovává, má tvar

$$\Delta E_{k,T} + \Delta E_{p,T} + \Delta E_{int} = 0.$$

Dosazením za $\Delta E_{k,T}$ a $\Delta E_{p,T}$ dostaneme

$$0 + mgh + \Delta E_{int} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{int} = -mgh. \tag{9.55}$$

Dosadíme z rov. (9.52) do (9.55):

$$\overline{F}_{ext} d_T \cos\varphi = mgh,$$

odkud

$$\overline{F}_{ext} = \frac{mgh}{d_T \cos\varphi}. \tag{9.56}$$

Úhel φ mezi silou $\boldsymbol{F}_{ext}$ směřující vzhůru a posunutím $\boldsymbol{d}_T$ je 0°. Pro zadané hodnoty nakonec dostaneme

$$\overline{F}_{ext} = \frac{(4{,}0\cdot10^{-6}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(0{,}30\,\mathrm{m})}{(7{,}7\cdot10^{-4}\,\mathrm{m})\cos 0°} =$$
$$= 1{,}5\cdot10^{-2}\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato síla je malá pouze zdánlivě. Velikost zrychlení, které uděluje tělu brouka při výskoku, dosahuje totiž hodnoty zhruba $380g$.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Těžiště

Těžiště soustavy částic je bod o souřadnicích

$$x_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i,\quad y_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i,\quad z_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i, \tag{9.5}$$

tj.

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i, \tag{9.8}$$

kde M je celková hmotnost soustavy. Je-li hmota soustavy rozložena spojitě, je poloha těžiště dána vztahy

$$x_T = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\quad y_T = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m,\quad z_T = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m. \tag{9.9}$$

Je-li hustota tělesa (hmotnost jednotkového objemu) konstantní, lze rov. (9.9) přepsat ve tvaru

$$x_T = \frac{1}{V}\int x\,\mathrm{d}V,\quad y_T = \frac{1}{V}\int y\,\mathrm{d}V,\quad z_T = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V, \tag{9.11}$$

kde V je objem tělesa o hmotnosti M.

Věta o hybnosti pro soustavu částic

Pohyb těžiště libovolné soustavy částic se řídí **větou o hybnosti**:

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{ext}. \tag{9.16}$$

Symbolem $\sum \boldsymbol{F}_{ext}$ jsme označili výslednici *vnějších* sil působících na soustavu, M je celková hmotnost soustavy a $\boldsymbol{a}_T$ zrychlení jejího těžiště.

Hybnost a věta o hybnosti

Hybnost jedné částice $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{9.22}$$

Druhý Newtonův zákon pak můžeme pomocí hybnosti přepsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{9.23}$$

Pro soustavu částic mají předchozí vztahy tvar

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T \tag{9.26}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{ext}. \tag{9.28}$$

Relativistická hybnost

Relativistická definice hybnosti má tvar

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{9.24}$$

Tuto definici, jejíž platnost je obecná, je třeba použít pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla c. Pro $v \ll c$ přejde rov. (9.24) v (9.22).

Zákon zachování hybnosti

Je-li soustava izolovaná, tj. nepůsobí-li na ni žádné *vnější* síly, je její hybnost $\boldsymbol{P}$ trvale konstantní:

$$\boldsymbol{P} = \text{konst}, \tag{9.30}$$

tj.

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}. \tag{9.31}$$

Indexy (i) a (f) označují hybnost soustavy $\boldsymbol{P}$ v počátečním a koncovém okamžiku časového intervalu, v němž soustavu sledujeme. Vztahy (9.30) a (9.31) představují ekvivalentní formulace **zákona zachování hybnosti**.

Soustavy s proměnnou hmotností

Při popisu pohybu soustavy s proměnnou hmotností postupujeme obvykle tak, že zkoumanou soustavu považujeme za součást rozšířené soustavy, vymezené tak, aby byla uzavřená (tj. *měla konstantní hmotnost*) a izolovaná. Pro ni pak použijeme zákon zachování hybnosti. V případě rakety bude rozšířená soustava obsahovat jak raketu, tak i zplodiny vzniklé spalováním pohonných hmot, které raketu opouštějí. Je-li takto zvolená rozšířená soustava izolovaná, lze ukázat, že se okamžité zrychlení rakety řídí rovnicí Meščerského

$$Ma = Ru, \tag{9.46}$$

kde M je okamžitá hmotnost rakety (včetně zbytku pohonných hmot), R je rychlost spotřeby paliva (v kg/s) a u představuje rychlost uvolňovaných zplodin vzhledem k raketě. Člen Ru se nazývá **tah** raketového **motoru**. Předpokládejme, že rychlost rakety (složka ve směru pohybu) se změnila z v_i na v_f při odpovídající změně její hmotnosti z hodnoty M_i na hodnotu M_f. V případě raketového motoru s konstantní rychlostí spotřeby paliva R a konstantní rychlostí u platí vzorec Ciolkovského

$$v_\mathrm{f} - v_\mathrm{i} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}}. \tag{9.47}$$

Vnější síly a změny vnitřní energie

Vnější síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ působící na těleso může být vyvolána působením vnitřních sil, které konají práci a způsobují odpovídající změnu vnitřní energie tělesa ΔE_int:

$$\Delta E_\mathrm{int} = -\boldsymbol{F}_\mathrm{ext} \cdot \boldsymbol{d}_T = -F_\mathrm{ext} d_T \cos\varphi. \tag{9.52}$$

Symbolem $\boldsymbol{d}_T$ jsme označili posunutí těžiště tělesa, φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{d}_T$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$. Mění-li se na úkor vnitřní energie pouze kinetická energie tělesa, platí

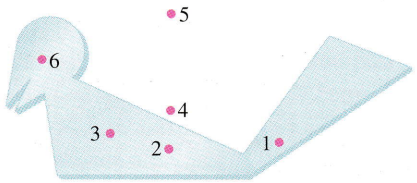
$$\Delta E_{\mathrm{k},T} = F_\mathrm{ext} d_T \cos\varphi. \tag{9.50}$$

Dochází-li i ke změnám potenciální energie tělesa, je změna mechanické energie dána vztahem

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k},T} + \Delta E_{\mathrm{p},T} = (\boldsymbol{F}_\mathrm{ext} + \boldsymbol{N}) \cdot \boldsymbol{d}_T. \tag{9.54}$$

OTÁZKY

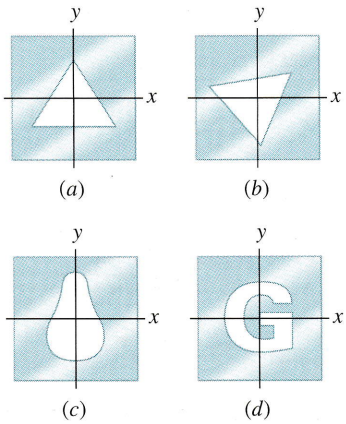
1. Chlapec vyrobil z kusu kovového plechu konstantní tloušťky c ptáka (obr. 9.19). Který z očíslovaných bodů je s největší pravděpodobností těžištěm modelu?



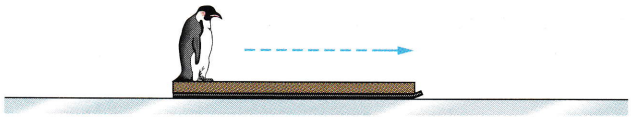
Obr. 9.19 Otázka 1

2. Na obr. 9.20 jsou zakresleny čtyři čtvercové kovové desky s vyříznutými otvory různých tvarů. Počátek soustavy souřadnic v rovině xy splývá ve všech případech se středem čtvercové desky, tj. s jejím těžištěm před vyříznutím otvoru. Odhadněte polohu těžiště každé desky s otvorem (je-li to možné, rozhodněte, v kterém leží kvadrantu, případně na které ose, nebo dokonce ve kterém bodě).

3. Na obr. 9.21 je zachycen tučňák stojící na levém konci homogenních sáněk délky L, které leží na dokonale hladkém ledovém povrchu. Hmotnosti obou těles jsou shodné. (a) Určete polohu těžiště sáněk. (b) Určete polohu těžiště sáněk (vzdálenost a směr) vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky. Tučňák přechází k pravému konci sáněk. Sáňky přitom kloužou po ledě. (c) Jak se pohybuje těžiště soustavy tučňák + sáňky? Doleva, doprava, nebo zůstává v klidu? (d) Určete polohu těžiště sáněk (vzdálenost a směr) vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky poté, co tučňák přešel k pravému konci sáněk. (e) Jakou dráhu tučňák urazil vzhledem k sáňkám? (f) Jakou dráhu urazilo těžiště sáněk vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky? (g) Jakou dráhu urazil vzhledem k němu tučňák? (Přípravná otázka k úloze 23.)



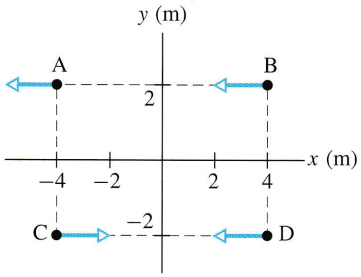
Obr. 9.20 Otázka 2



Obr. 9.21 Otázky 3 a 4

4. Předpokládejme, že se tučňák i sáňky z otázky 3 na obr. 9.21 zpočátku pohybují vpravo rychlostí v_0. (a) Rozhodněte, zda je rychlost v, kterou se pohybují sáňky vzhledem k ledu během přesunu tučňáka k jejich pravému konci, větší, menší, nebo stejná jako v_0. (b) Zodpovězte tutéž otázku, přechází-li tučňák zpět k levému konci sáněk.

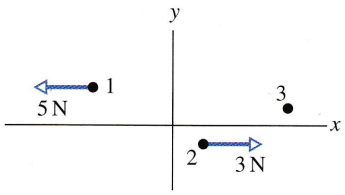
5. Na obr. 9.22 jsou zakresleny čtyři částice stejné hmotnosti, které se pohybují po dokonale hladké vodorovné rovině stálými rychlostmi (pohled shora). Směry rychlostí jsou v obrázku vyznačeny, velikosti jsou shodné. Která dvojice částic tvoří soustavu, jejíž těžiště (a) je v klidu, (b) je v klidu v počátku soustavy souřadnic, (c) projde při svém pohybu počátkem soustavy souřadnic?



Obr. 9.22 Otázka 5

6. (a) Představme si poněkud absurdní situaci: dva melouny jsme současně upustili z mostu. Jaké je zrychlení těžiště této dvoučásticové soustavy? (b) Jaké bude zrychlení těžiště soustavy dvou padajících melounů, upustíme-li jeden z nich o něco později?

7. Obr. 9.23 představuje pohled shora na soustavu tří částic, na něž působí vnější síly. Směry a velikosti sil působících na dvě z těchto částic jsou v obrázku vyznačeny. Jaká je velikost a směr síly působící na třetí částici, jestliže (a) je těžiště soustavy v klidu, (b) pohybuje se konstantní rychlostí vpravo, (c) urychluje se směrem vpravo?

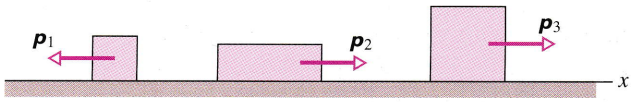


Obr. 9.23 Otázka 7

8. Těleso, které se pohybuje podél osy x po dokonale hladké vodorovné podložce, se náhle rozpadne na tři části. Každá z nich se dále pohybuje podél osy x ve směru vyznačeném v obr. 9.24.

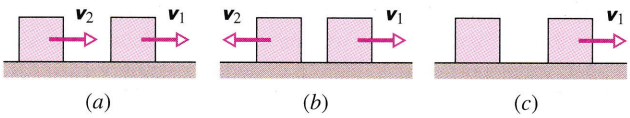
Následující tabulka obsahuje čtyři soubory hodnot velikostí hybností $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ a $\boldsymbol{p}_3$ jednotlivých částí tělesa v jednotkách kg·m·s^{-1}. Seřaďte tyto soubory sestupně podle velikosti počáteční rychlosti tělesa.

	p_1	p_2	p_3
(a)	10	2	6
(b)	10	6	2
(c)	2	10	6
(d)	6	2	10



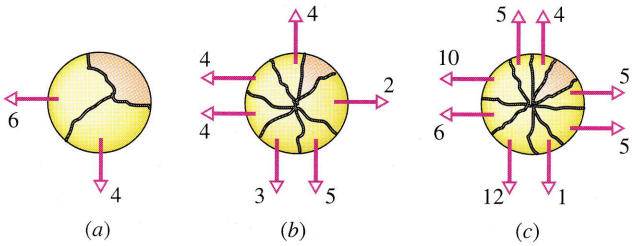
Obr. 9.24 Otázka 8

9. Podobně jako v př. 9.7 uvažujme těleso, které se pohybuje konstantní rychlostí ve směru kladné osy x a náhle se rozpadne na dvě části. Jedna z nich, o hmotnosti m_1, pokračuje v pohybu ve směru kladné osy x. Její rychlost je $\boldsymbol{v}_1$. Druhá část tělesa má hmotnost m_2 a pohybuje se rychlostí $\boldsymbol{v}_2$ (a) podél kladné osy x (obr. 9.25a), (b) podél záporné osy x (obr. 9.25b), (c) je v klidu (obr. 9.25c). Seřaďte tyto tři situace sestupně podle velikosti rychlosti $\boldsymbol{v}_1$.



Obr. 9.25 Otázka 9

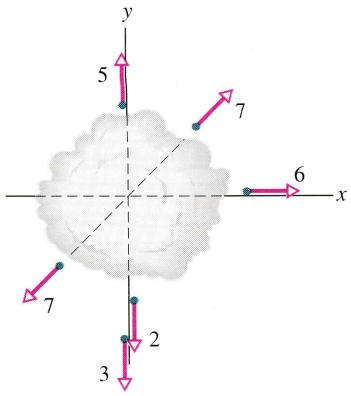
10. Obr. 9.26 ukazuje pohled shora na těleso, které se při výbuchu rozbušky rozpadlo (a) na tři části (obrázek (a)), (b) sedm částí, (c) devět částí. Díly tělesa se po výbuchu pohybovaly po dokonale hladké vodorovné podlaze. Pro každou situaci jsou v obr. 9.26 vyznačeny vektory hybnosti všech částí tělesa s výjimkou jedné, jejíž hybnost označíme $\boldsymbol{P}'$. Čísla uvedená u jednotlivých vektorů udávají jejich velikosti v jednotkách kg·m·s^{-1}. Seřaďte situace na obrázcích sestupně podle velikosti (a) složky P'_x, (b) složky P'_y a (c) vektoru $\boldsymbol{P}'$.



Obr. 9.26 Otázka 10

11. Obr. 9.27 znázorňuje pohled shora na šest částic, které vznikly „dvojrozměrným“ výbuchem tělesa. Před výbuchem spočívalo těleso v klidu na dokonale hladké vodorovné podložce. Směry hybností částic jsou na obrázku vyznačeny vektory, čísla

znamenají jejich velikosti v jednotkách kg·m·s^{-1}. (a) Vzniklo při explozi více částic, než je znázorněno? (b) Jestliže ano, najděte jejich výslednou hybnost a (c) směr jejich pohybu.



Obr. 9.27 Otázka 11

12. V tabulce jsou uvedeny hmotnosti a vzdálenosti pro tři různé dvojice částic:

	m_1	m_2	POČÁTEČNÍ VZDÁLENOST d
dvojice 1	$2m$	$8m$	1,0 m
dvojice 2	$3m$	$6m$	2,0 m
dvojice 3	$4m$	$9m$	0,5 m

Částice ve dvojicích na sebe působí přitažlivými silami. Zpočátku jsou obě částice každé dvojice udržovány vnějšími silami v klidu ve vzdálenosti d a v určité chvíli jsou uvolněny. V okamžiku, kdy jejich vzdálenost klesne na hodnotu $d/2$, má částice o hmotnosti m_1 rychlost v_1 a částice o hmotnosti m_2 rychlost v_2. Bez písemných výpočtů seřaďte dvojice částic sestupně podle hodnoty poměru v_1/v_2. (*Tip*: Př. 9.10.)

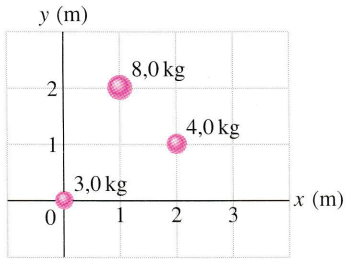
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 9.2 Těžiště

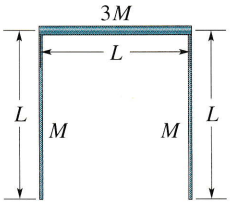
1C. (a) Jaká je vzdálenost těžiště soustavy Země + Měsíc od středu Země? (V dod. C jsou uvedeny hmotnosti Země a Měsíce i jejich vzdálenost). (b) Vyjádřete výsledek získaný v části (a) v jednotkách poloměru Země.

2C. Vzdálenost středů atomů uhlíku (C) a kyslíku (O) v molekule oxidu uhelnatého (CO) je $1{,}131 \cdot 10^{-10}$ m. Najděte polohu těžiště molekuly CO vzhledem ke středu atomu uhlíku. (Hmotnosti atomů C a O jsou uvedeny v dod. D.)

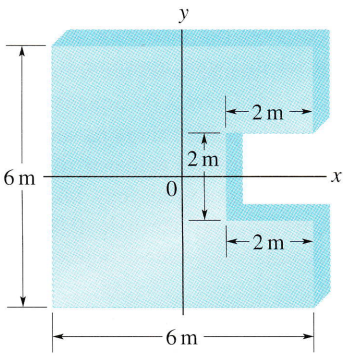
3C. (a) Určete souřadnice těžiště soustavy tří částic na obr. 9.28. (b) Co se bude dít s těžištěm, bude-li se hmotnost nejvýše položené částice postupně zvětšovat?



Obr. 9.28 Cvičení 3



Obr. 9.29 Cvičení 4



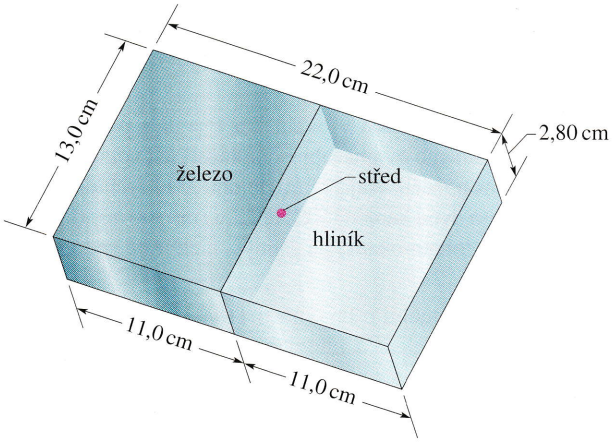
Obr. 9.30 Cvičení 5

4C. Tři tenké tyče o stejné délce L vytvořily těleso ve tvaru obráceného U (obr. 9.29). Dvě boční tyče mají hmotnost M, hmotnost třetí tyče je $3M$. Určete polohu těžiště tělesa.

5C. V homogenní čtvercové desce o straně 6 m byl vyříznut čtvercový otvor o straně 2 m podle obr. 9.30. Střed otvoru má souřadnice $x = 2$ m a $y = 0$. Určete polohu těžiště zbytku desky. Těžiště původní desky leželo v počátku soustavy souřadnic.

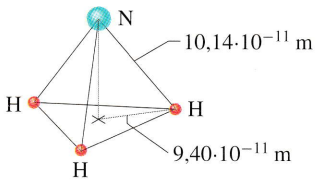
6Ú. Dokažte, že poměr vzdáleností částic dvoučásticové soustavy od jejího těžiště je roven převrácenému poměru hmotností částic.

7Ú. Na obr. 9.31 jsou uvedeny rozměry desky složené ze dvou částí. Polovina desky je vyrobena z hliníku s hustotou 2,70 g/cm^3 a polovina je ze železa o hustotě 7,85 g/cm^3. Najděte polohu těžiště desky.



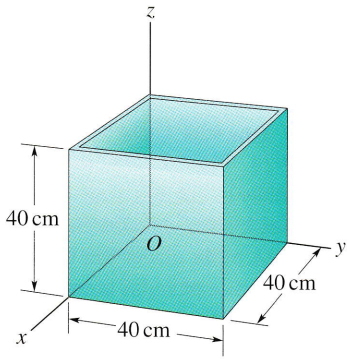
Obr. 9.31 Úloha 7

8Ú. Tři atomy vodíku (H) v molekule čpavku NH_3 (obr. 9.32) tvoří rovnostranný trojúhelník. Jeho těžiště leží ve vzdálenosti $9{,}40{\cdot}10^{-11}$ m od každého atomu vodíku. Atom dusíku (N) je vrcholem čtyřstěnu o podstavě tvořené atomy vodíku. Vzdálenost N-H je $10{,}14{\cdot}10^{-11}$ m, hmotnosti atomů N a H jsou v poměru 13,9 : 1,0. Určete polohu těžiště molekuly vůči atomu dusíku.



Obr. 9.32 Úloha 8

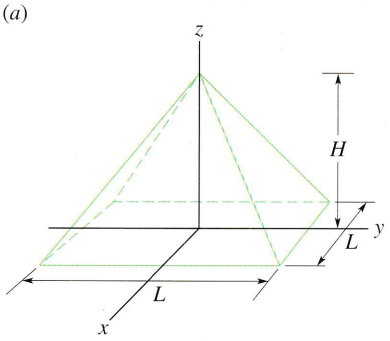
9Ú. Krychlová krabice bez horní stěny má délku hrany 40 cm. Je vyrobena z homogenního kovového plechu zanedbatelné tloušťky (obr. 9.33). Určete souřadnice jejího těžiště.



Obr. 9.33 Úloha 9

10Ú. Velká (Cheopsova) pyramida v egyptské Gíze (obr. 9.34a) měla kdysi výšku $H = 147$ m. Později z jejího vrcholu vypadl vrcholový kámen. Základnou pyramidy je čtverec o straně $L = 230$ m (obr. 9.34b), její objem je $L^2H/3$. Předpokládejme, že pyramida je homogenní těleso o hustotě $\varrho = 1{,}8{\cdot}10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Určete (a) původní výšku těžiště pyramidy nad základnou, (b) práci potřebnou k vyzdvižení vypadlého kvádru z úrovně základny na původní místo.

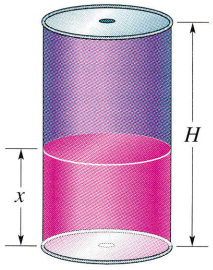
(*a*)



(*b*)

Obr. 9.34 Úloha 10

11Ú*. Válcová plechovka o hmotnosti M a výšce H je vyrobena z homogenního materiálu a naplněna limonádou o hmotnosti m (obr. 9.35). Do dna a horní podstavy plechovky vyvrtáme malé otvory, aby nápoj mohl vytékat. Okamžitou výšku těžiště plechovky nad jejím dnem označíme h. Určete hodnotu h (a) pro plnou plechovku a (b) v okamžiku, kdy již všechen nápoj vytekl. (c) Jak se mění hodnota h během vytékání nápoje? (d) Okamžitou výšku zbývajícího sloupce kapaliny v plechovce označme x. Vyjádřete hodnotu x pomocí M, H a m v okamžiku, kdy je těžiště plechovky se zbytkem nápoje v nejnižší možné poloze.



Obr. 9.35 Úloha 11

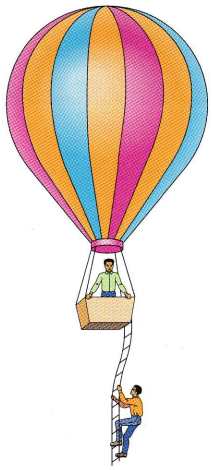
ODST. 9.3 Věta o hybnosti

12C. Dva bruslaři o hmotnostech 65 kg a 40 kg drží tyč o délce 10 m těsně u jejích konců. Tyč má zanedbatelnou hmotnost.

Bruslaři k sobě ručkují až do okamžiku setkání. Jak daleko se podél tyče posune bruslař o hmotnosti 40 kg?

13C. Dva automobily o hmotnostech 2 400 kg a 1 600 kg jedou stejným směrem po přímé silnici rychlostmi 80 km/h a 60 km/h. Jakou rychlostí se pohybuje těžiště jejich soustavy?

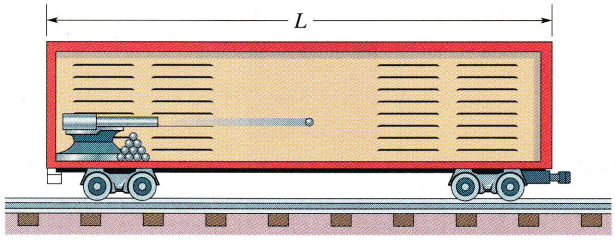
14C. Člověk o hmotnosti m stojí na provazovém žebříku spuštěném z balonu o hmotnosti M (obr. 9.36). Balon je vzhledem k zemi v klidu. (a) Člověk začne stoupat rychlostí v vzhledem k žebříku. Určete rychlost balonu vzhledem k zemi (velikost a směr). (b) Popište pohybový stav soustavy od okamžiku, kdy člověk přestane šplhat.



Obr. 9.36 Cvičení 14

15C. Dvě částice P a Q o hmotnostech 0,10 kg a 0,30 kg jsou zpočátku v klidu ve vzdálenosti 1,0 m a přitahují se konstantní silou o velikosti $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ N. Vnější síly na soustavu nepůsobí. (a) Popište pohyb těžiště soustavy. (b) V jaké vzdálenosti od původní polohy částice P se obě částice setkají?

16C. Dělo a munice jsou naloženy v uzavřeném železničním voze délky L (obr. 9.37). Dělo střílí směrem vpravo, vůz se při zpětném rázu pohybuje vlevo. Vypálené dělové koule se odrážejí od vzdálenější stěny vozu a padají na podlahu. (a) Do jaké největší vzdálenosti od své původní polohy se může vůz dostat, než dělo vystřílí všechny koule? (b) Za jakých podmínek vůz tuto vzdálenost skutečně urazí? (c) Jaká je rychlost vozu v okamžiku, kdy dělo vystřílí všechny koule?



Obr. 9.37 Cvičení 16

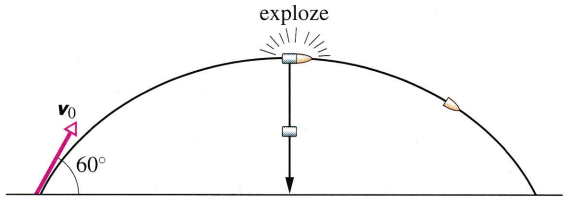
17Ú. Soustava je složena ze dvou částic o hmotnostech 3,0 kg a 4,0 kg. V jistém okamžiku má první částice rychlost 6,0 m·s^{-1} ve směru záporné osy y a druhá se pohybuje rychlostí 7,0 m·s^{-1} ve směru kladné osy x. Jaká je v tomto okamžiku rychlost těžiště soustavy?

18Ú. Kámen byl uvolněn v okamžiku $t = 0$ a padá volným pádem. Jiný kámen o dvojnásobné hmotnosti je uvolněn z téhož místa o 100 ms později. Najděte (a) polohu a (b) rychlost těžiště soustavy těchto dvou kamenů v okamžiku $t = 300$ ms. (Předpokládejte, že do tohoto okamžiku žádný z nich ještě nedopadl na zem.)

19Ú. Osobní automobil o hmotnosti 1 000 kg stojí před semaforem. Rozsvítí se zelená a automobil se rozjíždí s konstantním zrychlením 4,0 m·s^{-2}. V tom okamžiku jej předjede nákladní dodávka o hmotnosti 2 000 kg, která jede stálou rychlostí 8,0 m·s^{-1}. (a) Jaká je vzdálenost těžiště soustavy automobil + dodávka od semaforu v okamžiku $t = 3{,}0$ s? (b) Jaká je v tomto okamžiku rychlost těžiště soustavy?

20Ú. Richard a Kamila sedí v kánoi na jezeře. Richard má hmotnost 80 kg a Kamila o něco menší. Hmotnost kánoe je 30 kg. Chlapec a dívka sedí ve vzdálenosti 3,0 m od sebe, symetricky vzhledem k těžišti prázdné kánoe. Voda je klidná a kánoe je vůči ní rovněž v klidu. Richard s Kamilou se rozhodli, že si vymění místa. Richard si všiml, že se kánoe při výměně posunula o 40 cm vzhledem ke kůlu ponořenému ve vodě. Na základě tohoto údaje se mu podařilo vypočítat hmotnost Kamily. Kolik mu vyšlo?

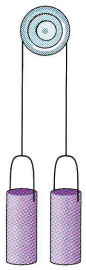
21Ú. Náboj je vystřelen s počáteční rychlostí 20 m·s^{-1} pod elevačním úhlem 60°. Ve vrcholu své trajektorie se roztrhne na dvě části o stejné hmotnosti (obr. 9.38). Jedna část, jejíž rychlost je bezprostředně po výbuchu nulová, padá svisle dolů. Jak daleko od děla dopadne druhá část, stojí-li dělo na vodorovném terénu a zanedbáme-li odpor vzduchu?



Obr. 9.38 Úloha 21

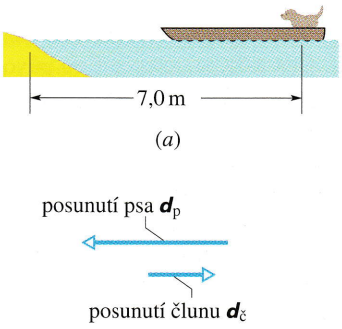
22Ú. Dvě stejné nádoby s cukrem jsou spojeny nehmotným vláknem vedeným přes kladku zanedbatelné hmotnosti o poloměru 50 mm. Kladka se může otáčet bez tření (obr. 9.39). Obě nádoby jsou ve stejné výši a původní hmotnost každé z nich je 500 g. (a) Určete polohu těžiště soustavy nádob. (b) Přidržíme nádoby, aby se nepohybovaly, a přemístíme 20 g cukru z jedné z nich do druhé. Určete polohu těžiště soustavy nyní. (c) Nádoby uvolníme. Jakým směrem se bude těžiště pohybovat? (d) Určete jeho zrychlení.

23Ú. Pes o hmotnosti 5,0 kg stojí na člunu ve vzdálenosti 7,0 m od břehu (obr. 9.40a). Rozběhne se ke břehu a zastaví se poté, co vzhledem k palubě člunu urazí dráhu 3,0 m. Člun má hmotnost 20,0 kg. Odporovou sílu, jíž působí voda proti pohybu člunu, můžeme zanedbat. Jak daleko je pes od břehu v okamžiku, kdy



Obr. 9.39 Úloha 22

se zastaví? (*Tip*: Na obr. 9.40b vidíme, že se pes pohybuje vlevo, zatímco člun ujíždí vpravo. Kterým směrem se bude pohybovat těžiště soustavy pes + člun?)



Obr. 9.40 Úloha 23

ODST. 9.5 Hybnost soustavy částic

24C. Jakou rychlostí by musel běžet člověk o hmotnosti 80 kg, aby měl stejnou hybnost jako automobil o hmotnosti 1 600 kg jedoucí rychlostí 1,2 km/h?

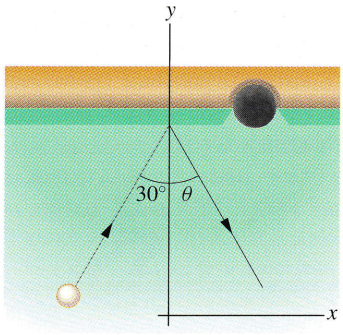
25C. Jakou rychlostí se musí pohybovat automobil o hmotnosti 816 kg, aby měl (a) stejnou hybnost, (b) stejnou kinetickou energii jako automobil o hmotnosti 2 650 kg, který jede rychlostí 16 km/h?

26C. Vypočtěte hybnost elektronu o rychlosti $0{,}99c$ ($c \doteq \doteq 3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je rychlost světla).

27C. Měřením byla určena velikost hybnosti částice pohybující se rychlostí $1{,}5 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Naměřená hodnota činila $2{,}9 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. Vypočtěte hmotnost částice a zjistěte tak, zda šlo o elektron, nebo proton.

28C. Těleso o hmotnosti 0,70 kg se pohybuje vodorovně rychlostí $5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Po kolmém nárazu na svislou stěnu se odrazí rychlostí $2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete velikost změny jeho hybnosti.

29Ú. Kulečníková koule o hmotnosti 0,165 kg narazila do okraje kulečníkového stolu rychlostí o velikosti $2{,}00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a odrazila se podle obr. 9.41. Obrázek zachycuje i volbu soustavy souřadnic. Při srážce se změnilo znaménko y-ové složky vektoru rychlosti koule, x-ová složka se nezměnila. (a) Určete úhel θ vyznačený v obr. 9.41. (b) Vyjádřete změnu hybnosti koule při srážce pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic. (Kutálení koule neovlivní odpověď (a) ani (b).)



Obr. 9.41 Úloha 29

30Ú. Nákladní automobil o hmotnosti 2 100 kg jel nejprve na sever rychlostí 41 km/h. Pak zabočil k východu a zvýšil svou rychlost na 51 km/h. (a) Jak se změnila kinetická energie automobilu? (b) Určete i změnu jeho hybnosti (velikost a směr).

31Ú. Radiolokátor zaregistroval objekt v poloze určené vektorem $\boldsymbol{r} = (3\,500 - 160t)\boldsymbol{i} + 2\,700\boldsymbol{j} + 300\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{r}$ je v metrech a t v sekundách. Soustava souřadnic radiolokátoru je zvolena tak, že osa x směřuje na východ, osa y na sever a osa z svisle vzhůru. Objektem byla meteorologická raketa o hmotnosti 250 kg. Určete její (a) hybnost, (b) směr pohybu a (c) výslednou sílu, která na ni působila.

32Ú. Míč o hmotnosti 50 g je vyhozen počáteční rychlostí $16\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 30°. (a) Určete jeho (a) kinetickou energii a (b) hybnost na počátku pohybu a těsně před dopadem na zem. (c) Dokažte, že velikost změny hybnosti míče je rovna součinu velikosti tíhové síly působící na míč a doby letu. Předpokládáme, že terén je vodorovný.

33Ú. Částice o hmotnosti m má hybnost $\boldsymbol{p}$ o velikosti mc. Vyjádřete její rychlost v jednotkách rychlosti světla c.

ODST. 9.6 Zákon zachování hybnosti

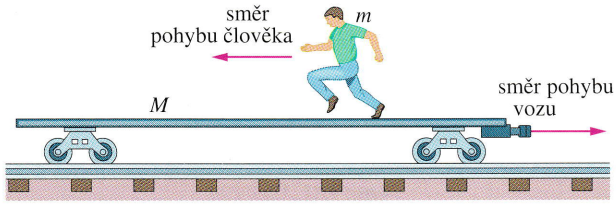
34C. Muž o hmotnosti 100 kg stojící na dokonale hladké vodorovné podlaze kopl do kamene o hmotnosti 0,08 kg, který ležel u jeho nohou. Kámen se po výkopu pohyboval vodorovně rychlostí $4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete rychlost pohybu člověka.

35C. Dvě tělesa o hmotnostech 1,0 kg a 3,0 kg jsou spojena pružinou a spočívají na dokonale hladké vodorovné podložce. Tělesa jsou uvedena do pohybu tak, že těžiště soustavy je v klidu a těleso o hmotnosti 1,0 kg se pohybuje směrem k němu počáteční rychlostí $1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaká je počáteční rychlost druhého tělesa?

36C. Vesmírná loď se vzdaluje od Země rychlostí 4 300 km/h. Z lodi je vymrštěn vyhořelý raketový motor směrem zpět. Jeho rychlost vzhledem k lodi má velikost 82 km/h. Hmotnost raketového motoru je čtyřikrát větší než hmotnost zbytku lodi. Jaká je rychlost lodi vzhledem k Zemi po oddělení motoru?

37C. Muž o hmotnosti 75 kg jede na vozíku o hmotnosti 39 kg. Rychlost vozíku je $2{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Muž náhle vyskočí vzhůru tak, že vodorovná složka jeho rychlosti vzhledem k *pevné podložce* je nulová. Určete změnu rychlosti vozíku.

38C. Plošinový železniční vůz o hmotnosti M se může pohybovat bez tření po přímé vodorovné trati. Na voze stojí člověk o hmotnosti m. Soustava se pohybuje vpravo rychlostí v_0 podle obr. 9.42. Jak se změní rychlost vozu, poběží-li člověk vlevo rychlostí v_{rel} vzhledem k vozu?



Obr. 9.42 Cvičení 38

39Ú. Poslední stupeň rakety se pohybuje rychlostí 7 600 $m \cdot s^{-1}$. Skládá se ze dvou spojených částí: modulu s užitečným zatížením o hmotnosti 150,0 kg a raketového motoru, jehož hmotnost po vyčerpání pohonných hmot je 290,0 kg. V okamžiku, kdy je palivo spotřebováno, uvolní se spojovací mechanismus a části rakety se začnou od sebe vzdalovat díky působení stlačených pružin, které jsou mezi nimi umístěny. Vzájemná rychlost má velikost 910,0 $m \cdot s^{-1}$. (a) Určete rychlost každé z obou částí rakety vzhledem k Zemi. Předpokládáme, že všechny vektory rychlosti leží v téže přímce. (b) Určete celkovou kinetickou energii rakety před a po oddělení částí a vysvětlete případný rozdíl.

40Ú. Radioaktivní jádro je zpočátku v klidu. Rozpadá se a emituje elektron a neutrino v navzájem kolmých směrech. (*Neutrino* je jedna z elementárních částic.) Hybnost elektronu je $1{,}2 \cdot 10^{-22}$ $kg \cdot m \cdot s^{-1}$, hybnost neutrina $6{,}4 \cdot 10^{-23}$ $kg \cdot m \cdot s^{-1}$. (a) Určete směr a velikost hybnosti zbytku jádra po rozpadu. (b) Hmotnost zbytku jádra je $5{,}8 \cdot 10^{-26}$ kg. Jaká je jeho kinetická energie?

41C. Elektron (hmotnost $m_1 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg) a proton (hmotnost $m_2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg) se přitahují elektrickou silou. Předpokládejme, že byly uvolněny z klidu a že jejich počáteční vzdálenost byla $d = 3{,}0 \cdot 10^{-6}$ m. Určete poměr (a) velikostí hybností elektronu a protonu, (b) jejich rychlostí a (c) kinetických energií v okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ m. (d) Jak se budou měnit odpovědi na otázky (a), (b) a (c) během dalšího přibližování částic?

42Ú. Těleso o hmotnosti 4,0 kg klouže po dokonale hladké vodorovné podložce. Náhle se roztrhne na dvě části o stejných hmotnostech. Rychlosti jednotlivých částí po výbuchu jsou 3,0 $m \cdot s^{-1}$ směrem na sever (azimut 0°) a 5,0 $m \cdot s^{-1}$ s azimutem 30° (odchylka 30° východním směrem). Určete rychlost tělesa před výbuchem.

43Ú. Těleso, které bylo zpočátku v klidu, vybuchlo a rozpadlo se na tři části. Dvě z nich, o stejné hmotnosti, se rozletěly stejně velkými rychlostmi 30 $m \cdot s^{-1}$ do kolmých směrů. Třetí část měla třikrát větší hmotnost než každá z předchozích dvou. Určete rychlost (velikost a směr) třetí části po výbuchu.

44Ú. Plošinový železniční vůz o hmotnosti 2 140 kg, který se může pohybovat po kolejích tak, že energiové ztráty vzniklé třením jsou zanedbatelné, stojí v klidu u nástupiště. Zápasník o hmotnosti 242 kg běží rychlostí 5,3 $m \cdot s^{-1}$ po nástupišti souběžně s tratí a vyskočí na vůz. Určete rychlost vozu v těchto případech: (a) Zápasník zůstane na voze stát. (b) Běží vzhledem k vozu rychlostí 5,3 $m \cdot s^{-1}$ původním směrem. (c) Otočí se a běží vzhledem k vozu rychlostí 5,3 $m \cdot s^{-1}$ opačným směrem.

45Ú. Raketové sáně o hmotnosti 2 900 kg jedou po zamrzlém jezeře rychlostí 250 $m \cdot s^{-1}$. Když projíždí kolem koryta, které je v ledu vysekáno pro možnost přístupu k vodě, spustí jezdec do vody nádobu a nabere do ní 920 kg vody. Pomocí zákona zachování hybnosti určete výslednou rychlost saní. Všechny brzdicí síly zanedbejte.

46Ú. Izolované těleso o hmotnosti 8 kg se pohybuje rychlostí 2 $m \cdot s^{-1}$. Náhle exploduje a rozpadne se na dvě části o hmotnostech 4 kg. Kinetická energie každé z nich bezprostředně po výbuchu je 16 J. Obě části se pohybují po původní přímkové trajektorii tělesa. Určete rychlost (velikost a směr) každé z nich.

47Ú. Sáně s jezdcem o celkové hmotnosti M spočívají v klidu na dokonale hladké hladině zamrzlého jezera. Jezdec naložil na sáně ještě dva kameny o hmotnostech m_1 a m_2, pro něž platí $M = 6{,}00m_1 = 12{,}0m_2$. Člověk hodlá uvést sáně do pohybu tak, že kameny vyhodí dozadu (současně nebo jeden po druhém) vodorovnou rychlostí v_{rel} vzhledem k saním. Určete výslednou rychlost saní, vymrští-li člověk kameny (a) současně, (b) nejprve m_1 a pak m_2 a (c) v opačném pořadí?

48Ú. Dělo o hmotnosti 1 400 kg vystřelilo náboj o hmotnosti 70,0 kg rychlostí o velikosti 556 $m \cdot s^{-1}$ vzhledem k hlavni děla. Hlaveň svírá s vodorovnou rovinou úhel 39,0°. Dělo je umístěno na vozíku, který se pohybuje bez tření. (a) Jaká je rychlost náboje vzhledem k zemi? (b) Pod jakým úhlem vzhledem k zemi je náboj vystřelen? (*Tip*: Vodorovná složka hybnosti soustavy se během výstřelu nemění.)

ODST. 9.7 Soustavy s proměnnou hmotností: raketa

49C. Raketa je v klidu v meziplanetárním prostoru, kde na ni nepůsobí gravitační síla. Její hmotnost je $2{,}55 \cdot 10^5$ kg, z toho $1{,}81 \cdot 10^5$ kg paliva. Raketový motor spotřebovává palivo rychlostí 480 kg/s, rychlost zplodin vzhledem k raketě je 3,27 km/s. Zážeh motoru trvá 250 s. (a) Určete tah motoru. (b) Jaká je hmotnost rakety po vypnutí motoru? (c) Jaká je její výsledná rychlost?

50C. Posádka rakety hodlá opustit sluneční soustavu. V okamžiku, kdy se raketa pohybuje rychlostí $6{,}0 \cdot 10^3$ $m \cdot s^{-1}$, zažehne se motor. Rychlost zplodin vzniklých spalováním pohonných hmot je $3{,}0 \cdot 10^3$ $m \cdot s^{-1}$ vzhledem k raketě. V okamžiku zážehu má raketa hmotnost $4{,}0 \cdot 10^4$ kg a její zrychlení je 2,0 $m \cdot s^{-2}$. (a) Určete tah motoru a (b) rychlost spotřeby paliva.

51C. Vesmírná sonda o hmotnosti 6 090 kg letí přídí směrem k Jupiteru a má vzhledem ke Slunci rychlost 105 $m \cdot s^{-1}$. Během krátkodobého zážehu motoru vznikne 80,0 kg zplodin, které opustí sondu relativní rychlostí 253 $m \cdot s^{-1}$. Jaká je rychlost sondy po skončení zážehu?

52C. Raketa je v klidu ve vesmírném prostoru. Zjistěte, jaký musí být poměr počáteční a výsledné hmotnosti rakety, má-li

být po vyhoření paliva rychlost rakety (a) shodná s relativní rychlostí zplodin, (b) dvakrát větší než tato rychlost.

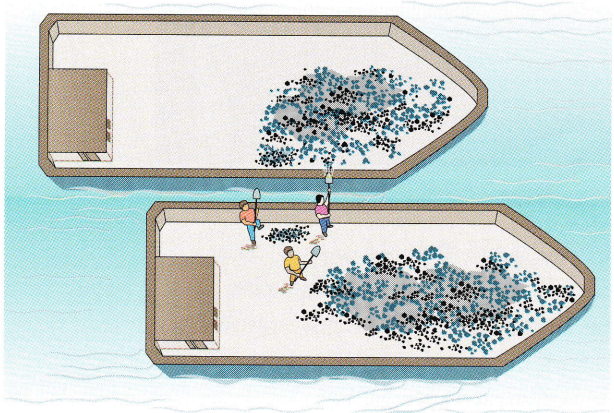
53C. Posádka lodi směřující k Měsíci je nucena provést korekci letu. Velikost rychlosti lodi je třeba zvýšit z počáteční hodnoty 400 $m \cdot s^{-1}$ o 2,2 $m \cdot s^{-1}$ při zachování směru letu. Relativní rychlost, s níž zplodiny vyhořelého paliva tryskají z raketového motoru, je 1 000 $m \cdot s^{-1}$. Jakou část původní hmotnosti lodi tvoří spálené palivo v okamžiku, kdy je korekce letu ukončena?

54C. Nákladní železniční vůz jede pod dopravníkem zrní stálou rychlostí 3,20 $m \cdot s^{-1}$. Za jednu minutu se z dopravníku vysype na vůz 540 kg zrní. Jakou silou musíme na vůz působit, aby se jeho rychlost neměnila? (Tření zanedbáváme.)

55Ú. Jednostupňová raketa o hmotnosti M je v klidu vzhledem k jisté inerciální vztažné soustavě $\mathscr{S}$. V okamžiku $t = 0$ dojde k zážehu motoru. Dokažte, že spálené plyny opouštějící trysku motoru budou vzhledem k soustavě $\mathscr{S}$ v klidu v okamžiku, kdy se hmotnost rakety sníží na hodnotu $0{,}368M$.

56Ú. Raketa o hmotnosti 6 100 kg startuje svisle z povrchu Země. Relativní rychlost zplodin vzhledem k raketě je 1 200 $m \cdot s^{-1}$. Určete hmotnost zplodin opouštějících raketu za jednu sekundu ve dvou různých případech: (a) Tah motoru je roven váze rakety. (b) Velikost počátečního zrychlení rakety má hodnotu 21 $m \cdot s^{-2}$.

57Ú. Dva dlouhé nákladní čluny plují po klidné hladině stejným směrem, stálými rychlostmi 10 km/h a 20 km/h. (Tažná síla každého motoru právě kompenzuje odporovou sílu vody.) Během míjení člunů se z pomalejšího na rychlejší překládá uhlí. Za jednu minutu přeloží dělníci 1 000 kg uhlí (obr. 9.43). Poněvadž je třeba, aby se rychlosti člunů během překládky neměnily, musí posádky změnit výkon motorů. Určete dodatečnou tažnou sílu každého z nich za předpokladu, že dělníci uhlí volně přesypávají přesně kolmo k bočnímu okraji pomalejšího člunu (rychlost, kterou kusům uhlí udělují vzhledem k pomalejšímu člunu, je zanedbatelně malá). Odporovou sílu vody považujeme za nezávislou na zátěži člunů.



Obr. 9.43 Úloha 57

58Ú. Tryskové letadlo letí rychlostí 180 $m \cdot s^{-1}$. Každou sekundu nasaje jeho motor 68 m^3 vzduchu (hmotnost 70 kg). Vzduch se spotřebuje ke spálení 2,9 kg paliva za sekundu. Produkty hoření proudí z tryskového motoru rychlostí 490 $m \cdot s^{-1}$ vzhledem k letadlu. Určete (a) tah tryskového motoru a (b) jeho výkon ve wattech.

ODST. 9.8 Vnější síly a změny vnitřní energie

59C. Horolezec o hmotnosti 90 kg vystupuje z tábora ve výšce 4 425 m n. m. na vrchol Mount Everestu (8 850 m n. m.). (a) Určete výslednou změnu potenciální energie soustavy horolezec + Země při tomto výstupu. (b) Kolik čokoládových tyčinek je potřeba k dodání této energie, je-li kalorická hodnota každé z nich 300 kcal? Odpověď na tuto otázku ukáže, že práce potřebná k překonání gravitační síly tvoří zcela jistě jen mizivou část energie, kterou horolezec vydá při takovém náročném výstupu.

60C. Chlapec o hmotnosti 51 kg vyšplhal za 10 s po laně délky 6,0 m. (a) Určete odpovídající změnu potenciální energie soustavy chlapec + Země a (b) průměrný výkon chlapce.

61C. Žena o hmotnosti 55 kg vyběhla po schodišti vysokém 4,5 m za 3,5 s. Určete odpovídající průměrný výkon.

62C. Sprinter o váze 670 N uběhl prvních 7,0 m závodu za 1,6 s. Startoval z klidu a pohyboval se s konstantním zrychlením. Určete jeho (a) rychlost a (b) kinetickou energii na konci tohoto časového intervalu a (c) odpovídající průměrný výkon.

63C. Luxusní parník *Queen Elizabeth 2* má dieselelektrický pohon o maximálním výkonu 92 MW. Maximální cestovní rychlost je 32,5 uzlů (1 uzel = 1,853 km/h). Jak velká je tažná síla motoru, pluje-li loď maximální rychlostí?

64C. Automobil o hmotnosti 1 600 kg jede rovnoměrně rychlostí 25,1 $m \cdot s^{-1}$. Tažná síla motoru kompenzuje třecí sílu o velikosti 703 N. Určete výkon motoru v jednotkách HP.

65C. Průměrná rychlost plavce je 0,22 $m \cdot s^{-1}$ při průměrné velikosti odporové síly prostředí 110 N. Určete jeho výkon.

66C. Energie, kterou musí vydat běžec bez ohledu na dosaženou rychlost, je asi 335 J/m. Určete průměrný výkon (a) sprintera při závodu na 100 m (čas $t = 10$ s), (b) maratonce (trať maratonu = = 42,2 km, doba = 2 h 10 min).

67C. Automobil i s cestujícími váží 16 400 N a jede rychlostí 113 km/h. Řidič začne brzdit. Určete brzdnou dráhu automobilu, je-li celková brzdná síla 8 230 N.

68C. Volejbalista trénuje výskoky. Ze vzpřímeného postoje poklesne v kolenou a sníží tak polohu těžiště o 18 cm. Poté vyskočí svisle vzhůru. Průměrná síla, kterou působí podlaha na chodidla sportovce, je asi třikrát větší než jeho váha. Určete rychlost jeho těžiště v okamžiku, kdy prochází původní polohou.

69C. Žena o hmotnosti 55 kg vyskočí z podřepu svisle vzhůru. V podřepu je její těžiště 40 cm nad úrovní podlahy. V okamžiku, kdy její chodidla ztrácejí s podlahou kontakt, je výška těžiště nad podlahou 90 cm, zatímco jeho největší výška nad podlahou činí 120 cm. (a) Jak velká průměrná síla působí na chodidla sportovkyně při odrazu? (b) Jak velká je největší rychlost jejího těžiště?

70Ú. Hokejista o hmotnosti 110 kg bruslí rychlostí 3,0 $m \cdot s^{-1}$ směrem ke hrazení a zabrzdí se o ně rukama. Během brzdění se jeho těžiště posune o 30 cm ke hrazení. (a) Určete výslednou

změnu kinetické energie jeho těžiště. (b) Jak velká je průměrná síla, kterou hokejista působí na hrazení?

71Ú. Automobil o hmotnosti 1 500 kg se rozjíždí z klidu po vodorovné silnici. Za 30 s dosáhne rychlosti je 72 km/h. (a) Jaká je kinetická energie automobilu na konci 30. sekundy? (b) Jaký je jeho průměrný výkon při rozjezdu? (c) Jaký je okamžitý výkon automobilu na konci 30. sekundy za předpokladu, že zrychlení je konstantní?

72Ú. Automobil o hmotnosti 1 710 kg jede stálou rychlostí o velikosti 15,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Tažná síla motoru, jehož výkon je 16,0 kW, kompenzuje síly tření a odporu prostředí. (a) Určete výslednici třecích a odporových sil. (b) Jaký by byl výkon motoru, kdyby automobil jel po silnici se stoupáním 8 % (tj. 8,00 m převýšení na každých 100 m měřených ve vodorovném směru) rychlostí 15,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? (c) Automobil sjíždí z kopce bez motoru stálou rychlostí 15,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete sklon vozovky v procentech.

73Ú. Lokomotiva s maximálním výkonem 1,5 MW může urychlit vlak z rychlosti 10 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na rychlost 25 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ za dobu 6,0 min. (a) Vypočtěte hmotnost vlaku. V uvedeném časovém intervalu zapište (b) rychlost vlaku a (c) urychlující sílu jako funkce času (měřeného v sekundách). (d) Určete vzdálenost, kterou vlak za tuto dobu urazil.

74Ú. Celková odporová síla, která působí proti pohybu automobilu, je výslednicí třecí síly, jíž působí silnice na kola automobilu a která je takřka nezávislá na rychlosti, a odporové síly vzduchu, jejíž velikost je úměrná čtverci rychlosti. Pro automobil o váze 12 000 N je velikost celkové odporové síly dána vztahem $F = 300 + 1{,}8v^2$, kde F je v newtonech a v v metrech za sekundu. Vypočtěte výkon motoru, jestliže automobil zvyšuje svou rychlost z počáteční hodnoty 80 km/h se zrychlením 0,92 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

75Ú*. Závodní automobil o hmotnosti m se rozjíždí z klidu. Jeho motor má stálý výkon P. Za jakou dobu urazí automobil dráhu d?

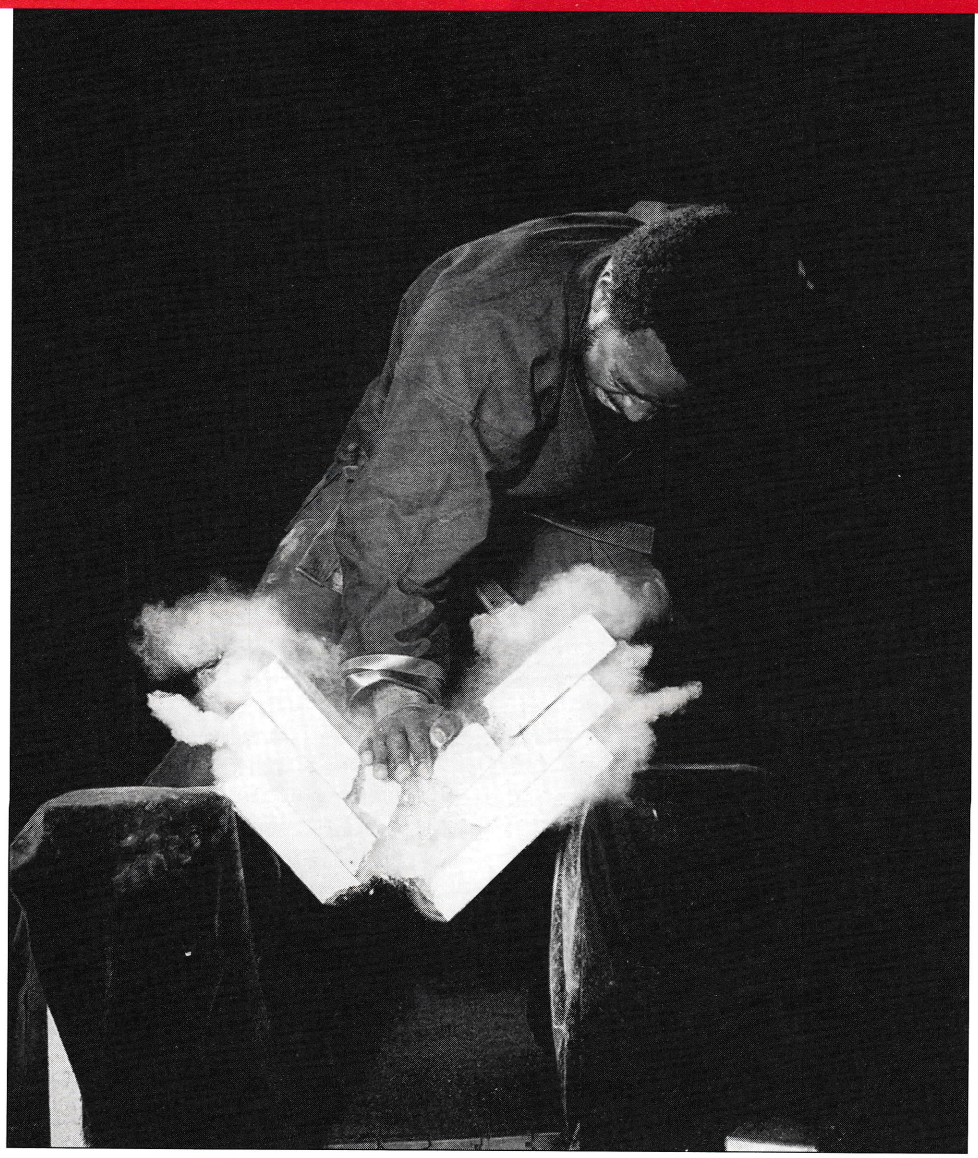
PRO POČÍTAČ

76Ú. Následující tabulka udává polohu tří částic v souřadnicové rovině (xy) a jejich rychlost v určitém okamžiku. Hmotnosti částic jsou různé a jsou v tabulce rovněž uvedeny. Určete (a) polohu a (b) rychlost těžiště soustavy tří částic v tomto okamžiku. (c) Vypočtěte jejich celkovou hybnost.

ČÁSTICE	HMOTNOST (kg)	SOUŘADNICE (m)	RYCHLOST ($\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$)
1	4,00	(0, 0)	$1{,}50\boldsymbol{i} - 2{,}50\boldsymbol{j}$
2	3,00	(7,00; 3,00)	0
3	5,00	(3,00; 2,00)	$2{,}00\boldsymbol{i} - 1{,}00\boldsymbol{j}$

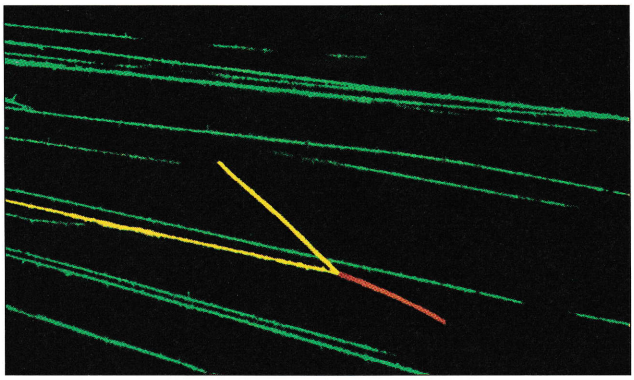
77Ú. Těleso o hmotnosti 2,00 kg je v okamžiku $t = 0$ upuštěno ze střechy vysoké budovy a volně padá podél její stěny. V okamžiku $t = 1{,}00$ s je z téhož místa na střeše upuštěno těleso o hmotnosti 3,00 kg. První těleso dopadne na zem v okamžiku $t = 5{,}00$ s. Sestrojte graf časové závislosti (a) polohy a (b) rychlosti těžiště soustavy těchto dvou těles v intervalu od $t = 0$ do $t = 6{,}00$ s. Počátek svislé osy y zvolte na střeše budovy a její kladný směr orientujte dolů.

10
Srážky

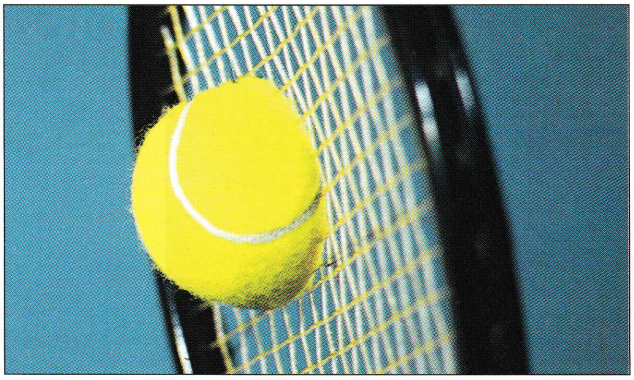


Fyzik Ronald McNair byl jedním z astronautů, kteří zahynuli při havárii raketoplánu ***Challenger****. Byl také nositelem černého pásku v karate a jediným úderem dokázal zlomit několik betonových tabulek. Při podobných ukázkách umění karate se nejčastěji používají borové desky nebo betonové dlaždice. Při úderu se prohýbají a akumulují pružnou energii do chvíle, kdy dosáhne jisté mezní hodnoty. Pak se zlomí. Je překvapivé, že energie nutná ke zlomení dlaždice je v porovnání s mezní energií dřevěné desky zhruba třetinová. Přesto je snažší zlomit desku. Čím to je?*

(*a*)



(*b*)



(*c*)

Obr. 10.1 Pojem srážky je velmi široký. (a) Meteorický kráter v Arizoně má šířku asi 1 200 metrů a je 200 metrů hluboký. (b) Alfa-částice, která se pohybuje zleva doprava (v kolorovaném obrázku je její trajektorie vyznačena žlutě) narazí do jádra dusíku, které bylo zpočátku v klidu. Po srážce se dusíkové jádro pohybuje směrem vpravo (červená trajektorie). (c) Náraz míčku do rakety při tenisovém zápasu trvá zhruba 4 ms. (Po tuto dobu je míček s raketou v kontaktu). Celková doba trvání všech srážek v průběhu jednoho setu průměrného zápasu činí pouhou sekundu.

10.1 CO JE TO SRÁŽKA?

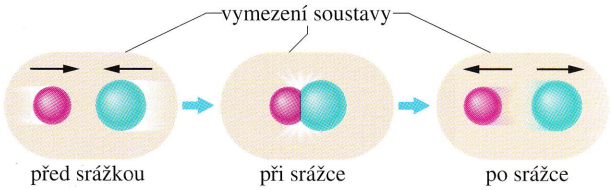
V hovorové řeči rozumíme *srážkou** událost, při níž do sebe narazí nebo o sebe udeří dvě či více různých těles. I když tuto „definici" budeme muset později poněkud zpřesnit, je celkem výstižná a pro běžné situace, k nimž patří například srážky kulečníkových koulí, údery kladiva na hřebík nebo havárie automobilů, docela dobře použitelná.

Obr. 10.1a zachycuje následky jedné obrovské srážky, k níž došlo před 20 000 let. Ke srážkám dochází prakticky v celém myslitelném rozsahu velikostí objektů. Můžeme je sledovat od oblasti světa subatomárních částic (obr. 10.1b) až po kolize doslova „astronomických rozměrů" u hvězd a galaxií. Srážky jsou většinou velmi krátké, takže je obtížné jejich průběh pozorovat, i když se třeba týkají objektů běžných rozměrů. Pozorování neusnadní ani skutečnost, že se tělesa při srážkách často výrazně deformují (obr. 10.1c).

V dalším textu budeme používat poněkud přesnější definici srážky:

> Srážka je krátkodobý děj, při němž na sebe dvě nebo i více těles vzájemně působí poměrně značnými silami.

Uvažujeme-li o soustavě těles, mezi nimiž dojde ke srážce, je třeba umět dobře vymezit dobu *před* srážkou, dobu, po kterou srážka *probíhá*, a dobu *po* srážce (obr. 10.2). Pro ilustraci je v obrázku zakresleno ohraničení soustavy těles, která se účastní srážky. Síly vzájemného působení těles v průběhu srážky jsou samozřejmě vnitřními silami soustavy.



Obr. 10.2 Momentky zachycující soustavu těles při srážce.

Všimněme si, že nová definice srážky, na rozdíl od vstupní intuitivní charakteristiky, neobsahuje požadavek, aby tělesa byla v přímém kontaktu, tj. aby do sebe skutečně udeřila. Za srážku pak můžeme považovat třeba i situaci, kdy kosmická sonda míjí pohybující se velkou planetu a získává tak vyšší rychlost (tzv. gravitační prak). Sonda se přitom planety vůbec nedotkne. To však není pro průběh srážky podstatné. Není nutné, aby interakční síly těles při srážce souvisely výhradně s jejich přímým dotykem. Mohou to být docela dobře i síly gravitační jako v případě zmíněné kosmické sondy.

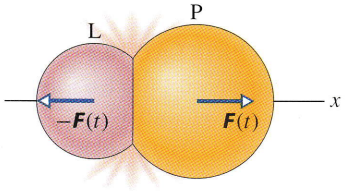
* Dříve se pro srážku užíval termín **ráz**.

Mnoho současných fyziků se intenzivně zabývá „hrou na srážky". Jejím cílem je získat co nejvíce informací o silách působících *během* srážky na základě znalosti stavu částic *před* srážkou a *po* ní. Všechny naše dosavadní znalosti o světě subatomárních částic jsme získali ze srážkových experimentů. Základními pravidly „hry na srážky" jsou zákony zachování hybnosti a energie.

10.2 IMPULZ SÍLY A HYBNOST

Jednoduchá srážka

Na obr. 10.3 jsou zakresleny dvě stejně velké opačně orientované síly $\boldsymbol{F}(t)$ a $-\boldsymbol{F}(t)$, jimiž na sebe působí dva různé bodové objekty při jednoduché přímé srážce.



Obr. 10.3 Srážka dvou bodových objektů L a P. Při srážce působí těleso L silou $\boldsymbol{F}(t)$ na těleso P a naopak, P působí na L silou $-\boldsymbol{F}(t)$. Síly $\boldsymbol{F}(t)$ a $-\boldsymbol{F}(t)$ představují akci a reakci. Jejich velikosti se v průběhu srážky mění, v každém okamžiku jsou si však rovny.

Vlivem vzájemného silového působení částic dojde ke změně hybnosti každé z nich. Tato změna závisí nejen na velikosti sil, ale také na době jejich působení Δt. Odpovídající vztah získáme pomocí druhého Newtonova zákona například pro těleso P v obr. 10.3, zapíšeme-li jej ve tvaru $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (10.1)$$

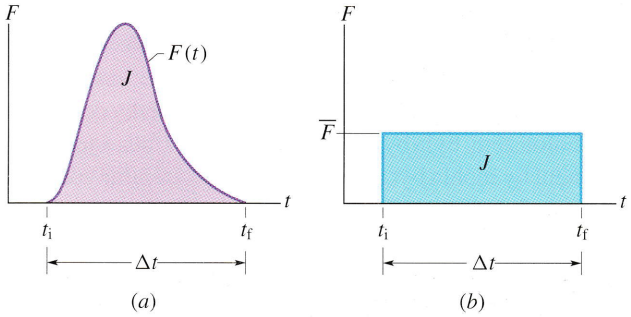
kde $\boldsymbol{F}(t)$ je časově proměnná síla. Její možný průběh je znázorněn na obr. 10.4a. Integrací rov. (10.1) v mezích t_i (okamžik bezprostředně před srážkou) a t_f (okamžik bezprostředně po srážce), určujících časový interval délky Δt, v němž srážka proběhla, dostáváme

$$\int_{\boldsymbol{p}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{p}_\mathrm{f}} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (10.2)$$

Integrací levé strany předchozí rovnice dostáváme změnu hybnosti $\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i}$ tělesa P, k níž při srážce došlo. Výraz na pravé straně závisí na časovém průběhu interakčních sil během srážky a nazýváme jej **impulzem síly**. Značíme

$$\boldsymbol{J} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(impulz síly)}. \qquad (10.3)$$

Připomeneme-li si interpretaci určitého integrálu z kap. 7 (bod 7.1), vidíme, že velikost impulzu síly je číselně rovna velikosti plochy pod grafem funkce $F(t)$ (obr. 10.4a).



Obr. 10.4 (a) Časová závislost velikosti proměnné síly $F(t)$, která působí na těleso P při srážce znázorněné na obr. 10.3. Obsah plochy pod grafem funkce $F(t)$ určuje velikost impulzu $\boldsymbol{J}$ této síly. (b) Výška obdélníka představuje velikost $\overline{F}$ průměrné síly v časovém intervalu Δt. Obsah obdélníka je shodný s obsahem plochy pod křivkou $F(t)$ na obr. (a), a tedy i s velikostí impulzu $\boldsymbol{J}$.

Ze vztahů (10.2) a (10.3) je zřejmé, že změna hybnosti tělesa při srážce je dána impulzem výslednice sil, které na toto těleso během srážky působí.

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J} \qquad \text{(vztah mezi změnou hybnosti a impulzem síly)}. \qquad (10.4)$$

Tyto síly jsou vnitřními silami soustavy těles L a P. Vnější síly na soustavu nepůsobí. Podle zákona zachování hybnosti je tedy změna celkové hybnosti soustavy nulová. Změnu hybnosti tělesa P, vystupující ve vztahu (10.4), jsme označili symbolem $\Delta\boldsymbol{p}$. Změna hybnosti tělesa L je proto $-\Delta\boldsymbol{p}$. Vztah (10.4) můžeme také rozepsat do složek:

$$p_{\mathrm{f},x} - p_{\mathrm{i},x} = \Delta p_x = J_x, \qquad (10.5)$$

$$p_{\mathrm{f},y} - p_{\mathrm{i},y} = \Delta p_y = J_y, \qquad (10.6)$$

a

$$p_{\mathrm{f},z} - p_{\mathrm{i},z} = \Delta p_z = J_z. \qquad (10.7)$$

Impulz síly i hybnost jsou vektorové veličiny a mají stejný fyzikální rozměr. Uvědomme si, že vztah (10.4) není nějakým novým fyzikálním zákonem či nezávislým tvrzením, nýbrž přímým důsledkem druhého Newtonova zákona, z něhož jsme jej odvodili. Je však velmi užitečný při řešení určitého typu fyzikálních úloh, podobně jako třeba zákon zachování mechanické energie.

Označíme-li $\overline{F}$ velikost průměrné síly určenou z grafu na obr. 10.4a, můžeme velikost impulzu síly zapsat ve tvaru

$$J = \overline{F}\,\Delta t, \qquad (10.8)$$

kde Δt je doba trvání srážky. Hodnotu $\overline{F}$ najdeme jako výšku obdélníka o základně tvořené časovým intervalem od t_i do t_f (obr. 10.4b), jehož obsah je shodný s obsahem plochy pod křivkou na obr. 10.4a.

KONTROLA 1: Výsadkář, jemuž se při seskoku neotevřel padák, měl štěstí. Dopadl na hustě zasněženou pláň, a tak utrpěl jen drobná poranění. Kdyby dopadl na holou zem, byla by doba nárazu 10krát kratší a jeho zranění by mohla být i smrtelná. Jak ovlivní silná sněhová pokrývka (a) změnu hybnosti výsadkáře, (b) impulz brzdící síly a (c) její velikost?

Opakované srážky

Předpokládejme, že na těleso R pevně spojené s podlahou dopadá ve směru osy x ustálený tok částic o stejné hybnosti mv (obr. 10.5). Impulz J síly, jíž každá z dopadajících částic na těleso R působí, má stejnou velikost jako změna hybnosti částice Δp, avšak opačný směr. Je tedy $J = -\Delta p$. Předpokládejme, že za dobu Δt narazí na těleso n částic. Celkový silový impulz za tuto dobu určuje podle vztahu (10.4) celkovou změnu hybnosti tělesa, tj.

$$J = -n\Delta p. \qquad (10.9)$$

Po dosazení tohoto výsledku do rovnice (10.8) a malé úpravě získáme průměrnou sílu $\overline{F}$ působící při srážce na těleso R:

$$\overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\Delta v. \qquad (10.10)$$

Získaný vztah vyjadřuje $\overline{F}$ jako funkci frekvence dopadu částic $n/\Delta t$ na těleso R a změny jejich rychlosti Δv.

Pokud se dopadající částice po nárazu zastaví, je třeba do vztahu (10.10) dosadit

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v, \qquad (10.11)$$

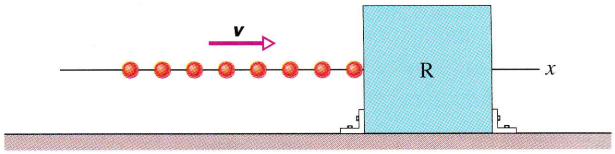
kde $v_i = v$ a $v_f = 0$ jsou rychlosti částic před srážkou a po srážce. Pokud se však částice při srážce odrazí zpět se stejně velkou rychlostí, je $v_f = -v$. Pak dostaneme

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v. \qquad (10.12)$$

Celková hmotnost částic, které za dobu Δt narazí do tělesa R, je $\Delta m = nm$. S ohledem na tuto skutečnost můžeme vztah (10.10) přepsat do tvaru

$$\overline{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v. \qquad (10.13)$$

Síla $\overline{F}$ je tak vyjádřena pomocí **hmotnostního toku** částic $\Delta m/\Delta t$ dopadajícího na těleso R. V závislosti na charakteru srážky můžeme do posledního vztahu dosadit za Δv buď $-v$ (podle vztahu (10.11)), nebo $-2v$ (podle vztahu (10.12)).



Obr. 10.5 Na pevné těleso R dopadají částice o stejné hybnosti. Jejich tok je ustálený. Průměrná síla $\overline{F}$ působící na těleso směřuje vpravo a její velikost závisí na hmotnostním toku dopadajících částic.

PŘÍKLAD 10.1

Baseballový míč o hmotnosti 140 g letí těsně před odpálením vodorovně rychlostí $\mathbf{v}_i$ o velikosti 39 m·s^{-1}. Po úderu letí míč opačným směrem stejně velkou rychlostí $\mathbf{v}_f$.

(a) Určete impulz síly, která na míč při úderu působila.

ŘEŠENÍ: Impulz síly vypočteme ze známé změny hybnosti míče vztahem (10.4), upraveným pro jednorozměrný případ. Za kladný směr osy x zvolíme směr pohybu pálky. Ze vztahu (10.4) dostaneme

$$\begin{aligned} J &= p_f - p_i = mv_f - mv_i = \\ &= (0,14\,\text{kg})(39\,\text{m·s}^{-1}) - (0,14\,\text{kg})(-39\,\text{m·s}^{-1}) = \\ &= 10,9\,\text{kg·m·s}^{-1} \doteq 11\,\text{kg·m·s}^{-1}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

Ve shodě s naší volbou orientace souřadnicové osy x je počáteční rychlost míče (x-ová složka) záporná a výsledná rychlost kladná. Vypočtený impulz síly je kladný, vektor $\boldsymbol{J}$ má tedy, podle očekávání, stejný směr jako pohyb pálky při úderu.

(b) Srážka míče a pálky proběhla za dobu $\Delta t = 1,2$ ms. Určete průměrnou sílu, která při srážce působila na míč.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (10.8) dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{F} = \frac{J}{\Delta t} &= \frac{(10,9\,\text{kg·m·s}^{-1})}{(0,001\,2\,\text{s})} = \\ &= 9\,100\,\text{N}. \end{aligned}$$ (Odpověď)

Uvědomme si, jak je tato síla obrovská. Její velikost je přibližně rovna váze tělesa o hmotnosti jedné tuny. *Největší* síla, která na míč v jistém okamžiku v průběhu srážky působila, musí být dokonce ještě větší. Průměrná síla má směr kladné osy x. Je tedy souhlasně rovnoběžná s vektorem impulzu síly.

(c) Určete průměrné zrychlení míče.

ŘEŠENÍ: Průměrné zrychlení určíme ze vztahu

$$\bar{a} = \frac{\overline{F}}{m} = \frac{(9\,100\,\mathrm{N})}{(0{,}14\,\mathrm{kg})} = 6{,}5{\cdot}10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}, \quad \text{(Odpověď)}$$

tj. $a = 6\,600g$.

V dosavadních úvahách jsme předpokládali, že na tělesa nepůsobí při srážce žádné vnější síly. Tento předpoklad však při baseballové hře není splněn. Na míč totiž stále působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ (během letu i při srážce s pálkou). Velikost tíhové síly však je pouhých 1,4 N, tedy zcela zanedbatelná ve srovnání s průměrnou silou o velikosti 9 100 N, jíž na míč při úderu působí pálka. Zcela oprávněně tedy můžeme soustavu míč + pálka považovat *během srážky* za izolovanou. Chyba, které se touto idealizací dopustíme, je jen velmi malá.

PŘÍKLAD 10.2

Baseballový míč letí stejně jako v př. 10.1 vodorovně, rychlostí o velikosti $v_\mathrm{i} = 39\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Nenarazí však na pálku kolmo, nýbrž se od ní odrazí pod elevačním úhlem 30° rychlostí o velikosti $v_\mathrm{f} = 45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (obr. 10.6). Určete průměrnou sílu $\overline{\boldsymbol{F}}$, kterou pálka na míč působila, proběhla-li srážka za 1,2 ms?

ŘEŠENÍ: Z rovnic (10.5) a (10.6) určíme složky J_x a J_y impulzu síly:

$$\begin{aligned} J_x &= p_{\mathrm{f},x} - p_{\mathrm{i},x} = m(v_{\mathrm{f},x} - v_{\mathrm{i},x}) = \\ &= (0{,}14\,\mathrm{kg})[(45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\cos 30^\circ) - (-39\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})] = \\ &= 10{,}92\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} J_y &= p_{\mathrm{f},y} - p_{\mathrm{i},y} = m(v_{\mathrm{f},y} - v_{\mathrm{i},y}) = \\ &= (0{,}14\,\mathrm{kg})[(45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(\sin 30^\circ) - 0] = \\ &= 3{,}150\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \end{aligned}$$

Velikost impulzu síly $\boldsymbol{J}$ je rovna

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \\ &= \sqrt{(10{,}92\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})^2 + (3{,}150\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})^2} = \\ &= 11{,}37\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \end{aligned}$$

Z rovnice (10.8) určíme velikost průměrné síly $\overline{F}$ působící na míč při srážce:

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \frac{J}{\Delta t} = \frac{(11{,}37\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})}{(0{,}001\,2\,\mathrm{s})} = \\ &= 9\,475\,\mathrm{N} \doteq 9\,500\,\mathrm{N}. \end{aligned} \quad \text{(Odpověď)}$$

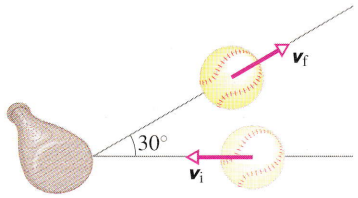
Vektor impulzu síly $\boldsymbol{J}$ směřuje šikmo vzhůru a svírá s vodorovnou rovinou úhel θ:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{J_y}{J_x} = \frac{(3{,}150\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})}{(10{,}92\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})} = 0{,}288,$$

tj.

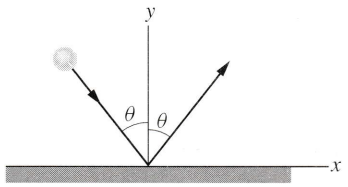
$$\theta = 16^\circ. \quad \text{(Odpověď)}$$

Průměrná síla $\overline{\boldsymbol{F}}$ má stejný směr jako impulz síly $\boldsymbol{J}$. Na rozdíl od př. 10.1 mají vektory $\overline{\boldsymbol{F}}$ a $\boldsymbol{J}$ jiný směr než rychlost míče po srážce.



Obr. 10.6 Příklad 10.2. Míč se odráží od pálky. Počáteční rychlost je vodorovná, výsledná rychlost svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°.

KONTROLA 2: Následující obrázek ukazuje pohled shora na míč, který se odráží od zdi s nezměněnou velikostí rychlosti. Změnu hybnosti míče označme $\Delta\boldsymbol{p}$. (a) Rozhodněte, zda složka (a) Δp_x, resp. (b) Δp_y je kladná, záporná, nebo nulová. (c) Jaký směr má vektor $\Delta\boldsymbol{p}$?



10.3 PRUŽNÉ PŘÍMÉ SRÁŽKY

Nejjednodušším případem je přímá srážka (v některých případech zvaná také čelní nebo středová). Při ní leží počáteční rychlosti částic v téže přímce. Mají tedy směr jejich spojnice, u homogenních koulí pak směr spojnice jejich středů.

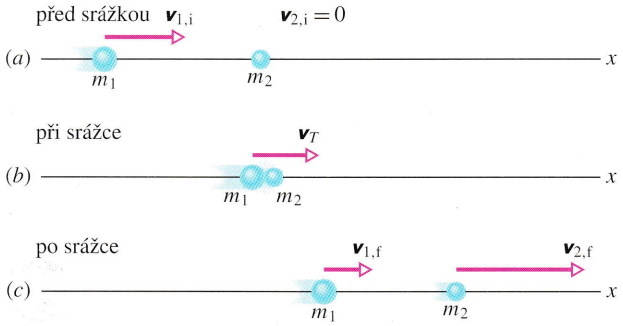
Pevný terč

Uvažujme přímou srážku dvou těles o hmotnostech m_1 a m_2 (obr. 10.7) a pro jednoduchost předpokládejme, že jedno z nich je před srážkou v klidu (například m_2, tj. $v_{2,\mathrm{f}} = 0$). Toto těleso budeme nazývat „terčem". Druhé těleso, s počáteční rychlostí $v_{1,\mathrm{i}}$, bude představovat „střelu".* Dále předpokládejme, že soustava tvořená uvažovanými dvěma tělesy je uzavřená (žádné další částice do soustavy nepřibudou, ani ji neopustí) a izolovaná (na soustavu nepůsobí

* Pokud by se terč vzhledem k laboratorní vztažné soustavě pohyboval stálou rychlostí, zvolíme pro popis srážky jinou inerciální vztažnou soustavu, v níž bude v klidu. Taková volba je vždy možná.

vnější síly). K oběma těmto přirozeným požadavkům přidejme ještě jeden, poněkud speciální: předpokládejme, že srážka nezměnila celkovou kinetickou energii soustavy. Taková srážka se nazývá **pružná** neboli **elastická**.

Při pružné srážce se obecně mění kinetická energie jednotlivých těles, která se srážky účastní. Celková kinetická energie soustavy před srážkou i po srážce je však stejná.



Obr. 10.7 Pružná srážka dvou těles. Jedno z nich (terč o hmotnosti m_2) je před srážkou v klidu. V obrázcích jsou zakresleny tyto rychlosti: (a) rychlosti obou těles před srážkou, (b) rychlost těžiště soustavy v jistém okamžiku probíhající srážky, (c) rychlosti obou těles po srážce. Velikosti vektorů odpovídají případu $m_1 = 3m_2$.

Je důležité si uvědomit, že hybnost uzavřené izolované soustavy se při srážce zachovává vždy, bez ohledu na to, je-li srážka pružná či nikoliv. Interakční síly působící při srážce jsou totiž vnitřními silami soustavy.

Při srážce těles v uzavřené izolované soustavě se hybnost každého z nich může obecně měnit. Celková hybnost soustavy je však v každém okamžiku probíhající srážky stejná, a to bez ohledu na charakter srážky.

Ze zákonů zachování hybnosti a kinetické energie dostáváme pro srážku dvou těles z obr. 10.7

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \tag{10.14}$$

a

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2. \tag{10.15}$$

V obou rovnicích jsme indexem (i) označili počáteční rychlosti a indexem (f) výsledné rychlosti těles. Známe-li hmotnosti těles a počáteční rychlost $v_{1,i}$ tělesa 1, zbývá vyřešit soustavu předchozích dvou rovnic a určit z ní neznámé rychlosti obou těles po srážce, tj. $v_{1,f}$ a $v_{2,f}$.

Přepišme rov. (10.14) do tvaru

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2 v_{2,f} \tag{10.16}$$

a rov. (10.15) do tvaru*

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) = m_2 v_{2,f}^2. \tag{10.17}$$

Po vydělení rov. (10.17) rov. (10.16) a dalších úpravách dostaneme

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \tag{10.18}$$

a

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}. \tag{10.19}$$

Z rov. (10.19) je zřejmé, že hodnota $v_{2,f}$ je vždy kladná (terč o hmotnosti m_2 se po srážce pohybuje ve směru nárazu střely). Hodnota $v_{1,f}$ může být jak kladná, tak záporná (je-li $m_1 > m_2$, pohybuje se střela po srážce původním směrem, při $m_1 < m_2$ se odrazí zpět).

KONTROLA 3: Určete výslednou hybnost terče na obr. 10.7, má-li střela počáteční hybnost $6\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a její výsledná hybnost je (a) $2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, resp. (b) $-2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je výsledná kinetická energie terče, má-li střela před srážkou kinetickou energii 5 J a po srážce 2 J?

Věnujme se nyní několika speciálním případům:

1. *Shodné hmotnosti.* Je-li $m_1 = m_2$, redukují se rovnice (10.18) a (10.19) na tvar

$$v_{1,f} = 0 \quad \text{a} \quad v_{2,f} = v_{1,i}.$$

Při přímé srážce těles stejné hmotnosti se střela zastaví a terč získá stejnou rychlost, jakou měla střela před srážkou. Střela a terč si své rychlosti jednoduše „vymění". Tento výsledek je platný i v případě pohyblivého terče (těleso 2 se před srážkou pohybuje).

2. *Těžký terč.* V případě těžkého terče je $m_2 \gg m_1$. Příkladem takové srážky může být třeba náraz golfového míčku do dělové koule. Rov. (10.18) a (10.19) přejdou do tvaru

$$v_{1,f} \doteq -v_{1,i} \quad \text{a} \quad v_{2,f} \doteq \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1,i}. \tag{10.20}$$

Je vidět, že střela (golfový míček) se prostě odrazí zpět opačným směrem. Velikost její rychlosti se prakticky nezmění. Terč (dělová koule) se bude pohybovat v kladném směru velmi malou rychlostí, neboť výraz $(2m_1/m_2)$ v rov. (10.20) je mnohem menší než jedna. Tyto závěry zcela jistě nejsou neočekávané.

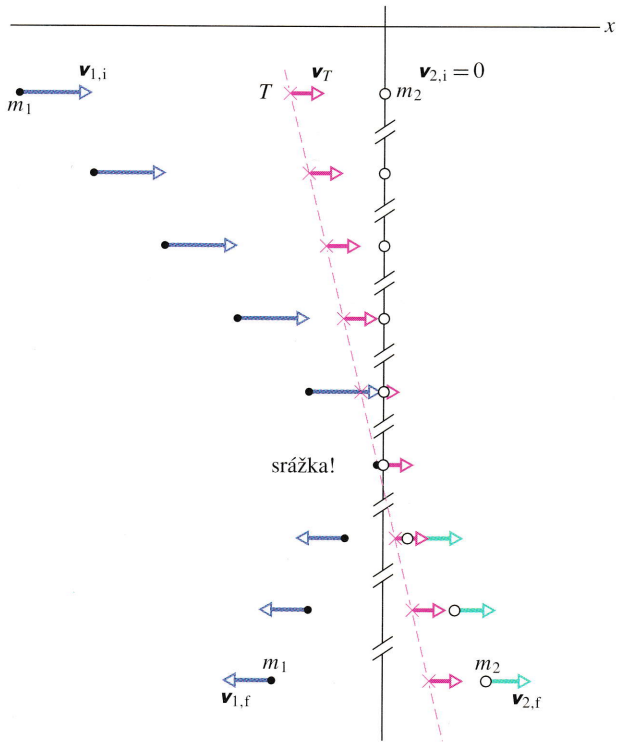
* Při těchto úpravách využíváme identity $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Řešení soustavy rovnic se tím značně zjednoduší.

3. *Těžká střela.* Nyní střílíme dělovou koulí proti golfovému míčku, tj. $m_1 \gg m_2$. Rov. (10.18) a (10.19) přejdou na tvar

$$v_{1,f} \doteq v_{1,i} \quad \text{a} \quad v_{2,f} \doteq 2v_{1,i}. \tag{10.21}$$

Střela (dělová koule) se tedy pohybuje dále původním směrem a jen nepatrně se zpomalí. Terč (golfový míček) se odrazí zpět (v kladném směru) dvojnásobnou rychlostí než měla původně dělová koule.

Skutečnost, že je rychlost terče po srážce právě dvojnásobná, lze poměrně jednoduše vysvětlit: vraťme se ke vztahům (10.20), které popisují případ těžkého terče. Rychlost lehkého tělesa (střely) se změnila z hodnoty $+v$ na $-v$. Její *změna* byla tedy $2v$. Také v případě těžké střely je *změna* rychlosti lehkého tělesa (terče) rovna $2v$.



Obr. 10.8 Série obrázků znázorňujících průběh pružné srážky střely s pevným terčem. Pro hmotnosti střely (těleso 1) a terče (těleso 2) platí $m_2 = 3m_1$. V obrázcích je vyznačena i rychlost těžiště soustavy. Všimněte si, že není srážkou vůbec ovlivněna.

4. *Pohyb těžiště.* Pohyb těžiště soustavy dvou těles není jejich srážkou nijak ovlivněn. Tato skutečnost je důsledkem zákona zachování hybnosti a vztahu (9.26). Tento vztah

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_T, \tag{10.22}$$

vyjadřuje souvislost celkové hybnosti soustavy a rychlosti pohybu těžiště $\boldsymbol{v}_T$. Jelikož se celková hybnost $\boldsymbol{P}$ nemění, musí se zachovávat i rychlost těžiště. Těžiště se tedy pohybuje rovnoměrně přímočaře. Pro případ srážky střely s pevným terčem (obr. 10.7) má těžiště soustavy rychlost (vztah (10.22))

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}. \tag{10.23}$$

Na obr. 10.8 je posloupnost obrázků znázorňujících typický průběh pružné srážky. Je vidět, že těžiště se skutečně pohybuje konstantní rychlostí, která není srážkou nijak ovlivněna.

Pohyblivý terč

Vraťme se nyní k obecným úvahám o pružných srážkách a připusťme, že se obě tělesa před srážkou pohybují.

Obr. 10.9 Pružná srážka dvou těles

Pro soustavu těles na obr. 10.9 můžeme zapsat zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie takto:

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \tag{10.24}$$

a

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2. \tag{10.25}$$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $v_{1,f}$ a $v_{2,f}$, kterou nyní budeme řešit. Nejprve přepíšeme rov. (10.24) do tvaru

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = -m_2(v_{2,i} - v_{2,f}) \tag{10.26}$$

a rov. (10.25) do tvaru

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) = -m_2(v_{2,i} - v_{2,f})(v_{2,i} + v_{2,f}). \tag{10.27}$$

Rov. (10.27) vydělíme rov. (10.26) a po malých úpravách dostaneme

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,i} \tag{10.28}$$

a

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,i}. \tag{10.29}$$

Připomeňme, že jsme indexy 1 a 2 přiřadili tělesům zcela libovolně. Záměnou indexů na obr. 10.9 a v rov. (10.28) a (10.29) získáme zcela identickou soustavu. Položíme-li

navíc $v_{2,\mathrm{i}} = 0$, přejdou rov. (10.28) a (10.29) na tvar (10.18) a (10.19), který odpovídá situaci s pevným terčem 2.

Z rov. (10.22) určíme ještě rychlost těžiště v_T soustavy těles na obr. 10.9:

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}}}{m_1 + m_2}. \qquad (10.30)$$

Naše soustava je uzavřená a izolovaná. Její hybnost P se proto při srážce zachovává a její těžiště se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v_T.

KONTROLA 4: Počáteční hybnosti těles 1 a 2 na obr. 10.9 jsou $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $-8\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je hybnost tělesa 2 po srážce, je-li výsledná hybnost tělesa 1 (a) $2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, resp. (b) $-2\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$?

PŘÍKLAD 10.3

Dvě kovové koule jsou zavěšeny na svislých závěsech tak, aby se právě dotýkaly (obr. 10.10). Koule 1 má hmotnost $m_1 = 30\,\mathrm{g}$, hmotnost koule 2 je $m_2 = 75\,\mathrm{g}$. Kouli 1 vychýlíme vlevo do výšky $h_1 = 8{,}0\,\mathrm{cm}$ a uvolníme.

(a) Určete rychlost $v_{1,\mathrm{f}}$ koule 1 těsně po srážce s koulí 2.

ŘEŠENÍ: Označme $v_{1,\mathrm{i}}$ rychlost koule 1 těsně před srážkou. Bezprostředně po uvolnění je její kinetická energie nulová a tíhová potenciální energie má hodnotu $m_1 g h_1$. Těsně před srážkou je kinetická energie rovna $\frac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2$ a potenciální energie je nulová. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2 = m_1 g h_1.$$

Rychlost koule 1 těsně před srážkou je tedy

$$v_{1,\mathrm{i}} = \sqrt{2 g h_1} = \sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}080\,\mathrm{m})} = 1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Koule 1 se sice pohybuje po oblouku, avšak v okamžiku srážky je její rychlost vodorovná. Úlohu tedy můžeme řešit podle pravidel pro jednorozměrnou srážku.

Rychlost koule 1 těsně po srážce je $v_{1,\mathrm{f}}$. Určíme ji z rov. (10.18):

$$v_{1,\mathrm{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} = \frac{(0{,}030\,\mathrm{kg} - 0{,}075\,\mathrm{kg})}{(0{,}030\,\mathrm{kg} + 0{,}075\,\mathrm{kg})}(1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = -0{,}537\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq -0{,}54\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko výsledku signalizuje, že se koule 1 pohybuje po srážce vlevo.

(b) Do jaké výšky h_1' vystoupí koule 1 po srážce?

ŘEŠENÍ: Na počátku zpětného pohybu má koule 1 kinetickou energii $\frac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2$ a tíhová potenciální energie je nulová. Pohyb koule se obrací v nejvyšším bodě trajektorie, tj. ve výšce h_1'. Zde je její kinetická energie nulová a potenciální energie má hodnotu $m_1 g h_1'$. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$m_1 g h_1' = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2,$$

tj.

$$h_1' = \frac{v_{1,\mathrm{f}}^2}{2g} = \frac{(-0{,}537\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 0{,}014\,7\,\mathrm{m} \doteq 1{,}5\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaká je rychlost koule 2 těsně po srážce?

ŘEŠENÍ: Z rov. (10.19) dostaneme

$$v_{2,\mathrm{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\mathrm{i}} = \frac{2(0{,}030\,\mathrm{kg})}{(0{,}030\,\mathrm{kg} + 0{,}075\,\mathrm{kg})}(1{,}252\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = 0{,}715\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 0{,}72\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

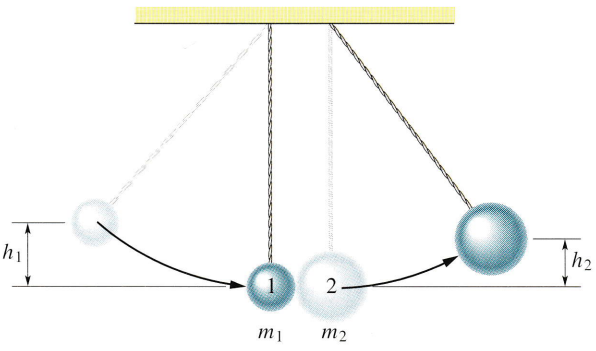
(d) Do jaké výšky h_2 vystoupí koule 2 po srážce?

ŘEŠENÍ: Koule 2 má těsně po srážce kinetickou energii $\frac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2$. V bodě obratu ve výšce h_2 má tíhová potenciální energie hodnotu $m_2 g h_2$. Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$m_2 g h_2 = \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2,$$

tj.

$$h_2 = \frac{v_{2,\mathrm{f}}^2}{2g} = \frac{(0{,}715\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2}{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = 0{,}026\,1\,\mathrm{m} \doteq 2{,}6\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 10.10 Příklad 10.3. Dvě kovové koule zavěšené na vláknech se v klidu právě dotýkají. Kouli 1 o hmotnosti m_1 odchýlíme vlevo do výšky h_1 a uvolníme. Po srážce vystoupí koule 2 do výšky h_2.

PŘÍKLAD 10.4

Rychlé neutrony vznikající v jaderném reaktoru je třeba nejprve zpomalit, aby se mohly efektivně účastnit řetězové reakce. Děje se tak prostřednictvím jejich srážek s jádry atomů v tzv. *moderátoru*.

(a) Určete, kolikrát se zmenší kinetická energie neutronu (hmotnost m_1) při jeho přímé srážce s jádrem atomu o hmotnosti m_2. Předpokládáme, že srážka je pružná a jádro je zpočátku v klidu.

ŘEŠENÍ: Kinetická energie neutronu před srážkou a po ní je dána vztahy

$$E_{k,i} = \tfrac{1}{2} m v_{1,i}^2 \quad \text{a} \quad E_{k,f} = \tfrac{1}{2} m v_{1,f}^2.$$

Hledaný poměr označme α. Platí

$$\alpha = \frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = \frac{v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2}{v_{1,i}^2} = 1 - \frac{v_{1,f}^2}{v_{1,i}^2}. \qquad (10.31)$$

Ze vztahu (10.18) dostáváme

$$\frac{v_{1,f}}{v_{1,i}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (10.32)$$

Dosazením rov. (10.32) do (10.31) získáme po malých úpravách výsledek:

$$\alpha = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (10.33)$$

(b) Vypočtěte hodnotu poměru α pro jádra olova, uhlíku a vodíku. Poměr hmotností jádra a neutronu ($= \frac{m_2}{m_1}$) pro olovo je 206, pro uhlík 12 a pro vodík přibližně 1.

ŘEŠENÍ: Dosazením $m_2 = k m_1$ do rov. (10.33) dostaneme pro olovo ($m_2 = 206 m_1$)

$$\alpha = \frac{4(206)}{(1 + 206)^2} = 0{,}019, \quad \text{tj. } 1{,}9\,\%, \quad \text{(Odpověď)}$$

pro uhlík ($m_2 = 12 m_1$)

$$\alpha = \frac{4(12)}{(1 + 12)^2} = 0{,}28, \quad \text{tj. } 28\,\% \quad \text{(Odpověď)}$$

a pro vodík ($m_2 = m_1$)

$$\alpha = \frac{4(1)}{(1 + 1)^2} = 1, \quad \text{tj. } 100\,\%. \quad \text{(Odpověď)}$$

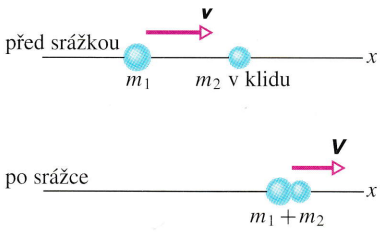
Tyto výsledky naznačují, proč je například voda podstatně lepším moderátorem neutronů než olovo.

10.4 NEPRUŽNÉ PŘÍMÉ SRÁŽKY

Srážku nazýváme **nepružnou**, jestliže se při ní nezachovává celková kinetická energie soustavy zúčastněných těles. Gumová kulička, kterou jsme upustili na tvrdou podlahu, doskočí po odrazu *téměř* do původní výšky. Její kinetická energie během srážky s podlahou nepatrně klesla. Tento malý úbytek způsobil, že po odrazu již kulička nedostoupila přesně do té výšky, ze které spadla. Kdyby byla srážka pružná, ke ztrátě kinetické energie kuličky by při ní nedošlo a kulička by vyskočila *přesně* do původní výšky. Ve skutečnosti je srážka gumové kuličky s podlahou vždy nepružná.

Golfový míček ztrácí při dopadu na zem větší část své kinetické energie a odrazí se jen do 60 % původní výšky. Odraz je tedy výrazně nepružný. Upustíme-li na zem hroudu sklenářského tmelu, přilepí se k zemi a neodrazí se vůbec. Srážku tohoto typu budeme nazývat **dokonale nepružnou**.

Na úkor úbytku kinetické energie soustavy při srážce samozřejmě vzrostou hodnoty energií některých jiných typů, např. se těleso zahřeje. Hybnost uzavřené izolované soustavy se však zachovává vždy, ať již je srážka pružná či nepružná. Hybnost i kinetická energie soustavy ovšem souvisejí s rychlostmi těles. Zákon zachování hybnosti vede proto k určitému omezení možných hodnot ztráty kinetické energie. K největší ztrátě dochází při dokonale nepružné srážce. Při ní se dokonce může stát, že soustava ztratí veškerou kinetickou energii.



Obr. 10.11 Dokonale nepružná srážka dvou těles. Před srážkou je těleso o hmotnosti m_2 v klidu. Po srážce se obě tělesa pohybují společně. Společný pohyb je znakem *dokonale* nepružné srážky. Velikosti vyznačených vektorů rychlosti odpovídají případu $m_1 = 3 m_2$.

Omezíme se zatím pouze na úvahy o dokonale nepružných srážkách. Na obr. 10.11 je znázorněna nepružná srážka dvou těles. Před srážkou bylo jedno z nich v klidu. Podle zákona zachování hybnosti je

$$m_1 v = (m_1 + m_2) V, \qquad (10.34)$$

tj.

$$V = v \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \qquad (10.35)$$

Společnou rychlost obou objektů, které při srážce splynuly, jsme označili V. Z rov. (10.35) plyne, že tato rychlost je vždy menší než rychlost pohybujícího se tělesa před srážkou.

Obr. 10.12 dokumentuje skutečnost, že pohyb těžiště soustavy není dokonale nepružnou srážkou ovlivněn (porovnejte tento obrázek s obr. 10.8). I když při nepružné srážce dochází ke ztrátě kinetické energie *soustavy*, zůstává kinetická energie *těžiště* nedotčena. Je tedy vůbec možné, aby při nějaké dokonale nepružné srážce došlo ke ztrátě veškeré kinetické energie soustavy? Vzhledem k tomu, že kinetickou energii soustavy po takové srážce lze vyjádřit jako kinetickou energii jejího těžiště, stačí spojit vztažnou soustavu, v níž sledujeme pohyb částic, právě s těžištěm. Zákon zachování hybnosti zaručuje, že tato těžišťová soustava je inerciální. V případě srážky střely s těžkým terčem ($m_2 \gg m_1$) těžiště soustavy prakticky splývá s polohou terče. Příkladem takové situace je třeba pád hroudy tmelu na zem. Terčem je v tomto případě sama Země. Veškerá kinetická energie hroudy tak „zmizí“ ve prospěch jiných druhů energie.

Jsou-li před srážkou obě tělesa v pohybu, nahradíme vztah (10.34) rovnicí

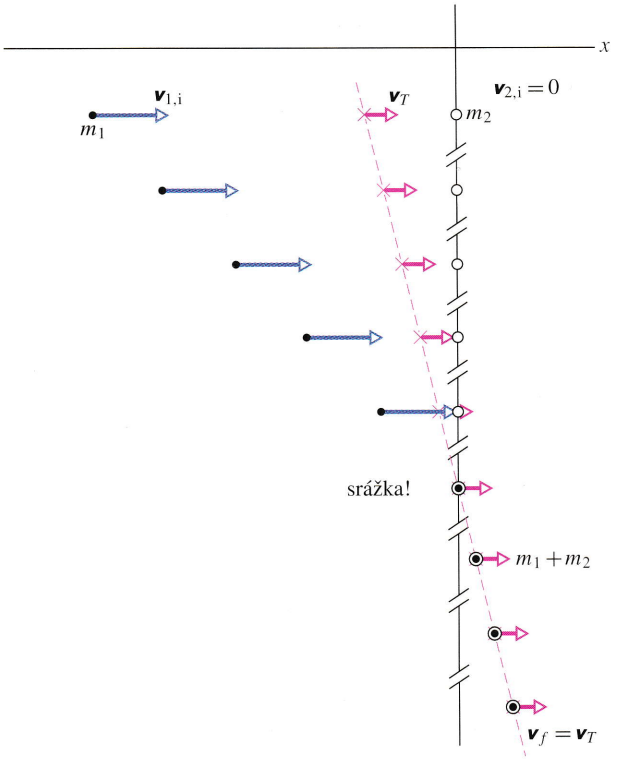
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V, \qquad (10.36)$$

kde $m_1 v_1$ a $m_2 v_2$ jsou počáteční hybnosti těles 1 a 2. Také v tomto případě je vztažná soustava spojená s těžištěm dvojice těles inerciální a výsledná kinetická energie soustavy po srážce je vzhledem k ní nulová. Příkladem může být situace na obr. 10.13, zachycujícím výsledek téměř čelní nepružné srážky dvou stejných automobilů, které jely stejnou rychlostí. Před srážkou bylo těžiště soustavy vzhledem k Zemi v klidu. Vzhledem k pozorovateli na chodníku se tedy oba automobily bezprostředně po srážce zcela zastavily.

KONTROLA 5: Určete výslednou hybnost soustavy dvou těles po dokonale nepružné přímé srážce. Počáteční hybnosti těles jsou (a) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a 0, (b) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, (c) $10\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a $-4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$?

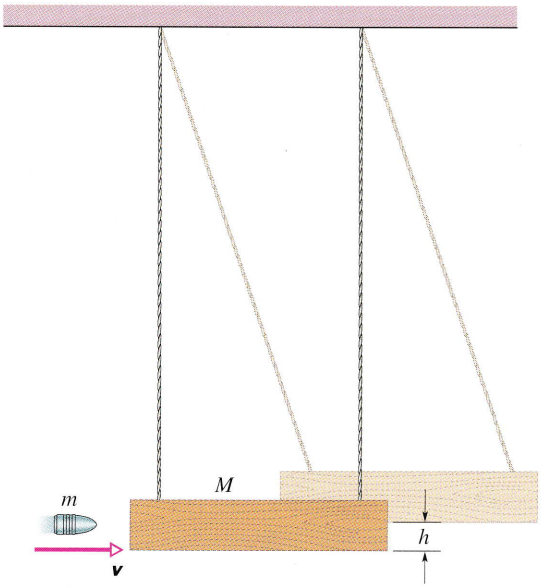
PŘÍKLAD 10.5

Dokud nebyla k dispozici zařízení pro elektronické měření času, užívalo se k měření rychlosti projektilů střelných zbraní tzv. *balistické kyvadlo*. Jedna z možností, jak takové kyvadlo zkonstruovat, je znázorněna na obr. 10.14. Dřevěný hranol o hmotnosti $M = 5{,}4\,\mathrm{kg}$ je zavěšen na dvou dlouhých závěsech. Kulka o hmotnosti $m = 9{,}5\,\mathrm{g}$, vystřelená z testované zbraně, hranol zasáhne a uvázne v něm. Soustava *hranol + kulka* se vychýlí z rovnovážné polohy. Největší výška výstupu těžiště soustavy je $h = 6{,}3\,\mathrm{cm}$.



Obr. 10.12 Momentky zachycující průběh dokonale nepružné srážky dvou těles. Těleso 2 je zpočátku v klidu. Tělesa se při srážce spojí a pohybují se společně. V obrázku je vyznačena i rychlost těžiště soustavy. Všimněte si, že není srážkou nijak ovlivněna a je shodná se společnou rychlostí spojených těles. Velikosti vektorů rychlosti odpovídají případu $m_2 = 3m_1$.

Obr. 10.13 Dva automobily po dokonale nepružné, téměř čelní srážce.



Obr. 10.14 Příklad 10.5. Balistické kyvadlo k měření rychlosti střel.

(a) Jakou rychlost měla kulka těsně před srážkou s hranolem?

ŘEŠENÍ: Označme symbolem V rychlost soustavy *hranol+kulka* těsně po srážce. Podle zákona zachování hybnosti je

$$mv = (m + M)V.$$

Protože kulka uvázne v hranolu, jedná se o dokonale nepružnou srážku. Kinetická energie se při ní změní. *Po srážce* se však již mechanická energie soustavy kyvadlo+Země *zachovává*, pokud zanedbáme odpor prostředí. Kinetická energie kyvadla v rovnovážné poloze je tedy shodná s tíhovou potenciální energií soustavy v okamžiku, kdy je kyvadlo v bodě obratu:

$$\tfrac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh.$$

Vyloučíme-li z posledních dvou rovnic rychlost V, dostaneme

$$v = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gh} =$$
$$= \left(\frac{5{,}4\,\mathrm{kg} + 0{,}009\,5\,\mathrm{kg}}{0{,}009\,5\,\mathrm{kg}}\right)\sqrt{2(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}063\,\mathrm{m})} =$$
$$= 630\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Balistické kyvadlo můžeme chápat jako zařízení, které „převede" velkou rychlost lehké střely na malou, a tedy mnohem lépe měřitelnou, rychlost těžkého hranolu.

(b) Určete počáteční kinetickou energii střely. Jak velkou její část představuje mechanická energie balistického kyvadla po srážce?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie kulky před srážkou je

$$E_{k,b} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}009\,5\,\mathrm{kg})(630\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 =$$
$$= 1\,900\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

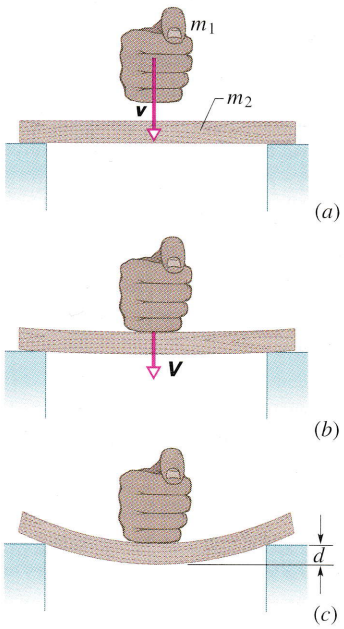
Mechanická energie soustavy kyvadlo+Země je stálá a shodná s její potenciální energií v okamžiku, kdy je kyvadlo v bodě obratu

$$E = (M + m)gh =$$
$$= (5{,}4\,\mathrm{kg} + 0{,}009\,5\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})(0{,}063\,\mathrm{m}) =$$
$$= 3{,}3\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při srážce se tedy kyvadlu předá pouhý zlomek (3,3/1 900, tj. 0,2 %) počáteční kinetické energie kulky. Zbytek přispěje k zahřátí soustavy, příp. se spotřebuje k deformaci a destrukci vláken dřeva.

PŘÍKLAD 10.6

Mistr karate zlomil jediným úderem ruky (hmotnost ruky je asi $m_1 = 0{,}70\,\mathrm{kg}$) dřevěnou desku hmotnosti 0,14 kg (obr. 10.15a). Totéž provedl s betonovou dlaždicí o hmotnosti 3,2 kg. Tuhost k pro pružný ohyb desky má hodnotu $4{,}1{\cdot}10^4$ N/m a pro dlaždici $2{,}6{\cdot}10^6$ N/m. Deska praskne v okamžiku, kdy je prohnuta o $d = 16\,\mathrm{mm}$, u dlaždice stačí prohnutí o pouhý 1,1 mm (obr. 10.15c).*



Obr. 10.15 Příklad 10.6. (a) Mistr karate udeřil do ploché desky. Rychlost ruky těsně před úderem je $\boldsymbol{v}$. (b) Srážka ruky s deskou je dokonale nepružná. Po celou dobu trvání fáze ohybu mají ruka i deska společnou rychlost $\boldsymbol{V}$. (c) Deska praskne v okamžiku, kdy je její střed vychýlen o vzdálenost d.

(a) Určete pružnou energii při deformace desky a dlaždice bezprostředně před zlomením.

* Hodnoty jsou převzaty z S. R. Wilk, R. E. McNair a M. S. Feld: „The Physics of Karate", American Joural of Physics, September 1983.

ŘEŠENÍ: Pružný průhyb nosníku je popsán Hookovým zákonem. Podle vztahu (8.11) má tedy jeho deformační energie hodnotu $E_p = \frac{1}{2}kd^2$. Pro desku pak platí

$$E_p = \tfrac{1}{2}(4{,}1{\cdot}10^4\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}})(0{,}016\ \mathrm{m})^2 = \\ = 5{,}248\ \mathrm{J} \doteq 5{,}2\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Pro dlaždici je

$$E_p = \tfrac{1}{2}(2{,}6{\cdot}10^6\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}})(0{,}001\ 1\ \mathrm{m})^2 = \\ = 1{,}573\ \mathrm{J} \doteq 1{,}6\ \mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká musí být nejmenší rychlost ruky před úderem, aby se deska, resp. dlaždice zlomila? Srážku považujeme za dokonale nepružnou (obr. 10.15b). Dále předpokládáme, že se mechanická energie soustavy ruka + deska během pružného ohybu desky zachovává a že společná rychlost ruky i desky je bezprostředně před prasknutím desky nulová (obr. 10.15b).

ŘEŠENÍ: Ze zákona zachování mechanické energie při ohybu desky je zřejmé, že kinetická energie soustavy ruka + + deska na samém počátku ohybu je shodná s její elastickou energií E_p těsně před zlomením. Tato hodnota činí 5,2 J pro dřevěnou desku a 1,6 J pro betonovou dlaždici. Rychlost dopadající ruky musí být dostatečná k tomu, aby soustava ruka + deska měla po dokonale nepružné srážce potřebnou kinetickou energii E_k. Nejprve vypočteme společnou rychlost V soustavy ruka + deska na počátku ohybu. Vyjdeme z rovnosti kinetické energie a elastické energie a dostaneme

$$E_k = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = E_p,$$

tj.

$$V = \sqrt{\frac{2E_p}{m_1 + m_2}}.$$

Dosazením hodnot $m_1 = 0{,}70\ \mathrm{kg}$ a $m_2 = 0{,}14\ \mathrm{kg}$ pro desku a 3,2 kg pro dlaždici dostaneme pro desku

$$V = \sqrt{\frac{2(5{,}248\ \mathrm{J})}{(0{,}70\ \mathrm{kg} + 0{,}14\ \mathrm{kg})}} = 3{,}534\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Pro dlaždici je

$$V = \sqrt{\frac{2(1{,}573\ \mathrm{J})}{(0{,}70\ \mathrm{kg} + 3{,}2\ \mathrm{kg})}} = 0{,}898\ 1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Označme písmenem v rychlost ruky těsně před dopadem na desku či dlaždici. Srážka je popsána vztahem (10.35), ze kterého malou úpravou dostaneme

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} V.$$

Pro desku dostáváme

$$v = \left(\frac{0{,}70\ \mathrm{kg} + 0{,}14\ \mathrm{kg}}{0{,}70\ \mathrm{kg}}\right)(3{,}534\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \doteq \\ \doteq 4{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

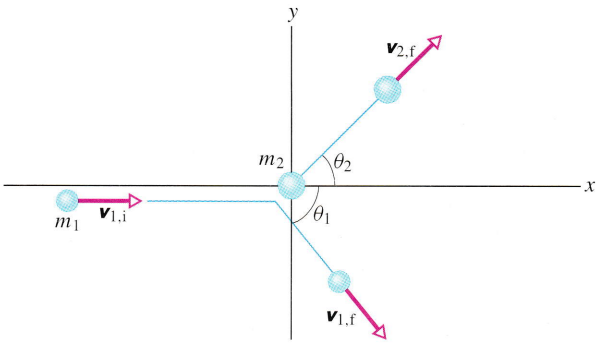
a pro dlaždici

$$v = \left(\frac{0{,}70\ \mathrm{kg} + 3{,}2\ \mathrm{kg}}{0{,}70\ \mathrm{kg}}\right)(0{,}898\ 1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \doteq \\ \doteq 5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Aby se zlomila dlaždice, musí být úder ruky asi o 20 % rychlejší než u dřevěné desky. Vlivem větší hmotnosti dlaždice se na zvýšení vnitřní energie soustavy spotřebuje větší část původní kinetické energie ruky než v případě dřevěné desky.

10.5 ŠIKMÉ SRÁŽKY

Doposud jsme se zabývali velmi speciálním případem srážek, tzv. přímými srážkami. Počáteční rychlosti obou srážejících se částic při nich ležely v jedné přímce. Od tohoto požadavku nyní ustoupíme a budeme se věnovat obecnějšímu případu, srážkám **šikmým**. Při nich mohou být počáteční rychlosti obou částic zcela obecné. I nejobecnější situaci však můžeme převést na případ srážky střely s pevným terčem. Stačí, abychom vztažnou soustavu pro popis srážky spojili s kteroukoli z obou částic, která se tak stane terčem. (Pokud částice tvoří izolovanou soustavu a mají stálé hmotnosti, bude tato vztažná soustava inerciální.) Typická ukázka takové situace je znázorněna na obr. 10.16: po srážce se tělesa pohybují v různých směrech, které s původním směrem střely svírají úhly θ_1 a θ_2.



Obr. 10.16 Pružná *šikmá* srážka dvou částic, z nichž jedna je před srážkou v klidu.

Ze zákona zachování hybnosti dostaneme pro situaci na obr. 10.16 dvě skalární rovnice, pro x-ovou a y-ovou

složku celkové hybnosti soustavy:

$$m_1 v_{1,\mathrm{i}} = m_1 v_{1,\mathrm{f}} \cos\theta_1 + m_2 v_{2,\mathrm{f}} \cos\theta_2 \qquad (10.37)$$

(x-ová složka)

a

$$0 = -m_1 v_{1,\mathrm{f}} \sin\theta_1 + m_2 v_{2,\mathrm{f}} \sin\theta_2 \qquad (10.38)$$

(y-ová složka).

Při pružné srážce se navíc zachovává i kinetická energie, tj.

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{i}}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,\mathrm{f}}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2,\mathrm{f}}^2 \qquad (10.39)$$

(kinetická energie).

Tyto tři rovnice obsahují sedm veličin: dvě hmotnosti m_1 a m_2, tři rychlosti $v_{1,\mathrm{i}}$, $v_{1,\mathrm{f}}$ a $v_{2,\mathrm{f}}$ a konečně dva úhly θ_1 a θ_2. Budeme-li znát kterékoliv čtyři z nich, určíme zbývající tři řešením soustavy rovnic (10.37) až (10.39). Velmi častá je situace, kdy jsou zadány obě hmotnosti, počáteční rychlost střely a jeden z úhlů. Výpočtem pak najdeme velikosti dvou výsledných rychlostí a zbývající úhel.

KONTROLA 6: Počáteční hybnost střely při srážce na obr. 10.16 má velikost $6\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, x-ová složka výsledné hybnosti střely je $4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a y-ová má hodnotu $-3\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) x-ovou a (b) y-ovou složku výsledné hybnosti terče.

PŘÍKLAD 10.7

Dvě částice stejných hmotností, z nichž jedna je v klidu, se pružně srazí. Ukažte, že po šikmé srážce se částice pohybují v navzájem kolmých směrech.

ŘEŠENÍ: Problém samozřejmě můžeme řešit přímo pomocí rov. (10.37), (10.38) a (10.39). Všimneme si však ještě jiného, elegantnějšího, postupu:

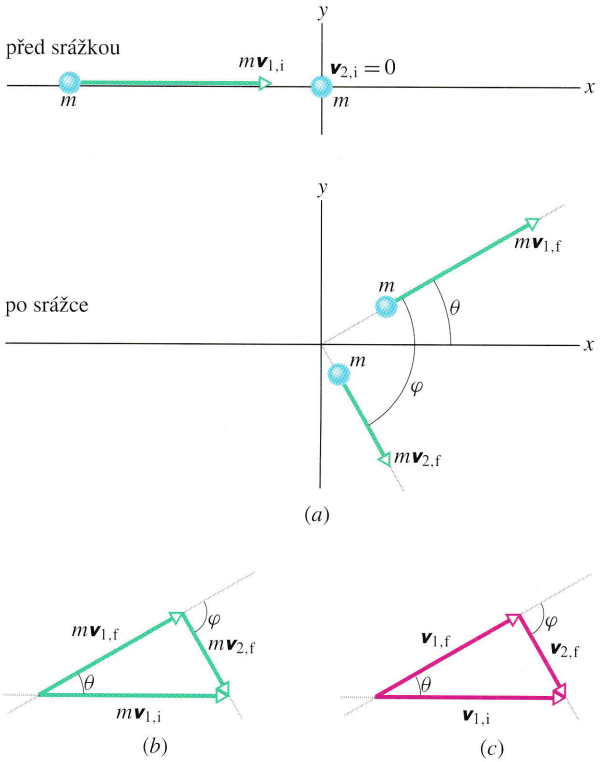
Obr. 10.17a ukazuje situaci před srážkou i po ní, s vyznačením vektorů hybností obou částic. Protože platí zákon zachování hybnosti, musí tyto tři vektory tvořit trojúhelník, zakreslený na obr. 10.17b. (Vektor $m\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{i}}$ je součtem vektorů $m\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{f}}$ a $m\boldsymbol{v}_{2,\mathrm{f}}$.) Hmotnosti obou částic jsou stejné, takže trojúhelník sestrojený stejným způsobem z vektorů rychlosti (obr. 10.17c) musí být podobný trojúhelníku na obr. 10.17b. Platí tedy

$$\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{i}} = \boldsymbol{v}_{1,\mathrm{f}} + \boldsymbol{v}_{2,\mathrm{f}}. \qquad (10.40)$$

Navíc platí rov. (10.39), která vyplývá ze zákona zachování kinetické energie soustavy. Členy $\frac{1}{2}m$ můžeme v této rovnici vykrátit a dostaneme

$$v_{1,\mathrm{i}}^2 = v_{1,\mathrm{f}}^2 + v_{2,\mathrm{f}}^2. \qquad (10.41)$$

Poslední rovnice ovšem představuje také vztah pro délky stran trojúhelníka na obr. 10.17c. Tento trojúhelník je nutně pravoúhlý (rov. (10.41) je vlastně zápisem Pythagorovy věty). Úhel φ mezi vektory $\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{f}}$ a $\boldsymbol{v}_{2,\mathrm{f}}$ na obr. 10.17 je tedy 90°. Ověřili jsme tak hypotézu vyslovenou v zadání úlohy.



Obr. 10.17 Příklad 10.7. Názorný důkaz tvrzení, že při pružné *šikmé* srážce dvou částic stejných hmotností, z nichž jedna je před srážkou v klidu, jsou jejich výsledné rychlosti kolmé.

PŘÍKLAD 10.8

Dva krasobruslaři směřující ke společnému místu kluziště se při setkání obejmou a realizují tak dokonale nepružnou srážku. Situace před srážkou a po ní je znázorněna na obr. 10.18. Aleš (hmotnost $m_\mathrm{A} = 83\,\mathrm{kg}$) se před srážkou pohyboval východním směrem rychlostí $v_\mathrm{A} = 6{,}2\,\mathrm{km/h}$. Barbora (hmotnost $m_\mathrm{B} = 55\,\mathrm{kg}$) směřovala na sever rychlostí $v_\mathrm{B} = 7{,}8\,\mathrm{km/h}$. Počátek soustavy souřadnic jsme zvolili v místě, kde došlo ke srážce, volba souřadnicových os je zřejmá z obrázku.

(a) Jakou rychlostí $\boldsymbol{V}$ se dvojice pohybuje po srážce?

ŘEŠENÍ: Při srážce platí zákon zachování hybnosti. Jeho rozepsáním do složek dostaneme

$$m_\mathrm{A} v_\mathrm{A} = MV\cos\theta \qquad (x\text{-ová složka}) \qquad (10.42)$$

a

$$m_\mathrm{B} v_\mathrm{B} = MV\sin\theta \qquad (y\text{-ová složka}). \qquad (10.43)$$

Platí $M = m_A + m_B$. Vydělíme-li rov. (10.43) rov. (10.42), pak

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55\,\text{kg})(7{,}8\,\text{km·h}^{-1})}{(83\,\text{kg})(6{,}2\,\text{km·h}^{-1})} = 0{,}834.$$

Odtud

$$\theta = 39{,}8^\circ \doteq 40^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

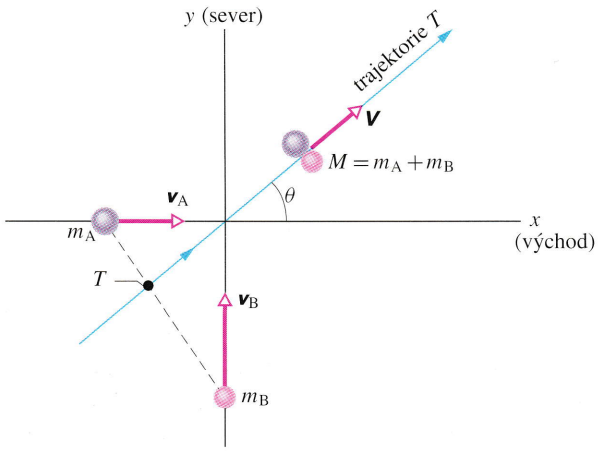
Z rov. (10.43) dostaneme

$$V = \frac{m_B v_B}{M \sin\theta} = \frac{(55\,\text{kg})(7{,}8\,\text{km·h}^{-1})}{(83\,\text{kg} + 55\,\text{kg})\sin 39{,}8^\circ} = \\ = 4{,}86\,\text{km·h}^{-1} \doteq 4{,}9\,\text{km·h}^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy před srážkou a po srážce?

ŘEŠENÍ: Tuto otázku můžeme zodpovědět, aniž bychom cokoli počítali. Po srážce je rychlost těžiště stejná jako rychlost V, vypočtená v části (a), tj. 4, 9 km·h^{-1} na severovýchod, pod úhlem 40° vzhledem k místní rovnoběžce. Rychlost pohybu těžiště není srážkou ovlivněna.

(c) Kolikrát se při srážce zmenší kinetická energie soustavy obou krasobruslařů?



Obr. 10.18 Příklad 10.8. Dva bruslaři, Aleš (A) a Barbora (B) (v obrázku, představujícím pohled shora, jsou pro jednoduchost znázorněni kuličkami) se setkají a pevně se spojí. Realizují tak dokonale nepružnou srážku, po které se pohybují společnou rychlostí $\boldsymbol{V}$, která svírá se směrem počáteční rychlosti Aleše úhel θ. V obrázku je také vyznačen pohyb těžiště soustavy bruslařů a poloha těžiště ve výchozí situaci.

ŘEŠENÍ: Kinetická energie před srážkou je

$$E_{k,i} = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \\ = \tfrac{1}{2}(83\,\text{kg})(6{,}2\,\text{km·h}^{-1})^2 + (\tfrac{1}{2})(55\,\text{kg})(7{,}8\,\text{km·h}^{-1})^2 = \\ = 3\,270\,\text{kg·km}^2\text{·h}^{-2}.$$

Kinetická energie po srážce je

$$\tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}(83\,\text{kg} + 55\,\text{kg})(4{,}86\,\text{km·h}^{-1})^2 = \\ = 1\,630\,\text{kg}\cdot(\text{km·h}^{-1})^2.$$

Hledaný poměr α je tedy

$$\alpha = \frac{E_{k,f} - E_{k,i}}{E_{k,i}} = \\ = \left(\frac{1\,630\,\text{kg}\cdot(\text{km·h}^{-1})^2 - 3\,270\,\text{kg}\cdot(\text{km·h}^{-1})^2}{3\,270\,\text{kg}\cdot(\text{km·h}^{-1})^2}\right) = \\ = -0{,}50. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při srážce bruslaři ztratí 50 % kinetické energie.

KONTROLA 7: Jak by se změnil úhel θ v příkladu 10.8 (obr. 10.18), kdyby Barbora byla (a) rychlejší, (b) hmotnější?

RADY A NÁMĚTY

Bod 10.1: *Jsou převody jednotek vždy nutné?*

Položme si otázku, zda je za všech okolností nutné převádět hodnoty veličin do soustavy jednotek SI.

Většinou je obvyklé vyjadřovat hodnoty fyzikálních veličin v jednotkách SI: například rychlost v metrech za sekundu, hmotnost v kilogramech apod. Někdy však není tento přepočet nutný. Při výpočtu úhlu θ v příkladu 10.8a jsme si mohli všimnout, že se jednotky vykrátily. Podobně se v příkladu 10.8c vykrátily jednotky ve výrazu pro poměr α. Nebylo tedy třeba převádět kinetickou energii na jouly. Poněvadž jsme si včas uvědomili, že se jednotky při výpočtu tak jako tak vykrátí, zůstali jsme u jednotek $\text{kg·km}^2\text{·h}^{-2}$.

10.6 JADERNÉ REAKCE A RADIOAKTIVNÍ ROZPAD

Zvláštním druhem srážek jsou **jaderné reakce**. Může se při nich měnit jak identita, tak i počet interagujících částic. Všimneme si také *radioaktivního rozpadu*, při kterém se jedna částice rozpadne na dvě jiné. Při obou těchto jevech je sice stav soustavy „před událostí" velice odlišný od stavu „po události", hybnost soustavy a její *celková* energie se zachovávají. Při studiu problematiky jaderných reakcí či radioaktivního rozpadu tedy můžeme používat stejných metod jako u srážek.

PŘÍKLAD 10.9

Radioaktivní jádro uranu ^{235}U se samovolně rozpadne na thorium ^{231}Th a α-částici (jádro atomu helia, označované jako α nebo $^4_2$He):

$$^{235}\mathrm{U} \rightarrow \alpha + {}^{231}\mathrm{Th}.$$

Částice alfa ($m_\alpha = 4{,}00$ u) získá při rozpadu kinetickou energii $E_{\mathrm{k},\alpha} = 4{,}60$ MeV. Jaká je kinetická energie jádra ^{231}Th ($m_{\mathrm{Th}} = 231$ u)?

ŘEŠENÍ: Jádro ^{235}U bylo před rozpadem v klidu vzhledem k laboratorní vztažné soustavě. Po rozpadu odletí částice α s kinetickou energií $E_{\mathrm{k},\alpha}$ a jádro ^{231}Th se začne pohybovat opačným směrem s kinetickou energií $E_{\mathrm{k,Th}}$. Ze zákona zachování hybnosti dostaneme

$$0 = m_{\mathrm{Th}} v_{\mathrm{Th}} + m_\alpha v_\alpha,$$

tj.

$$m_{\mathrm{Th}} v_{\mathrm{Th}} = -m_\alpha v_\alpha. \qquad (10.44)$$

Obě strany rov. (10.44) umocníme na druhou:

$$m_{\mathrm{Th}}^2 v_{\mathrm{Th}}^2 = m_\alpha^2 v_\alpha^2. \qquad (10.45)$$

Užitím vztahu pro kinetickou energii $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m v^2$ můžeme rov. (10.45) přepsat ve tvaru

$$m_{\mathrm{Th}} E_{\mathrm{k,Th}} = m_\alpha E_{\mathrm{k},\alpha}.$$

Je tedy

$$E_{\mathrm{k,Th}} = E_{\mathrm{k},\alpha} \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Th}}} = (4{,}60\ \mathrm{MeV}) \left(\frac{4{,}00\ \mathrm{u}}{231\ \mathrm{u}} \right) =$$

$$= 7{,}97 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{MeV} = 79{,}7\ \mathrm{keV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kinetická energie soustavy po rozpadu je součtem hodnot 4,60 MeV (α-částice) a 0,079 7 MeV (jádro thoria), tj. 4,68 MeV. Těžké jádro atomu ^{231}Th však nese pouhých 1,7 % celkové hodnoty.

PŘÍKLAD 10.10

Nejdůležitější jadernou reakcí, při níž se uvolňuje energie během slučování (fúze) jader, je tak zvaná d-d reakce. Její schéma můžeme zapsat takto:

$$\mathrm{d} + \mathrm{d} = \mathrm{t} + \mathrm{p}. \qquad (10.46)$$

Jednotlivé symboly v této rovnici označují různé izotopy vodíku. Jejich charakteristiky jsou uvedeny v následující tabulce:

SYMBOLY		JMÉNO	HMOTNOST
p	^{1}H	proton	$m_{\mathrm{p}} = 1{,}007\,83$ u
d	^{2}H	deuteron	$m_{\mathrm{d}} = 2{,}014\,10$ u
t	^{3}H	triton	$m_{\mathrm{t}} = 3{,}016\,05$ u

(a) Jak velká energie se uvolní v důsledku hmotnostního schodku Δm?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (8.40) je energie Q uvolněná či spotřebovaná při reakci dána vztahem $Q = -\Delta m c^2$. V našem případě je $\Delta m = m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{t}} - 2m_{\mathrm{d}}$. Je tedy

$$Q = -\Delta m c^2 = (2m_{\mathrm{d}} - m_{\mathrm{p}} - m_{\mathrm{t}})c^2 =$$

$$= (2 \cdot 2{,}014\,10\ \mathrm{u} - 1{,}007\,83\ \mathrm{u} - 3{,}016\,05\ \mathrm{u}) \cdot$$

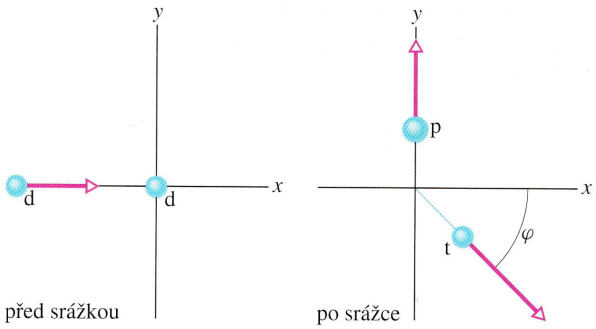
$$\cdot (931{,}5\ \mathrm{MeV/u}) =$$

$$= (0{,}004\,32\ \mathrm{u})(931{,}5\ \mathrm{MeV/u}) =$$

$$= 4{,}02\ \mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při výpočtu jsme pro c^2 použili hodnotu 931,5 MeV/u (vztah (8.43)).

Kladná hodnota Q (jako např. v této úloze) značí, že reakce je **exotermická** a energie uvolněná díky hmotnostnímu schodku se předá vzniklým částicím v podobě energie kinetické. Tato hodnota představuje nepatrný zlomek hmotnosti výchozích částic. Činí $0{,}004\,32/(2 \cdot 2{,}014\,10) \sim 0{,}001$, tj. asi 0,1 %. Při **endotermických** reakcích je hodnota Q naopak záporná. Dochází při nich k úbytku kinetické energie interagujících částic, který přispěje ke zvýšení hmotnosti produktů reakce. Při $Q = 0$ představuje reakce *pružnou* srážku. Hmotnost ani kinetická energie soustavy se při ní nemění.



Obr. 10.19 Příklad 10.10. Letící deuteron (d) narazí do jiného deuteronu, který je v klidu. Dojde k jaderné reakci, při které vznikne proton (p) a triton (t).

(b) Uvažujme srážku dvou deuteronů, z nichž jeden má kinetickou energii $E_{\mathrm{k,d}} = 1{,}50$ MeV a druhý je v klidu. Dojde k reakci popsané rov. (10.46). Proton vzniklý při reakci se pohybuje ve směru kolmém k počáteční rychlosti prvního deuteronu a má kinetickou energii 3,39 MeV (obr. 10.19). Určete kinetickou energii tritonu.

ŘEŠENÍ: Energie Q uvolněná při reakci díky hmotnostnímu schodku přispěje ke zvýšení kinetické energie soustavy. Platí tedy

$$Q = \Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k,p}} + E_{\mathrm{k,t}} - E_{\mathrm{k,d}}.$$

Hodnotu Q jsme již určili v části (a) této úlohy. Z předchozího vztahu vyjádříme kinetickou energii tritonu $E_{\mathrm{k,t}}$:

$$E_{\mathrm{k,t}} = Q + E_{\mathrm{k,d}} - E_{\mathrm{k,p}} =$$

$$= (4{,}02\ \mathrm{MeV} + 1{,}50\ \mathrm{MeV} - 3{,}39\ \mathrm{MeV}) =$$

$$= 2{,}13\ \mathrm{MeV}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jaký úhel svírá směr pohybu tritonu se směrem pohybu prvního deuteronu (obr. 10.19)?

ŘEŠENÍ: Při reakci popsané rov. (10.46) platí samozřejmě i zákon zachování hybnosti. Ten jsme však dosud nepoužili. Přivede nás ke dvěma skalárním rovnicím

$$m_d v_d = m_t v_t \cos\varphi \quad (x\text{-ová složka}), \tag{10.47}$$

$$0 = m_p v_p + m_t v_t \sin\varphi \quad (y\text{-ová složka}). \tag{10.48}$$

Z rov. (10.48) plyne

$$\sin\varphi = -\frac{m_p v_p}{m_t v_t}. \tag{10.49}$$

S použitím vztahu pro kinetickou energii ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$) můžeme hybnost mv vyjádřit ve tvaru $\sqrt{2mE_k}$ a přepsat rov. (10.49) takto:

$$\sin\varphi = -\sqrt{\frac{m_p E_{k,p}}{m_t E_{k,t}}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{(1{,}01\ \text{u})(3{,}39\ \text{MeV})}{(3{,}02\ \text{u})(2{,}13\ \text{MeV})}} = -0{,}730,$$

$$\varphi = -46{,}9°. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Srážky

Srážkou rozumíme děj, při němž na sebe dvě tělesa (příp. i více těles) působí po krátkou dobu značnými silami. Tyto síly jsou vnitřními silami soustavy těles, která se účastní srážky. Bývají mnohem větší než síly vnější, které mohou během srážky na soustavu rovněž působit. Zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie soustavy tvořené oběma tělesy umožňují předpovědět výsledek srážky na základě porovnání těchto veličin bezprostředně před srážkou a bezprostředně po ní. Mohou také napomoci k pochopení podstaty interakčních sil, jimiž na sebe tělesa během srážky působí.

Impulz síly a hybnost

Z druhého Newtonova zákona lze odvodit **vztah mezi změnou hybnosti** částice a **impulzem** výslednice sil, které na ni působí

$$\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{J}, \tag{10.4}$$

kde $\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i = \Delta\boldsymbol{p}$ je změna hybnosti částice a $\boldsymbol{J}$ je **impulz** výslednice sil $\boldsymbol{F}(t)$

$$\boldsymbol{J} = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{10.3}$$

Označíme-li pro případ srážky probíhající v ose x symbolem $\overline{F}$ průměrnou hodnotu síly $\boldsymbol{F}_x(t)$ v časovém intervalu Δt měřeném od okamžiku t_i do okamžiku t_f, dostaneme vztah

$$J = \overline{F}\,\Delta t. \tag{10.8}$$

Průměrná síla působící na pevné těleso při dopadu částic o hmotnosti m a rychlosti v, jejichž tok je ustálený, je dána vztahem

$$\overline{F} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v, \tag{10.10}$$

kde zlomek $n/\Delta t$ představuje počet částic, které na těleso dopadnou za každou sekundu, a Δv je změna rychlosti každé z těchto částic při srážce. Průměrnou sílu můžeme také vyjádřit ve tvaru

$$\overline{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v, \tag{10.13}$$

kde $\Delta m/\Delta t$ je hmotnostní tok dopadajících částic. Pokud se částice při srážce zastaví, je třeba dosadit do vztahů (10.10) a (10.13) hodnotu $\Delta v = -v$. Jestliže se pružně odrazí, je $\Delta v = -2v$.

Pružná přímá srážka

Při *pružné srážce* se zachovává celková kinetická energie soustavy těles účastnících se srážky. Při pružné přímé srážce dvou těles, při níž je některé z nich před srážkou v klidu (střela 1 narazí do tzv. pevného terče 2), vedou zákony zachování hybnosti a kinetické energie soustavy k následujícím vztahům pro výsledné rychlosti těles:

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \tag{10.18}$$

a

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}. \tag{10.19}$$

Index (i) označuje hodnoty veličin před srážkou, index (f) odpovídá situaci po srážce. Jsou-li před srážkou v pohybu obě tělesa, jsou jejich rychlosti bezprostředně po srážce dány vztahy

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,i} \tag{10.28}$$

a

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,i}. \tag{10.29}$$

Přímá nepružná srážka

Při *nepružné srážce* se již celková kinetická energie soustavy těles nezachovává. Zákon zachování hybnosti soustavy však platí. Pokud tělesa při srážce splynou, jedná se o **dokonale nepružnou srážku**. Tento případ odpovídá největšímu přípustnému poklesu kinetické energie soustavy (ze všech možností průběhu nepružné srážky se stejnými výchozími podmínkami). (Kinetická energie soustavy nemusí však klesnout až k nulové hodnotě.) Při přímé

dokonale nepružné srážce střely o rychlosti v s pevným terčem vyplývá vztah pro společnou rychlost V obou těles po srážce přímo ze zákona zachování hybnosti:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)V. \tag{10.34}$$

Pokud se před srážkou pohybují obě tělesa, má zákon zachování hybnosti tvar

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V. \tag{10.36}$$

Pohyb těžiště

Pohyb těžiště soustavy těles není jejich srážkou nijak ovlivněn, ať již jde o srážku pružnou, či nepružnou. V případě uzavřené izolované soustavy je rychlost jejího těžiště konstantní a platí pro ni

$$v_T = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{i}} + m_2 v_{2,\mathrm{i}}}{m_1 + m_2} = \\ = \frac{m_1 v_{1,\mathrm{f}} + m_2 v_{2,\mathrm{f}}}{m_1 + m_2}. \tag{10.30}$$

Šikmé srážky

Při **šikmé** srážce se hybnost soustavy opět zachovává. Tentokrát však zákon zachování hybnosti vede ke dvěma skalárním rovnicím: pro x-ovou a y-ovou složku vektoru hybnosti. Jejich řešením můžeme získat rychlosti těles po srážce pouze za předpokladu, že je srážka dokonale nepružná. V tomto případě máme totiž k dispozici důležitý údaj o pohybovém stavu těles po srážce: tělesa se pohybují stejnou rychlostí. Snadno pak určíme i energiovou ztrátu, k níž při srážce došlo. V ostatních případech samozřejmě zákon zachování hybnosti a zákon zachování celkové energie soustavy (nikoli tedy jen kinetické) také platí. Neznáme-li však mechanismus srážky, nemůžeme o energiové bilanci předem říci nic bližšího. K vyřešení úlohy proto potřebujeme další údaje, například směr rychlosti některého z těles po srážce.

Jaderné reakce a radioaktivní rozpad

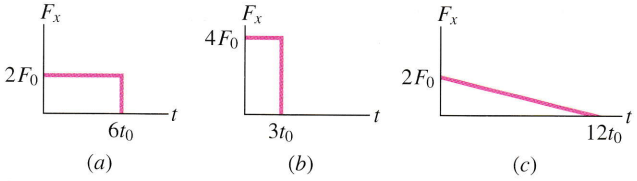
Při *jaderné reakci* nebo *radioaktivním rozpadu* jader se zachovává hybnost a *celková* energie soustavy. Proto i tyto děje řadíme do kategorie srážek. Jejich zvláštnost však spočívá v tom, že se při nich může měnit hmotnost soustavy i identita samotných částic. Změně celkové hmotnosti soustavy o hodnotu Δm odpovídá energiový ekvivalent $\Delta m c^2$. Odpovídající změna celkové energie soustavy je tedy dána vztahem

$$Q = -\Delta m\, c^2.$$

Je-li hodnota Q kladná, jedná se o tzv. **exotermickou** reakci. Energie Q, odpovídající hmotnostnímu schodku Δm, se projeví přírůstkem výsledné kinetické energie částic. Při záporné hodnotě Q jde o reakci **endotermickou**. Kinetická energie částic při ní klesá ve prospěch energie odpovídající zvýšení celkové hmotnosti soustavy.

OTÁZKY

1. Na obr. 10.20 jsou znázorněny tři grafy časové závislosti síly, která působila na jisté těleso při srážce. Seřaďte je sestupně podle velikosti impulzu síly.

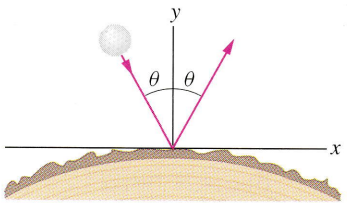


Obr. 10.20 Otázka 1

2. Obr. 10.21 ukazuje náraz golfového míčku do kmene stromu, viděný z nadhledu. Předpokládejme, že se velikost rychlosti míče při srážce nemění. Při nárazu působí kmen na míček silou $\boldsymbol{F}$, odpovídající změna hybnosti míčku je $\Delta\boldsymbol{p}$. Jak se změní následující veličiny, bude-li úhel θ větší? (Předpokládejte, že doba trvání srážky zůstane stejná.) (a) Δp_x, (b) Δp_y, (c) velikost vektoru $\Delta\boldsymbol{p}$, (d) F_x, (e) F_y a (f) velikost síly $\boldsymbol{F}$?

3. V následující tabulce jsou uvedeny hmotnosti (v kilogramech) a rychlosti (v metrech za sekundu) dvou částic z obr. 10.9. ve třech různých situacích. Ve kterých z nich je těžiště soustavy v klidu?

SITUACE	m_1	v_1	m_2	v_2
a	2	3	4	−3
b	6	2	3	−4
c	4	3	4	−3

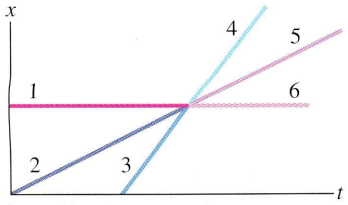


Obr. 10.21 Otázka 2

4. (a) Jak se změní výška výstupu koule 1 z př. 10.3 po odrazu, zvýší-li se hmotnost koule 2? Do jaké výšky vystoupí po odrazu (b) koule 1, resp. (c) koule 2, je-li $m_1 = m_2$?

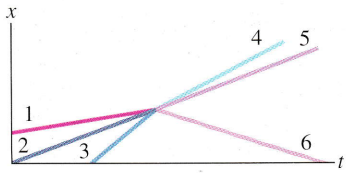
5. Dvě tělesa pohybující se podél osy x se pružně srazí. Grafy na obr. 10.22 představují časové závislosti jejich poloh a polohy

těžiště soustavy. Z grafu vyčtěte následující informace: (a) Je některé z těles před srážkou v klidu? Který z grafů přísluší poloze těžiště soustavy (b) před srážkou a (c) po srážce? (d) Rozhodněte, zda hmotnost tělesa, které bylo před srážkou rychlejší, je větší, menší, nebo stejná jako hmotnost druhého tělesa.



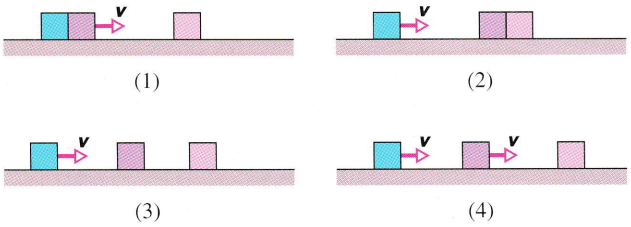
Obr. 10.22 Otázka 5

6. Na obr. 10.23 jsou grafy časové závislosti poloh dvou těles i polohy těžiště soustavy v případě přímé srážky. Zjistěte, který z nich odpovídá pohybu (a) rychlejšího tělesa před srážkou, (b) těžiště soustavy před srážkou a (c) po srážce, (d) každého z těles po srážce. (e) Rozhodněte, zda hmotnost tělesa, jehož rychlost před srážkou byla vyšší, je větší, menší, nebo stejná jako hmotnost druhého tělesa



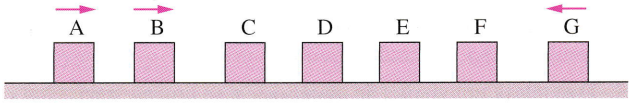
Obr. 10.23 Otázka 6

7. Na obr. 10.24 jsou čtyři různé situace při srážce tří stejných kostek, které se pohybují po dokonale hladké vodorovné podložce. Při srážkách (1) a (2) jsou dvě z kostek slepeny. Rychlost $\boldsymbol{v}$, která je v obrázku vyznačena, je ve všech případech stejná. Seřaďte jednotlivé situace sestupně podle (a) velikosti celkové hybnosti soustavy po srážce, (b) velikosti výsledné rychlosti kostky, která je nejdále vpravo.



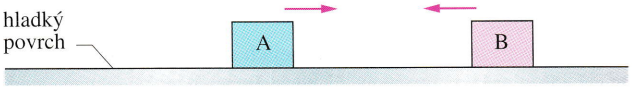
Obr. 10.24 Otázka 7

8. Obr. 10.25 zachycuje sedm kostek na dokonale hladké vodorovné podložce. Kostky A a B se zpočátku pohybují vpravo a kostka G vlevo. Velikost rychlosti každé z nich je $v = 3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Zbývající kostky jsou v klidu. Dojde k sérii pružných srážek. Určete vektory rychlosti všech kostek po poslední srážce.



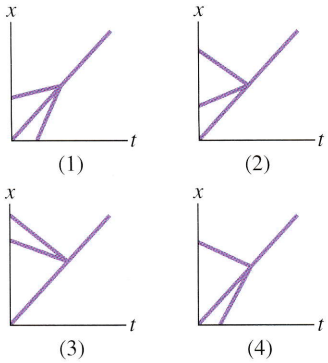
Obr. 10.25 Otázka 8

9. Kostky A a B na obr. 10.26 se pohybují po dokonale hladké podložce ve vyznačených směrech. Velikosti jejich hybností jsou $9\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ (kostka A) a $4\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ (kostka B). (a) Určete směr pohybu těžiště soustavy. (b) Předpokládejme, že se obě kostky při srážce pevně spojí. Jakým směrem se bude pohybovat takto vzniklé těleso po srážce? (c) Experiment ukázal, že se těleso A pohybuje po srážce vlevo. Rozhodněte, zda je jeho hybnost větší, menší, nebo stejná jako hybnost tělesa B.

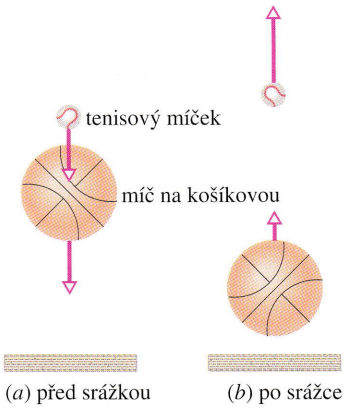


Obr. 10.26 Otázka 9

10. Na obr. 10.27 jsou čtyři grafy znázorňující časové závislosti polohy dvou těles pohybujících se podél osy x a časovou závislost polohy těžiště jejich soustavy. Tělesa se dokonale nepružně srazí. Pro případ grafu (1) zjistěte, zda se (a) obě tělesa a (b) těžiště soustavy pohybují v kladném, či záporném směru osy x. (c) Které z grafů představují fyzikálně nepřípustnou situaci?



Obr. 10.27 Otázka 10



Obr. 10.28 Otázka 12 a úloha 37

11. Těleso Q s hybností $\boldsymbol{p}_\mathrm{Q} = (2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ se dokonale

nepružně srazí s tělesem R, jehož hybnost je $\boldsymbol{p}_R = (8\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})$ kg·m·s^{-1}. Určete směr pohybu obou těles po srážce.

12. Vyzkoušejme si následující pokus: vezmeme postupně tenisový míček a basketbalový míč a každý z nich upustíme na tvrdou podlahu přibližně z výšky ramen. Míče se odrazí a vyskočí obecně do různých výšek. Poté uspořádáme pokus tak, že tenisový míček vypustíme za basketbalovým míčem s malým časovým odstupem, avšak přesně nad ním (obr. 10.28a). Výsledek pokusu bude zcela jiný než v předchozím případě, možná na první pohled poněkud překvapivý. (a) Rozhodněte, zda výška výstupu basketbalového míče bude ve srovnání s výsledkem prvního pokusu větší, nebo menší (obr. 10.28b). (b) Rozhodněte, zda výška, do které po odrazu vystoupí tenisový míč, převýší součet výšek výstupu obou míčů po samostatných odrazech (úloha 37).

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 10.2 Impulz síly a hybnost

1C. Hybnost automobilu o hmotnosti 1 500 kg vzrostla během 12 s o $9{,}0 \cdot 10^3$ kg·m·s^{-1}. (a) Za předpokladu, že urychlující síla je konstantní, určete její velikost. (b) Určete přírůstek rychlosti automobilu.

2C. Kulečníkové tágo udeří do stojící koule průměrnou silou o velikosti 50 N. Úder trvá 10 ms. Jakou rychlost koule získá, je-li její hmotnost 0,20 kg?

3C. Výrobce automobilů testuje odolnost nových vozů při nárazu pomocí tzv. bariérových zkoušek. Při jedné z nich narazil automobil o hmotnosti 2 300 kg do mostního pilíře rychlostí 15 m·s^{-1} a zastavil se za 0,56 s. Předpokládejme, že při nárazu působila konstantní síla. Jaká byla její velikost?

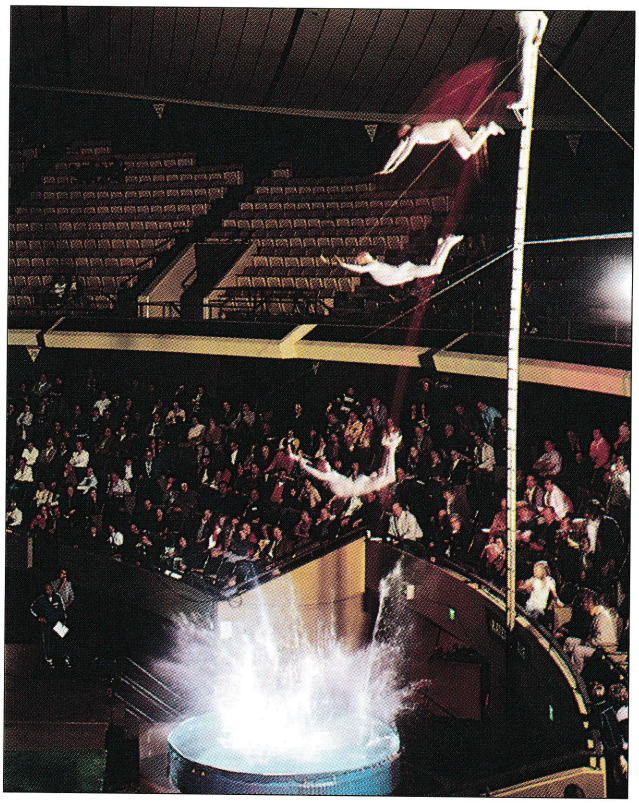
4C. Míč o hmotnosti m narazil kolmo do zdi rychlostí $\boldsymbol{v}$ a odrazil se zpět stejně velkou rychlostí. (a) Určete průměrnou sílu, kterou stěna působila na míč, trval-li náraz po dobu Δt. (b) Pro číselný výpočet použijte hodnoty $m = 140$ g, $v = 7{,}8$ m·s^{-1} a $\Delta t = 3{,}8$ ms.

5C. Nadhazovač hodil baseballový míč rychlostí 40 m·s^{-1}. Pálkař jej odehrál zpět přesně v opačném směru rychlostí 60 m·s^{-1}. Určete průměrnou sílu, jíž působila pálka na míč, trval-li úder 5,0 ms.

6C. Jako sedmnáctiletý ohromoval artista Henri LaMothe diváky skoky z výšky 12 m do vody hluboké pouhých 30 cm (obr. 10.29). Za předpokladu, že se jeho pád zastavil právě u dna vodní nádrže, vypočtěte průměrnou brzdnou sílu, která na artistu o hmotnosti 73 kg ve vodě působila.

7C. V únoru 1955 byla zaznamenána pozoruhodná událost: jistému parašutistovi se po seskoku z výšky 366 m nepodařilo otevřít padák. Naštěstí spadl do sněhu, a tak byla jeho zranění jen nepatrná. Předpokládejme, že velikost jeho rychlosti měla bezprostředně před dopadem hodnotu 56 m·s^{-1}, jeho hmotnost činila 85 kg a velikost největší brzdné síly, kterou může člověk přežít, je $1{,}2 \cdot 10^5$ N. Určete nejmenší tloušťku sněhové pokrývky, v níž tehdy let parašutisty tak šťastně skončil.

8C. Při srážce trvající 27 ms působila na ocelovou kouli o hmotnosti 0,40 kg a rychlosti 14 m·s^{-1} stálá síla o velikosti 1 200 N. Určete výslednou rychlost koule, působila-li síla přímo proti směru jejího pohybu.



Obr. 10.29 Cvičení 6

9C. Medicinbal o hmotnosti 1,2 kg dopadne kolmo na podlahu rychlostí 25 m·s^{-1} a odrazí se v opačném směru rychlostí 10 m·s^{-1}. (a) Vypočtěte impulz síly, která na míč při odrazu působila. (b) Za předpokladu, že míč byl s podlahou v kontaktu 0,020 s, určete průměrnou sílu působící na míč během srážky.

10C. Hráč golfu odpálí míček rychlostí o velikosti 50 m·s^{-1} pod elevačním úhlem 30°. Předpokládejme, že míč má hmotnost 46 g a je v kontaktu s golfovou holí po dobu 1,7 ms. Určete (a) impulz síly, kterou při úderu působí hůl na míček, (b) impulz síly, která působí na golfovou hůl, (c) průměrnou sílu působící na míček a (d) práci, kterou vykonala síla působící na míček.

11Ú. Automobil o hmotnosti 1 400 kg jede na sever (kladný směr osy y) rychlostí 5,3 m·s^{-1}. Po průjezdu pravoúhlou pravotočivou zatáčkou (do kladného směru osy x), který trval 4,6 s, ztratí řidič na okamžik pozornost. Vůz narazí do stromu a zastaví

se za 350 ms. Pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic zapište vektor impulzu síly, která působila na vůz (a) při zatáčení, (b) při srážce. Jaká je velikost průměrné síly působící na vůz (c) při zatáčení a (d) při srážce? (e) Jaký úhel svírá průměrná síla vypočtená v části (c) s kladným směrem osy x?

12Ú. Velikost síly, která působí na těleso o hmotnosti 10 kg, rovnoměrně vzroste za 4,0 s z nulové hodnoty na hodnotu 50 N. Jakou rychlostí se těleso pohybuje na konci tohoto časového intervalu, bylo-li zpočátku v klidu?

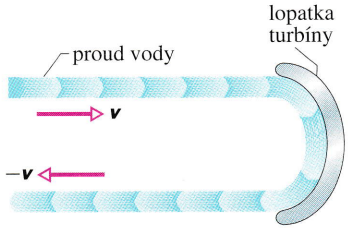
13Ú. Při střelbě z brokovnice do terče připevněného k nepohyblivé stěně dopadá na stěnu 10 broků za sekundu. Brok má hmotnost 2,0 g a do stěny narazí rychlostí 500 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jaká je jeho hybnost a (b) kinetická energie? Určete velikost průměrné síly, jíž působí na zeď (c) jednotlivý brok, (d) proud broků. Předpokládáme, že srážka každého broku se zdí trvá 0,6 ms. Proč se hodnoty získané v částech (c) a (d) tak výrazně liší?

14Ú. Při střelbě ze samopalu používaného při natáčení filmů vyletují kulky o hmotnosti 50,0 g rychlostí 1 000 $m \cdot s^{-1}$. Herec dokáže na samopal působit silou o velikosti nejvýše 180 N. Kolik ran za minutu může vypálit, aby samopal ještě udržel?

15Ú. Filmového Supermana nelze zastřelit. Všechny střely se totiž od jeho hrudi odrazí (obr. 10.30). Předpokládejme, že zločinec vystřelí na Supermana 100 ran za minutu. Každá kulka má hmotnost 3 g a letí rychlostí 500 $m \cdot s^{-1}$. Od Supermana se odráží zpět stejně velkou rychlostí. Jakou průměrnou silou působí tok kulek na Supermanovu hruď?

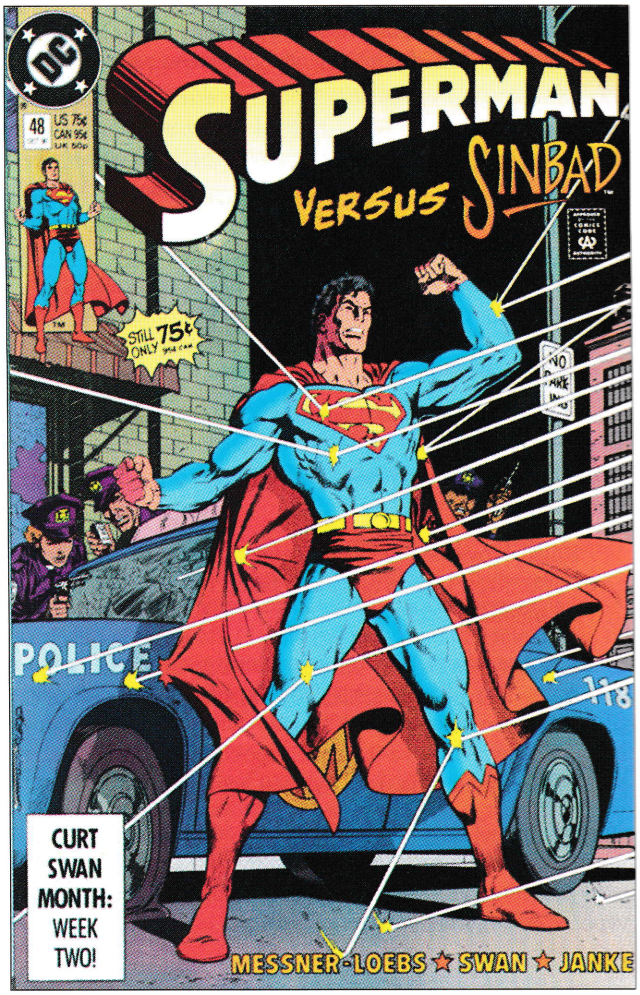
16Ú. Při mohutné bouři dopadají na zem kroupy o průměru 1,0 cm rychlostí 25 $m \cdot s^{-1}$. Lze odhadnout, že v krychlovém metru vzduchu je asi 120 krup. (a) Jakou hmotnost má jedna kroupa (hustota 0,92 g/cm^3)? (b) Jakou průměrnou silou působí krupobití na vodorovný terén o obsahu 10 m × 20 m? Předpokládáme, že se kroupy po dopadu neodrážejí.

17Ú. Voda proudí kolem nepohyblivé turbínové lopatky ve tvaru misky podle obr. 10.31. Počáteční rychlost vodního proudu je $\boldsymbol{v}$ a výsledná $-\boldsymbol{v}$ (obr. 10.31). Hmotnostní průtok vody je μ kg/min. Jakou silou působí voda na lopatku?



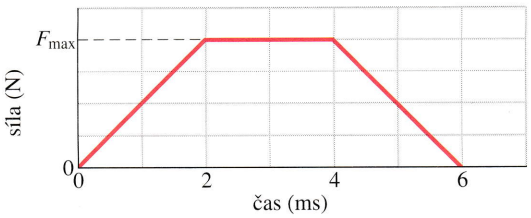
Obr. 10.31 Úloha 17

18Ú. Voda proudí z hadice přímo proti zdi. Určete průměrnou sílu, kterou působí vodní proud na zeď, vytéká-li z hadice každou sekundu 300 cm^3 vody rychlostí 5,0 $m \cdot s^{-1}$. Předpokládáme, že voda se od zdi neodráží. Jeden krychlový centimetr vody má hmotnost 1,0 g.



Obr. 10.30 Úloha 15

19Ú. Na obr. 10.32 je přibližný průběh časové závislosti síly, která působila na tenisový míček o hmotnosti 58 g při jeho nárazu do zdi. Míček dopadl na zeď kolmo rychlostí 34 $m \cdot s^{-1}$ a odrazil se přesně opačným směrem se stejně velkou rychlostí. Určete největší hodnotu velikosti síly F_{max}, která při této srážce na míček působila.

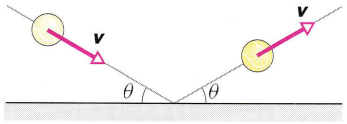


Obr. 10.32 Úloha 19

20Ú. Míček o hmotnosti 150 g narazí na stěnu rychlostí 5,2 $m \cdot s^{-1}$ a odrazí se v opačném směru. Jeho kinetická energie se při odrazu zmenší na polovinu. (a) Vypočtěte rychlost míčku bezprostředně po odrazu. (b) Určete velikost impulzu síly, kterou

působil míček na stěnu. (c) Určete velikost průměrné síly, kterou působil míček na stěnu, trvala-li srážka 7,6 ms.

21Ú. Na obr. 10.33 je míček, který narazil do podlahy rychlostí o velikosti 6,0 m·s^{-1} pod úhlem $\theta = 30°$. Po odrazu měl míček stejně velkou rychlost, která svírala s podlahou úhel 30°. Srážka trvala 10 ms. (a) Vypočtěte impulz síly, která při srážce působila na míček. (b) Jakou průměrnou silou působil míček na podlahu?



Obr. 10.33 Úloha 21

22Ú. Automaticky řízená kosmická sonda o hmotnosti 2 500 kg letí stálou rychlostí o velikosti 300 m·s^{-1}. V jistém okamžiku se zažehnou raketové motory, které mají tah 3 000 N. Zážeh trvá 65,0 s. (a) Určete změnu hybnosti sondy, směřuje-li tahová síla motorů vpřed, vzad nebo kolmo k okamžitému směru pohybu. (b) Pro každý z těchto případů určete odpovídající změnu kinetické energie sondy. Předpokládáme, že hmotnost paliva spotřebovaného při tomto krátkém zážehu je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti sondy.

23Ú. Těleso o hmotnosti m se pohybuje po přímce počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}$. Vlivem síly, která na těleso po jistou dobu působí ve směru jeho pohybu, se jeho rychlost mění. Výslednou rychlost označme $\boldsymbol{u}$ a odpovídající impulz působící síly $\boldsymbol{J}$. Ukažte, že práce vykonaná touto silou za uvedenou dobu je dána vztahem $W = \frac{1}{2}J(u + v)$.

24Ú. Po řízeném výbuchu nálože ve speciálních spojovacích šroubech se kosmická loď rozdělí na dvě části o hmotnostech 1 200 kg a 1 800 kg. Obě části na sebe tedy po jistou dobu silově působí. Odpovídající velikost impulzu každé z interakčních sil je 300 N·s. Jakou vzájemnou rychlostí se od sebe oddělené části vzdalují?

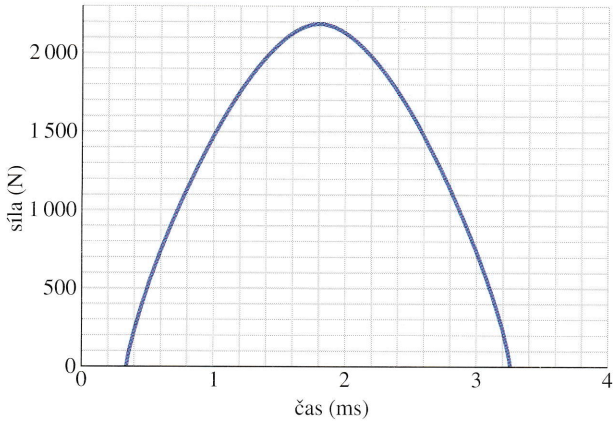
25Ú. Na obr. 10.34 je graf časové závislosti síly, která působila při odpálení kriketového míčku o hmotnosti 0,5 kg. Před úderem byl míček v klidu. Jakou měl míček rychlost bezprostředně poté, co velikost síly klesla k nulové hodnotě?

26Ú. Fotbalista odkopne míč o hmotnosti 0,45 kg, který leží na zemi. Noha fotbalisty je s míčem v kontaktu po dobu $3{,}0 \cdot 10^{-3}$ s a časová závislost síly působící na míč má tvar

$$F(t) = [(6{,}0 \cdot 10^6)t - (2{,}0 \cdot 10^9)t^2]\,\mathrm{N}$$

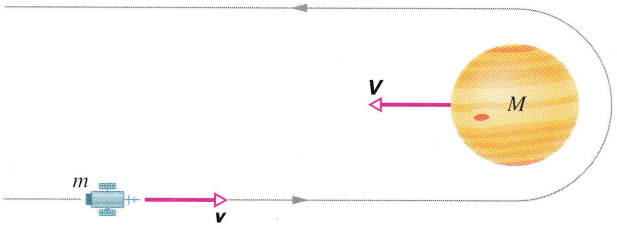
pro $0 \leqq t \leqq 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ s. Čas t je měřen v sekundách. Určete velikosti následujících vektorů: (a) impulz síly, která působila na míč, (b) průměrnou a (c) maximální sílu, kterou při výkopu působila na míč noha fotbalisty, (d) rychlost míče těsně po výkopu.

27Ú. Kosmická loď *Voyager 2* (hmotnost m a rychlost $\boldsymbol{v}$ vzhledem ke Slunci) se přibližuje k planetě Jupiter (hmotnost M a rychlost $\boldsymbol{V}$ vzhledem ke Slunci), jak ukazuje obr. 10.35. Loď



Obr. 10.34 Úloha 25

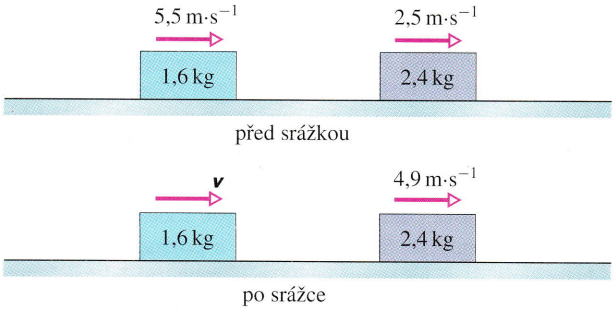
obletí planetu a vrací se zpět v protisměru (gravitační prak). Určete výslednou rychlost lodi vzhledem ke Slunci. Předpokládáme, že $v = 12\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ a $V = 13\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ (oběžná rychlost Jupitera). Hmotnost Jupitera je mnohem větší než hmotnost kosmické lodi, $M \gg m$.



Obr. 10.35 Úloha 27

ODST. 10.3 Pružné přímé srážky

28C. Kostky na obr. 10.36 kloužou po dokonale hladké podložce. (a) Určete rychlost levé kostky po srážce. (b) Je srážka pružná? (c) Předpokládejme nyní, že rychlost pravé kostky před srážkou má opačný směr než na prvním obrázku. Je možné, aby v takovém případě měla rychlost $\boldsymbol{v}$ levé kostky směr vyznačený na druhém obrázku, znázorňujícím situaci po srážce?



Obr. 10.36 Cvičení 28

29C. Do mouchy vznášející se stále nad tímtéž místem zemského povrchu narazí rozzuřený slon rychlostí 2,1 m·s^{-1}. Jakou

rychlostí se moucha odrazí, je-li srážka pružná? V tomto případě je střela (slon) mnohem těžší než terč (moucha).

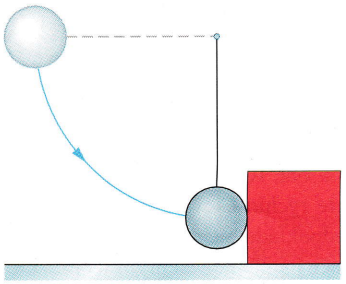
30C. Elektron se srazí s atomem vodíku, který byl zpočátku v klidu. Srážka je přímá a pružná. Kolik procent původní kinetické energie elektronu získá atom? Atom vodíku má 1840krát větší hmotnost než elektron.

31C. Vozíček o hmotnosti 340 g se pohybuje na vzduchové lavici (pohyb bez tření) rychlostí 1,2 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Pružně narazí do druhého vozíčku, který je zpočátku v klidu. Po srážce se první vozíček pohybuje původním směrem rychlostí 0,66 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Určete hmotnost druhého vozíčku a (b) jeho rychlost po srážce. (c) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy dvou vozíčků?

32C. Částice α (hmotnost 4 u) se srazí s jádrem atomu zlata (hmotnost 197 u), které bylo před srážkou v klidu. Srážka je přímá a pružná. Určete ztrátu kinetické energie α-částice v procentech.

33C. Střela o hmotnosti 2 kg narazí do klidného terče a po pružné srážce se pohybuje v původním směru čtvrtinovou rychlostí. (a) Určete hmotnost terče. (b) Jakou rychlostí se pohybuje těžiště soustavy, má-li počáteční rychlost střely velikost 4,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

34Ú. Ocelová koule o hmotnosti 0,500 kg je upevněna na závěsu délky 70,0 cm. Kouli vychýlíme tak, aby byl napjatý závěs vodorovný, a uvolníme (obr. 10.37). V nejnižším bodě své dráhy narazí koule na ocelový hranol o hmotnosti 2,5 kg, spočívající na dokonale hladké vodorovné podložce. Srážka je pružná. Určete (a) rychlost koule i (b) rychlost hranolu těsně po srážce.



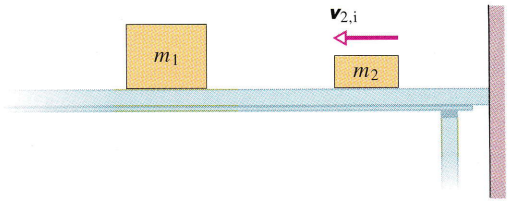
Obr. 10.37 Úloha 34

35Ú. Proud částic dopadá na misku digitální váhy z výšky 3,5 m. Srážky částic s miskou jsou pružné a každá částice se odrazí zpět se stejně velkou rychlostí. Zjistěte, jaký údaj váha ukazuje, má-li každá částice hmotnost 110 g a dopadne-li na misku za každou sekundu 42 částic. Předpokládáme, že po odrazu již částice zpět na misku nedopadají.

36Ú. Dvě titanové koule se pohybují proti sobě stejně velkými rychlostmi a srazí se. Srážka je přímá a pružná. Po srážce se jedna z koulí, jejíž hmotnost je 300 g, zastaví. (a) Jaká je hmotnost druhé koule? (b) Určete rychlost těžiště soustavy, měla-li velikost rychlosti koulí před srážkou hodnotu 2,0 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

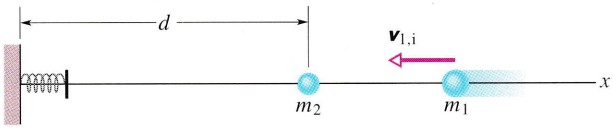
37Ú. Míček o hmotnosti m umístíme těsně nad větší míč o hmotnosti M (obr. 10.28a). Oba míče současně volně pustíme z výšky h. (Předpokládáme, že jejich poloměry jsou mnohem menší než výška h.) Velký míč se nejprve odrazí od podlahy a potom narazí do míčku. Obě srážky jsou pružné. (a) Při jakém poměru m/M se velký míč M po druhé srážce zastaví? (Řešení přibližně vyhovuje dvojici míčů z otázky 12.) (b) Do jaké výšky pak vystoupí menší míč?

38Ú. Kvádr o hmotnosti m_1 leží v klidu na dlouhém, dokonale hladkém stole, jehož jeden konec je zapřen o stěnu. Druhý kvádr o hmotnosti m_2 umístíme mezi kvádr m_1 a stěnu a udělíme mu rychlost $\boldsymbol{v}_{2,\mathrm{i}}$ směrem k m_1 (obr. 10.38). Nejprve nastane srážka obou kvádrů a pak narazí kvádr m_2 do stěny. Obě srážky jsou pružné. Při jaké hodnotě poměru m_2/m_1 budou výsledné rychlosti obou kvádrů stejné? Stěnu považujeme za těžký terč (hmotnost kvádru je ve srovnání s její hmotností zanedbatelná).



Obr. 10.38 Úloha 38

39Ú. Na vzduchové lavici stojí vozíček (terč) o hmotnosti $m_2 = 350$ g ve vzdálenosti $d = 53$ cm od konce lavice. Druhý vozíček (střela) o hmotnosti $m_1 = 590$ g narazí do terče rychlostí $v_{1,\mathrm{i}} = -75\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$ (obr. 10.39). Terč se dá do pohybu a odrazí se od krátké pružiny uchycené na konci lavice. Dožene střelu a narazí do ní. Všechny srážky jsou pružné. Určete, v jaké vzdálenosti od konce lavice dojde k druhé srážce terče se střelou.



Obr. 10.39 Úloha 39

ODST. 10.4 Nepružné přímé srážky

40C. Současná představa o vzniku kráteru v Arizoně (obr. 10.1a) je taková, že byl způsoben dopadem meteoritu asi před 20 000 lety. Hmotnost meteoritu se odhaduje na $5{\cdot}10^{10}$ kg a jeho rychlost před dopadem na 7 200 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete rychlost, kterou by Země za těchto podmínek získala při přímé srážce.

41C. Krabice o hmotnosti 6 kg klouže po ledě rychlostí 9,0 m/s. Balík o hmotnosti 12 kg padá volným pádem a spadne přímo do krabice. Určete výslednou rychlost krabice s balíkem.

42C. Kulka o hmotnosti 5,20 g letí vodorovně rychlostí 672 m/s. Narazí do dřevěného kvádru o hmotnosti 700 g, který spočívá na dokonale hladké podlaze. Po průletu kvádrem se velikost rychlosti kulky zmenší na hodnotu 428 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete (a) rychlost kvádru po srážce a (b) rychlost těžiště soustavy.

43C. Tělesa A a B o stejných hmotnostech 2,0 kg se pohybují rychlostmi $\boldsymbol{v}_\mathrm{A} = 15\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{v}_\mathrm{B} = -10\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{j}$ a srazí se. Rychlost tělesa A po srážce je $\boldsymbol{v}'_\mathrm{A} = -5{,}0\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j}$. Všechny rychlosti

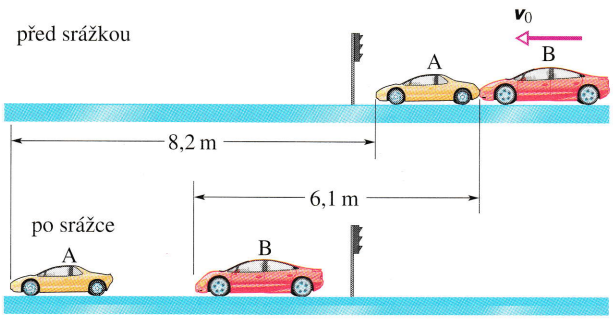
jsou zadány v metrech za sekundu. (a) Jakou rychlost má po srážce těleso B? (b) Určete změnu kinetické energie soustavy, k níž při srážce došlo.

44C. Kulka o hmotnosti 10 g narazí do balistického kyvadla o hmotnosti 2 kg a uvázne v něm. Kyvadlo vystoupí do výšky 12 cm. Vypočtěte počáteční rychlost kulky.

45C. Kulka o hmotnosti 4,5 g je vystřelena vodorovně a narazí do dřevěného kvádru o hmotnosti 2,4 kg, který leží na vodorovné podložce. Koeficient dynamického tření mezi kvádrem a podložkou je 0,20. Kulka v kvádru uvázne a ten se zastaví ve vzdálenosti 1,8 m od své původní polohy. (a) Jakou rychlostí se kvádr pohybuje v okamžiku, kdy se kulka vzhledem k němu zastaví? (b) Jaká je počáteční rychlost kulky?

46C. Dvě kostky o hmotnostech 5,0 kg a 10 kg se pohybují stejným směrem rychlostmi 3,0 $m \cdot s^{-1}$ a 2,0 $m \cdot s^{-1}$. Dojde ke srážce, po níž hmotnější kostka pokračuje v pohybu v původním směru, avšak rychlostí 2,5 $m \cdot s^{-1}$. (a) Jakou rychlostí se těsně po srážce pohybuje méně hmotná kostka? (b) Zjistěte, k jaké energiové ztrátě při srážce došlo. (c) Rozhodněte, jak by se změnila odpověď na otázku (b), kdyby se hmotnější kostka pohybovala po srážce rychlostí 4,0 $m \cdot s^{-1}$, a (d) výsledek zdůvodněte.

47Ú. Dva automobily A a B přijíždějí ke křižovatce a snaží se na zledovatělé silnici zabrzdit. Oba se dostanou do smyku se zablokovanými koly. Hmotnosti vozů jsou 1 100 kg (A) a 1 400 kg (B). Koeficient dynamického tření mezi zablokovanými koly a silnicí je v obou případech 0,13. Vozu A se těsně před křižovatkou podaří zastavit. Vůz B, který jede za ním, však již zabrzdit nestačí a dojde k nárazu. Automobil A znovu zastaví ve vzdálenosti 8,2 m od místa srážky, vůz B urazí ještě 6,1 m. (obr. 10.40). (a) Určete rychlosti automobilů bezprostředně po srážce. (b) Pomocí zákona zachování hybnosti zjistěte rychlost, kterou vůz B narazil do A. Je možné mít v tomto případě pochybnost o platnosti zákona zachování hybnosti? Zdůvodněte.

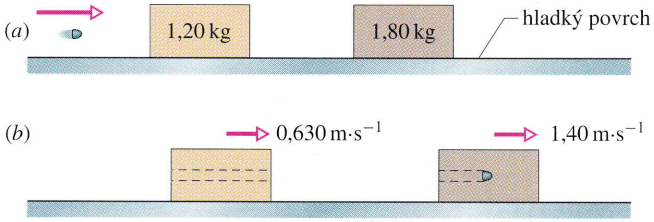


Obr. 10.40 Úloha 47

48Ú. Závaží o hmotnosti 3 000 kg dopadne z výšky 6,0 m na pilot o hmotnosti 500 kg a zarazí jej 3,0 cm do skály. Srážka je dokonale nepružná. Určete průměrnou velikost odporové síly, kterou na pilot působí skála po dobu, než se jeho pohyb zcela zastaví.

49Ú. Na dokonale hladké vodorovné podložce leží dvě kostky o hmotnostech m a $2m$. Jsou umístěny těsně vedle konců stlačené vodorovné pružiny a přidržovány zarážkami, aby se pružina nemohla uvolnit. Potenciální energie stlačené pružiny je 60 J. V určitém okamžiku zarážky odstraníme. Určete kinetickou energii každé z kostek v okamžiku, kdy ztratí kontakt s pružinou (pružina je v té chvíli v nenapjatém stavu).

50Ú. Na dokonale hladké vodorovné podlaze leží dvě kostky o hmotnostech 1,20 kg a 1,80 kg. Kulka o hmotnosti 3,50 g je vystřelena ve vodorovném směru a zasáhne první kostku. Proletí jí a teprve ve druhé kostce uvázne (obr. 10.41). První kostka se po průletu střely pohybuje rychlostí o velikosti 0,630 $m \cdot s^{-1}$, velikost výsledné rychlosti druhé kostky je 1,40 $m \cdot s^{-1}$ (obr. 10.41b). Určete (a) rychlost, kterou kulka vylétla z první kostky a (b) počáteční rychlost kulky. Zanedbejte změnu hmotnosti první kostky způsobenou průletem střely.

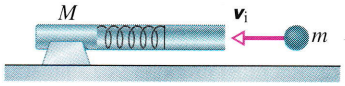


Obr. 10.41 Úloha 50

51Ú. Těleso o hmotnosti m se pohybuje v kosmickém prostoru stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Najednou vybuchne a rozpadne se na dvě části, z nichž jedna má třikrát větší hmotnost než druhá. Po rozpadu zůstane lehčí úlomek v klidu. Zjistěte, k jak velkému přírůstku kinetické energie soustavy došlo na úkor energie uvolněné při výbuchu. (Soustava je tvořena nejprve tělesem a po jeho rozpadu oběma úlomky.)

52Ú. Na váhu položíme krabici a vynulujeme ukazatel. Poté začneme do krabice sypat kuličky, z nichž každá má hmotnost m. Kuličky padají z výšky h s frekvencí R kuliček za sekundu. Zjistěte, jaký údaj (v kilogramech) ukáže váha po uplynutí doby t, lze-li každý dopad kuličky do krabice považovat za dokonale nepružnou srážku. Pro číselné řešení použijte hodnoty $R = 100\ s^{-1}$, $h = 7{,}60$ m, $m = 4{,}50$ g a $t = 10{,}0$ s.

53Ú. Nákladní vagon o hmotnosti 35 tun se srazí se stojícím služebním vozem. Při srážce se vagony pevně spojí. Ztráta kinetické energie soustavy, k níž při této srážce dojde (ve prospěch zahřátí, energie zvukového vlnění atd.), činí 27 %. Určete hmotnost služebního vozu.

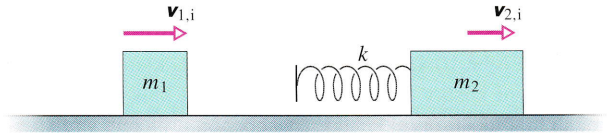


Obr. 10.42 Úloha 54

54Ú. Kulička o hmotnosti m vletí do hlavně pružinové pistole s hmotností M, která spočívá na dokonale hladké vodorovné podložce (obr. 10.42). Kulička náhle uvázne v hlavni ve chvíli, kdy je stlačení pružiny největší. Třecí síly působící proti pohybu kuličky v hlavni jsou zanedbatelné. (a) Určete rychlost pistole v okamžiku, kdy se kulička vzhledem k hlavni zastaví. (b) Jakou

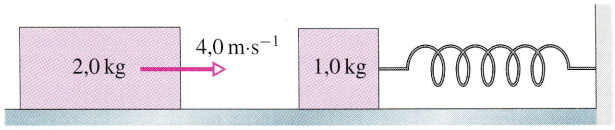
část původní kinetické energie kuličky představuje potenciální energie stlačené pružiny?

55Ú. Dva hranoly o hmotnostech $m_1 = 2{,}0\,\text{kg}$ a $m_2 = 5{,}0\,\text{kg}$ se pohybují v téže přímce po dokonale hladké vodorovné desce rychlostmi o velikostech $v_{1,\text{i}} = 10\,\text{m·s}^{-1}$ a $v_{2,\text{i}} = 3{,}0\,\text{m·s}^{-1}$. K hranolu m_2 je upevněna velmi lehká pružina o tuhosti $k = 1\,120\,\text{N/m}$ (obr. 10.43), do níž hranol m_1 narazí. Určete největší stlačení pružiny při této srážce. (*Tip*: V okamžiku největšího stlačení pružiny se obě tělesa pohybují stejnou rychlostí.)



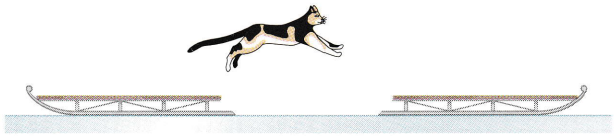
Obr. 10.43 Úloha 55

56Ú. Kostka o hmotnosti 1,0 kg leží na dokonale hladké podložce a je nenapjatou pružinou ($k = 200\,\text{N/m}$) spojena se stěnou (obr. 10.44). Hranol o hmotnosti 2,0 kg do ní narazí rychlostí $4{,}0\,\text{m·s}^{-1}$ rovnoběžně s pružinou a pevně se s ní spojí. Určete stlačení pružiny v okamžiku, kdy je společná rychlost těles nulová.



Obr. 10.44 Úloha 56

57Ú. Dvoje stejné sáně o hmotnostech 22,7 kg stojí těsně za sebou podle obr. 10.45. Kočka o hmotnosti 3,63 kg, která na jedněch sáních seděla, přeskočí najednou na druhé sáně a hned zase zpět. Při obou skocích má rychlost kočky vzhledem k zemi velikost $3{,}05\,\text{m·s}^{-1}$. Určete výsledné rychlosti sání.



Obr. 10.45 Úloha 57

58Ú. Automobil o hmotnosti 1 200 kg má nárazník konstruován tak, aby čelní náraz do zdi rychlostí 5,00 km/h byl ještě bezpečný. Vůz jede rychlostí 70 km/h a zezadu narazí do druhého automobilu, který jede rychlostí 60 km/h stejným směrem a má hmotnost 900 kg. Rychlost druhého vozu po srážce je 70 km/h. (a) Jaká je rychlost prvního automobilu bezprostředně po nárazu? (b) Určete poměr ztráty kinetické energie soustavy dvou automobilů při popsané srážce a kinetické energie, při níž je náraz prvního automobilu do zdi ještě bezpečný.

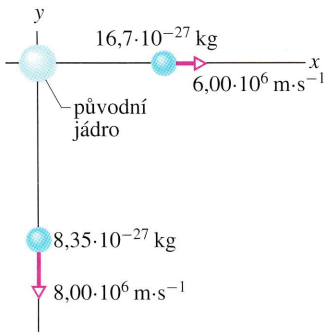
59Ú. Nákladní vagon o hmotnosti 32 tun jede rychlostí 1,5 m/s. Narazí do jiného vagonu, který má hmotnost 24 tun a jede stejným směrem rychlostí $0{,}9\,\text{m·s}^{-1}$. Oba vozy se při srážce spojí. Určete (a) společnou rychlost vozů po srážce a (b) změnu celkové kinetické energie soustavy. (c) Jaké by byly výsledné rychlosti vozů, kdyby srážka byla pružná?

ODST. 10.5 Šikmé srážky

60C. Částice α se srazí s jádrem atomu kyslíku, které bylo před srážkou v klidu. Její výsledná rychlost svírá s původním směrem jejího pohybu úhel 64,0°. Kyslíkové jádro se po srážce pohybuje rychlostí o velikosti $1{,}20\cdot10^{5}\,\text{m·s}^{-1}$, která svírá s původním směrem pohybu α-částice úhel −51,0°. Určete (a) výslednou a (b) počáteční rychlost α-částice. (Hmotnost α-částice je 4,0 u a hmotnost kyslíkového jádra 16 u.)

61C. Proton (střela) letí rychlostí $500\,\text{m·s}^{-1}$ a pružně se srazí s jiným protonem (terč), který byl zpočátku v klidu. Střela se od původního směru svého pohybu odchýlí o 60°. Určete (a) směr pohybu terče a (b) velikost rychlosti terče i střely po srážce.

62C. Atomové jádro, které je v klidu, se náhle rozpadne na tři části. Dvě z nich jsou zachyceny detekčním zařízením, které je schopno určit jejich rychlosti a hmotnosti (obr. 10.46). (a) Určete hybnost třetí částice, jejíž hmotnost je $11{,}7\cdot10^{-27}\,\text{kg}$, a vyjádřete ji pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic. (b) Jaká je celková kinetická energie částic po rozpadu?



Obr. 10.46 Cvičení 62

63C. Bílá kulečníková koule narazí do červené, která je zpočátku v klidu. Rychlost bílé koule má po srážce velikost $3{,}50\,\text{m·s}^{-1}$ a svírá s původním směrem pohybu úhel 22,0°. Červená koule odletí rychlostí o velikosti $2{,}00\,\text{m·s}^{-1}$. Určete (a) směr rychlosti červené koule po srážce a (b) počáteční rychlost bílé koule. (c) Je srážka pružná?

64C. Dva automobily A a B se blíží ke stejnému místu v navzájem kolmých směrech. Při srážce se do sebe zaklíní. Vůz A (hmotnost 1 200 kg) se před srážkou pohyboval rychlostí 64 km/h a vůz B (hmotnost 1 600 kg) rychlostí 96 km/h. Určete velikost a směr společné rychlosti obou vraků po srážce.

65C. Kulečníková koule narazí rychlostí $\boldsymbol{V}$ do těsně uspořádané skupiny patnácti stojících koulí. Dojde k sérii srážek koulí mezi sebou i s obrubou stolu. Shodou okolností má velikost rychlosti všech šestnácti koulí v jistém okamžiku stejnou hodnotu v. Všechny srážky považujeme za pružné a zanedbáváme vliv rotačního pohybu koulí. Vyjádřete v pomocí V.

66Ú. Těleso o hmotnosti 20,0 kg se pohybuje v kladném směru osy x rychlostí $200\,\text{m·s}^{-1}$. Najednou vybuchne a roztrhne se

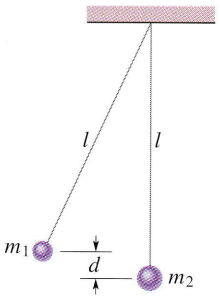
na tři části. První z nich má hmotnost 10,0 kg a odletí rychlostí 100 m·s^{-1}v kladném směru osy y. Druhý úlomek (hmotnost 4,00 kg) se vrací zpět podél záporné osy x rychlostí o velikosti 500 m·s^{-1}. (a) Určete rychlost (směr a velikost) třetího úlomku, který má hmotnost 6,00 kg. (b) Určete celkovou kinetickou energii všech úlomků po srážce. (Vliv tíhové síly zanedbejte.)

67Ú. Míč B narazí rychlostí $\boldsymbol{v}$ do míče A, který byl v klidu. Hmotnosti míčů jsou různé. Po srážce se míč B pohybuje poloviční rychlostí kolmo k původnímu směru svého pohybu. (a) Určete směr pohybu míče A po srážce. (b) Je možné zjistit ze zadaných údajů i velikost rychlosti míče A? Odpověď zdůvodněte.

68Ú. Neutron se při pružné srážce s klidným deuteronem odchýlí o 90° od původního směru svého pohybu. Ukažte, že neutron ztratil při srážce dvě třetiny své kinetické energie, kterou naopak deuteron získal. (Hmotnost neutronu je 1,0 u a hmotnost deuteronu 2,0 u.)

69Ú. Dvě stejně rychlá tělesa o stejných hmotnostech se při srážce pevně spojí (dokonale nepružná srážka). Velikost rychlosti vzniklého objektu je ve srovnání s počáteční rychlostí každého z obou těles poloviční. Určete úhel mezi vektory počátečních rychlostí těles.

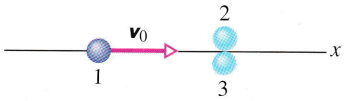
70Ú. Obr. 10.47 znázorňuje výchozí situaci před srážkou dvou kyvadel o délce l. Po uvolnění narazí kyvadlo m_1 do kyvadla m_2. Srážka je dokonale nepružná. Odpor prostředí a hmotnosti závěsů považujeme za zanedbatelné. Do jaké výšky vystoupí těžiště soustavy spojených kyvadel?



Obr. 10.47 Úloha 70

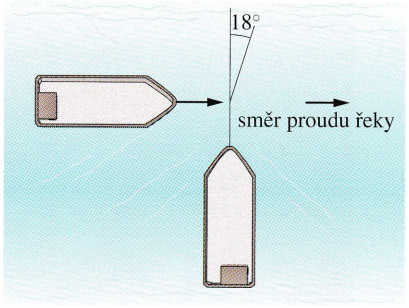
71Ú. Kulečníková koule narazí rychlostí 2,2 m·s^{-1}do jiné koule, která byla v klidu. Po srážce se jedna z koulí pohybuje rychlostí o velikosti 1,1 m·s^{-1}ve směru, který svírá s původním směrem pohybu střely úhel 60°. (a) Určete rychlost druhé koule (velikost a směr). (b) Připouštějí zadané hodnoty možnost nepružné srážky?

72Ú. Koule 1 (střela) narazí počáteční rychlostí 10 m·s^{-1}do dvojice stejných koulí, které jsou v klidu a dotýkají se. Spojnice jejich těžišť je kolmá na směr letící koule (obr. 10.48). Střela míří přesně do místa dotyku dvojice terčů. Určete rychlosti všech tří koulí po srážce. Třecí síly zanedbejte. (*Tip*: Při zanedbatelném tření mají impulzy sil, jimiž na sebe koule působí při srážce, směr spojnice jejich středů.)



Obr. 10.48 Úloha 72

73Ú. Nákladní loď o hmotnosti 1,50·10^5 kg pluje v husté mlze po proudu řeky rychlostí o velikosti 6,2 m·s^{-1}. Náhle narazí do boku druhé lodi, která přeplouvá řeku napříč (obr. 10.49). Druhá loď má hmotnost 2,78·10^5 kg a pluje rychlostí 4,3 m·s^{-1}. Těsně po srážce se kurs druhé lodi odchýlí o 18° od původního směru a velikost její rychlosti vzroste na 5,1 m·s^{-1}. Rychlost toku řeky je zanedbatelná. (a) Určete rychlost první lodi (velikost a směr) po srážce a (b) úbytek celkové kinetické energie soustavy.



Obr. 10.49 Úloha 73

ODST. 10.6 Jaderné reakce a radioaktivní rozpad

74C. Hmotnosti všech částic v jaderné reakci

$$p + {}^{19}F \rightarrow \alpha + {}^{16}O$$

jsou známy velmi přesně:

$$m_p = 1{,}007\,825\ \text{u}, \qquad m_\alpha = 4{,}002\,603\ \text{u},$$
$$m_F = 18{,}998\,405\ \text{u}, \qquad m_O = 15{,}994\,915\ \text{u}.$$

Vypočtěte energii Q, která se při reakci uvolnila.

75C. Elementární částice Σ^- (sigma minus) se samovolně rozpadne podle schématu

$$\Sigma^- \rightarrow \pi^- + n.$$

Hmotnosti částic jsou

$$m_\Sigma = 2\,340{,}5m_e, \quad m_\pi = 273{,}2m_e, \quad m_n = 1\,838{,}65m_e,$$

kde $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg je hmotnost elektronu. (a) Určete celkovou kinetickou energii částic po rozpadu. (b) Porovnejte hybnosti obou produktů rozpadu (π^- a n). (c) Která z částic získá větší část celkové kinetické energie?

76Ú*. Částice α s kinetickou energií 7,70 MeV narazí do jádra atomu $^{14}_{7}$N, které je v klidu. Vznikne jádro $^{17}_{8}$O a proton. Proton vyletí kolmo k počáteční rychlosti α-částice a má kinetickou energii 4,44 MeV. Hmotnosti jednotlivých částic jsou: α-částice — 4,002 60 u; $^{14}_{7}$N — 14,003 07 u; proton — 1,007 825 u a $^{17}_{8}$O — 16,999 14 u. (a) Určete kinetickou energii kyslíkového jádra a (b) energii Q uvolněnou při reakci.

77Ú*. α rozpad rádia (Ra) na radon (Rn) probíhá podle rovnice

$$^{226}\text{Ra} \rightarrow \alpha + {}^{222}\text{Rn}.$$

Hmotnosti jednotlivých částic jsou: $^{226}_{88}$Ra — 226,025 4 u; α-částice — 4,002 6 u; $^{222}_{86}$Rn — 222,017 5 u. (a) Určete energii Q uvolněnou při reakci. (b) Jakou hodnotu Q bychom získali, kdybychom při výpočtech zaokrouhlili hmotnosti částic na tři platná místa? Určete kinetickou energii (c) α-částice a (d) jádra radonu. (Pro výpočet částí (c) a (d) je možné použít zaokrouhlených hodnot. Zdůvodněte.)

PRO POČÍTAČ

78Ú. Model rakety má hmotnost 6,00 kg a letí vodorovně směrem k jihu rychlostí 20,0 m·s^{-1}. Při výbuchu se náhle rozpadne na dvě části. Rychlost prvního úlomku (hmotnost 2,00 kg) je rovna

$$\boldsymbol{v}_1 = (-12{,}0\,\text{m·s}^{-1})\boldsymbol{i} + (30{,}0\,\text{m·s}^{-1})\boldsymbol{j} - (15{,}0\,\text{m·s}^{-1})\boldsymbol{k},$$

kde jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ směřují po řadě k východu, k severu a svisle vzhůru. (a) Určete hybnost druhého úlomku a zapište ji pomocí jednotkových vektorů. (b) Jakou kinetickou energii má druhý úlomek? (c) Určete přírůstek kinetické energie soustavy při výbuchu.

11
Rotace

Sledovali jste někdy zápas v judu? Pak jste si jistě všimli, že vítězství v tomto sportu není jen záležitostí fyzické zdatnosti sportovce. Judista, který je obeznámen se základními zákony fyziky nebo jich dokáže alespoň intuitivně využívat, může totiž bez velkých problémů porazit většího a silnějšího protivníka. Např. judista při chvatu ***o goši*** *svého soupeře nadzdvihne, otočí kolem svého boku a položí ho na žíněnku. Zdálo by se, že tento chvat vyžaduje značnou sílu, a nemusel by se vůbec podařit. Opravdu může fyzika pomoci i v tomto případě? A jak?*

11.1 POSUVNÝ A OTÁČIVÝ POHYB

Jízdu krasobruslařky vnímáme samozřejmě především jako esteticky dokonale působivý celek. Přesto však v ní můžeme rozpoznat dva základní typy pohybu. Na obr. 11.1a zachytil fotograf krasobruslařku v situaci, kdy klouže po přímce takřka rovnoměrně. Takový pohyb je jedním ze speciálních případů tzv. **posuvného** (**translačního**) pohybu, zkráceně **posuvu** neboli **translace**. Obr. 11.1b naopak ukazuje bruslařku při piruetě, při níž se otáčí kolem svislé osy určitou úhlovou rychlostí. Koná tak **otáčivý** (**rotační**) pohyb, krátce nazývaný **otáčení** neboli **rotace**. V této kapitole se budeme podrobněji zabývat právě otáčivým pohybem.

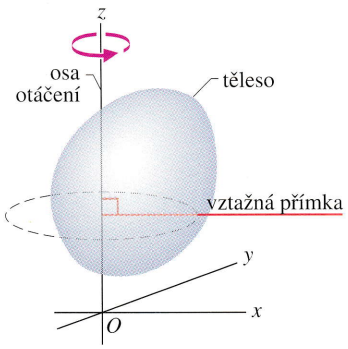
Obr. 11.1 Krasobruslařka Kristi Yamaguchiová (a) při čisté translaci, (b) při čisté rotaci kolem pevné osy.

(a) (b)

Dosud jsme se převážně zabývali pohybem posuvným, často dokonce pouze přímočarým. K typickým případům otáčivého pohybu patří otáčení kol a převodových kol, pohyb částí motorů, hodinových ručiček, rotorů tryskových motorů, vrtulí vrtulníků. Rotují také tornáda, planety, hvězdy a galaxie.

11.2 VELIČINY CHARAKTERIZUJÍCÍ OTÁČIVÝ POHYB

V této kapitole se budeme zabývat rotací *tuhého* tělesa kolem *pevné* osy.* První z těchto požadavků znamená omezení výběru objektů, jejichž otáčivý pohyb budeme popisovat. Nebudeme se tedy zabývat například rotací Slunce, které si lze nejspíš představit jako plynovou kouli. Slunce modelu tuhého tělesa rozhodně nevyhovuje. Pomocí druhého omezení vyloučíme z našich úvah například valivé pohyby, neboť při nich těleso rotuje kolem osy pohyblivé v prostoru (kolo automobilu), ale také třeba pohyb závaží odstředivého regulátoru (může se vzdalovat od osy otáčení).



Obr. 11.2 Tuhé těleso obecného tvaru se otáčí kolem souřadnicové osy z. Poloha *vztažné přímky* vzhledem k tělesu je libovolná až na to, že je přímka kolmá k ose otáčení. Je spojena s tělesem a rotuje spolu s ním.

Na obr. 11.2 je tuhé těleso obecného tvaru, které se *otáčí kolem pevné osy*, zvané **osa otáčení** neboli **osa rotace**. Každý bod tělesa opisuje kružnici, jejíž střed leží na ose otáčení. V daném časovém intervalu opíší všechny body *stejný úhel*. (Naproti tomu se při posuvném pohybu pohybují všechny body tělesa po trajektoriích stejného tvaru, například po přímkách, a v daném časovém intervalu urazí *tutéž vzdálenost*. V dalším výkladu budeme posuvný a otáčivý pohyb často srovnávat.)

Zabývejme se nyní veličinami, které charakterizují rotační pohyb obdobně, jako veličiny poloha, posunutí, rych-

* Její poloha se nemění ani vůči tělesu, ani vůči okolí.

lost a zrychlení popisují translaci. Půjde o tzv. *úhlové* veličiny (*úhlovou polohu, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení*). Místo slovního spojení „úhlové posunutí" užijeme termínu *otočení*.

Úhlová poloha

Všimněme si, že v obr. 11.2 je vyznačena **vztažná přímka**, kolmá k ose otáčení a pevně spojená s tělesem. Otáčí se tedy spolu s ním a umožňuje tak snadno popsat jeho pohyb pomocí **úhlové polohy**. Úhlovou polohou budeme rozumět úhel, který vztažná přímka svírá s pevně zvoleným směrem ležícím v rovině kolmé k ose otáčení. Na obr. 11.3 je úhlová poloha θ měřena vzhledem ke kladnému směru osy x. Pro úhel θ platí

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(v radiánech)}. \tag{11.1}$$

Symbolem s jsme označili délku oblouku kružnice, který je ohraničen kladnou osou x a vztažnou přímkou, r je poloměr této kružnice.

Hodnoty takto definovaného úhlu vyjadřujeme obvykle v tzv. **obloukové míře**, tj. v **radiánech** (rad). Hodnoty zadané ve stupních nebo pomocí počtu otáček snadno přepočteme. Všimněme si, že úhel v obloukové míře je určen poměrem délek a je tedy bezrozměrovou veličinou.

Obvod kružnice o poloměru r je $2\pi r$, takže jedna otáčka odpovídá změně úhlové polohy o 2π radiánů:

$$1\ \text{ot} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ \text{rad} \tag{11.2}$$

a odtud

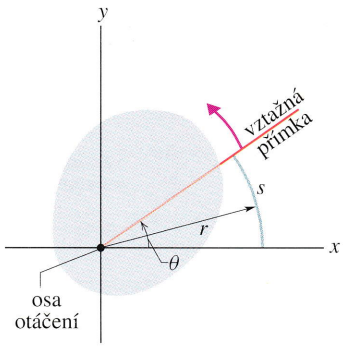
$$1\ \text{rad} = 57{,}3^\circ = 0{,}159\ \text{ot}. \tag{11.3}$$

Na rozdíl od dohody zavedené v geometrii *nebude* v našem případě úhel $\theta = 0$ ekvivalentní hodnotám 2π, 4π atd. Po ukončené otáčce vztažné přímky se tedy hodnota její úhlové polohy *nevynuluje*. Po ukončení první otáčky nabývá úhlová poloha hodnoty 2π rad, po druhé otáčce je 4π rad atd.

Úplnou informaci o posuvném pohybu tělesa například podél osy x lze získat na základě znalosti funkce $x(t)$ popisující časovou závislost polohy některého jeho bodu, zvoleného zcela libovolně. Podobně jsou všechny myslitelné údaje o otáčivém pohybu tělesa kolem pevné osy obsaženy v časové závislosti $\theta(t)$ úhlové polohy vztažné přímky.

Otočení

Dejme tomu, že se úhlová poloha vztažné přímky tělesa na obr. 11.3, rotujícího kolem pevné osy, změní v určitém



Obr. 11.3 Řez rotujícího tuhého tělesa z obr. 11.2 zobrazený v nadhledu. Osa otáčení je nyní kolmá k rovině nákresu a směřuje ke čtenáři. Rovina řezu je kolmá k ose otáčení, splývá tedy s nákresnou. Vztažná přímka svírá s osou x úhel θ.

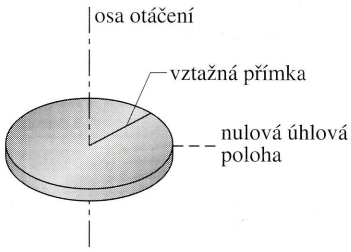
časovém intervalu z hodnoty θ_1 na hodnotu θ_2 (obr. 11.4). **Otočením** tělesa v tomto časovém intervalu rozumíme veličinu $\Delta\theta$, definovanou vztahem

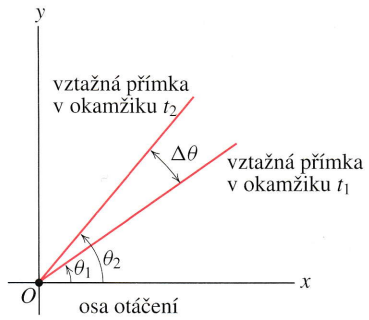
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{11.4}$$

Tato definice otočení se vztahuje nejen na tuhé těleso jako celek, ale i *na každou jeho částici*.

Koná-li těleso posuvný pohyb, například podél osy x, může být jeho posunutí Δx jak kladné, tak záporné. Znaménko závisí na tom, zda se těleso pohybuje ve směru rostoucí či klesající souřadnice x. Také otočení $\Delta\theta$ rotujícího tělesa může nabývat kladných i záporných hodnot. Jeho znaménko je kladné, otáčí-li se těleso ve směru rostoucího úhlu θ (proti směru otáčení hodinových ručiček). Při otáčení tělesa ve směru klesajících hodnot úhlové polohy (po směru otáčení hodinových ručiček) je naopak otočení záporné (obr. 11.3 a 11.4).

KONTROLA 1: Kotouč na obrázku se může otáčet kolem své osy jako kolotoč. Rozhodněte, které z následujících dvojic počáteční a výsledné úhlové polohy odpovídají zápornému otočení: (a) −3 rad, +5 rad, (b) −3 rad, −7 rad, (c) 7 rad, −3 rad.





Obr. 11.4 Vztažná přímka tuhého tělesa znázorněného na obrázku 11.2 a 11.3 má v okamžiku t_1 úhlovou polohu θ_1 a v okamžiku t_2 úhlovou polohu θ_2. Rozdíl $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ představuje otočení tělesa v časovém intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$. (Těleso není v obrázku zakresleno.)

Úhlová rychlost

V souhlasu s obr. 11.4 označme úhlovou polohu rotujícího tělesa v okamžiku t_1 jako θ_1 a v okamžiku t_2 jako θ_2. **Průměrnou úhlovou rychlost** tělesa v časovém intervalu Δt od t_1 do t_2 definujeme vztahem

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \qquad (11.5)$$

kde $\Delta\theta$ je otočení tělesa v časovém intervalu Δt.

(Okamžitá) úhlová rychlost ω, se kterou budeme pracovat nejčastěji, je limitou průměrné úhlové rychlosti, vyjádřené vztahem (11.5), při poklesu veličiny Δt k nulové hodnotě, tj.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \qquad (11.6)$$

Známe-li časovou závislost úhlové polohy $\theta(t)$, můžeme úhlovou rychlost ω snadno určit jejím derivováním.

Rov. (11.5) a (11.6) platí nejen pro rotující tuhé těleso jako celek, ale také pro *každou jeho částici*. Jako jednotku úhlové rychlosti používáme nejčastěji radián za sekundu (rad/s), někdy i počet otáček za sekundu (ot/s).

Pohybuje-li se částice podél osy x, je její rychlost v_x kladná, nebo záporná podle toho, zda se pohyb děje ve směru rostoucí, nebo klesající souřadnice x. Také úhlová rychlost může mít kladné, nebo záporné znaménko. V prvním případě se těleso otáčí ve směru rostoucího úhlu θ (proti směru otáčení hodinových ručiček), v druhém případě ve směru klesajícího úhlu θ (ve směru otáčení hodinových ručiček).

Předchozí definici ještě upřesníme: úhlovou rychlost rotujícího tělesa definujeme jako vektor $\boldsymbol{\omega}$ rovnoběžný s osou otáčení, jehož složka měřená podél této osy je dána vztahem (11.6). Velikost vektoru úhlové rychlosti značíme obvykle rovněž symbolem ω. Se slovním spojením „úhlová rychlost" se tedy můžeme setkat dokonce v trojím významu. Může představovat vektor, jeho složku do osy rotace či jeho velikost. Nemusíme však mít obavu, že bychom tyto možnosti nedokázali v textu dobře rozpoznat. Věta „Úhlová rychlost mění směr" zcela jistě vypovídá o úhlové rychlosti jako o vektoru a věta „Úhlová rychlost činí 50 otáček za sekundu" se nepochybně týká její velikosti.

Úhlové zrychlení

V případech, kdy úhlová rychlost rotujícího tělesa není konstantní, má těleso nenulové úhlové zrychlení. Dejme tomu, že úhlová rychlost tělesa v okamžiku t_1 je ω_1 a v okamžiku t_2 má hodnotu ω_2. **Průměrné úhlové zrychlení** tělesa v časovém intervalu od t_1 do t_2 pak definujeme vztahem

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (11.7)$$

kde $\Delta\omega$ je změna úhlové rychlosti v daném časovém intervalu délky Δt. **(Okamžité) úhlové zrychlení** ε, se kterým budeme pracovat nejčastěji, je limitou průměrného úhlového zrychlení při poklesu hodnoty Δt k nule. Platí tedy

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}. \qquad (11.8)$$

Rov. (11.7) a (11.8) platí nejen pro rotující tuhé těleso jako celek, ale i pro *každou jeho částici*. Nejužívanější jednotkou úhlového zrychlení je radián za sekundu na druhou (rad/s^2), případně počet otáček za sekundu na druhou (ot/s^2).

Podobně jako u úhlové rychlosti můžeme i zde zavést vektor úhlového zrychlení: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$. Jeho směr je dán osou a směrem otáčení. Situace je tedy obdobná jako u jednorozměrných vektorů v kap. 2.

PŘÍKLAD 11.1

Časová závislost úhlové polohy vztažné přímky rotujícího kola je dána vztahem

$$\theta = t^3 - 27t + 4,$$

kde t je v sekundách a θ v radiánech.

(a) Určete $\omega(t)$ a $\varepsilon(t)$.

ŘEŠENÍ: Úhlovou rychlost $\omega(t)$ najdeme jako derivaci funkce $\theta(t)$ podle času:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = 3t^2 - 27. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Dalším derivováním získáme úhlové zrychlení $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(3t^2 - 27)}{\mathrm{d}t} = 6t. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Zjistěte, zda se v některém okamžiku úhlová rychlost anuluje. Ve kterém?

ŘEŠENÍ: Požadavek $\omega(t) = 0$ vede k rovnici

$$0 = 3t^2 - 27,$$

jejíž řešení má tvar

$$t = \pm 3. \quad \text{(Odpověď)}$$

Okamžitá úhlová rychlost kola je nulová v okamžicích $t = 3$ s a $t = -3$ s (3 sekundy před začátkem měření).

(c) Popište pohyb kola pro $t \geqq 0$.

ŘEŠENÍ: Všimněme si podrobněji časových závislostí $\theta(t)$, $\omega(t)$ a $\varepsilon(t)$.

V okamžiku $t = 0$ (začátek měření) má vztažná přímka úhlovou polohu $\theta = 4$ rad, kolo se otáčí úhlovou rychlostí -27 rad/s (tedy *ve směru* otáčení hodinových ručiček) a jeho úhlové zrychlení je nulové.

V intervalu $0 < t < 3$ s se kolo otáčí stále ve směru otáčení hodinových ručiček. Jeho úhlové zrychlení je kladné, a proto velikost jeho úhlové rychlosti klesá (otáčení se zvolňuje). Ověřte toto tvrzení například pro okamžik $t = 2$ s.

V okamžiku $t = 3$ s je úhlová rychlost kola nulová ($\omega = 0$) a kolo je v krajní úhlové poloze (vztažná přímka má v tomto okamžiku úhlovou polohu $\theta = -50$ rad).

Pro $t > 3$ s úhlové zrychlení kola roste. Zvyšuje se i jeho úhlová rychlost, která je nyní kladná. Vzhledem k tomu, že veličiny ω a ε mají stejné (kladné) znaménko, roste i velikost úhlové rychlosti, a to poměrně rychle.

PŘÍKLAD 11.2

Dětská káča se otáčí s úhlovým zrychlením

$$\varepsilon = 5t^3 - 4t.$$

Všechny veličiny jsou vyjádřeny v odpovídajících jednotkách SI (rad, s). V čase $t = 0$ má káča úhlovou rychlost 5 rad/s a její vztažná přímka má úhlovou polohu $\theta = 2$ rad.

(a) Najděte časovou závislost úhlové rychlosti káči $\omega(t)$.

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.8) dostaneme vztah

$$\mathrm{d}\omega = \varepsilon\,\mathrm{d}t$$

a jeho integrací získáme funkci

$$\omega = \int \varepsilon\,\mathrm{d}t = \int (5t^3 - 4t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Pro výpočet integrační konstanty C použijeme podmínku $\omega(t = 0) = 5$ rad/s, jejímž dosazením do poslední rovnice dostáváme

$$5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} = 0 - 0 + C.$$

Je tedy $C = 5$ rad/s a

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Najděte časovou závislost úhlové polohy káči $\theta(t)$.

ŘEŠENÍ: Rov. (11.6) přepíšeme ve tvaru

$$\mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}t$$

a integrací dostaneme hledanou časovou závislost $\theta(t)$:

$$\theta = \int \omega\,\mathrm{d}t = \int (\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C' =$$
$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2. \quad \text{(Odpověď)}$$

Konstantu C' jsme určili z podmínky $\theta(t = 0) = 2$ rad.

11.3 JSOU ÚHLOVÉ VELIČINY VEKTOROVÉ?

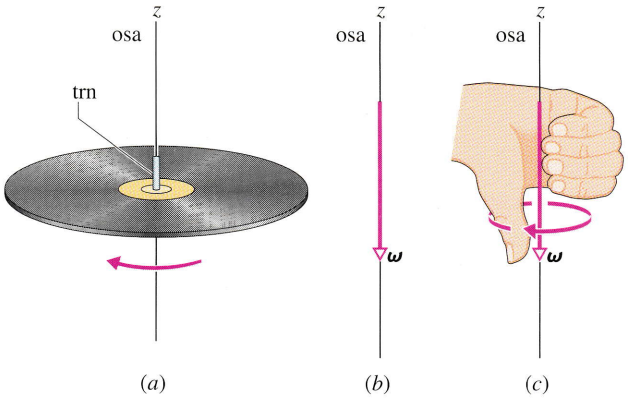
Poloha, rychlost a zrychlení částice jsou typické vektorové veličiny. Vzpomeňme si však, že při popisu přímočarého pohybu částice jsme vektorovou algebru v plném rozsahu nepotřebovali. Dva možné směry pohybu částice jsme totiž dokázali rozlišit pouze znaménkem. Polohový vektor, rychlost i zrychlení byly zadány vždy jediným číselným údajem, představujícím složku vektoru měřenou podél přímky — trajektorie částice.

V podobné situaci se ocitáme při popisu otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy. Těleso se může otáčet v některém ze dvou možných směrů, které opět odlišíme znaménky: ve směru kladném (proti směru otáčení hodinových ručiček), nebo záporném (ve směru otáčení hodinových ručiček). Znamená to, že můžeme otočení, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení pokládat za vektorové veličiny? Odpověď na tuto otázku je pro případ úhlové rychlosti a úhlového zrychlení kladná. Otočení však vektorovou veličinou *není*. K podrobnějšímu rozboru této skutečnosti se vrátíme v závěru článku.

Uvažujme úhlovou rychlost. Na obr. 11.5a je znázorněna gramofonová deska, která se otáčí kolem pevného trnu stálou úhlovou rychlostí $\omega = 33\frac{1}{3}$ ot/min. Rovněž směr otáčení je stálý a při pohledu shora se děje ve směru otáčení

hodinových ručiček. Úhlovou rychlost tedy můžeme definovat jako vektor $\boldsymbol{\omega}$, rovnoběžný s osou otáčení (obr. 11.5). Délku tohoto vektoru znázorníme v nějakém vhodném měřítku, např. 1 cm bude odpovídat 10 ot/min.

Směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$ definujeme pomocí **pravidla pravé ruky** podle obr. 11.5. Přiložíme pravou dlaň k rotující desce tak, aby prsty směřovaly ve směru otáčení. Natažený palec pak ukazuje směr vektoru úhlové rychlosti. Kdyby se deska otáčela opačným směrem, byl by směr vektoru úhlové rychlosti, určený pravidlem pravé ruky, opačný.



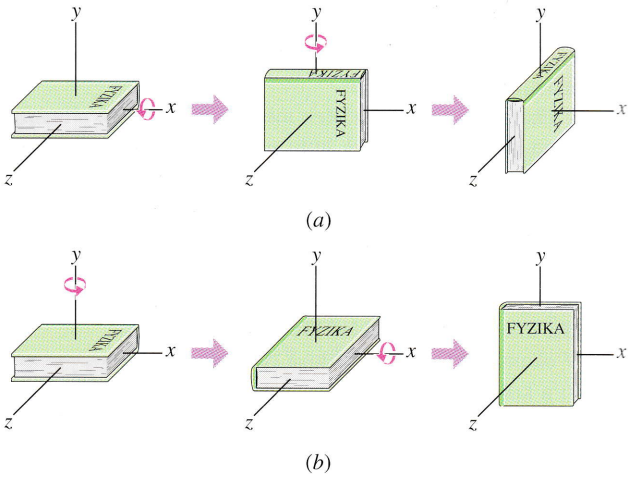
Obr. 11.5 (a) Gramofonová deska se otáčí kolem svislé osy (trnu). (b) Úhlovou rychlost rotující desky lze chápat jako vektor $\boldsymbol{\omega}$, rovnoběžný s osou otáčení a směřující dolů. (c) Směr vektoru úhlové rychlosti stanovíme pomocí pravidla pravé ruky. Prsty pravé ruky ukazují směr otáčení, palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$.

Na vektorovou povahu úhlových veličin si zřejmě budeme chvíli zvykat. Intuitivně totiž cítíme, že by vektor měl udávat směr pohybu nějakého objektu. V případě úhlových veličin by však byla taková představa nesprávná. Tuhé těleso se otáčí *kolem* směru vektoru. Při rotačním pohybu určuje vektor směr osy otáčení, nikoli směr pohybu. I takový vektor však charakterizuje pohybový stav objektu. Samozřejmě i pro něj platí pravidla vektorové algebry, shrnutá v kap. 3. Předchozí úvahy se týkají jak úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$, tak úhlového zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Poněvadž se v této kapitole zabýváme pouze otáčením tělesa kolem pevné osy, nemusíme za každou cenu pracovat s úhlovými veličinami jako s vektory. Úhlovou rychlost i úhlové zrychlení můžeme totiž v každém okamžiku zadat pouze číselnými údaji ω a ε, směr vektoru je určen znaménkem příslušné číselné hodnoty. Při řešení složitějších úloh je však vektorový zápis vhodnější.

Vraťme se nyní k možnosti popsat i otočení jako vektorovou veličinu. Pokud nejde o otočení velmi malé, není takový popis možný. Otočení *není* vektorovou veličinou. Jak jsme na to přišli? Každému otočení přece můžeme přiřadit velikost i směr, podobně jako v případě úhlové rychlosti tělesa na obr. 11.5. Možnost přisoudit veličině směr a velikost však ještě nezaručuje, že jde o veličinu vektorovou. Matematik by řekl, že je tím splněna pouze podmínka nutná, ne však postačující. Abychom totiž mohli nějakou veličinu prohlásit za vektorovou, musela by vyhovovat pravidlům vektorové algebry. Podle jednoho z nich je například součet vektorů nezávislý na pořadí sčítání. Snadno však zjistíme, že otočení tomuto pravidlu nevyhovuje.

Abychom se o tom přesvědčili, položme na stůl knihu podle obr. 11.6a. Otočme ji dvakrát po sobě o úhel 90°, *nejdříve* kolem vodorovné osy x, *potom* kolem svislé osy y. K určení kladného směru otočení použijeme pravidlo pravé ruky (obr. 11.5).



Obr. 11.6 (a) Knihu otočíme dvakrát o 90°, nejdříve kolem vodorovné osy x, potom kolem svislé osy y. (b) Táž otočení provedeme v opačném pořadí. (Výchozí poloha knihy je v případech (a) i (b) stejná.) Pokud by otočení bylo vektorovou veličinou, neovlivnilo by pořadí otočení výslednou polohu knihy. Z obrázku je však zřejmé, že výsledná poloha knihy na pořadí provedených otočení závisí. Otočení není vektorová veličina, přestože jí můžeme přiřadit velikost a směr.

Vraťme nyní knihu do původní polohy a proveďme tato dvě otočení v opačném pořadí (obr. 11.6b), tedy *nejprve* kolem osy y a teprve potom kolem osy x. Jak je vidět z obrázku, výsledná polohy knihy se v obou případech liší.

Táž dvojice operací vede k různým výsledkům, jsou-li operace provedeny v různém pořadí. Skládání otočení není komutativní a otočení tedy nemůže být vektorovou veličinou. Jednoduchým pokusem však snadno ukážeme, že odlišnost výsledných poloh knihy je nepatrná, jsou-li provedená otočení mnohem menší než 90°. Infinitezimálně (neomezeně) malé otočení (například $\mathrm{d}\theta$ v rov. (11.6)) již může být pokládáno za vektorovou veličinu.

Tabulka 11.1 **Posuvný pohyb s konstantním zrychlením a otáčivý pohyb s konstantním úhlovým zrychlením**

ROVNICE ČÍSLO	POSUVNÝ POHYB	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA	CHYBĚJÍCÍ VELIČINA	OTÁČIVÝ POHYB	ROVNICE ČÍSLO
(2.11)	$v_x = v_{0x} + a_x t$	x	θ	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	(11.9)
(2.15)	$x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	v_x	ω	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$	(11.10)
(2.16)	$v_x^2 = v_0^2 + 2 a_x x$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \varepsilon \theta$	(11.11)
(2.17)	$x = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x) t$	a_x	ε	$\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega) t$	(11.12)
(2.18)	$x = v_x t - \frac{1}{2} a_x t^2$	v_{0x}	ω_0	$\theta = \omega t - \frac{1}{2} \varepsilon t^2$	(11.13)

11.4 ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÝ OTÁČIVÝ POHYB

Důležitým zvláštním případem posuvného pohybu po přímce je rovnoměrně zrychlený pohyb (například volný pád). Tab. 2.1 obsahuje souhrn rovnic, které se takového případu týkají.

Pohyb *s konstantním úhlovým zrychlením* je zase významným speciálním případem pohybu otáčivého a vztahy mezi veličinami, které jej popisují, se rovnicím v tab. 2.1 velmi podobají, jak je zřejmé z tab. 11.1. Snadno je můžeme získat z odpovídajících vztahů pro posuvný pohyb. Stačí, abychom v nich nahradili polohu, rychlost a zrychlení příslušnými úhlovými veličinami. Oba soubory rovnic, tj. (2.11), (2.15) až (2.18) a (11.9) až (11.13), shrnuje pro porovnání tab. 11.1. Pro jednoduchost jsme v nich položili $x_0 = 0$ a $\theta_0 = 0$. Při takových *počátečních podmínkách* je posunutí $\Delta x = x - x_0$ dáno přímo souřadnicí x a otočení $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ úhlovou polohou θ.

KONTROLA 2: Časová závislost úhlové polohy rotujícího tělesa $\theta(t)$ může být vyjádřena některým z následujících vztahů: (a) $\theta(t) = 3t - 4$, (b) $\theta(t) = -5t^3 + 4t^2 + 6$, (c) $\theta(t) = 2/t^2 - 4/t$ a (d) $\theta(t) = 5t^2 - 3$. Pro který z nich lze použít tab. 11.1?

PŘÍKLAD 11.3

Mlýnské kolo na obr. 11.7 se otáčí s konstantním úhlovým zrychlením $\varepsilon = 0{,}35\ \mathrm{rad/s^2}$. Roztáčí se z klidové polohy (tj. $\omega_0 = 0$), v níž je jeho vztažná přímka vodorovná ($\theta_0 = 0$).

(a) Určete otočení vztažné přímky v okamžiku $t = 18$ s.

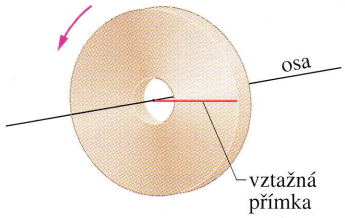
ŘEŠENÍ: Z rov. (11.10) v tab. 11.1 ($\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) dostaneme

$$\theta = 0(18\ \mathrm{s}) + \tfrac{1}{2}(0{,}35\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}})(18\ \mathrm{s})^2 =$$
$$= 56{,}7\ \mathrm{rad} \doteq 57\ \mathrm{rad} \doteq 3\,200^\circ \doteq 9{,}0\ \mathrm{ot}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je v tomto okamžiku úhlová rychlost kola?

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.9) v tab. 11.1 ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) vyjde

$$\omega = 0 + (0{,}35\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}})(18\ \mathrm{s}) =$$
$$= 6{,}3\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} = 360^\circ/\mathrm{s} = 1{,}0\ \mathrm{ot/s}. \quad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 11.7 Příklady 11.3 a 11.4. Vztažná přímka mlýnského kola je v okamžiku $t = 0$ vodorovná.

PŘÍKLAD 11.4

Předpokládejme, že počáteční úhlová rychlost mlýnského kola z př. 11.3 je nyní $\omega_0 = -4{,}6\ \mathrm{rad/s}$. Kolo se točí opět s úhlovým zrychlením ($\varepsilon = 0{,}35\ \mathrm{rad/s^2}$). Znaménka veličin ω_0 a ε jsou opačná, otáčivý pohyb kola je tedy zpomalený.

(a) Určete okamžik, kdy bude úhlová rychlost kola nulová.

ŘEŠENÍ: Vyřešíme rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) pro neznámou t a dostaneme

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{0 - (-4{,}6\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}})}{(0{,}35\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}})} = 13\ \mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete okamžik, kdy úhlová poloha kola odpovídá pěti otáčkám v kladném směru. (V tomto okamžiku má otočení vztažné přímky hodnotu $\theta = 5$ ot.)

ŘEŠENÍ: Na počátku pohybu se kolo otáčí v záporném směru (ve směru otáčení hodinových ručiček) úhlovou rychlostí $\omega_0 = -4{,}6\ \mathrm{rad/s}$. Jeho úhlové zrychlení je ovšem kladné (proti směru otáčení hodinových ručiček). Opačná znaménka počáteční úhlové rychlosti a úhlového zrychlení znamenají, že velikost úhlové rychlosti kola klesá. V určité chvíli se kolo na okamžik zastaví a začne se roztáčet v kladném směru. Poté, co se vztažná přímka vrátila do své počáteční úhlové polohy

$\theta = 0$, musí kolo vykonat ještě dalších pět otáček, aby jeho úhlová poloha měla předepsanou hodnotu. Popis pohybu kola se nám může zdát poměrně složitý. Všechny jeho fáze jsou však „již obsaženy" v rov. (11.10):

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2.$$

Po vyjádření úhlu θ v radiánech ($\theta = 5\,\text{ot} = 10\pi\,\text{rad}$) a dosazení číselných údajů dostaneme

$$10\pi\,\text{rad} = (-4{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})t + \tfrac{1}{2}(0{,}35\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})t^2.$$

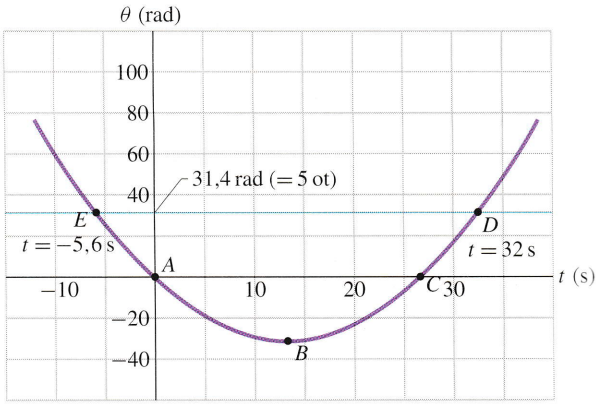
Je-li čas t vyjádřen v sekundách, je získaná rovnice rozměrově správná. V dalším výpočtu jednotky pro jednoduchost vynecháme. Kvadratickou rovnici pro neznámou t přepíšeme do tvaru

$$t^2 - 26{,}3t - 180 = 0 \qquad (11.14)$$

a vyřešíme ji. Řešením úlohy je její kladný kořen

$$t = 32\,\text{s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

bodu D. Kromě posouzení právoplatnosti záporného kořene rov. (11.14) jsme předchozími úvahami také podrobněji popsali časový průběh otáčení kola.



Obr. 11.8 Graf časové závislosti úhlové polohy $\theta(t)$ mlýnského kola podle př. 11.4. V grafu je znázorněna situace i pro záporné hodnoty časové proměnné (před okamžikem $t = 0$). Dva kořeny rov. (11.14) odpovídají bodům D a E.

RADY A NÁMĚTY

Bod 11.1: *Neočekávané výsledky*

Při posuzování fyzikálního významu kořenů kvadratické rovnice bychom neměli postupovat unáhleně. I kořen, který se nám na první pohled jeví jako nepřípustný, může mít dobrý fyzikální smysl. Právě tak je tomu i v př. 11.4.

Rov. (11.14) má kořeny $t = 32\,\text{s}$ a $t = -5{,}6\,\text{s}$. První z nich (kladný) jsme prohlásili za řešení úlohy a druhý zavrhli jako fyzikálně nevýznamný. Rozhodli jsme správně? Nikoliv! Záporná hodnota časové proměnné v tomto případě jednoduše udává jistý konkrétní okamžik předtím, než jsme začali pohyb kola sledovat, tj. než jsme stiskli vynulované stopky.

Obr. 11.8 znázorňuje časový průběh úhlové polohy θ vztažné přímky mlýnského kola (př. 11.4) pro kladné i záporné hodnoty časové proměnné. Představuje grafické vyjádření rov. (11.10) ($\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) pro číselné hodnoty $\omega_0 = -4{,}6\,\text{rad/s}$ a $\varepsilon = +0{,}35\,\text{rad/s}^2$. Bod A odpovídá okamžiku $t = 0$, jemuž jsme přisoudili nulovou hodnotu úhlové polohy vztažné přímky. Od této chvíle se kolo točí v záporném směru až do okamžiku $t = 13\,\text{s}$, kdy jeho úhlová rychlost dosáhne nulové hodnoty (v grafu bod B). Směr otáčení se změní v opačný a vztažná přímka projde úhlovou polohou $\theta = 0$ v okamžiku, jemuž v grafu odpovídá bod C. Pak se kolo ještě pětkrát otočí ($\theta = 31{,}4\,\text{rad}$, $t = 32\,\text{s}$, bod D v grafu). Časový údaj $t = 32\,\text{s}$ jsme v př. 11.4 přijali jako správné řešení úlohy.

Všimněme si však, že vztažná přímka měla úhlovou polohu $\theta = 5\,\text{ot}$ také v okamžiku $t = -5{,}6\,\text{s}$, tj. před „oficiálně stanoveným" začátkem měření veličin charakterizujících pohyb kola. Fyzikální význam tohoto kořene kvadratické rovnice (11.14), reprezentovaného bodem E na obrázku, není tedy o nic menší než význam kořene odpovídajícího

PŘÍKLAD 11.5

Při zkoumání pohybu rotoru vrtulníku se zjistilo, že se jeho úhlová rychlost změnila během doby 1,50 min z 320 ot/min na 225 ot/min.

(a) Určete průměrné úhlové zrychlení rotoru v uvedeném intervalu.

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.7) plyne

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{(225\,\text{ot/min}) - (320\,\text{ot/min})}{(1{,}50\,\text{min})} = \\ = -63{,}3\,\text{ot/min}^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že se otáčení rotoru zpožďuje rovnoměrně, takže je okamžité úhlové zrychlení v každém okamžiku shodné s průměrným. Jak dlouho potrvá, než se rotor zastaví, je-li jeho počáteční úhlová rychlost 320 ot/min?

ŘEŠENÍ: Rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$) řešíme vzhledem k neznámé t a dostaneme

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{0 - (320\,\text{ot/min})}{(-63{,}3\,\text{ot/min}^2)} = \\ = 5{,}1\,\text{min}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Kolik otáček vykoná rotor vrtulníku v úloze (b)?

ŘEŠENÍ: Rov. (11.11) ($\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta$) nyní řešíme vzhledem k neznámé θ:

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{0 - (320\,\text{ot/min})^2}{2(-63{,}3\,\text{ot/min}^2)} = \\ = 809\,\text{ot}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

11.5 KORESPONDENCE OBVODOVÝCH A ÚHLOVÝCH VELIČIN

Připomeňme si čl. 4.7, kde jsme studovali rovnoměrný pohyb částice po kružnici. Částice se pohybovala *obvodovou rychlostí* $\boldsymbol{v}$ se stálou velikostí v. Takový pohyb však můžeme chápat i jako rotaci částice kolem pevné osy, vedené středem kružnice kolmo k její rovině. Otáčí-li se kolem pevné osy tuhé těleso (například kolotoč), pohybuje se každá jeho částice po své vlastní kruhové trajektorii. Osa otáčení tělesa je spojnicí středů všech těchto kružnic. Protože je těleso tuhé, trvá jeden oběh všech jeho částic stejnou dobu. Částice tedy mají stejnou úhlovou rychlost ω.

Čím je však částice vzdálenější od osy otáčení, tím větší je obvod její trajektorie a tedy i její obvodová rychlost. Tuto skutečnost si snadno uvědomíme třeba při jízdě na kolotoči. Úhlová rychlost otáčení ω je nezávislá na vzdálenosti sedačky, na níž se vezeme, od osy kolotoče. Obvodová rychlost $\boldsymbol{v}$ (a nepříjemné pocity dané její změnou) je však tím větší, čím je sedačka od osy vzdálenější.

Často je třeba mít k dispozici vztahy mezi obvodovými veličinami, tj. délkou oblouku s, obvodovou rychlostí v a obvodovým zrychlením a jednotlivých částic rotujícího tuhého tělesa a úhlovými veličinami θ, ω a ε, charakterizujícími otáčivý pohyb tělesa jako celku. Vztah obvodových a úhlových veličin je pro každou částici určen její *vzdáleností* r od osy otáčení, tj. poloměrem její kruhové trajektorie.

Poloha

Sledujme pohyb vybrané částice rotujícího tuhého tělesa. Při otočení vztažné přímky o úhel θ urazí částice po oblouku své kruhové trajektorie dráhu s podle rov. (11.1)

$$s = \theta r \quad (\theta \text{ je v rad}). \tag{11.15}$$

Získáváme první vztah mezi obvodovými a úhlovými veličinami. Úhel θ je třeba měřit v radiánech, neboť rov. (11.15) představuje současně definici úhlové míry.

Rychlost

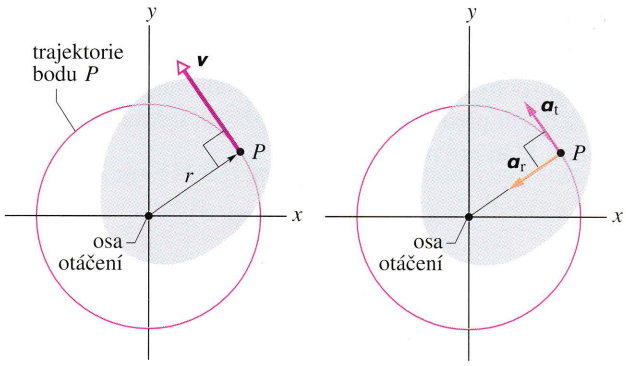
Derivujme rov. (11.15) podle času (při konstantní hodnotě r). Pak

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} r \quad (\theta \text{ je v rad}).$$

Veličina $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ představuje obvodovou rychlost uvažované částice a $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ je úhlová rychlost ω rotujícího tělesa. Je tedy

$$v = \omega r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.16}$$

Úhlovou rychlost ω je opět nutné vyjádřit pomocí obloukové míry, tj. v jednotkách rad/s. Jak již víme, mají všechny částice tělesa stejnou úhlovou rychlost. Z rov. (11.16) pak snadno poznáme, že částice, které obíhají ve větší vzdálenosti r od osy otáčení, mají větší obvodovou rychlost v. Obr. 11.9a znázorňuje známou skutečnost, že vektor rychlosti částice je v každém okamžiku tečný k její kruhové trajektorii.



Obr. 11.9 Řez tuhým tělesem znázorněným na obr. 11.2 rovinou kolmou k ose otáčení. Každá částice tělesa (např. P) se pohybuje po kruhové trajektorii, jejíž střed leží na ose otáčení. (a) Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ částice je tečný k její kruhové trajektorii. (b) Zrychlení $\boldsymbol{a}$ libovolné částice je součtem dvou průmětů, tečného ($\boldsymbol{a}_t$) a normálového ($\boldsymbol{a}_r$).

Při otáčení tělesa stálou úhlovou rychlostí je podle rov. (11.16) časově neproměnná i obvodová rychlost každé jeho částice. Každá částice tělesa tedy koná rovnoměrný pohyb po kružnici. Doba oběhu T je pro všechny částice stejná a samozřejmě shodná s trváním jedné otáčky celého tělesa. Je vyjádřena vztahem (4.23)

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \tag{11.17}$$

z něhož je patrné, že je podílem délky kruhové trajektorie částice ($2\pi r$) a její obvodové rychlosti (v). Po dosazení v z rov. (11.16) a malé úpravě dostaneme

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.18}$$

Tento výsledek je samozřejmě ekvivalentní s rov. (11.17). Vyjadřuje však společnou dobu oběhu všech částic pomocí veličin charakterizujících otáčivý pohyb tělesa jako celku, tj. jako podíl úhlu otočení tělesa (2π rad) během jedné otáčky a jeho úhlové rychlosti (ω).

Obvodové zrychlení

Derivací rov. (11.16) podle času (r je opět konstantní) dostáváme

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r. \qquad (11.19)$$

V tuto chvíli je na místě jistá obezřetnost: veličina dv/dt na levé straně rov. (11.19) je časovou derivací obvodové rychlosti částice. Udává tedy časovou změnu *velikosti* vektoru její rychlosti a charakterizuje tak *nerovnoměrnost* jejího pohybu. Vraťme se na okamžik k čl. 6.4, který se zabýval výhradně *rovnoměrným* pohybem po kružnici. Vzpomeňme si, že zrychlení částice směřovalo v tomto případě neustále do středu její kruhové trajektorie, takže jeho tečný průmět (*tečné zrychlení*) byl nulový. Zdá se tedy, že tečné zrychlení nutně souvisí se změnou obvodové rychlosti a při nerovnoměrném pohybu již pochopitelně nebude nulové. Skutečně, výraz dv/dt představuje *tečnou složku* a_t vektoru zrychlení částice. Platí pro ni

$$a_t = \varepsilon r \quad (\varepsilon \text{ je v rad/s}^2), \qquad (11.20)$$

kde $\varepsilon = d\omega/dt$.

(Při pohybu po kružnici nazýváme někdy tečnou složku zrychlení částice též obvodovým zrychlením.)

Celkové zrychlení částice je součtem jeho dvou průmětů, **tečného zrychlení** $\boldsymbol{a}_t$ a **normálového (radiálního) zrychlení** $\boldsymbol{a}_r$. Při pohybu po kružnici směřuje normálové zrychlení do jejího středu a vystihuje změnu směru vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Jeho velikost, tzv. **normálová složka** zrychlení, se řídí známým vztahem $a_r = v^2/r$ (rov. (4.22)). Dosazením v z rov. (11.16) dostaneme pro a_r vztah

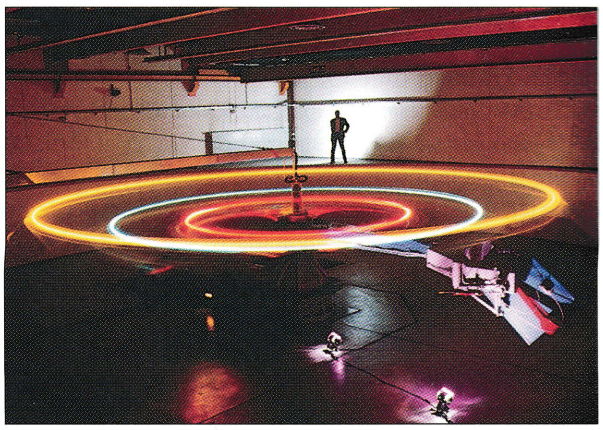
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \qquad (11.21)$$

Předchozí úvahy názorně shrnuje obr. 11.9b: zrychlení každé částice rotujícího tuhého tělesa je součtem svých dvou průmětů, tečného a normálového zrychlení. Tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_t$ má směr vektoru rychlosti a normálové zrychlení $\boldsymbol{a}_r$ směřuje do středu kruhové trajektorie. Normálová složka zrychlení je dána vztahem (11.21), a je tedy vždy nenulová (pokud těleso rotuje, je $\omega \neq 0$). Tečná složka a_t se řídí vztahem (11.20)) a je nenulová v případě, že je otáčivý pohyb tělesa nerovnoměrný, tj. jeho úhlové zrychlení je nenulové.

KONTROLA 3: Moucha se veze na okraji kolotoče, jehož úhlová rychlost je konstantní. Rozhodněte, zda je (a) normálová, resp. (b) tečná složka zrychlení mouchy nenulová. (c), (d) Zodpovězte předchozí otázky pro případ, že úhlová rychlost kolotoče klesá.

PŘÍKLAD 11.6

Na obr. 11.10 je vyfotografována centrifuga určená pro výcvik astronautů. Poloměr r kruhové trajektorie trénujícího astronauta je 15 m.



Obr. 11.10 Příklad 11.6. Centrifuga pro výcvik astronautů v německém Kolíně. Při tréninku si astronauti zvykají na velká zrychlení, jimž jsou vystaveni při startu rakety.

(a) Předpokládejme, že se centrifuga otáčí rovnoměrně. Jaká musí být její úhlová rychlost, má-li si astronaut zvykat na zrychlení $11g$?

ŘEŠENÍ: Protože je úhlová rychlost centrifugy stálá, je její úhlové zrychlení ε $(= d\omega/dt)$ nulové. Podle rov. (11.20) je nulová i tečná složka zrychlení astronauta. Celkové zrychlení je tedy dáno pouze zrychlením normálovým. Užitím rov. (11.21) $(a_r = \omega^2 r)$ a požadavku $a_r = 11g$ dostaneme

$$\omega = \sqrt{\frac{a_r}{r}} = \sqrt{\frac{11(9{,}8\ \text{m·s}^{-2})}{(15\ \text{m})}} =$$
$$= 2{,}68\ \text{rad·s}^{-1} \doteq 26\ \text{ot/min}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete tečné zrychlení pohybu astronauta za předpokladu, že úhlová rychlost centrifugy rovnoměrně vzroste během 120 s z počáteční nulové hodnoty na hodnotu vypočtenou v úkolu (a).

ŘEŠENÍ: Poněvadž je úhlové zrychlení centrifugy podle předpokladu stálé, můžeme pro jeho výpočet použít rovnici (11.9). Dostaneme

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{(2{,}68\ \text{rad·s}^{-1} - 0)}{(120\ \text{s})} = 0{,}022\,3\ \text{rad·s}^{-2}.$$

Tečnou složku zrychlení astronauta pak již snadno určíme pomocí rov. (11.20):

$$a_t = \varepsilon r = (0{,}022\,3\ \text{rad·s}^{-2})(15\ \text{m}) =$$
$$= 0{,}33\ \text{m·s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná hodnota normálové složky zrychlení astronauta je značná ($a_r = 11g$). Tečná složka při rozjezdu centrifugy je v porovnání s ní mnohonásobně nižší ($a_t = 0{,}034g$).

RADY A NÁMĚTY

Bod 11.2: *Jednotky úhlových veličin*

Definice úhlové polohy ve tvaru (11.1) ($\theta = s/r$) nás zavazuje k používání obloukové míry (radiány) ve všech vztazích mezi úhlovými a obvodovými veličinami. Otočení tedy musíme vyjadřovat vždy v radiánech, úhlové rychlosti v jednotkách rad/s nebo rad/min a úhlová zrychlení v jednotkách rad/s^2 nebo rad/min^2. Ve vztazích (11.15), (11.16), (11.18), (11.20) a (11.21) jsme tuto skutečnost explicitně zdůraznili. Tímto pravidlem se však nemusíme řídit ve vztazích obsahujících *výhradně* úhlové veličiny (vztahy v pravé části tab. 11.1). Můžeme v nich pracovat s libovolnými úhlovými jednotkami, tj. kromě radiánů také se stupni nebo počty otáček, pokud je užíváme konzistentně, tj. „nemícháme je".

Ve vztazích vyžadujících použití obloukové míry není třeba vypisovat jednotku „radián" (rad) během celého výpočtu. Stačí ji uvést až ve výsledku. Takového zjednodušení zápisu jsme použili v př. 11.6.

11.6 KINETICKÁ ENERGIE TĚLESA PŘI OTÁČIVÉM POHYBU

Rychle rotující kotoučová pila má určitě značnou kinetickou energii a jistě je možné ji určit. Ale jak? Známý vztah $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ platí totiž pro částici. Pro výpočet kinetické energie rotujícího tělesa však není přímo použitelný už proto, že nevíme, kterou veličinu bychom měli dosazovat za v.

Považujme kotoučovou pilu (a obecně každé rotující tuhé těleso) za soustavu částic pohybujících se různými rychlostmi. Kinetickou energii takového tělesa pak celkem přirozeně definujeme jako součet kinetických energií jednotlivých částic, tj.

$$E_k = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots = \\ = \sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2. \qquad (11.22)$$

Hmotnost i-té částice jsme označili symbolem m_i a velikost její rychlosti v_i. Součet zahrnuje všechny částice tělesa.

Získaný vztah je ovšem pro praktický výpočet kinetické energie tělesa poněkud nepohodlný. Částice se totiž pohybují různými rychlostmi $\boldsymbol{v}_i$. Uvědomíme-li si však, že rov. (11.16) umožňuje vyjádřit velikost rychlosti každé částice pomocí její vzdálenosti od osy otáčení a úhlové rychlosti, která charakterizuje otáčivý pohyb tělesa jako celku, můžeme se tohoto „nepohodlí" snadno zbavit. Užitím rov. (11.16) dostaneme

$$E_k = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2. \qquad (11.23)$$

Hodnota ω je stejná pro všechny částice.

Veličina v závorce po poslední úpravě rov. (11.23) závisí na rozložení hmoty tělesa vzhledem k ose otáčení. Nazýváme ji **momentem setrvačnosti** tělesa vzhledem k dané ose otáčení a značíme ji I. Všimněme si, že pro případ tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevně zvolené osy, je moment setrvačnosti konstantní. Tato jeho vlastnost je velmi podstatná a usnadňuje všechny další úvahy. Volbu osy otáčení je ovšem nutno při výpočtu momentu setrvačnosti jasně zadat, neboť jeho hodnota na ní výrazně závisí.

Pomocí momentu setrvačnosti

$$I = \sum m_ir_i^2 \qquad (11.24)$$

získáme z rov. (11.23) pro E_k velmi jednoduchý výraz

$$E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \qquad (11.25)$$

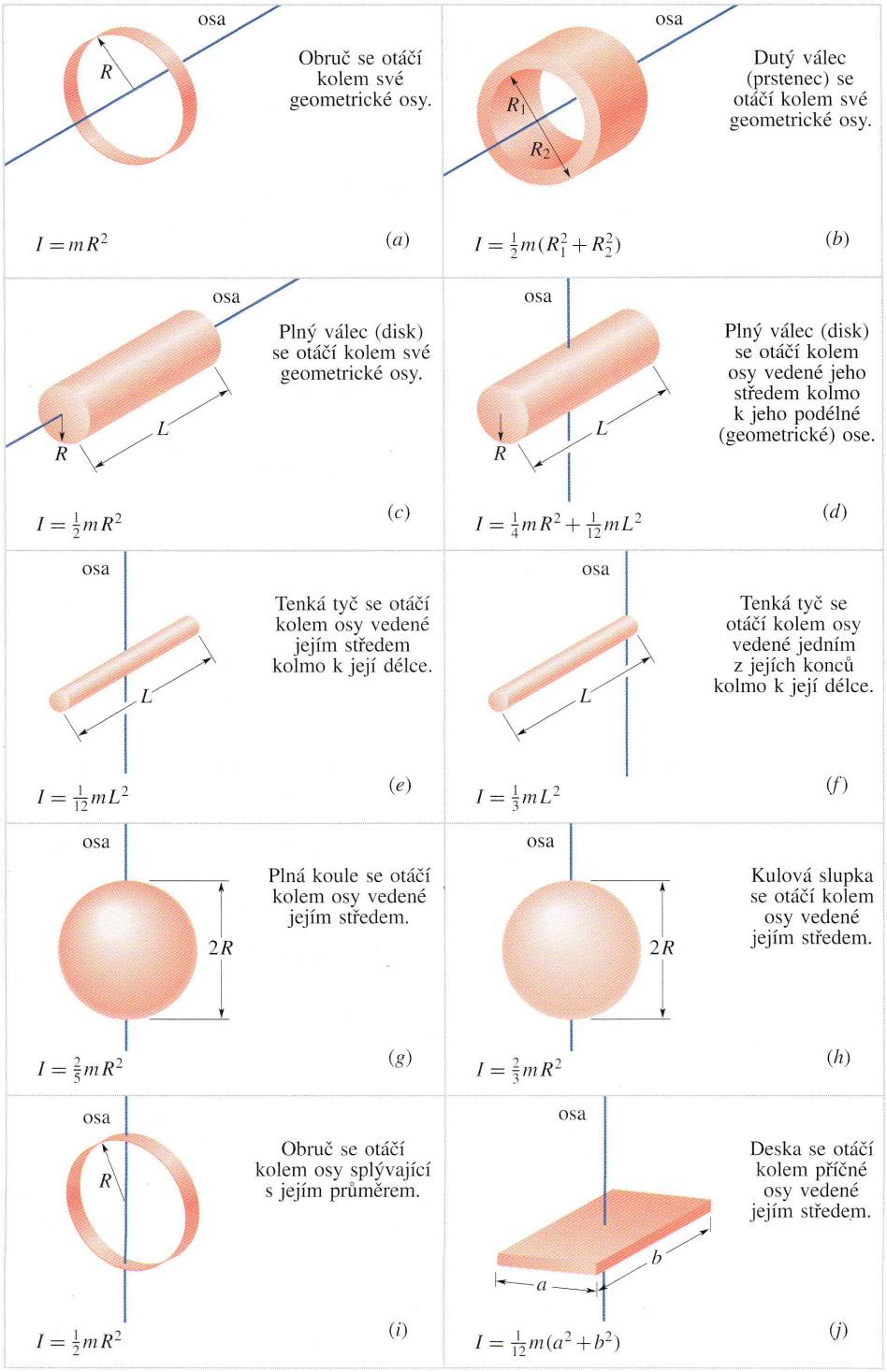
Při jeho odvození jsme použili vztah $v = \omega r$. Úhlovou rychlost ω v rov. (11.25) musíme proto zadávat v obloukové míře.

Všimněme si podobnosti rov. (11.25) pro kinetickou energii otáčejícího se tuhého tělesa se vztahem $E_k = \tfrac{1}{2}mv_T^2$, který vyjadřuje jeho kinetickou energii při posuvném pohybu. V obou vztazích se vyskytuje faktor $\frac{1}{2}$. Hmotnost m ve vztahu pro kinetickou energii posuvného pohybu představuje „míru setrvačnosti" tělesa. V případě otáčení se ve výrazu pro E_k objevuje moment setrvačnosti I, který tak lze chápat jako „míru setrvačnosti" tělesa při jeho otáčení. V obou vztazích vystupuje druhá mocnina příslušné rychlosti (rychlosti posuvného, resp. úhlové rychlosti otáčivého pohybu). Oba výrazy vyjadřují stejný typ energie, energii kinetickou. Liší se pouze způsobem zápisu podle typu pohybu tělesa.

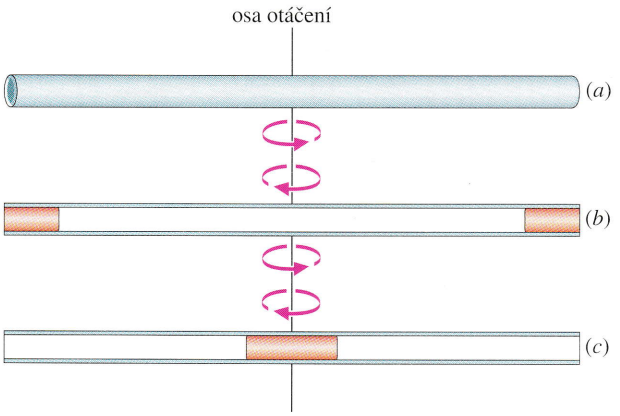
Všimli jsme si již, že moment setrvačnosti tuhého tělesa závisí nejen na jeho hmotnosti, ale i jejím rozložení vzhledem k ose otáčení. Obr. 11.11 názorně ukazuje, jak můžeme rozdíly momentu setrvačnosti pocítit takřka „na vlastní kůži". Na obr. 11.11a jsou dvě duté tyče, které na pohled vypadají úplně stejně. Jejich vnější rozměry i hmotnosti jsou shodné a obě tyče jsou v rovnováze, jsou-li podepřeny uprostřed. Žádný rozdíl nezpozorujeme ani tehdy, uchopíme-li je postupně do ruky a uvedeme do posuvného pohybu.

Zcela odlišné pocity však zaznamenáme, zkusíme-li tyče rychle roztáčet. S jednou z nich to půjde velmi snadno, druhá se „bude bránit". Obr. 11.11b, c odhalují podstatu

Tabulka 11.2 Momenty setrvačnosti některých homogenních těles

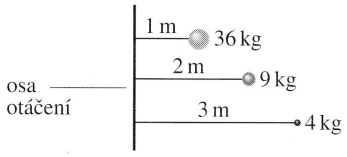


tohoto rozdílu. „Poslušná“ tyč má uvnitř dvě závaží, která jsou umístěna blízko jejího středu, zatímco druhá tyč má stejná závaží připevněna na koncích. Hmotnosti tyčí jsou sice stejné, ale jejich hmota je *jinak rozložena* vzhledem k vyznačené ose otáčení. Proto jsou výrazně odlišné i hodnoty jejich momentu setrvačnosti vzhledem k této ose.



Obr. 11.11 (a) Vnější vzhled tyčí, jejichž vnitřek je znázorněn na obrázcích (b) a (c), je totožný. Tyče se budou jevit stejné do chvíle, kdy se pokusíme je roztočit kolem osy procházející jejich středem. Tyč (c) se roztáčí snadno, tyč (b) „odolává“. I když mají obě tyče stejnou hmotnost, jsou jejich momenty setrvačnosti vzhledem k dané ose otáčení výrazně odlišné vlivem různého rozložení jejich hmoty. Moment setrvačnosti tyče (b) je podstatně větší než moment setrvačnosti tyče (c).

KONTROLA 4: Částice na obrázku obíhají kolem svislé osy v daných vzdálenostech. Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentu setrvačnosti vzhledem k této ose.



11.7 VÝPOČET MOMENTU SETRVAČNOSTI

Je-li tuhé těleso složeno z jednotlivých částic, lze jeho moment setrvačnosti snadno určit pomocí součtu (11.24). Je-li však hmota tělesa rozložena spojitě, je třeba nahradit tento součet integrálem. Moment setrvačnosti je pak definován jako

$$I = \int r^2 \, dm. \qquad (11.26)$$

V úlohách této kapitoly se budeme zabývat výpočty I pro oba typy těles. Obecně lze říci, že moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k dané ose otáčení závisí (1) na jeho tvaru, (2) na vzdálenosti jeho těžiště od osy otáčení a (3) na jeho orientaci vzhledem k ose otáčení.

Tab. 11.2 shrnuje vztahy pro výpočet momentu setrvačnosti některých běžných homogenních těles vzhledem k různým osám otáčení. Všimněme si, jak rozložení hmoty vzhledem k ose otáčení ovlivní hodnotu I. Tak například u tyče na obrázku (f) je větší část hmoty dále od osy otáčení než u stejně dlouhé tyče na obrázku (e). Tyče mají stejnou hmotnost i délku, jejich momenty setrvačnosti jsou však rozdílné vlivem odlišné volby osy otáčení. Moment setrvačnosti tyče v situaci (f) je větší než v případě (e).

Steinerova věta

Známe-li moment setrvačnosti I_T tělesa vzhledem k jisté ose jdoucí jeho těžištěm, můžeme snadno vypočítat jeho moment setrvačnosti vzhledem ke každé další ose téhož směru. Vztah mezi oběma momenty setrvačnosti se nazývá **Steinerova věta**. Platí

$$I = I_T + mh^2, \qquad (11.27)$$

kde m je hmotnost tělesa a h je vzdálenost uvažovaných rovnoběžných os. Slovně lze předchozí vztah vyjádřit takto:

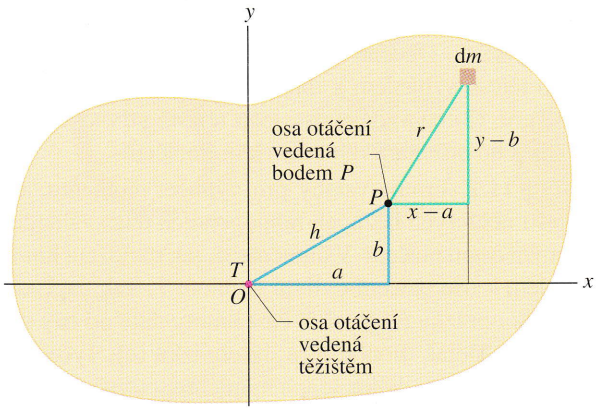
Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolně zvolené ose o je *součtem* jeho momentu setrvačnosti I_T vzhledem k rovnoběžné ose o' ($o' \parallel o$), vedené jeho těžištěm, a momentu setrvačnosti mh^2 veškeré hmoty soustředěné v těžišti vzhledem k ose o, kde h je vzdálenost os o, o'.

Důkaz Steinerovy věty

Uvažujme těleso obecného tvaru, které se může otáčet kolem obecně zvolené pevné osy. Těžiště tělesa označme T a umístěme v něm počátek soustavy souřadnic ($O = T$). Řez tělesa rovinou kolmou k ose otáčení a procházející těžištěm tělesa je znázorněn obr. 11.12. Průsečík osy otáčení s rovinou řezu označme P a jeho souřadnice a a b.

Uvažujme objemový element tělesa v bodě o souřadnicích x a y a označme jeho hmotnost dm. Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené bodem P můžeme vyjádřit pomocí rov. (11.26) takto:

$$I = \int r^2 \, dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] \, dm.$$



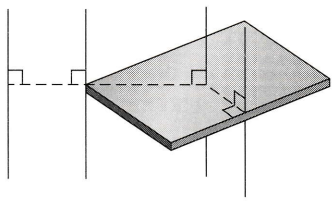
Obr. 11.12 Řez tuhým tělesem s těžištěm T v počátku O soustavy souřadnic. Steinerova věta (11.27) umožňuje vyjádřit moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené bodem P jako součet momentu setrvačnosti vzhledem k ose téhož směru, procházející však těžištěm T, a výrazu mh^2, kde h je vzdálenost obou os. Osy jsou kolmé k rovině nákresu.

Tento integrál lze přepsat ve tvaru

$$I = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m - 2a \int x\,\mathrm{d}m$$
$$-2b \int y\,\mathrm{d}m + \int (a^2 + b^2)\,\mathrm{d}m. \qquad (11.28)$$

Uvědomíme-li si definiční vztah pro polohu těžiště tělesa (rov. (9.9)), ihned vidíme, že druhý a třetí integrál v rov. (11.28) představují, až na násobení konstantou, x-ovou a y-ovou souřadnici těžiště. Jsou tedy nulové. Součet $x^2 + y^2$ můžeme označit jako R^2, kde symbolem R rozumíme vzdálenost elementu $\mathrm{d}m$ od bodu O. Je zřejmé, že první integrál má význam momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm, I_T. Poslední člen v rov. (11.28) má hodnotu je mh^2 (obr. 11.12), kde m je hmotnost tělesa. Získali jsme rov. (11.27), představující matematický zápis Steinerovy věty.

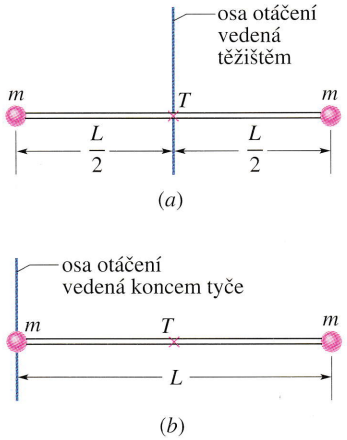
KONTROLA 5: Těleso na obrázku (například kniha) se může otáčet kolem čtyř různých os. Všechny jsou kolmé k vodorovné základně tělesa. Seřaďte je sestupně podle odpovídajících hodnot momentu setrvačnosti tělesa.



(1) (2) (3) (4)

PŘÍKLAD 11.7

Tuhé těleso na obr. 11.13 je tvořeno dvěma částicemi o hmotnosti m spojenými tyčí délky L, jejíž hmotnost je zanedbatelná.



Obr. 11.13 Příklad 11.7. Tuhé těleso je tvořeno dvěma částicemi o hmotnosti m spojenými tyčí zanedbatelné hmotnosti.

(a) Určete moment setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím středem (obr. 11.13a).

ŘEŠENÍ: Z rov. (11.24) plyne

$$I = \sum m_i r_i^2 = m(\tfrac{1}{2}L)^2 + m(\tfrac{1}{2}L)^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené koncem tyče rovnoběžně s osou zadanou v úloze (a) (obr. 11.13b).

ŘEŠENÍ: Úlohu řešíme pomocí Steinerovy věty (11.27). Moment setrvačnosti I_T jsme určili v části (a). Víme, že vzdálenost h obou rovnoběžných os je polovinou délky tyče. Z rov. (11.27) tedy dostáváme

$$I = I_T + mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2 =$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek můžeme snadno ověřit přímým výpočtem podle rov. (11.24):

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(0)^2 + (m)(L)^2 =$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.8

Na obr. 11.14 je znázorněna tenká homogenní tyč o hmotnosti m a délce L.

(a) Vypočtěte její moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím hmotným středem.

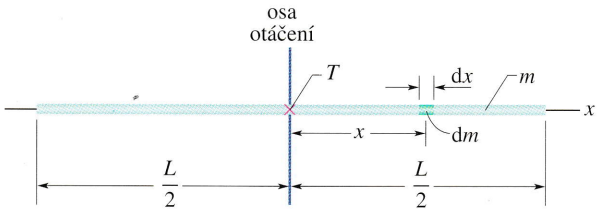
ŘEŠENÍ: Zvolme osu x rovnoběžně s tyčí tak, aby její počátek ležel v těžišti tyče. Označme dx element délky tyče, umístěný v bodě o souřadnici x. Hmotnost úseku tyče jednotkové délky, tzv. lineární hustota, je m/L, element dx má hmotnost

$$dm = \frac{m}{L}\,dx.$$

Podle rov. (11.26) je pak

$$I = \int r^2\,dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{L}\,dx =$$
$$= \frac{m}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] =$$
$$= \tfrac{1}{12}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek se shoduje s údajem v tab. 11.2e.



Obr. 11.14 Příklad 11.8. Homogenní tyč délky L a hmotnosti m.

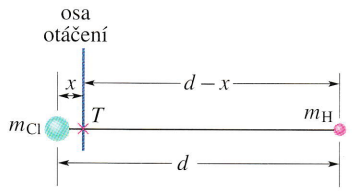
(b) Určete moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose vedené kolmo k tyči jejím koncovým bodem.

ŘEŠENÍ: Použijeme výsledek části (a) a Steinerovu větu (11.27). Dostaneme, ve shodě s tab. 11.2f,

$$I = I_T + mh^2 =$$
$$= \tfrac{1}{12}mL^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{3}mL^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.9

Molekula chlorovodíku se skládá z atomu vodíku o hmotnosti $m_H = 1{,}01$ u a atomu chloru o hmotnosti $m_{Cl} = 35{,}0$ u. Vzdálenost středů atomů je $d = 1{,}27\cdot10^{-10}$ m $= 127$ pm (obr. 11.15). Vypočtěte polohu těžiště molekuly chlorovodíku vzhledem k ose vedené jejím těžištěm kolmo ke spojnici atomů.



Obr. 11.15 Příklad 11.9. Schematicky znázorněná molekula chlorovodíku. Osa otáčení prochází jejím těžištěm a je kolmá je spojnici atomů.

ŘEŠENÍ: Označme x vzdálenost atomu chloru od těžiště molekuly. Z obr. 11.15 a rov. (9.3) dostáváme

$$0 = \frac{-m_{Cl}x + m_H(d - x)}{m_{Cl} + m_H},$$

tj.

$$m_{Cl}x = m_H(d - x).$$

Odtud

$$x = d\frac{m_H}{m_{Cl} + m_H}. \qquad (11.29)$$

Moment setrvačnosti molekuly vzhledem k ose jdoucí jejím těžištěm je (viz rov. (11.24))

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_H(d - x)^2 + m_{Cl}x^2.$$

Dosazením za x ze vztahu (11.29) a po úpravě dostaneme

$$I = d^2\frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} = (127\text{ pm})^2\frac{(1{,}01\text{ u})(35{,}0\text{ u})}{(1{,}01\text{ u} + 35{,}0\text{ u})} =$$
$$= 15{,}800\text{ u·pm}^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Použité jednotky jsou pro vyjádření momentu setrvačnosti molekul přiměřené. Ještě vhodnější je délková jednotka angström (1 Å $= 10^{-10}$ m), pomocí níž bude $I = 1{,}58$ u·Å^2.

PŘÍKLAD 11.10

Pomocí moderní techniky je možné zkonstruovat setrvačník, který může sloužit jako pohon automobilu. Setrvačník se nejprve roztočí motorem tak, aby kinetická energie jeho otáčivého pohybu byla dostatečná. Takto „uložená“ energie je pak postupně předávána automobilu prostřednictvím převodové soustavy. Představme si takový setrvačník jako plný válec o hmotnosti $m = 75$ kg a poloměru $R = 25$ cm. Zjistěte, jak velká energie je v něm „uložena“, je-li roztočen na úhlovou rychlost 85 000 ot/min.

ŘEŠENÍ: Moment setrvačnosti válcového setrvačníku vyjádříme podle tab. 11.2c:

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(75\text{ kg})(0{,}25\text{ m})^2 = 2{,}34\text{ kg·m}^2.$$

Úhlová rychlost setrvačníku je

$$\omega = (85\,000\text{ ot/min})(2\pi\text{ rad/ot})(1\text{ min}/60\text{ s}) =$$
$$= 8\,900\text{ rad·s}^{-1}.$$

Z rov. (11.25) získáme jeho kinetickou energii

$$E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2{,}34\text{ kg·m}^2)(8\,900\text{ rad·s}^{-1})^2 =$$
$$= 9{,}3\cdot10^7\text{ J} = 26\text{ kW·h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Účinnost takového pohonu nebude samozřejmě stoprocentní. Vezmeme-li však v úvahu její rozumný odhad, zjistíme,

že setrvačník by dokázal dopravit automobil do vzdálenosti 320 km.

11.8 MOMENT SÍLY

Přemýšleli jste někdy nad tím, proč je klika umístěna na protilehlé straně závěsu dveří? K otevření těžkých dveří je potřeba značné síly. Samotná síla by ovšem k otevření dveří nemusela stačit, kdybychom nevhodně zvolili její směr nebo působiště. Kdyby síla působila v některém bodě poblíž závěsu dveří nebo kdyby nebyla ke dveřím kolmá, musela by být větší než v případě, že by její směr a působiště byly vybrány optimálně.

Na obr. 11.16a vidíme řez tělesem, které se může volně otáčet kolem pevné osy kolmé k rovině nákresu. Na těleso působí v bodě P síla $\boldsymbol{F}$. Rovina řezu je vedena bodem P, její průsečík s osou otáčení je označen O. Polohový vektor bodu P vzhledem k O označíme $\boldsymbol{r}$. Vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{r}$ svírají úhel φ. Pro jednoduchost se omezíme pouze na síly ležící v některé z rovin kolmých k ose otáčení. Průmět každé takové síly do směru osy otáčení je nulový. Ve shodě s tímto předpokladem leží tedy síla $\boldsymbol{F}$ v rovině obrázku.

Abychom zjistili otáčivý účinek síly $\boldsymbol{F}$, rozložíme ji do dvou průmětů podle obr. 11.16b. První z nich určuje takzvanou *radiální složku* F_r síly $\boldsymbol{F}$. Je rovnoběžný s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ a nemá vliv na otáčivý pohyb tělesa. Působí totiž podél spojnice bodů P a O. (Jistě si snadno představíme, nebo i vyzkoušíme, co se stane, budeme-li tahat za kliku ve směru ležícím v rovině dveří. Pravděpodobně dveřmi příliš nepohneme.) Druhý průmět síly $\boldsymbol{F}$, kolmý k vektoru $\boldsymbol{r}$, definuje její *tečnou složku* $F_t = F \sin\varphi$. Právě ona *způsobí* otočení dveří. (Můžeme si vyzkoušet, že silou namířenou kolmo k rovině dveří jimi celkem snadno otočíme.)

„Schopnost" síly $\boldsymbol{F}$ otáčet tělesem závisí však nejen na velikosti její tečné složky F_t, ale také na vzdálenosti jejího působiště od bodu O. Veličina, která bere v úvahu oba tyto vlivy, se nazývá **moment síly** $\boldsymbol{M}$ vzhledem k ose otáčení. Jeho velikost definujeme vztahem

$$M = (r)(F \sin\varphi). \tag{11.30}$$

Existují dva ekvivalentní způsoby vyjádření momentu síly:

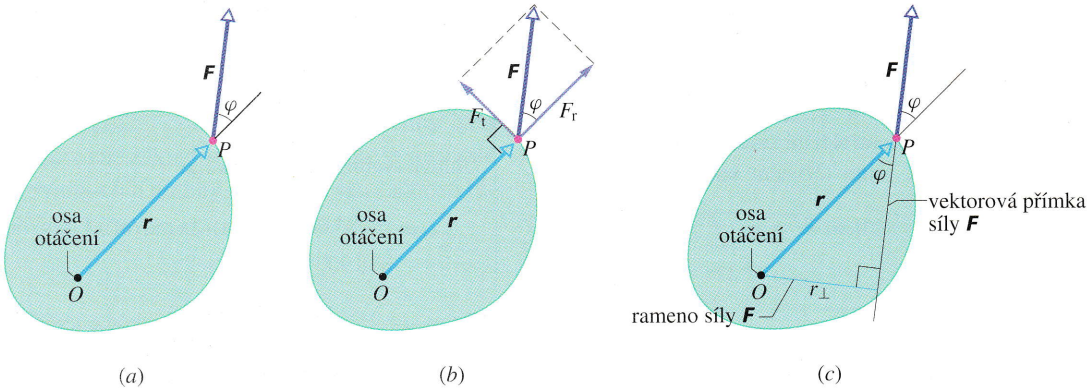
$$M = (r)(F \sin\varphi) = rF_t \tag{11.31}$$

nebo

$$M = (r \sin\varphi)(F) = r_\perp F, \tag{11.32}$$

$r_\perp$ je kolmá vzdálenost bodu O od vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$. Je to přímka, v níž vektor síly leží (obr. 11.16c). Veličinu $r_\perp$ nazýváme **rameno síly** $\boldsymbol{F}$. Z obr. 11.16b je zřejmé, že r (tedy velikost vektoru $\boldsymbol{r}$) je současně ramenem tečného průmětu $\boldsymbol{F}_t$ síly $\boldsymbol{F}$.*

* Uvědomme si dobře souvislost definice momentu síly *vzhledem k ose otáčení* s konstrukcí na obr. 11.16. Bod O je průsečíkem roviny řezu vedené působištěm P síly $\boldsymbol{F}$ kolmo k ose otáčení. Dejme tomu, že na těleso působí ještě jiná síla $\boldsymbol{F}'$, jejíž působiště P' však *neleží* v rovině vedené kolmo k ose otáčení bodem P. Abychom určili její moment vzhledem k ose, musíme opět najít průsečík osy s příslušnou rovinou řezu. Dostaneme tak bod O'. Taková konstrukce má ovšem smysl jen tehdy, je-li osa otáčení pevná. Také definice momentu síly vzhledem k ose otáčení je na tento předpoklad vázána. V obecných situacích je nutné definovat moment síly obecněji a vztahovat jej nikoli k pevné přímce (ose), nýbrž k pevnému bodu. Nakonec si ještě povšimněme, že v případě otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy, na které působí síly ležící výhradně v rovinách kolmých k ose otáčení, jsou vektorové přímky těchto sil kolmé k ose a v obecném případě jsou s ní mimoběžné. Ramenem každé ze sil vzhledem k ose otáčení je pak vzdálenost dvou mimoběžek, vektorové přímky dotyčné síly a osy otáčení.



(a) (b) (c)

Obr. 11.16 (a) Síla $\boldsymbol{F}$ působí na tuhé těleso v bodě P. Těleso se může otáčet kolem osy vedené bodem O kolmo k rovině obrázku. (b) Moment této síly vzhledem k této ose má velikost $(r)(F \sin\varphi)$, kterou lze také vyjádřit ve tvaru rF_t, kde F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$. (c) Jiný možný zápis velikosti momentu síly $\boldsymbol{F}$ má tvar $r_\perp F$, kde $r_\perp$ je rameno síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení.

Kroucení se též nazývá **torze** (z latiny). Přibližně lze říci, že moment síly vyjadřuje kroutivý (torzní) účinek síly.

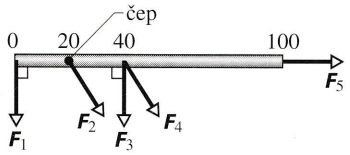
Shrňme nyní dosavadní poznatky. Působíme-li na těleso, třeba na šroubovák nebo klíč, určitou silou ve snaze tělesem *otočit*, musí být moment této síly vzhledem k ose otáčení nenulový. Někdy říkáme, že na těleso *působíme určitým momentem*. Jednotkou momentu síly v soustavě SI je N·m.* Moment M považujeme za kladný, roztáčí-li těleso proti směru otáčení hodinových ručiček, tj. ve směru rostoucí úhlové polohy θ. (Taková situace je znázorněna na obr. 11.16.) Roztáčí-li se těleso ve směru otáčení hodinových ručiček, přisuzujeme momentu síly záporné znaménko.

Definici momentu síly rov. (11.30) lze zapsat i ve vektorovém tvaru, konkrétně pomocí *vektorového součinu*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \qquad (11.33)$$

Moment síly je tedy vektorovou veličinou. Jeho směr je podle definice (11.33) kolmý k rovině vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Jeho velikost je dána vztahy (11.30), (11.31) a (11.32) a orientaci určuje pravidlo pravé ruky. Vztah (11.33) budeme používat v kap. 12.

KONTROLA 6: Na obrázku je v nadhledu znázorněn tyčový metr, který se může otáčet kolem čepu umístěného u značky 20 (20 cm). Všechny síly vyznačené v obrázku jsou vodorovné a mají stejnou velikost. Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentu vzhledem k ose otáčení.



11.9 VĚTA O MOMENTU HYBNOSTI

Obr. 11.17 znázorňuje jednoduchý případ otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy. Těleso je tvořeno částicí o hmotnosti m připevněnou na konci tyče délky r, jejíž hmotnost je zanedbatelná. Síla $\boldsymbol{F}$ uvádí částici do pohybu po kružnici kolem osy otáčení. Zrychlení částice je dáno druhým Newtonovým zákonem:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{T},$$

kde $\boldsymbol{T}$ je tahová síla tyče, která pro jednoduchost není v obrázku vyznačena. (Její moment vzhledem k ose otáčení je nulový). Pro tečnou složku zrychlení částice tedy platí

$$ma_t = F_t.$$

Moment síly $\boldsymbol{F}$ působící na částici lze podle rov. (11.31) vyjádřit jako

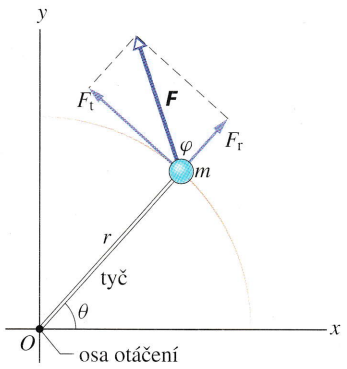
$$M = F_t r = ma_t r$$

a pomocí rov. (11.20) ($a_t = \varepsilon r$) přepsat do tvaru

$$M = m(\varepsilon r)r = (mr^2)\varepsilon. \qquad (11.34)$$

Výraz mr^2 představuje moment setrvačnosti částice vzhledem k ose otáčení (rov. (11.24)). Rov. (11.34) lze tedy zapsat velmi jednoduše:

$$I\varepsilon = M \quad (\varepsilon \text{ je v rad·s}^{-2}). \qquad (11.35)$$



Obr. 11.17 Jednoduché tuhé těleso se skládá z částice o hmotnosti m připevněné na tyči o délce r a zanedbatelné hmotnosti. Působením síly $\boldsymbol{F}$ se těleso roztáčí kolem osy vedené bodem O.

Působí-li na těleso více sil, je třeba vztah (11.35) zobecnit:

$$I\varepsilon = \sum M \quad (\varepsilon \text{ je v rad·s}^{-2}), \qquad (11.36)$$

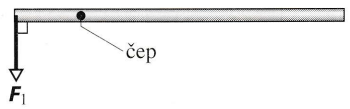
kde $\sum M$ je součet momentů všech sil působících na částici (**výsledný silový moment**). Rov. (11.36) je analogická druhému Newtonovu zákonu při použití úhlových veličin.

Vztah (11.35) a jeho obecnější verzi (11.36) jsme odvodili pro zcela speciální případ tělesa — jedinou částici obíhající kolem pevné osy. Zamysleme se nad tím, zda jej dokážeme zobecnit pro libovolné tuhé těleso, které se otáčí kolem pevné osy. Takové zobecnění je skutečně možné. Tuhé těleso není vlastně nic jiného než soustava částic,

* N·m je také jednotka práce. Moment síly a práce jsou ovšem zcela rozdílné veličiny, které nesmíme zaměňovat. Práce se často vyjadřuje také v joulech (1 J = 1 N·m), zatímco pro moment síly jednotku J nepoužíváme nikdy.

které obíhají kolem osy otáčení se stejným úhlovým zrychlením ε. Levá strana rov. (11.35) a (11.36) je tedy pro tuhé těleso vyjádřena stejně jako pro částici, s tím rozdílem, že symbolem I je třeba rozumět moment setrvačnosti *tělesa* vzhledem k ose otáčení. Jistý problém vzniká při interpretaci pravé strany těchto vztahů. Na každou částici tělesa mohou totiž určitými silami působit jak okolní objekty, tak i jeho ostatní částice. Uvědomíme-li si však, že pro síly vzájemného působení částic uvnitř tělesa platí třetí Newtonův zákon, a předpokládáme-li celkem přirozeně, že interakční síly mají pro každou dvojici částic směr jejich spojnice, zjistíme, že výsledný moment sil působících uvnitř tělesa je nulový. Zkušenost tento závěr potvrzuje: žádné těleso se ještě neroztočilo vlivem vnitřních sil, tj. samo od sebe. Předchozí úvahu můžeme uzavřít konstatováním, že platnost rov. (11.36) je mnohem obecnější než pro případ jednotlivé částice. Platí pro libovolné tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy, jestliže I je jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení a $\sum M$ je výsledný moment *vnějších sil* působících na těleso, vztažený k této ose. Takto zobecněný vztah (11.36) představuje pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy. Nazýváme ho **věta o momentu hybnosti** (soustavy částic) nebo také **druhá impulzová věta**.

KONTROLA 7: Na obrázku je v nadhledu zobrazen tyčový metr, který se může otáčet kolem vyznačeného čepu, umístěného vlevo od středu tyče. Na tyč působí dvě vodorovné síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, pouze síla $\boldsymbol{F}_1$ je však v obrázku zakreslena. Síla $\boldsymbol{F}_2$ je k tyči kolmá a působí na její pravý konec. Předpokládejte, že se tyč neotáčí a určete (a) orientaci síly $\boldsymbol{F}_2$. (b) Rozhodněte, zda je síla $\boldsymbol{F}_2$ větší, stejně velká, nebo menší než síla $\boldsymbol{F}_1$.

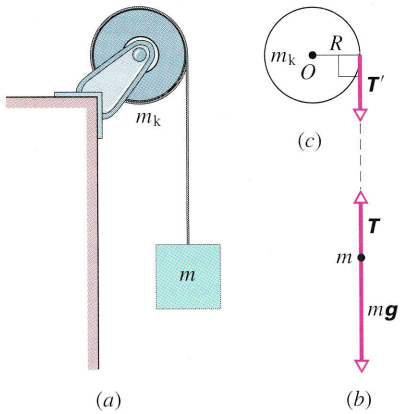


PŘÍKLAD 11.11

Obr. 11.18a znázorňuje homogenní kotouč o hmotnosti $m_k = 2{,}5\,\text{kg}$ a poloměru $R = 20\,\text{cm}$, který je připevněn na pevnou vodorovnou osu. Závaží o hmotnosti $m = 1{,}2\,\text{kg}$ visí na vlákně zanedbatelné hmotnosti navinutém na obvodu kotouče. Závaží padá svisle dolů a kotouč se roztáčí. Vypočtěte zrychlení závaží, úhlové zrychlení kotouče a tahovou sílu vlákna. Předpokládáme, že vlákno po obvodu kotouče neklouže a zanedbáváme tření v ose.

ŘEŠENÍ: Na obr. 11.18b jsou znázorněny síly působící na závaží.

Závaží se urychluje směrem dolů, takže velikost tíhové síly mg je větší než velikost tahové síly vlákna T. Podle



Obr. 11.18 Příklady 11.11 a 11.13. (a) Padající závaží roztáčí kotouč. (b) Silový diagram závaží. (c) Silový diagram kotouče.

druhého Newtonova pohybového zákona je

$$ma = T - mg. \tag{11.37}$$

Na obr. 11.18c jsou znázorněny síly působící na kotouč. Vlivem momentu síly $\boldsymbol{T}'$ se kotouč roztáčí po směru otáčení hodinových ručiček. Tento moment je tedy záporný a je roven $-T'R$. Ze vztahu (c) v tab. 11.2 víme, že moment setrvačnosti kotouče je $I = \frac{1}{2}m_k R^2$. Na kotouč působí také tíhová síla $m_k\boldsymbol{g}$ a svislá síla $\boldsymbol{N}$, kterou na kotouč působí pevná osa. Vektorové přímky obou těchto sil procházejí osou otáčení kotouče a jejich momenty vzhledem k ní jsou proto nulové. Použitím druhé impulzové věty ve tvaru $I\varepsilon = M$ dostaneme

$$\tfrac{1}{2}m_k R^2\varepsilon = -T'R.$$

Protože vlákno po obvodu kotouče neprokluzuje, je zrychlení a závaží shodné s tečným zrychlením a_t bodu na obvodu kotouče. Použitím rov. (11.20) ($\varepsilon = a/R$) můžeme poslední vztah zjednodušit do tvaru

$$-\tfrac{1}{2}m_k a = T'. \tag{11.38}$$

Z rov. (11.37) a (11.38) a s uvážením, že $T' = T$ (velikosti sil $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ jsou stejné), nakonec dostaneme

$$a = -g\frac{2m}{m_k + 2m} = -(9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})\frac{2(1{,}2\,\text{kg})}{(2{,}5\,\text{kg}) + 2(1{,}2\,\text{kg})} =$$
$$= -4{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

K určení velikosti síly T použijeme rov. (11.38):

$$T = -\tfrac{1}{2}m_k a = -\tfrac{1}{2}(2{,}5\,\text{kg})(-4{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) =$$
$$= 6{,}0\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

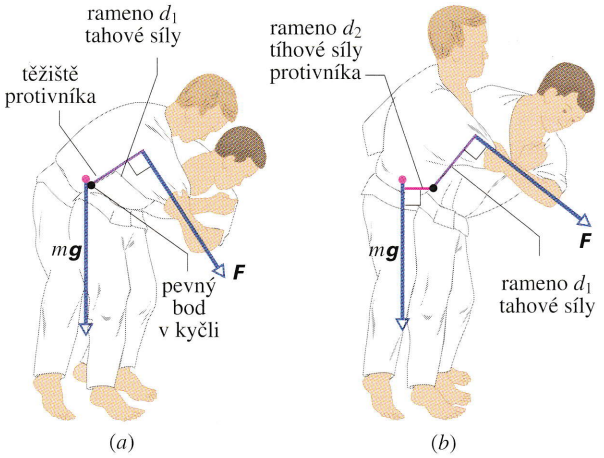
Podle očekávání je zrychlení padajícího závaží menší než g a tahová síla vlákna (6,0 N) je menší než tíhová síla působící na závaží ($mg = 11{,}8$ N). Všimněme si, že zrychlení tělesa a tahová síla vlákna nezávisí na poloměru kotouče, pouze na jeho hmotnosti. Pro kontrolu ještě dosaďme $m_k = 0$ (kotouč zanedbatelné hmotnosti). Dostáváme $a = -g$ a $T = 0$. Ani tento výsledek není nečekaný: závaží padá volným pádem a táhne s sebou nenapjaté vlákno.

Z rov. (11.20) vypočteme ještě úhlové zrychlení kotouče

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{(-4{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(0{,}20\ \mathrm{m})} = -24\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 11.12

Zápasník v judu se chystá položit svého osmdesátikilového soka na žíněnku. Uchopí jej za oděv na rameni a snaží se jej otočit kolem svého těla. Při tom na něj působí silou $\boldsymbol{F}$. Osou otáčení je spojnice ramenního a kyčelního kloubu zápasníka. Rameno působící síly vzhledem k této ose má v běžných situacích velikost $d_1 = 30$ cm. Předpokládejme, že zápasník udělí soupeři úhlové zrychlení $-6{,}0\ \mathrm{rad/s^2}$, roztáčí jej tedy ve směru otáčení hodinových ručiček (obr. 11.19). Moment setrvačnosti soupeře vzhledem k ose otáčení je zhruba $15\ \mathrm{kg\cdot m^2}$.



Obr. 11.19 Příklad 11.12. (a) Správně a (b) nesprávně provedený chvat v judu.

(a) Určete velikost síly $\boldsymbol{F}$ potřebné k tomuto chvatu za předpokladu, že judista těsně před jeho provedením ohne soupeře tak, aby posunul jeho těžiště nad svůj kyčelní kloub (obr. 11.19a).

ŘEŠENÍ: Leží-li těžiště soupeře na ose rotace vedené kyčelním kloubem judisty, je moment tíhové síly působící na soupeře vzhledem k ose otáčení nulový. Jediným nenulovým momentem, který má vliv na pohyb soupeře, je moment síly $\boldsymbol{F}$. Tento moment je záporný. Pomocí rov. (11.31) a (11.35) jej zapíšeme ve tvaru

$$M = -d_1 F = I\varepsilon,$$

odkud

$$F = \frac{-I\varepsilon}{d_1} = \frac{-(15\ \mathrm{kg\cdot m^2})(-6{,}0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}})}{(0{,}30\ \mathrm{m})} = 300\ \mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Předpokládejme, že soupeř zůstane vzpřímen, takže rameno tíhové síly vzhledem k ose otáčení má velikost $d_2 = 0{,}12$ m. Jak velká musí být síla $\boldsymbol{F}$ nyní?

ŘEŠENÍ: V této situaci je moment tíhové síly působící na soupeře nenulový. Jeho směr je kladný, tedy opačný než směr momentu síly $\boldsymbol{F}$. Z rov. (11.31) a (11.36) dostáváme

$$\sum M = -d_1 F + d_2 mg = I\varepsilon,$$

a tedy

$$F = -\frac{I\varepsilon}{d_1} + \frac{d_2 mg}{d_1}.$$

V části (a) této úlohy jsme již zjistili, že první člen na pravé straně poslední rovnice činí 300 N. Dosazením této hodnoty i dalších číselných údajů do získaného vztahu pro F nakonec dostáváme

$$F = (300\ \mathrm{N}) + \frac{(0{,}12\ \mathrm{m})(80\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{(0{,}30\ \mathrm{m})} = 613{,}6\ \mathrm{N} \doteq 610\ \mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Z výsledků (a) a (b) vidíme, jak důležitá je příprava zápasníka na provedení chvatu. Pokud se mu totiž nepodaří uskutečnit přípravnou fázi tak, jak je popsáno v části (a), tj. ohnout soupeře a podsunout svou kyčel pod jeho těžiště, potřebuje k provedení chvatu mnohem větší sílu. Dobrý judista toto pravidlo zná a používá. (Rozbor fyzikální problematiky juda a aikido mohou zájemci najít v červnovém čísle časopisu Scientific American z r. 1980.)

11.10 PRÁCE A KINETICKÁ ENERGIE PŘI OTÁČIVÉM POHYBU

Připomeňme si znovu situaci na obr. 11.17: síla $\boldsymbol{F}$ roztáčí tuhé těleso tvořené jedinou částicí o hmotnosti m připevněnou na konci tyče, jejíž hmotnost je zanedbatelná. Pokus je uspořádán tak, že se mění pouze kinetická energie tělesa. Můžeme proto použít vztah mezi prací a změnou kinetické energie podle rov. (7.4)

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W. \qquad (11.39)$$

Použitím vztahu $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ a (11.16) ($v = \omega r$) můžeme přepsat rov. (11.39) do tvaru

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}mr^2\omega_i^2 = W. \qquad (11.40)$$

Moment setrvačnosti částice je $I = mr^2$ (rov. (11.24)). Jeho dosazením do rov. (11.40) dostaneme

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = W. \qquad (11.41)$$

Vidíme, že v jednoduché situaci znázorněné na na obr. 11.17 je změna kinetické energie spojené s otáčivým pohybem tělesa dána prací síly $\boldsymbol{F}$. Rov. (11.41) pro otáčivý pohyb je tedy obdobou vztahu mezi prací a změnou kinetické energie, získaného již dříve pro pohyb posuvný. Odvodili jsme ji sice pro případ jediné částice, platí však pro libovolné tuhé těleso rotující kolem pevné osy.

Pro situaci na obr. 11.17 se nyní pokusíme vyjádřit práci W pomocí momentu síly $\boldsymbol{F}$. Při elementárním otočení tělesa o úhel $\mathrm{d}\theta$ se částice posune podél své kruhové trajektorie o vzdálenost $\mathrm{d}s$. Práci síly $\boldsymbol{F}$ při tomto posunutí vyjádříme pomocí rov. (7.11):

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = F_t\,\mathrm{d}s = F_t r\,\mathrm{d}\theta. \qquad (11.42)$$

(Připomeňme, že F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$.) Součin $F_t r$ představuje podle rov. (11.31) moment M síly $\boldsymbol{F}$. Rov. (11.42) tak získává tvar

$$\mathrm{d}W = M\,\mathrm{d}\theta. \qquad (11.43)$$

Práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ při celkovém otočení tělesa z úhlové polohy θ_i do polohy θ_f je pak dána integrálem

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M\,\mathrm{d}\theta. \qquad (11.44)$$

Tento vztah je „rotační“ obdobou rov. (7.27)

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,\mathrm{d}x.$$

Odvodili jsme jej opět pro jedinou částici, platí však pro libovolné tuhé těleso, podobně jako vztah mezi prací a kinetickou energií.

Z rov. (11.43) můžeme zjistit, jaký je výkon síly působící na těleso při rotačním pohybu:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega. \qquad (11.45)$$

Tento výsledek, získaný pro otáčivý pohyb, je obdobou vztahu $P = Fv$ (rov. (7.49)), platného pro pohyb posuvný.

Tab. 11.3 shrnuje základní vztahy, které jsme v této kapitole získali pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy a pro porovnání uvádí i odpovídající rovnice pro pohyb posuvný.

PŘÍKLAD 11.13

(a) O jaký úhel se otočí kotouč na obr. 11.18 za 2,5 s, rozbíhá-li se z klidu?

ŘEŠENÍ: Dosazením $\omega_0 = 0$ do rov. (11.10) ($\theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$) a použitím hodnoty ε, kterou jsme získali v př. 11.11, vyjde

$$\theta = 0 + \tfrac{1}{2}(-24\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}})(2{,}5\,\mathrm{s})^2 = \\ = -75\,\mathrm{rad}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je úhlová rychlost kotouče v okamžiku $t = 2{,}5$ s?

ŘEŠENÍ: Úhlovou rychlost vypočteme z rov. (11.9) ($\omega = \omega_0 + \varepsilon t$). Dosadíme hodnotu úhlového zrychlení ε, vypočtenou v př. 11.11 a nulovou hodnotu počáteční úhlové rychlosti ($\omega_0 = 0$). Dostáváme

$$\omega = 0 + (-24\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}})(2{,}5\,\mathrm{s}) = \\ = -60\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(c) Jak velkou kinetickou energii má kotouč v okamžiku $t = 2{,}5$ s?

Tabulka 11.3 **Posuvný a otáčivý pohyb**

POSUVNÝ POHYB V DANÉM SMĚRU		OTÁČIVÝ POHYB KOLEM PEVNÉ OSY	
poloha	x	úhlová poloha	θ
rychlost	$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$	úhlová rychlost	$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$
zrychlení	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	úhlové zrychlení	$\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	I
věta o hybnosti	$ma = F$	věta o momentu hybnosti	$I\varepsilon = M$
práce	$W = \int F\mathrm{d}x$	práce	$W = \int M\mathrm{d}\theta$
kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
výkon	$P = Fv$	výkon	$P = M\omega$
vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_k$	vztah mezi prací a změnou kinetické energie	$W = \Delta E_k$

ŘEŠENÍ: Kinetická energie rotujícího kotouče je dána vztahem (11.25), tj. $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k jeho geometrické ose, která je v našem případě i osou otáčení, má hodnotu $I = \frac{1}{2}mR^2$. Úhlovou rychlost ω v okamžiku $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ jsme zjistili v části (b). Dosadíme číselné údaje:

$$E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mR^2)\omega^2 = \\ = \tfrac{1}{4}(2{,}5\,\mathrm{kg})(0{,}20\,\mathrm{m})^2(-60\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}})^2 = \\ = 90\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jiný způsob výpočtu kinetické energie nabízí vztah mezi prací a změnou kinetické energie. Určíme práci W, kterou vykoná tahová síla vlákna, které roztáčí kotouč. Ostatní síly působící na kotouč, tj. tíhová síla a tlaková síla v jeho ose, práci nekonají, jejich momenty vzhledem k ose otáčení jsou nulové. Při výpočtu práce tahové síly vyjdeme z rov. (11.44) a využijeme skutečnosti, že velikost tahové síly T i její moment M vzhledem k ose otáčení jsou konstantní. Dostáváme

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M\,\mathrm{d}\theta = M\int_{\theta_i}^{\theta_f}\mathrm{d}\theta = M(\theta_f - \theta_i).$$

Pro moment tahové síly T platí $M = -TR$. Dosadíme hodnoty $T = -6{,}0\,\mathrm{N}$ (př. 11.11) a $R = 0{,}20\,\mathrm{m}$. Rozdíl $\theta_f - \theta_i$ představuje úhlové otočení kotouče od počátku pohybu do okamžiku $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$. Jeho hodnotu jsme již určili v části (a). S uvážením všech předchozích skutečností můžeme psát

$$W = M(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i) = \\ = -(6{,}0\,\mathrm{N})(0{,}20\,\mathrm{m})(-75\,\mathrm{rad}) = \\ = 90\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Protože se kotouč roztáčí z klidu, je jeho počáteční kinetická energie $E_{k,i}$ nulová. V souladu s rov. (11.41) pak vypočtená práce určuje přímo kinetickou energii kotouče E_k v daném okamžiku.

PŘÍKLAD 11.14

Tuhá konstrukce, znázorněná na obr. 11.20, je sestavena z tuhého prstence o hmotnosti m a poloměru $R = 0{,}15\,\mathrm{m}$ a dvou tenkých tyčí, z nichž každá má hmotnost m a délku $L = 2{,}0R$. Může se otáčet kolem vodorovné osy, která leží v rovině prstence a prochází jeho středem.

(a) Vyjádřete moment setrvačnosti konstrukce pomocí m a R.

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (i) v tab. 11.2 má prstenec vzhledem k zadané ose moment setrvačnosti $I_{\mathrm{prstenec}} = \frac{1}{2}mR^2$.

Moment setrvačnosti tyče A vypočteme pomocí Steinerovy věty (11.27). Její moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jejím středem rovnoběžně s osou otáčení najdeme v tab. 11.2e, $I_{T,A} = mL^2/12$. Podle Steinerovy věty platí

$$I_A = I_{T,A} + mh_{T,A}^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 = \\ = 4{,}33mR^2.$$

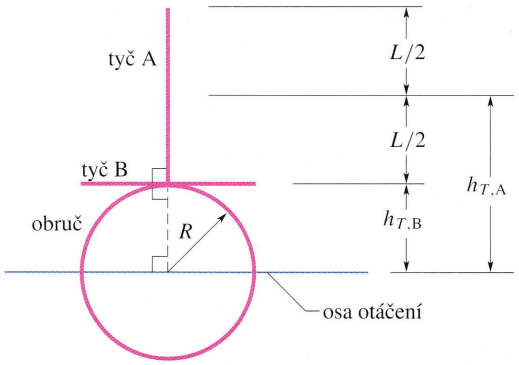
V předchozím výpočtu jsme již vzali v úvahu vztah $L = 2{,}0R$ a symbolem $h_{T,A} = R + \frac{1}{2}L$ jsme označili vzdálenost těžiště tyče A od osy otáčení.

Steinerovy věty použijeme i při výpočtu momentu setrvačnosti tyče B. Vůči své podélné ose má tyč nulový moment setrvačnosti, tj. $I_{T,B} = 0$. Její moment setrvačnosti vůči zadané ose otáčení je tedy

$$I_B = I_{T,B} + mh_{T,B}^2 = 0 + mR^2 = mR^2,$$

kde $h_{T,B} = R$ je vzdálenost tyče B od osy otáčení. Moment setrvačnosti I celé konstrukce vzhledem k zadané ose otáčení je součtem momentů setrvačnosti jejích jednotlivých částí, tj.

$$I = I_{\mathrm{prstenec}} + I_A + I_B = \tfrac{1}{2}mR^2 + 4{,}33mR^2 + mR^2 = \\ = 5{,}83mR^2 \doteq 5{,}8mR^2. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 11.20 Příklad 11.14. Tuhá konstrukce tvořená prstencem a dvěma tyčemi se může otáčet kolem vodorovné osy.

(b) Předpokládejme, že konstrukce je ve výchozí klidové poloze znázorněné na obr. 11.20. Tato poloha není stabilní. Po uvolnění se tedy konstrukce začne roztáčet vlivem nenulového momentu tíhové síly. Určete její úhlovou rychlost ω v okamžiku, kdy prochází dolní rovnovážnou polohou.

ŘEŠENÍ: Ve výchozí poloze leží těžiště konstrukce ve vzdálenosti y_T nad osou otáčení. Podle rov. (9.5) je

$$y_T = \frac{m(0) + mR + m(R + \frac{1}{2}L)}{3m} = R.$$

Po uvolnění se konstrukce začne otáčet kolem zadané pevné osy a její těžiště klesá. V okamžiku, kdy konstrukce dosáhne rovnovážné polohy, je její těžiště *pod* osou otáčení, opět ve

vzdálenosti y_T. Jeho posunutí je tedy $\Delta y_T = -2R$. Odpovídající pokles tíhové potenciální energie soustavy konstrukce + Země je kompenzován přírůstkem kinetické energie otáčivého pohybu konstrukce. Změnu potenciální energie ΔE_p vypočteme jako součin velikosti tíhové síly působící na konstrukci ($3mg$, celková hmotnost konstrukce je $3m$) a svislé složky posunutí jejího těžiště Δy_T:

$$\Delta E_p = 3mg\Delta y_T = 3mg(-2R) = -6mgR.$$

Odpovídající změna kinetické energie je podle rov. (11.25)

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 - 0 = \tfrac{1}{2}I\omega^2.$$

Ze zákona zachování mechanické energie, zapsaného ve tvaru

$$E_k + E_p = 0,$$

dostaneme

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - 6mgR = 0.$$

Dosadíme $I = 5{,}83mR^2$ a vyjádříme ze získané rovnice úhlovou rychlost ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{5{,}83R}} = \sqrt{\frac{12(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{5{,}83(0{,}15\,\mathrm{m})}} = 12\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$ (Odpověď)

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Úhlová poloha

Pro usnadnění popisu otáčivého pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy (tzv. **osy otáčení**) zavádíme **vztažnou přímku** kolmou k ose otáčení, kterou pevně spojíme s otáčejícím se tělesem. Měříme **úhlovou polohu** θ této přímky vzhledem ke zvolenému směru. Je-li veličina θ vyjádřena v radiánech, platí

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\theta \text{ je v rad}), \tag{11.1}$$

kde s je délka oblouku kruhové trajektorie s poloměrem r a středovým úhlem θ. Jednotka 1 rad souvisí s úhlovými jednotkami 1° a 1 otáčka (1 ot) vztahem

$$1\ \mathrm{ot} = 360^\circ = 2\pi\,\mathrm{rad}. \tag{11.2}$$

Otočení

Změna úhlové polohy otáčejícího se tělesa z výchozí hodnoty θ_1 na výslednou hodnotu θ_2 určuje jeho **otočení**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{11.4}$$

Hodnota $\Delta\theta$ je kladná, otáčí-li se těleso v kladném směru, tj. proti směru otáčení hodinových ručiček, záporná je v opačném případě.

Úhlová rychlost

Podíl otočení tělesa $\Delta\theta$ a délky Δt časového intervalu, během něhož k tomuto otočení došlo, představuje **průměrnou úhlovou rychlost** tělesa v daném intervalu

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{11.5}$$

Okamžitá úhlová rychlost tělesa je definována vztahem

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \tag{11.6}$$

Veličiny $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ a $\boldsymbol{\omega}$ definují vektory rovnoběžné s osou otáčení, jejichž orientace je dána **pravidlem pravé ruky**, znázorněným na obr. 11.5. Vzhledem k tomu, že jejich směr je pevně zadán (směr osy otáčení), stačí k jejich vyjádření jen číselná hodnota udávající jejich velikost, opatřená kladným, resp. záporným znaménkem, otáčí-li se těleso ve směru kladném (proti směru otáčení hodinových ručiček), či záporném (ve směru otáčení hodinových ručiček).

Úhlové zrychlení

Podíl změny úhlové rychlosti tělesa z hodnoty $\boldsymbol{\omega}_1$ na hodnotu $\boldsymbol{\omega}_2$ a délky $\Delta t = t_2 - t_1$ časového intervalu, v němž tato změna proběhla, definuje **průměrné úhlové zrychlení** tělesa $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ v daném intervalu:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}. \tag{11.7}$$

Okamžité úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$ tělesa je definováno vztahem

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}. \tag{11.8}$$

Veličiny $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ jsou vektorové.

Vztahy pro otáčivý pohyb s konstantním úhlovým zrychlením

Otáčení s konstantním úhlovým zrychlením ($\boldsymbol{\varepsilon}$ = konst) je důležitým speciálním případem otáčivého pohybu. Je popsáno následujícími rovnicemi, které shrnuje také tab. 11.1:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{11.9}$$

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2, \tag{11.10}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta, \tag{11.11}$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \tag{11.12}$$

$$\theta = \omega t - \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2. \tag{11.13}$$

Vztah mezi obvodovými a úhlovými veličinami

Každá částice tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevné osy, se pohybuje po kružnici, jejíž poloměr je roven vzdálenosti částice od osy otáčení. Při otočení tělesa o úhel θ opíše částice kruhový oblouk o délce

$$s = \theta r, \tag{11.15}$$

kde θ je v rad.

Vektor rychlosti částice $\boldsymbol{v}$ je tečný k její kruhové trajektorii. Jeho velikost (tzv. obvodová rychlost) je

$$v = \omega r, \tag{11.16}$$

kde ω je úhlová rychlost tělesa vyjádřená v rad/s.

Vektor zrychlení částice $\boldsymbol{a}$ je určen *tečnou* a *normálovou* složkou, které odpovídají jeho rozkladu do tečného a normálového směru k trajektorii. Tečnou složku lze zapsat ve tvaru

$$a_t = \varepsilon r, \tag{11.20}$$

kde ε je úhlové zrychlení tělesa vyjádřené v rad/s^2. Normálová složka je dána vztahem

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.21}$$

Pohybuje-li se částice po své kruhové trajektorii rovnoměrně, je její pohyb periodický s periodou

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega \text{ je v rad/s}). \tag{11.17, 11.18}$$

Kinetická energie otáčivého pohybu a moment setrvačnosti

Tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy má kinetickou energii

$$E_k = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \quad (\omega \text{ je v rad/s}), \tag{11.25}$$

kde I je **moment setrvačnosti** tělesa vzhledem k ose otáčení. Pro soustavu částic (těleso s diskrétním rozložením hmoty) je definován vztahem

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{11.24}$$

a pro těleso se spojitě rozloženou hmotou vztahem

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m. \tag{11.26}$$

Symboly r_i, resp. r v těchto vztazích představují vzdálenost i-té částice, resp. elementu tělesa od osy otáčení.

Steinerova věta

Steinerova věta popisuje souvislost mezi momentem setrvačnosti I tělesa vzhledem k libovolné ose otáčení a momentem setrvačnosti I_T téhož tělesa vzhledem k rovnoběžné ose vedené jeho těžištěm:

$$I = I_T + mh^2, \tag{11.27}$$

kde h je vzdálenost obou os.

Moment síly

Moment síly charakterizuje rotační účinek síly $\boldsymbol{F}$, která působí na těleso při jeho otáčení kolem pevné osy. (Předpokládáme, že směr síly $\boldsymbol{F}$ leží v rovině kolmé k ose otáčení.) Označíme-li polohový vektor působiště síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení symbolem $\boldsymbol{r}$, můžeme moment $\boldsymbol{M}$ této síly vzhledem k uvedené ose vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{11.33}$$

(Počátečním bodem vektoru $\boldsymbol{r}$ je průsečík osy otáčení s rovinou k ní kolmou a vedenou působištěm síly $\boldsymbol{F}$.) Moment síly je vektor. Pro jeho velikost platí

$$M = rF_t = r_\perp F = rF \sin\varphi, \tag{11.30, 11.31, 11.32}$$

kde F_t je tečná složka síly $\boldsymbol{F}$, φ je úhel vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Symbol $r_\perp$ označuje **rameno síly** $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení, definované jako vzdálenost vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$ od této osy. Rameno síly F_t je označeno r.

Ve zjednodušených situacích, jež v této kapitole uvažujeme, má moment síly vždy směr osy otáčení. Proto jej stačí zadávat číselným údajem představujícím jeho velikost opatřenou vhodným znaménkem. Moment síly M je kladný, je-li podle pravidla pravé ruky orientován v kladném směru, v opačném případě je záporný. Jednotkou momentu síly v soustavě SI je newton-metr (N·m).

Věta o momentu hybnosti

Věta o momentu hybnosti, představující pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb, má tvar

$$I\varepsilon = \sum M, \tag{11.36}$$

kde $\sum M$ je výsledný moment všech sil působících na částici nebo tuhé těleso, vztažený k ose otáčení, I je moment setrvačnosti částice nebo tuhého tělesa vzhledem k této ose a ε je úhlové zrychlení otáčivého pohybu částice nebo tuhého tělesa kolem této osy.

Práce a kinetická energie otáčivého pohybu

Vztahy pro výpočet práce a výkonu při otáčivém pohybu jsou podobné odpovídajícím vztahům pro pohyb posuvný:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M \, \mathrm{d}\theta \tag{11.44}$$

a

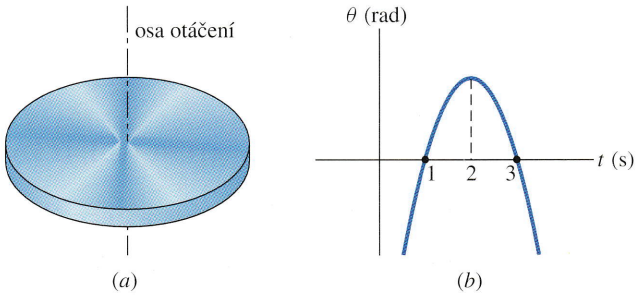
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega. \tag{11.45}$$

Vztah mezi prací a změnou kinetické energie má pro otáčivý pohyb tvar

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2} I \omega_f^2 - \tfrac{1}{2} I \omega_i^2 = W. \tag{11.41}$$

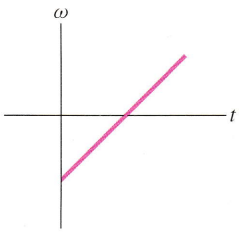
OTÁZKY

1. Na obr. 11.21b je zakreslen graf časové závislosti úhlové polohy otáčejícího se kotouče, znázorněného na obr. 11.21a. Rozhodněte, zda v okamžicích (a) $t = 1$ s, (b) $t = 2$ s a (c) $t = 3$ s je úhlová rychlost kotouče kladná, záporná, nebo nulová. (d) Je jeho úhlové zrychlení kladné, nebo záporné?



Obr. 11.21 Otázka 1

2. Obr. 11.22 představuje graf časové závislosti úhlové rychlosti kotouče na obr. 11.21a. Jaký je (a) počáteční a (b) výsledný směr otáčení kotouče? (c) Je úhlová rychlost kotouče v některém okamžiku nulová? Ve kterém? (d) Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení kotouče kladné, nebo záporné. (e) Je konstantní, nebo proměnné?



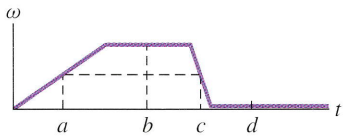
Obr. 11.22 Otázka 2

3. V okamžiku $t = 0$ má kotouč na obr. 11.21a úhlovou polohu $\theta_0 = -2$ rad. V následující tabulce jsou uvedena znaménka počáteční úhlové rychlosti kotouče a jeho stálého úhlového zrychlení ve čtyřech různých situacích: (1) +, +; (2) +, −; (3) −, + a (4) −, −. Rozhodněte, ve kterém z uvedených čtyř případů (a) se kotouč na okamžik zastaví, (b) v některém okamžiku zcela jistě projde úhlovou polohou $\theta = 0$, (c) nikdy neprojde úhlovou polohou $\theta = 0$.

4. Následující dvojice hodnot představují počáteční a výslednou úhlovou rychlost kotouče znázorněného na obr. 11.21a ve čtyřech různých situacích: (a) 2 rad/s, 3 rad/s; (b) −2 rad/s, 3 rad/s; (c) −2 rad/s, −3 rad/s; (d) 2 rad/s, −3 rad/s. Velikost úhlového zrychlení má ve všech případech stejnou hodnotu a je stálé. Seřaďte situace sestupně podle velikosti otočení kotouče.

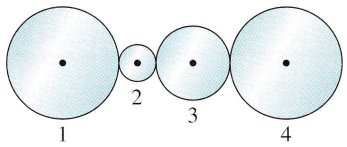
5. Rozhodněte, pro kterou z následujících funkcí, vyjadřujících možnou časovou závislost úhlové rychlosti otáčejícího se tělesa, platí rovnice shrnuté v tab. 11.1: (a) $\omega = 3$; (b) $\omega = 4t^2 + 2t - 6$; (c) $\omega = 3t - 4$; (d) $\omega = 5t^2 - 3$.

6. Obr. 11.23 představuje graf časové závislosti úhlové rychlosti otáčejícího se kotouče z obr. 11.21a. Zvolte libovolnou částici na jeho obvodu a seřaďte vyznačené okamžiky a, b, c a d podle velikosti (a) tečné složky jejího zrychlení (obvodového zrychlení), (b) normálové složky jejího zrychlení.



Obr. 11.23 Otázka 6

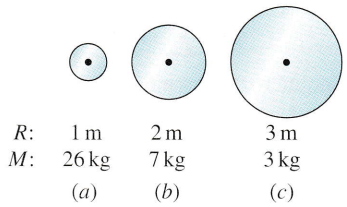
7. Obr. 11.24 znázorňuje převodovku se čtyřmi koly, která se otáčejí bez prokluzu. Poloměry kol 1, 2, 3 a 4 jsou po řadě $3R$, R, $2R$ a $3R$. Kolo 2 je poháněno motorem. Seřaďte kola sestupně (a) podle obvodových rychlostí částic a (b) podle velikosti jejich úhlových rychlostí.



Obr. 11.24 Otázka 7

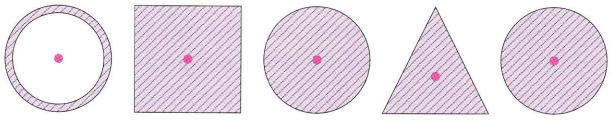
8. Kruhové kotouče A a B mají stejnou hmotnost a tloušťku. Hustota kotouče A je však větší než hustota kotouče B. Rozhodněte, zda je moment setrvačnosti kotouče A vzhledem k jeho ose symetrie (a) ležící v rovině kotouče, (b) kolmé k rovině kotouče větší, menší, nebo stejný jako moment setrvačnosti kotouče B.

9. Na obr. 11.25 jsou znázorněny tři homogenní kotouče se zadanými hmotnostmi a poloměry. Seřaďte je sestupně podle hodnot momentu setrvačnosti vzhledem k ose symetrie kolmé k rovině kotouče.



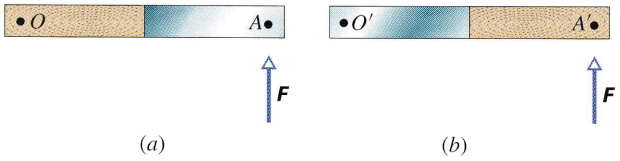
Obr. 11.25 Otázka 9

10. Na obr. 11.26 jsou zakresleny půdorysné průměty pěti těles o stejné hmotnosti. Měřítko nákresu je pro všechna tělesa stejné a také jejich výška je shodná. Tělesa však mohou být dutá a není jisté, zda jsou vyrobena z materiálu stejné tloušťky. Dokážete rozhodnout, které z nich má (a) největší, (b) nejmenší moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené těžištěm kolmo k půdorysnému průmětu?



Obr. 11.26 Otázka 10

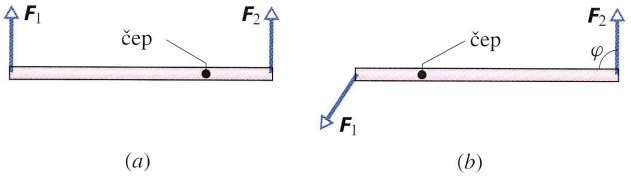
11. Na obr. 11.27a je metrová tyč vyrobená napůl ze dřeva a napůl z oceli. Tyč se může otáčet kolem čepu umístěného v bodě O na konci dřevěné části. V bodě A na konci ocelové části působí síla $\boldsymbol{F}$. Situace na obr. 11.27b je opačná: tyč se otáčí kolem bodu O' na konci ocelové části a síla $\boldsymbol{F}$ působí v bodě A' na konci dřevěné části. Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení tyče na obr. 11.27a větší, menší, nebo stejné jako zrychlení tyče na obr. 11.27b.



Obr. 11.27 Otázka 11

12. Obr. 11.28a znázorňuje vodorovnou tyč (nadhled), která se může otáčet kolem osy vedené vyznačeným bodem (čepem) kolmo k nákresu. Na tyč působí dvě síly, avšak tyč je v klidu. Z nějakých důvodů je potřeba úhel mezi tyčí a silou $\boldsymbol{F}_2$ změnit. Jak je nutné upravit velikost síly $\boldsymbol{F}_1$, aby tyč zůstala v klidu?

13. Na obr. 11.28b je v nadhledu znázorněna vodorovná tyč, která se otáčí kolem osy vedené vyznačeným bodem (čepem) kolmo k rovině nákresu. Na opačných koncích působí na tyč vodorovné síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Síla $\boldsymbol{F}_2$ svírá s tyčí úhel φ. Seřaďte následující hodnoty úhlu φ podle velikosti odpovídajícího úhlového zrychlení tyče: 90°, 70° a 110°.



Obr. 11.28 Otázky 12 a 13

14. Úhlová rychlost kotouče znázorněného na obr. 11.21a se mění vlivem síly, působící na obvodu kotouče. Následující dvojice údajů představují hodnoty počáteční a výsledné úhlové rychlosti kotouče ve čtyřech různých situacích: (a) −2 rad/s, 5 rad/s, (b) 2 rad/s, 5 rad/s, (c) −2 rad/s, −5 rad/s, (d) 2 rad/s, −5 rad/s. Seřaďte tyto případy podle práce, kterou síla vykonala.

15. Připažte, přiložte dlaně ke stehnům a zpevněte zápěstí. Proveďte postupně tyto cviky: (1) Předpažte. (2) Z předpažení upažte a zápěstí udržujte zpevněné. (3) Nakonec připažte. Všimněte si, že vaše dlaň je otevřena směrem dopředu. Opakujte cviky (1) až (3) v pozměněném pořadí (2), (1), (3). Vysvětlete, proč nyní dlaň *nesměřuje* dopředu.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 11.2 Veličiny charakterizující otáčivý pohyb

1C. (a) Určete středový úhel oblouku o délce 1,80 m a poloměru 1,20 m. Výsledek vyjádřete v radiánech. (b) Vyjádřete tento úhel také ve stupních. (c) Úhel mezi dvěma poloměry kružnice je 0,620 rad. Určete délku oblouku, který je těmito poloměry vymezen, víte-li, že obvod celé kružnice je 2,40 m.

2C. Úhlová poloha setrvačníku závisí na čase vztahem $\theta = at + bt^3 - ct^4$, kde a, b, c jsou konstanty. Vyjádřete (a) úhlovou rychlost a (b) úhlové zrychlení setrvačníku jako funkce času.

3C. Určete velikost úhlové rychlosti (a) sekundové, (b) minutové a (c) hodinové ručičky hodin. Získané hodnoty vyjádřete v jednotkách rad/s.

4C. Slunce je od středu naší Galaxie vzdáleno asi $2{,}3 \cdot 10^4$ světelných let a obíhá kolem něj po kružnici obvodovou rychlostí 250 km/s. (a) Jak dlouho trvá Slunci jeden takový oběh? (b) Kolik oběhů již Slunce vykonalo za dobu své existence, tj. za asi $4{,}5 \cdot 10^9$ let?

5C. Úhlová poloha θ bodu na obvodu rotujícího kotouče závisí na čase t vztahem $\theta = 4{,}0t - 3{,}0t^2 + t^3$, kde t je v sekundách a θ v radiánech. (a) Vypočtěte úhlovou rychlost kotouče v okamžicích $t = 2{,}0$ s a $t = 4{,}0$ s. (b) Určete jeho průměrné úhlové zrychlení v časovém intervalu od $t = 2{,}0$ s do $t = 4{,}0$ s a (c) okamžité úhlové zrychlení na počátku a na konci tohoto intervalu.

6C. Časová závislost úhlové polohy bodu rotujícího kola je popsána funkcí $\theta = 2 + 4t^2 + 2t^3$, kde θ je v radiánech a t v sekundách. Jaká je (a) úhlová poloha tohoto bodu v okamžiku $t = 0$? (b) Určete úhlovou rychlost kotouče v okamžicích $t = 0$ a (c) $t = 4{,}0$ s. (d) Vypočtěte jeho úhlové zrychlení v okamžiku $t = 2{,}0$ s. (e) Rozhodněte, zda je úhlové zrychlení kotouče stálé.

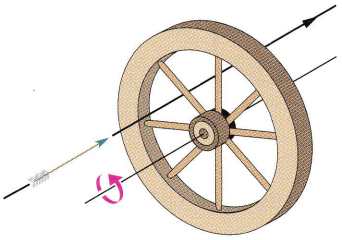
7Ú. Kolo se otáčí s úhlovým zrychlením ε, jehož časová závislost je popsána funkcí $\varepsilon = 4at^3 - 3bt^2$ (a, b jsou konstanty). Počáteční úhlová rychlost kola je ω_0. Najděte časovou závislost (a) úhlové rychlosti a (b) otočení kola.

8Ú. Dobrý hráč baseballu může hodit míč rychlostí 53 km/h. Míč přitom rotuje úhlovou rychlostí 1 800 ot/min. Kolik otáček během letu vykoná, je-li cíl vzdálen 20 m? (Pro jednoduchost předpokládáme, že let míče je přímočarý.)

9Ú. Při skoku z desetimetrové věže provedl skokan před dopadem na vodní hladinu 2,5 otáčky. Předpokládejte, že svislá složka jeho počáteční rychlosti byla nulová, a vypočtěte úhlovou rychlost jeho otáčivého pohybu.

10Ú. Kolo s osmi loukotěmi na obr. 11.29 má poloměr 30 cm. Je upevněno na pevné ose a otáčí se úhlovou rychlostí 2,5 ot/s. Hoši

střílejí z luku ve směru osy kola a snaží se, aby šíp volně prolétl mezerou. Délka šípu je 20 cm. Předpokládáme, že šíp i loukotě kola jsou zanedbatelně tenké. (a) Určete nejmenší možnou rychlost šípu. (b) Zjistěte, zda je rozhodující, do kterého místa mezi osou kola a jeho obvodem šíp míří. V kladném případě určete, kam je třeba mířit.



Obr. 11.29 Úloha 10

ODST. 11.4 Rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb

11C. Údaj na otáčkoměru automobilového motoru (ot/min) rovnoměrně vzrostl během 12 s z 1 200 ot/min na 3 000 ot/min. (a) Určete úhlové zrychlení motoru v ot/min^2. (b) Určete celkový počet otáček motoru v daném časovém intervalu.

12C. Talíř gramofonu se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min a zastaví se za 30 s od okamžiku vypnutí motorku. (a) Určete jeho úhlové zrychlení v ot/min^2 za předpokladu, že jeho úhlová rychlost klesá rovnoměrně. (b) Kolik otáček talíř během brzdění vykoná?

13C. Kotouč, který se zpočátku otáčel úhlovou rychlostí 120 rad/s, se začal zpomalovat s konstantním úhlovým zrychlením o velikosti 4,0 rad/s^2. (a) Jak dlouho trvalo, než se kotouč zastavil? (b) O jaký úhel se za tuto dobu otočil?

14C. Na obvodu kladky o průměru 8,0 cm je navinuto lano délky 5,6 m. Kladka se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 1,5 rad/s^2. (a) Jaké musí být otočení kladky, aby se celé lano rozvinulo? (b) Jak dlouho to bude trvat?

15C. Těžký setrvačník otáčející se kolem osy symetrie vedené jeho středem se začne zpomalovat vlivem tření v ložiscích. Na konci první minuty činí jeho úhlová rychlost 90 % původní hodnoty 250 ot/min. Předpokládáme, že třecí síla je stálá. Určete úhlovou rychlost setrvačníku na konci druhé minuty.

16C. Setrvačník motoru rotuje úhlovou rychlostí 25,0 rad/s. Po vypnutí motoru se začne zpomalovat s konstantním úhlovým zrychlením a zastaví se po uplynutí 20,0 s. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení setrvačníku v rad/s^2, (b) jeho otočení (v rad) od okamžiku vypnutí motoru, (c) celkový počet otáček od okamžiku vypnutí motoru.

17C. Kotouč, který se může otáčet kolem své osy, se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením. Za dobu 5,0 s se otočí o 25 rad. Určete jeho (a) úhlové zrychlení, (b) průměrnou úhlovou rychlost, (c) okamžitou úhlovou rychlost na konci páté sekundy, (d) otočení v intervalu od konce páté do konce desáté sekundy.

18Ú. Kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením a v okamžiku $t = 2{,}0$ s má úhlovou rychlost 5,0 rad/s. Pohyb kola se dále urychluje až do okamžiku $t = 20$ s, kdy dojde k vypnutí pohonu. Určete otočení kola v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 40$ s.

19Ú. V okamžiku $t = 0$ se kolo začne roztáčet z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 2,00 rad/s^2. V časovém intervalu délky $\Delta t = 3{,}00$ s, měřeném od okamžiku t do okamžiku $t + \Delta t$, se kolo otočilo o 90,0 rad. (a) Určete okamžik t a (b) odpovídající okamžitou úhlovou rychlost kola.

20Ú. Kolo se roztáčí z klidu s konstantním úhlovým zrychlením 3,0 rad/s^2. V časovém intervalu $(t, t + \Delta t)$ délky $\Delta t = 4{,}0$ s se otočilo o úhel 120 rad. Určete okamžik t.

21Ú. Rotující setrvačník se rovnoměrně zpomaluje. Od okamžiku $t = 0$, kdy je jeho úhlová rychlost 1,5 rad/s, do okamžiku zastavení vykoná 40 otáček. Určete (a) dobu brzdění a (b) úhlové zrychlení setrvačníku. (c) Za jakou dobu vykonal setrvačník prvních 20 otáček?

22Ú. V okamžiku $t = 0$ má setrvačník úhlovou rychlost 4,7 rad/s, jeho úhlové zrychlení je $-0{,}25$ rad/s^2 a jeho vztažná přímka má úhlovou polohu $\theta_0 = 0$. (a) Určete krajní úhlovou polohu θ_{max} (v kladném směru) vztažné přímky setrvačníku. Zjistěte, v kterém okamžiku má úhlová poloha vztažné přímky hodnotu (b) $\theta = \frac{1}{2}\theta_{max}$ a (c) $\theta = -10{,}5$ rad. (Připouštíme kladné i záporné hodnoty časové proměnné t.) (d) Nakreslete graf funkce $\theta(t)$ a vyznačte na něm hodnoty vypočtené v částech (a) až (c).

23Ú. Kotouč se roztáčí kolem své osy se stálým úhlovým zrychlením. Jeho počáteční úhlová rychlost je nulová. V jistém okamžiku t_1 je jeho úhlová rychlost $\omega_1 = 10$ ot/s. Po dalších 60 otáčkách je jeho úhlová rychlost $\omega_2 = 15$ ot/s. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení kotouče, (b) dobu $\Delta t = t_2 - t_1$, potřebnou k vykonání zmíněných šedesáti otáček, (c) dobu t_1 potřebnou k získání úhlové rychlosti 10 ot/s a (d) počet otáček kotouče za dobu t_1.

24Ú. Kolo se roztáčí s konstantním úhlovým zrychlením. V určitém okamžiku stiskneme stopky a začneme měřit čas ($t = 0$). Během prvních 15 s od počátku měření vykoná kolo 90 otáček. Jeho úhlová rychlost na konci tohoto intervalu je 10 ot/s. (a) Určete úhlovou rychlost kola v okamžiku, kdy započalo měření. (b) Jaká doba uplynula od okamžiku, kdy se kolo začalo roztáčet z klidu, do začátku měření?

ODST. 11.5 Korespondence obvodových a úhlových veličin

25C. Určete zrychlení $\boldsymbol{a}$ (tečnou i normálovou složku) bodu na obvodu gramofonové desky o průměru 30 cm, která se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min.

26C. Gramofonová deska se otáčí úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min. (a) Vyjádřete její úhlovou rychlost v rad/s. Určete obvodovou rychlost bodu desky v místě přenosové jehly (b) na počátku a (c) na konci nahrávky. Vzdálenost jehly od osy talíře gramofonu na začátku, resp. na konci nahrávky je asi 150 mm, resp. 74 mm.

27C. Jaká je úhlová rychlost automobilu, který projíždí kruhovou zatáčku o poloměru 110 m rychlostí 50 km/h?

28C. Setrvačník o průměru 1,20 m vykoná 200 ot/min. (a) Vyjádřete jeho úhlovou rychlost v rad/s. (b) Určete rychlost bodu na jeho obvodu. (c) Při jaké (konstantní) hodnotě úhlového zrychlení (v rad/min^2) by se jeho úhlová rychlost zvýšila na 1 000 ot/min během 60 s? (d) Kolik otáček by setrvačník za tuto dobu vykonal?

29C. Úhlová rychlost bodu na obvodu brusného kotouče o průměru 0,75 m se změnila z 12 m/s na 25 m/s za dobu 6,2 s. Určete průměrné úhlové zrychlení kotouče v tomto časovém intervalu.

30C. Dráha Země kolem Slunce je přibližně kruhová. Určete (a) úhlovou rychlost, (b) rychlost a (c) zrychlení Země vzhledem ke Slunci.

31C. Dne 30. června 1908 v 7 h 14 min ráno došlo na střední Sibiři, v místě o souřadnicích 61° sev. šířky a 102° vých. délky k obrovskému výbuchu, při němž bylo možné pozorovat oslnivý záblesk. Podle náhodného svědka této *tunguzské záhady* „pokryl záblesk obrovskou část oblohy". Jednalo se pravděpodobně o dopad *kamenného asteroidu* o velikosti asi 140 m. (a) Vezměte v úvahu pouze otáčení Země a vypočtěte, o jakou dobu později by musel asteroid vybuchnout, aby se výbuch odehrál nad Helsinkami, jejichž zeměpisná délka je 25° východně. (Takový výbuch by město úplně zničil.) (b) Kdyby se jednalo o *kovový asteroid*, mohl by dopadnout až na povrch Země. O jakou dobu později by musel asteroid přiletět, aby dopadl do Atlantického oceánu v místě se zeměpisnou délkou 20° západně? (Vzniklá vlna tsunami by v takovém případě vyhladila pobřežní osídlení na obou stranách Atlantiku.)

32C. Astronaut je testován na centrifuze. Centrifuga má poloměr 10 m a během roztáčení je časová závislost její úhlové polohy popsána funkcí $\theta(t) = 0{,}30t^2$, kde θ je v radiánech a t v sekundách. Vypočtěte (a) úhlovou rychlost, (b) obvodovou rychlost, (c) velikost tečné složky zrychlení a (d) velikost normálové složky zrychlení astronauta v okamžiku $t = 5{,}0$ s.

33C. Vypočtěte (a) úhlovou rychlost, (b) normálovou složku zrychlení a (c) tečnou složku zrychlení vesmírné lodi letící obvodovou rychlostí 29 000 km/h po kruhové dráze o poloměru 3 200 km.

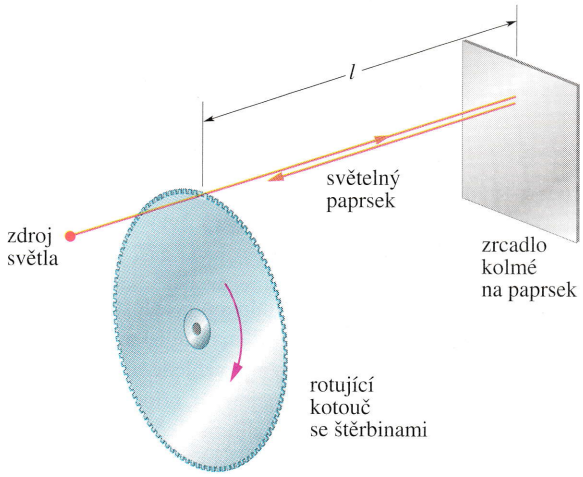
34C. Mince o hmotnosti M leží ve vzdálenosti R od středu talíře gramofonu. Koeficient statického tření mezi mincí a talířem je f_s. Úhlová rychlost talíře se pomalu zvětšuje na hodnotu ω_0, kdy mince z talíře sklouzne. (a) Vyjádřete ω_0 pomocí M, R, g a f_s. (b) Nakreslete přibližně trajektorii mince po jejím sklouznutí z talíře.

35Ú. Setrvačník parního stroje se otáčí konstantní úhlovou rychlostí 150 ot/min. Po uzavření přívodu páry se pohyb setrvačníku začne vlivem tření a odporu prostředí rovnoměrně zpomalovat a za 2,2 h se setrvačník zastaví. (a) Určete úhlové zrychlení setrvačníku v ot/min^2. (b) Kolik otáček ještě vykoná od okamžiku uzavření přívodu páry? V jistém okamžiku se setrvačník otáčí úhlovou rychlostí 75 ot/min. (c) Určete okamžitou hodnotu tečné složky zrychlení částice setrvačníku, která obíhá ve vzdálenosti 50 cm od jeho osy a (d) velikost okamžitého zrychlení této částice.

36Ú. Setrvačník gyroskopu o poloměru 2,83 cm se roztáčí z klidu s úhlovým zrychlením 14,2 rad/s^2 až do okamžiku, kdy dosáhne úhlové rychlosti 2 760 ot/min. (a) Určete tečnou složku zrychlení bodu na obvodu setrvačníku. (b) Jaká je hodnota normálové složky zrychlení v okamžiku, kdy setrvačník dosáhne největší úhlové rychlosti? (c) Jakou dráhu urazí bod na obvodu během roztáčení setrvačníku?

37Ú. Vrtule letadla se otáčí s úhlovou rychlostí 2 000 ot/min, letadlo letí rychlostí 480 km/h vzhledem k zemi. Zjistěte, jakou rychlostí se pohybuje bod na špičce listu vrtule o poloměru 1,5 m (a) vzhledem k letadlu, (b) vzhledem k zemi. Rychlost letadla je rovnoběžná s osou otáčení vrtule.

38Ú. Jedna ze starších metod měření rychlosti světla používala rovnoměrně rotující ozubené kolo (obr. 11.30). Světelný paprsek prošel mezerou mezi zuby kola, odrazil se od zrcadla a dopadl zpět na rotující kolo tak, aby právě prošel následující mezerou. Ozubené kolo o poloměru 5,0 cm mělo na obvodu 500 zubů. Pomocí zrcadla umístěného ve vzdálenosti $l = 500$ m byla naměřena hodnota rychlosti světla $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s. (a) Jaká byla úhlová rychlost kola? (b) Vypočtěte velikost rychlosti bodu na jeho obvodu.



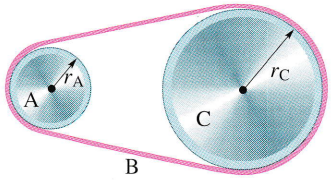
Obr. 11.30 Úloha 38

39Ú. Automobil se rozjíždí z klidu po kruhové dráze o poloměru 30,0 m. Jeho tečné zrychlení má stálou velikost 0,500 m/s^2. (a) Určete zrychlení automobilu v okamžiku $t = 15{,}0$ s po rozjezdu. (b) Jaký úhel svírá v tomto okamžiku vektor zrychlení automobilu s vektorem jeho rychlosti?

40Ú. Poloha bodu na zemském povrchu je určena zeměpisnou šířkou 40°. Určete úhlovou rychlost oběhu tohoto bodu kolem zemské osy. (b) Určete jeho obvodovou rychlost. (c) Řešte úlohy (a) a (b) pro bod na rovníku.

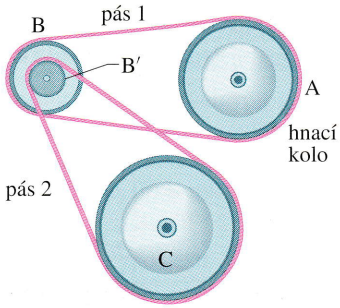
41Ú. Poloměry kol A a C na obr. 11.31 jsou $r_A = 10$ cm a $r_C = 25$ cm. Kola jsou spřažena pásem B, který po nich neklouže. Úhlová rychlost kola A se rovnoměrně zvětšuje z počáteční nulové hodnoty s úhlovým zrychlením 1,6 rad/s^2. Zjistěte,

v kterém okamžiku bude mít kolo C úhlovou rychlost 100 ot/min. (*Tip*: Jestliže pás neklouže, jsou obvodové rychlosti bodů na obvodech kol shodné.)



Obr. 11.31 Úloha 41

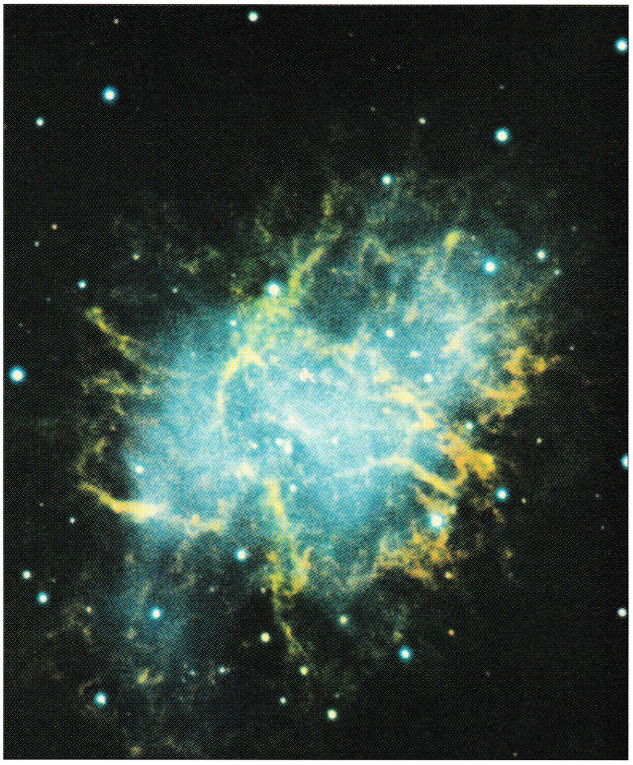
42Ú. Na obr. 11.32 jsou znázorněna čtyři kola spojená dvěma pásy. Hnací kolo A má poloměr 15 cm a otáčí se úhlovou rychlostí 10 rad/s. Kolo B o poloměru 10 cm je s kolem A spojeno pásem 1. Kola B′ a B mají společnou osu. Kolo C o poloměru 25 cm je s kolem B′ o poloměru 5 cm spojeno pásem 2. Vypočtěte (a) rychlost bodu na pásu 1, (b) úhlovou rychlost kola B, (c) úhlovou rychlost kola B′, (d) rychlost bodu na pásu 2, (e) úhlovou rychlost kola C. (Použijte návod k úloze 41.)



Obr. 11.32 Úloha 42

43Ú. Talíř gramofonu se otáčí s úhlovou rychlostí $33\frac{1}{3}$ ot/min. Ve vzdálenosti 6,0 cm od jeho osy leží malé tělísko. (a) Vypočtěte zrychlení tělíska za předpokladu, že je vzhledem k talíři v klidu (talíř nepodkluzuje). (b) Určete nejmenší přípustnou hodnotu koeficientu statického tření mezi talířem a tělískem. (c) Předpokládejme, že se talíř rovnoměrně urychloval po dobu 0,25 s, než získal zadanou úhlovou rychlost. Určete nejmenší možnou hodnotu koeficientu statického tření mezi tělískem a talířem, při níž ještě tělísko z talíře během urychlování nesklouzne.

44Ú. **Pulzar** je neutronová hvězda, která se velmi rychle otáčí a vysílá při tom pulzy radiových vln přesně synchronizované se svým otáčivým pohybem. Během jedné otáčky vyšle jeden pulz. Periodu otáčivého pohybu hvězdy je tedy možné snadno zjistit měřením doby mezi dvěma pulzy. Měřením se zjistilo, že perioda otáčení pulzaru v centrální oblasti Krabí mlhoviny (obr. 11.33) je v současné době $T = 0{,}033$ s a pomalu narůstá o $1{,}26 \cdot 10^{-5}$ s za jeden rok. (a) Vypočtěte úhlové zrychlení pulzaru v rad/s^2. (b) Za kolik let se pulzar zastaví? (c) Pulzar vznikl výbuchem supernovy v roce 1054 n. l. Jaká byla perioda jeho rotace v době vzniku? (Při řešení úlohy předpokládáme, že úhlové zrychlení pulzaru je konstantní.)



Obr. 11.33 Úloha 44. Krabí mlhovina vznikla výbuchem hvězdy, který byl pozorován v roce 1054 n. l. Na obrázku jsou patrny plynné zbytky výbuchu. Kromě nich tehdy vznikla i rotující neutronová hvězda, jejíž poloměr je pouhých 30 km.

ODST. 11.6 Kinetická energie tělesa při otáčivém pohybu

45C. Vypočtěte moment setrvačnosti kola, které se otáčí úhlovou rychlostí 602 ot/min a má kinetickou energii 24 400 J.

46Ú. Celková hmotnost molekuly kyslíku O_2 je $5{,}30 \cdot 10^{-26}$ kg. Její moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé ke spojnici atomů a vedené jejím středem je $1{,}94 \cdot 10^{-46}$ kg·m^2. Předpokládejme, že molekula plynného kyslíku má rychlost 500 m/s a kinetická energie jejího otáčivého pohybu je rovna dvěma třetinám kinetické energie pohybu posuvného. Určete úhlovou rychlost molekuly.

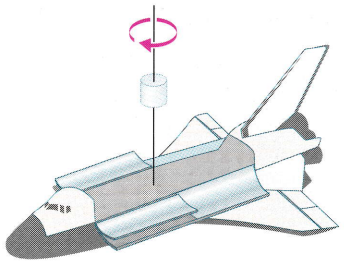
ODST. 11.7 Výpočet momentu setrvačnosti

47C. Vypočtěte hodnoty kinetické energie dvou homogenních plných válců, které rotují kolem svých os symetrie. Válce mají stejnou hmotnost 1,25 kg a otáčejí se se stejnou úhlovou rychlostí 235 rad/s. První z nich má poloměr 0,25 m a druhý 0,75 m.

48C. Molekula má moment setrvačnosti 14 000 u·pm^2 a otáčí se s úhlovou rychlostí $4{,}3 \cdot 10^{12}$ rad/s. (a) Vyjádřete moment setrvačnosti molekuly v kg·m^2. (b) Vypočtěte kinetickou energii jejího rotačního pohybu a vyjádřete ji v elektronvoltech.

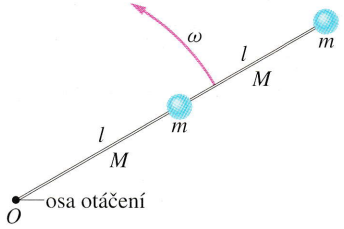
49C. Družice o hmotnosti 1 210 kg má tvar plného válce o průměru 1,21 m a délce 1,75 m. Před vypuštěním z nákladového

prostoru raketoplánu byla družice roztočena úhlovou rychlostí 1,52 ot/s kolem osy válce (obr. 11.34). Vypočtěte její moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení a (b) její kinetickou energii spojenou s otáčivým pohybem.



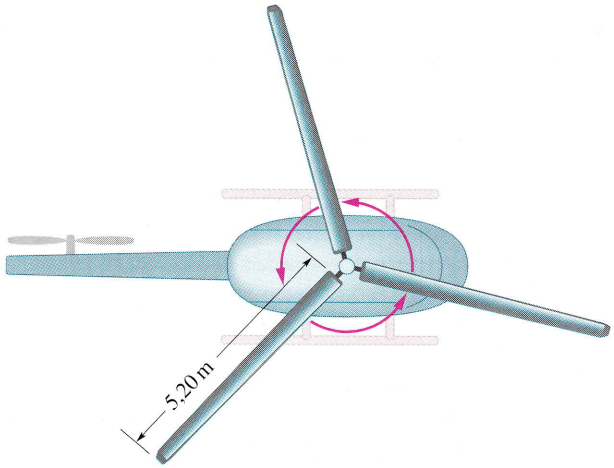
Obr. 11.34 Cvičení 49

50C. Dvě částice se stejnými hmotnostmi m jsou spolu spojeny a připevněny k ose otáčení O dvěma tenkými tyčemi o délkách l a hmotnostech M (obr. 11.35). Soustava se otáčí úhlovou rychlostí ω. Odvoďte výraz pro (a) moment setrvačnosti soustavy vzhledem k ose O a (b) kinetickou energii jejího otáčivého pohybu vzhledem k této ose.



Obr. 11.35 Cvičení 50

51C. Každý z trojice listů rotoru vrtulníku na obr. 11.36 má délku 5,20 m a hmotnost 240 kg. Rotor se otáčí úhlovou rychlostí 350 ot/min. (a) Jaký je jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení? (List lze pokládat za tenkou tyč.) (b) Jaká je kinetická energie otáčivého pohybu rotoru?



Obr. 11.36 Cvičení 51 a úloha 85

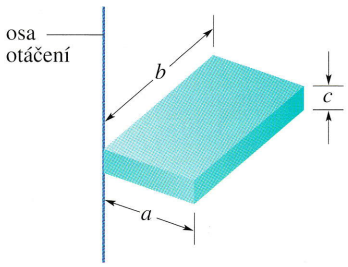
52C. Za předpokladu, že je Země homogenní koule, vypočtěte (a) její moment setrvačnosti a (b) její kinetickou energii spojenou s otáčivým pohybem. (c) Představme si, že by bylo možné tuto energii nějak využít. Jak dlouho by Země mohla dodávat výkon 1,0 kW každému člověku na planetě? (Počet lidí na Zemi je asi $6{,}4\cdot10^9$.)

53C. Vypočtěte moment setrvačnosti tyčového metru o hmotnosti 0,56 kg vzhledem k ose vedené značkou 20 cm kolmo k tyči. (Tyč lze pokládat za velmi tenkou.)

54Ú. Ukažte, že osa rotace, vůči níž má tuhé těleso nejmenší možnou hodnotu momentu setrvačnosti, musí procházet jeho těžištěm.

55Ú. Odvoďte výraz pro moment setrvačnosti prstence o hmotnosti m a poloměru R, uvedený v tab. 11.2a.

56Ú. Na obr. 11.37 je homogenní tuhý kvádr o hmotnosti m a rozměrech a, b a c. Vypočtěte jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose splývající s jeho hranou.



Obr. 11.37 Úloha 56

57Ú. Následující trojice údajů představují hmotnost a souřadnice každé ze čtyř částic v rovině xy: 50 g, $x = 2{,}0$ cm, $y = 2{,}0$ cm; 25 g, $x = 0$, $y = 4{,}0$ cm; 25 g, $x = -3{,}0$ cm, $y = -3{,}0$ cm; 30 g, $x = -2{,}0$ cm, $y = 4{,}0$ cm. Vypočtěte moment setrvačnosti této soustavy částic (a) vzhledem k ose x, (b) vzhledem k ose y, (c) vzhledem k ose z. Momenty setrvačnosti označte I_x, I_y a I_z. (d) Vyjádřete I_z pomocí I_x a I_y.

58Ú. (a) Ukažte, že moment setrvačnosti plného válce o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k jeho rotační ose symetrie je roven momentu setrvačnosti tenkého prstence o hmotnosti m a poloměru $R/\sqrt{2}$ vzhledem k jeho rotační ose symetrie. (b) Ukažte, že moment setrvačnosti libovolného tělesa o hmotnosti m vzhledem k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti *ekvivalentního prstence* o stejné hmotnosti vzhledem k jeho rotační ose symetrie, má-li prstenec poloměr

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

Poloměr ekvivalentního prstence se nazývá *gyrační poloměr* tělesa.

59Ú. Některé dodávkové automobily jsou poháněny setrvačníkem. Setrvačník má tvar plného homogenního válce o hmotnosti 500 kg a poloměru 1,0 m. Elektrickým motorem se setrvačník roztočí na úhlovou rychlost 200π rad/s. (a) Jak velká kinetická

energie je „uložena“ v roztočeném setrvačníku? (b) Průměrný příkon takového automobilu je 8,0 kW. Jak dlouho může automobil jezdit, než se setrvačník zastaví?

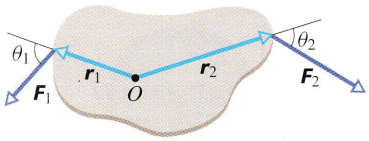
ODST. 11.8 Moment síly

60C. Délka ramene pedálu jízdního kola je 0,152 m. Chodidlo tlačí na pedál svislou silou o velikosti 111 N. Určete velikost momentu této síly vzhledem k ložisku, svírá-li rameno pedálu se svislým směrem úhel (a) 30°, (b) 90° a (c) 180°.

61C. Míč o hmotnosti 0,75 kg je připevněn k jednomu konci tyče o délce 1,25 m a zanedbatelné hmotnosti. Druhý konec tyče se může otáčet kolem vodorovného čepu. Určete velikost momentu tíhové síly vzhledem k čepu při vychýlení takto vzniklého kyvadla z rovnovážné polohy o úhel 30°.

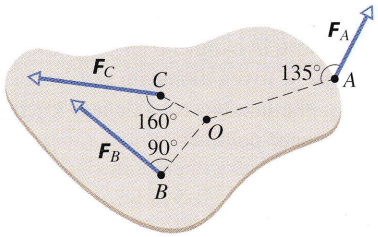
62C. Cyklista o hmotnosti 70 kg tlačí pedál celou svou vahou v okamžiku, kdy se pedál pohybuje směrem dolů. Pedál opisuje kruhovou dráhu o poloměru 0,40 m. Vypočtěte maximální velikost momentu tlakové síly, kterou cyklista na pedál působí.

63Ú. Na těleso na obr. 11.38, které se může otáčet kolem bodu O, působí dvě síly. (a) Odvoďte výraz pro velikost výsledného momentu těchto sil vzhledem k bodu O a (b) vyčíslete jej pro hodnoty $r_1 = 1{,}30\,\text{m}$, $r_2 = 2{,}15\,\text{m}$, $F_1 = 4{,}20\,\text{N}$, $F_2 = 4{,}90\,\text{N}$, $\theta_1 = 75{,}0°$ a $\theta_2 = 60{,}0°$.



Obr. 11.38 Úloha 63

64Ú. Těleso na obr. 11.39 se může otáčet kolem bodu O. Působí na ně tři síly, které jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Síla $\boldsymbol{F}_A$ má velikost $F_A = 10\,\text{N}$ a působí v bodě A, který leží ve vzdálenosti 8,0 m od bodu O. Síla $\boldsymbol{F}_B$ má velikost $F_B = 16\,\text{N}$ a působí v bodě B vzdáleném 4,0 m od bodu O. Síla $\boldsymbol{F}_C$ má velikost $F_C = 19\,\text{N}$ a působí v bodě C, jehož vzdálenost od bodu O je 3,0 m. Vypočtěte celkový moment všech těchto sil vzhledem k bodu O.



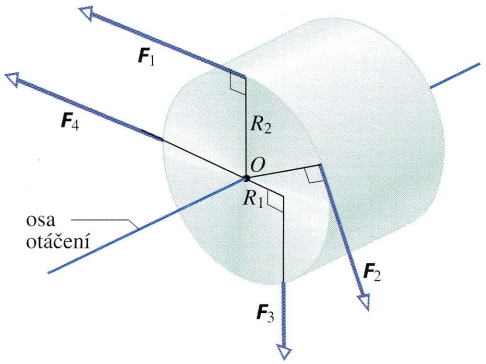
Obr. 11.39 Úloha 64

ODST. 11.9 Věta o momentu hybnosti

65C. Moment síly, která roztáčí kolo, má velikost 32 N·m. Úhlové zrychlení kola je $25{,}0\,\text{rad/s}^2$. Vypočtěte moment setrvačnosti kola.

66C. Při výskoku z prkna zvětší skokan do vody svou úhlovou rychlost z počáteční nulové hodnoty na hodnotu 6,20 rad/s. Výskok trvá 220 ms. Moment setrvačnosti skokana je $12{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. (a) Vypočtěte úhlové zrychlení při výskoku a (b) výsledný moment vnějších sil, které na skokana při výskoku působily.

67C. Válec o hmotnosti 2,0 kg se může otáčet kolem osy vedené bodem O (obr. 11.40). Na válec působí síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ a $\boldsymbol{F}_4$, které jsou v obrázku rovněž vyznačeny. Jejich velikosti jsou $F_1 = 6{,}0\,\text{N}$, $F_2 = 4{,}0\,\text{N}$, $F_3 = 2{,}0\,\text{N}$ a $F_4 = 5{,}0\,\text{N}$ a jejich působiště leží ve vzdálenostech $R_1 = 5{,}0\,\text{cm}$ a $R_2 = 12\,\text{cm}$ od osy otáčení. Vypočtěte velikost úhlového zrychlení válce a určete jeho směr. (Směr působících sil *vzhledem k válci* se během jeho pohybu nemění.)



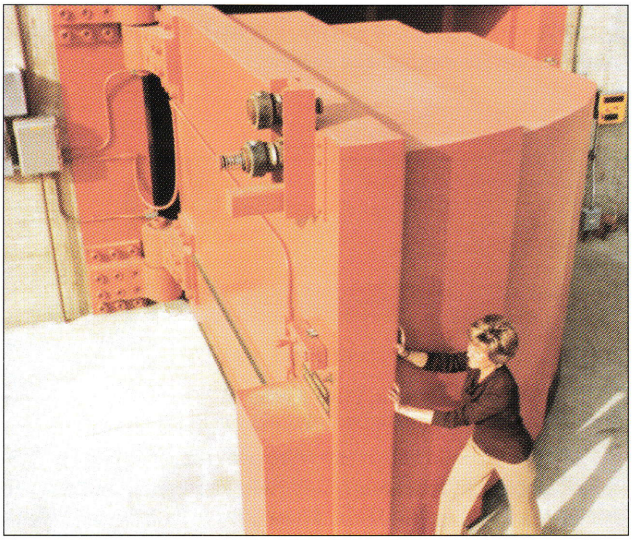
Obr. 11.40 Cvičení 67

68C. Těleso je tvořeno částicí o hmotnosti 1,30 kg, která je připevněna k jednomu konci tyče o délce 0,780 m a zanedbatelné hmotnosti. Otáčí se úhlovou rychlostí 5 010 ot/min kolem svislé osy vedené druhým koncem tyče. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení. (b) Na částici působí proti směru jejího pohybu odporová síla prostředí o velikosti $2{,}30\cdot10^{-2}\,\text{N}$. Jaký musí být moment další síly, kterou musíme na těleso působit, aby jeho otáčivý pohyb byl rovnoměrný?

69C. Tenká kulová slupka má poloměr 1,90 m. Moment síly, která na ni působí, má velikost 960 N·m. Slupka se otáčí kolem osy vedené jejím středem s úhlovým zrychlením $6{,}20\,\text{rad/s}^2$. Vypočtěte (a) moment setrvačnosti a (b) hmotnost slupky.

70Ú. Na obr. 11.41 vidíme masivní stínicí dveře pokusného neutronového reaktoru v Lawrence Livermore Laboratory. (Jsou to nejtěžší zavěšené dveře na světě.) Hmotnost dveří je 44 000 kg a jejich moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jejich závěsy je $8{,}7\cdot10^4\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Šířka přední stěny dveří je 2,4 m. Jak velkou stálou silou kolmou k přední stěně dveří je třeba působit u jejich vnějšího okraje, abychom jimi dokázali za 30 s otočit o 90°? (Dveře jsou zpočátku v klidu, vliv třecích sil pokládáme za zanedbatelný.)

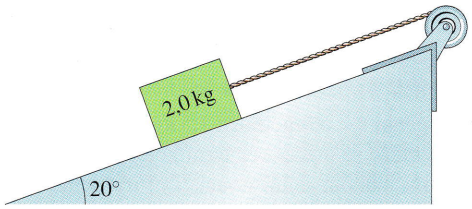
71Ú. Na kladku o poloměru 10 cm působí v bodě na jejím obvodu tečná síla, jejíž velikost je časově proměnná a je popsána funkcí $F = 0{,}50t + 0{,}30t^2$ (F je newtonech a t v sekundách). Moment setrvačnosti kladky vzhledem k její ose je



Obr. 11.41 Úloha 70

$1{,}0{\cdot}10^{-3}$ kg·m^2. Kladka je zpočátku v klidu. Vypočtěte (a) její úhlové zrychlení a (b) úhlovou rychlost v okamžiku $t = 3{,}0$ s.

72Ú. Kolo o poloměru 0,20 m se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy. Po obvodu kola je navinuto vlákno zanedbatelné hmotnosti. Druhý konec vlákna je připevněn k tělesu o hmotnosti 2,0 kg, které může klouzat bez tření po nakloněné rovině o úhlu sklonu 20° (obr. 11.42). Těleso klesá po nakloněné rovině se zrychlením 2,0 m/s^2. Vypočtěte moment setrvačnosti kola vzhledem k jeho ose otáčení.

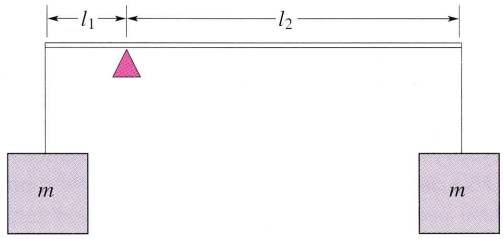


Obr. 11.42 Úloha 72

73Ú. Dvě homogenní plné koule mají stejnou hmotnost 1,65 kg s poloměry 0,226 m a 0,854 m. (a) Pro každou z nich vypočtěte moment síly, která kouli roztočí za 15,5 s z klidu na úhlovou rychlost 317 rad/s. Koule se může otáčet kolem osy vedené jejím středem. (b) Pro každou kouli zjistěte, jak velká tečná síla musí působit v bodě na rovníku, aby její moment vzhledem k ose otáčení měl požadovanou velikost.

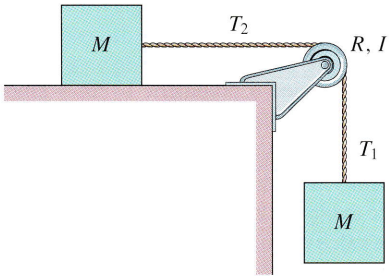
74Ú. Tělíska použitá v Atwoodově padostroji na obr. 5.23 mají hmotnosti 500 g a 460 g. Kladka o poloměru 5,00 cm se může otáčet kolem vodorovné osy bez tření. Po uvolnění soustavy pokleslo těžší těleso o 75,0 cm za dobu 5,00 s (vlákno v kladce neprokluzuje). (a) Určete zrychlení těles a tahovou sílu vlákna působící na (b) těžší a (c) lehčí těleso. (d) Vypočtěte úhlové zrychlení kladky a (e) její moment setrvačnosti.

75Ú. Na obr. 11.43 jsou znázorněna dvě tělesa o stejných hmotnostech m, zavěšená na koncích tuhé tyče o délce $l_1 + l_2$, kde $l_1 = 20$ cm a $l_2 = 80$ cm. Hmotnost tyče je zanedbatelná. Tyč je podepřena břitem podle obrázku. Držíme ji nejprve ve vodorovné poloze a pak uvolníme. Vypočtěte zrychlení těles bezprostředně po uvolnění.



Obr. 11.43 Úloha 75

76Ú. Dvě stejná tělesa o hmotnosti M jsou spojena vláknem zanedbatelné hmotnosti, které je vedeno přes kladku o poloměru R a momentu setrvačnosti I (obr. 11.44). Vlákno v kladce neprokluzuje, kladka se může otáčet bez tření. Předem nevíme, zda lze tření mezi tělesem a vodorovnou podložkou zanedbat. Po uvolnění soustavy se tělesa pohybovala se zrychlením o stálé velikosti. Za dobu t se kladka otočila o úhel θ. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení kladky, (b) zrychlení těles, (c) tahovou sílu v horní a dolní části vlákna. Výsledky vyjádřete pomocí veličin M, I, R θ, g a t.



Obr. 11.44 Úloha 76

ODST. 11.10 Práce a kinetická energie při otáčivém pohybu

77C. (a) Pro soustavu na obr. 11.18 jsou zadány tyto hodnoty: $R = 12$ cm, $M = 400$ g a $m = 50$ g. Určete rychlost tělesa v okamžiku, kdy pokleslo z počáteční klidové polohy o 50 cm. Úlohu řešte pomocí zákona zachování mechanické energie. (b) Zopakujte výpočet pro $R = 5{,}0$ cm.

78C. Kliková hřídel v automobilovém motoru přenáší při úhlové rychlosti 1 800 ot/min výkon 100 HP = 74,6 kW. Určete odpovídající silový moment.

79C. Tenký prstenec o hmotnosti 32,0 kg a poloměru 1,20 m má v jistém okamžiku $t = 0$ úhlovou rychlostí 280 ot/min. Během dalších 15,0 s se prstenec zastaví. (a) Vypočtěte práci brzdných sil a (b) odpovídající výkon.

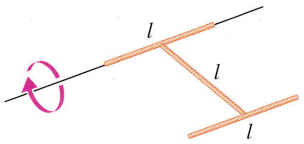
80C. Tenká tyč o délce l a hmotnosti m je na jednom konci volně zavěšena. Po vychýlení kmitá kolem rovnovážné polohy jako kyvadlo, rovnovážnou polohou prochází úhlovou rychlostí ω. (a) Vypočtěte kinetickou energii tyče při průchodu rovnovážnou

polohou. (b) Určete výšku těžiště kyvadla v bodě obratu nad jeho rovnovážnou polohou. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

81Ú. Představme si, že bychom měli za jeden den roztočit Zemi z klidu na její současnou úhlovou rychlost. Vypočtěte (a) potřebný moment působící síly, (b) dodanou energii, (c) průměrný výkon síly při tomto hypotetickém ději.

82Ú. Tyčový metr je spodním koncem opřen o podlahu a jeho horní konec přidržujeme. V jistém okamžiku horní konec uvolníme a tyčový metr padá. Vypočtěte rychlost jeho volného konce v okamžiku dopadu na podlahu za předpokladu, že spodní konec během pádu nepodklouzl. (*Tip*: Použijte zákon zachování mechanické energie a považujte tyč za velmi tenkou.)

83Ú. Tuhé těleso se skládá ze tří stejných tenkých tyčí o délce l spojených do tvaru písmene H (obr. 11.45). Těleso se může otáčet kolem vodorovné osy, která prochází jednou nožkou písmene H. Těleso uvolníme v poloze, kdy je rovina písmene H vodorovná. Vypočtěte jeho úhlovou rychlost v okamžiku, kdy je rovina písmene H svislá.

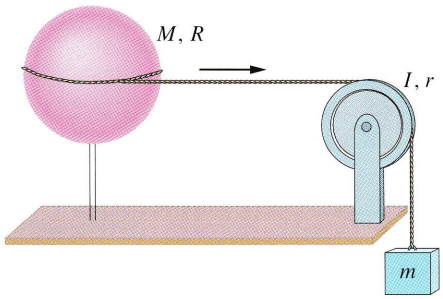


Obr. 11.45 Úloha 83

84Ú. Homogenní válec o poloměru 10 cm a hmotnosti 20 kg se může volně otáčet kolem vodorovné osy, rovnoběžné s jeho rotační osou symetrie. Vzdálenost obou os je 5,0 cm. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti válce vzhledem k zadané ose otáčení. (b) Válec uvolníme z klidové polohy, v níž byly osa otáčení a osa symetrie válce ve stejné výšce. Jaká je úhlová rychlost válce v okamžiku, kdy prochází rovnovážnou polohou? (*Tip*: Použijte zákon zachování mechanické energie.)

85Ú. Homogenní list vrtulníkového rotoru na obr. 11.36 má délku 7,80 m a hmotnost 110 kg. (a) Jakou silou působí list na svorník, jímž je připevněn k ose rotoru, otáčí-li se úhlovou rychlostí 320 ot/min? (*Tip*: Při řešení této úlohy lze list nahradit částicí umístěnou v jeho těžišti. Přemýšlejte proč.) (b) Vypočtěte moment síly, kterou musí působit motor vrtulníku na rotor, aby získal úhlovou rychlost 320 ot/min za dobu 6,7 s při roztáčení z klidu. Zanedbejte odpor vzduchu. (V tomto případě již nelze nahradit rotorový list částicí umístěnou do jeho těžiště. Proč? List nahraďte tenkou homogenní tyčí.) (c) Jakou práci vykonal motor při roztočení rotoru vrtulníku z klidu na výslednou úhlovou rychlost?

86Ú. Homogenní kulová slupka o hmotnosti M a poloměru R se otáčí bez tření kolem svislé osy (obr. 11.46). Vlákno zanedbatelné hmotnosti je navinuto podél jejího rovníku, je vedeno přes kladku s momentem setrvačnosti I a na jeho druhém konci je připevněno malé tělísko o hmotnosti m. Tření v ose kladky zanedbáme a předpokládáme, že vlákno po povrchu kulové slupky neklouže. V určitém okamžiku soustavu uvolníme. Určete rychlost padajícího tělíska v okamžiku, kdy urazilo dráhu h. Použijte zákon zachování mechanické energie.

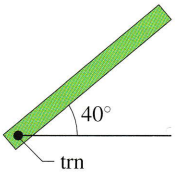


Obr. 11.46 Úloha 86

87Ú. Vysoký komín válcového tvaru padá tak, že se otáčí kolem svého konce uchyceného u země. Nahraďte komín tenkou tyčí o délce h a vyjádřete (a) normálovou a (b) tečnou složku zrychlení částice na vrcholu komína jako funkci úhlu θ, který komín svírá se svislým směrem. (c) Určete hodnotu θ, pro kterou má zrychlení této částice velikost g.

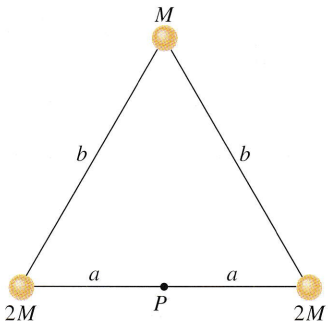
88Ú. Na obou koncích tenké ocelové tyče o délce 1,20 m a hmotnosti 6,40 kg jsou upevněny malé míčky o hmotnostech 1,06 kg. Tyč se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. V jistém okamžiku měla tyč úhlovou rychlost 39,0 ot/s. Za dalších 32,0 s se vlivem třecích sil zastavila. Předpokládejme, že moment třecích sil je konstantní. Vypočtěte (a) úhlové zrychlení tyče, (b) moment třecích sil, (c) celkovou ztrátu mechanické energie vlivem sil tření a (d) počet otáček, které tyč vykonala od začátku měření do okamžiku zastavení. (e) Předpokládejme nyní, že moment třecích sil není konstantní. Kterou z veličin (a), (b), (c), nebo (d) je přesto možné vypočítat bez dodatečné informace? Uveďte její hodnotu.

89Ú. Homogenní tyč o hmotnosti 1,5 kg má délku 2,0 m (obrázek 11.47) a může se otáčet bez tření kolem vodorovného čepu umístěného na jednom jejím konci. Tyč uvedeme do výchozí klidové polohy, v níž svírá s vodorovným směrem úhel 40°, a uvolníme. (a) Určete úhlové zrychlení tyče v okamžiku jejího uvolnění. Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose vedené čepem je 2,0 kg·m^2. (b) Pomocí zákona zachování mechanické energie určete úhlovou rychlost tyče v okamžiku, kdy prochází vodorovnou polohou.



Obr. 11.47 Úloha 89

90Ú. Tuhé těleso na obr. 11.48 se skládá ze tří částic spojených tyčemi zanedbatelné hmotnosti. Těleso se otáčí kolem osy vedené bodem P kolmo k rovině obrázku. Pro hodnoty $M = 0{,}40$ kg, $a = 30$ cm a $b = 50$ cm vypočtěte práci nutnou k roztočení tělesa z klidu na úhlovou rychlost 5,0 rad/s.



Obr. 11.48 Úloha 90

91Ú*. Automobil je vybaven setrvačníkem pro akumulaci energie ve tvaru homogenního kotouče o průměru 1,1 m. Setrvačník je spojen převody s koly automobilu tak, že jeho úhlová rychlost je 240 ot/s při rychlosti automobilu 80 km/h. Celková hmotnost automobilu je 800 kg, setrvačník váží 200 N. Automobil je zpočátku v klidu a začne sjíždět bez motoru po svahu délky 1 500 m a úhlem sklonu 5°. Třecí síly a moment setrvačnosti kol automobilu zanedbejte a vypočtěte (a) rychlost automobilu, (b) úhlové zrychlení setrvačníku a (c) výkon dodávaný setrvačníku na konci svahu.

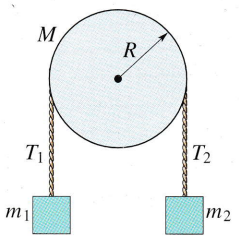
PRO POČÍTAČ

92Ú. Dva kotouče se mohou nezávisle na sobě otáčet kolem rovnoběžných os. První kotouč má poloměr 7,0 cm a moment setrvačnosti 1,5 kg·m^2, poloměr druhého je 15 cm a moment setrvačnosti 3,5 kg·m^2. První kotouč je v klidu a druhý roztočíme úhlovou rychlostí 175 rad/s. Osy kotoučů pak posuneme tak, aby se jejich obvody dotkly. Kotouče na sebe působí normálovými silami o velikostech 150 N, koeficient dynamického tření mezi kotouči je 0,25. (a) Vytvořte tabulku obsahující časové závislosti úhlových rychlostí kotoučů v časovém intervalu 80 s měřeném od okamžiku jejich dotyku. Hodnoty tabelujte s krokem 2 s. Sestrojte grafy těchto závislostí a graf časové závislosti celkové kinetické energie kotoučů. Zachovává se celková kinetická energie? (b) Jaký vliv na pohyb kotoučů má třecí síla? Výpočty zopakujte pro koeficient dynamického tření 0,50. Závisí doba potřebná k ustavení výsledné (rovnovážné) úhlové rychlosti kotoučů na koeficientu dynamického tření? Závisí výsledná úhlová rychlost kotoučů a jejich celková výsledná kinetická energie na koeficientu dynamického tření?

93Ú. V následující tabulce jsou uvedeny souřadnice pěti částic ležících v rovině xy. Částice jsou pevně spojeny a tvoří tuhé těleso. Vypočtěte moment setrvačnosti tohoto tělesa (a) vzhledem k ose x, (b) vzhledem k ose y a (c) vzhledem k ose z. (d) Najděte polohu těžiště tělesa.

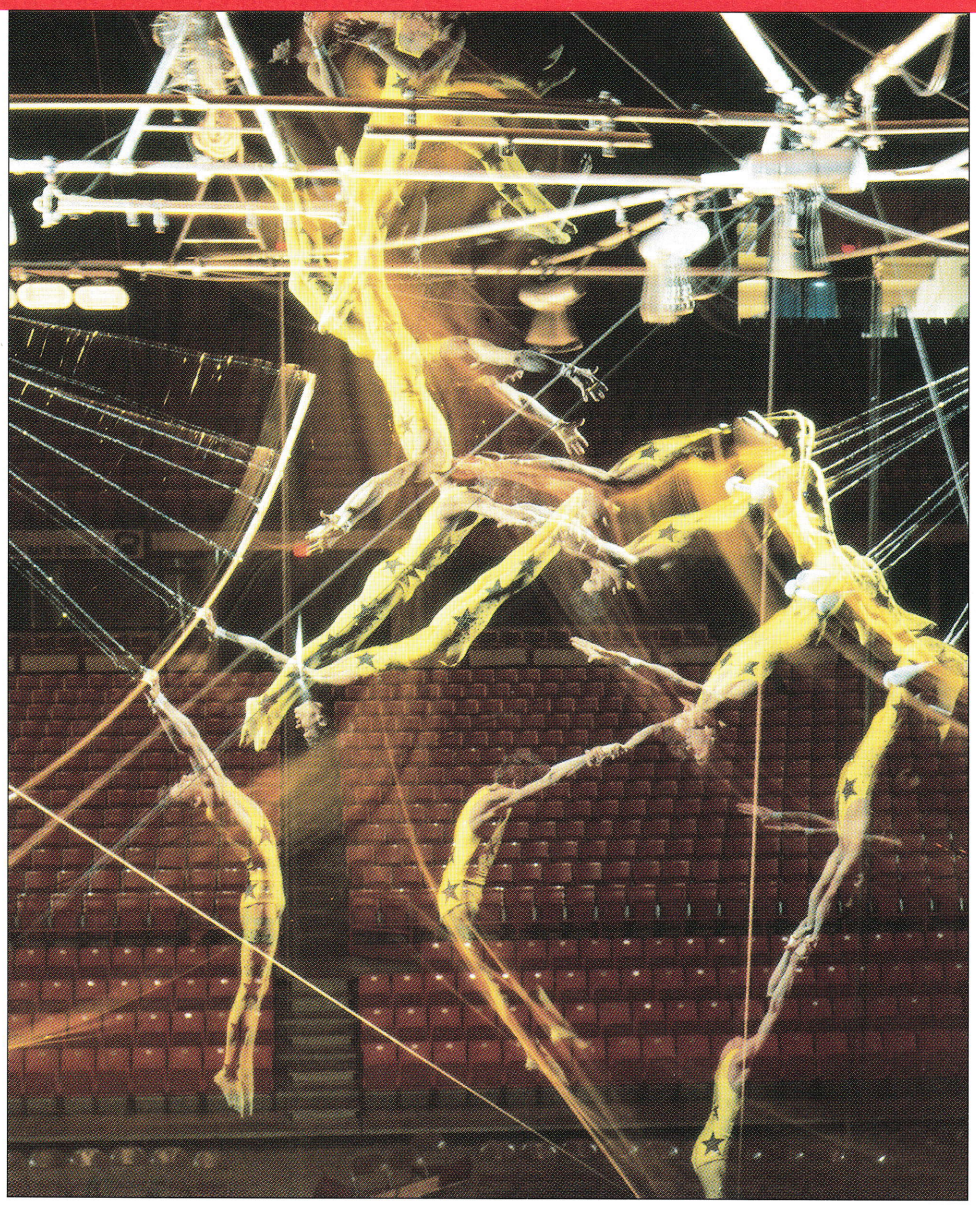
TĚLESO	1	2	3	4	5
Hmotnost (g)	500	400	300	600	450
x (cm)	15	−13	17	−4,0	−5,0
y (cm)	20	13	−6,0	−7,0	9,0

94Ú. Na obr. 11.49 jsou znázorněna dvě tělesa o hmotnostech $m_1 = 400$ g a $m_2 = 600$ g. Tělesa jsou spojená vláknem zanedbatelné hmotnosti, vedeným přes homogenní kladku o hmotnosti $M = 500$ g a poloměru $R = 12{,}0$ cm. Kladka se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy. Vlákno po obvodu kladky neklouže. Soustavu uvolníme z klidové polohy. Vypočtěte (a) velikost zrychlení těles, (b) tahovou sílu T_1 v levé části vlákna a (c) tahovou sílu T_2 v pravé části vlákna.

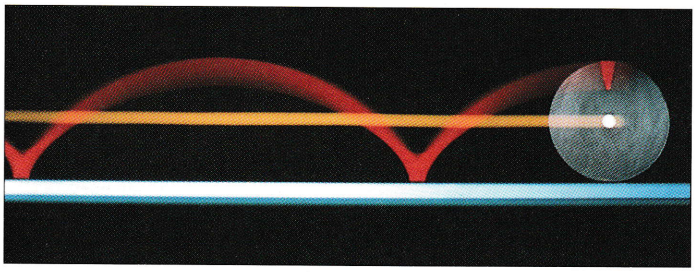


Obr. 11.49 Úloha 94

12
Valení, moment síly a moment hybnosti



K nejobtížnějším varietním číslům patří bezesporu vícenásobná salta. Trojité salto se poprvé povedlo již v roce 1897 jednomu z tehdy populárních vzdušných akrobatů při skoku z visuté hrazdy, na ***čtyřnásobné*** *si však milovníci těchto atrakcí museli počkat ještě dalších 85 let, do roku 1982. Migueli Vazquesovi se tehdy podařilo provést během letu celé čtyři otáčky, než ho zachytil jeho bratr Juan. Oba artisté byli v té chvíli svým výkonem téměř zaskočeni. Proč je vícenásobné salto tak obtížné? Může k jeho zvládnutí nějak napomoci znalost fyzikálních zákonů?*



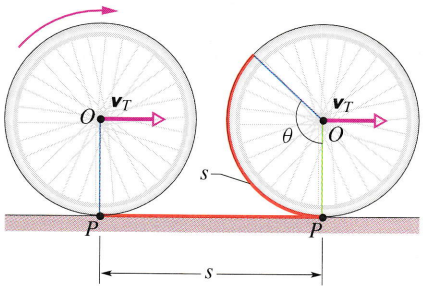
Obr. 12.1 Fotografie valícího se kotouče získaná při dlouhé expoziční době. Na kotouči jsou připevněny dva bodové zdroje světla, jeden v jeho středu a jeden na obvodu. Světélko umístěné na obvodu opisuje křivku zvanou *cykloida*.

12.1 VALENÍ

Všimněme si pohybu jednotlivých částí kola při jízdě cyklisty po přímé silnici. Středy obou kol se pohybují vpřed, jejich pohyb je posuvný. Trajektorie bodů na obvodu kol jsou však mnohem složitější (obr. 12.1). Ukážeme si, že pohyb valícího se kola lze chápat buď jako složení posuvného a otáčivého pohybu, nebo jako čistě otáčivý pohyb kolem vhodně zvolené osy.

Valení jako kombinace posuvného a otáčivého pohybu

Pozorujme bicyklové kolo, které se odvaluje stálou rychlostí po přímé dráze a neprokluzuje. Předpokládejme, že hmotnost kola je rozložena symetricky, takže jeho těžiště splývá s jeho geometrickým středem O. Bod O se pohybuje vpřed stálou rychlostí $\boldsymbol{v}_T$ podle obr. 12.2. Bod P, v němž se kolo dotýká silnice, je v každém okamžiku přesně pod bodem O. Pohybuje se tedy po silnici stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}_T$ jako těžiště kola.



Obr. 12.2 Těžiště O valícího se kola se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_T$ a za dobu t urazí dráhu s. Kolo se přitom pootočí o úhel θ. Bod dotyku P kola se zemí urazí za tuto dobu rovněž dráhu s.

Za dobu t urazí body O a P dráhu s. Z pohledu cyklisty se při tom kolo otočí kolem svého středu o úhel θ. Také délka oblouku části pneumatiky, která během doby t přišla do styku se silnicí, je s. Tuto dráhu urazil z pohledu cyklisty bod na pneumatice, který se dotýkal silnice na počátku měření. Vztah mezi délkou oblouku s a otočením θ je velmi jednoduchý. Platí totiž rov. (11.15):

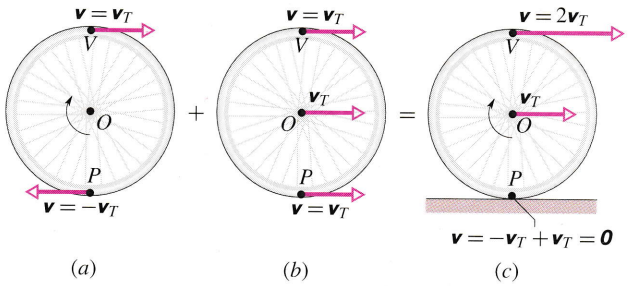
$$s = R\theta, \tag{12.1}$$

kde R je poloměr kola. Rychlost středu kola $\boldsymbol{v}_T$ má velikost $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, úhlová rychlost kola ω vzhledem k ose vedené jeho středem je $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. Derivováním rov. (12.1) podle času dostaneme

$$v_T = \omega R. \tag{12.2}$$

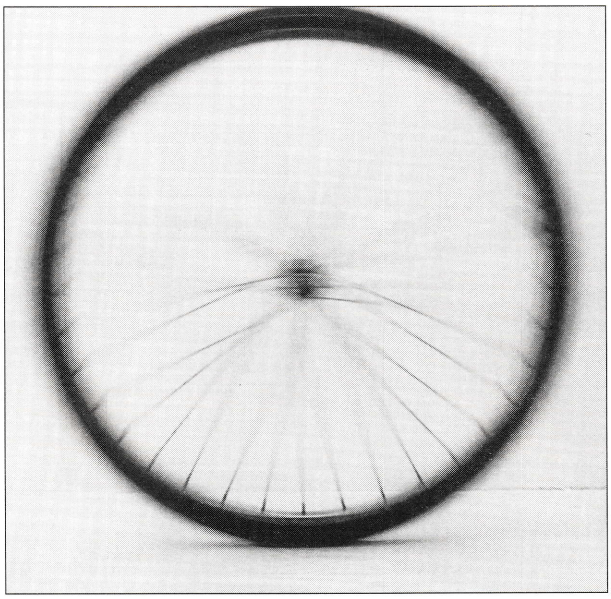
Uvědomme si, že rov. (12.2) platí pouze v případě, že se kolo valí *bez prokluzování*.

Obr. 12.3 nás přesvědčí, že valení kola můžeme chápat jako složení posuvného a otáčivého pohybu. Obr. 12.3a znázorňuje pouze otáčení kola, tj. jeho pohyb z pohledu cyklisty, který vidí osu otáčení jako nepohyblivou. (Otáčivý pohyb kolem pevné osy jsme podrobně probrali v kap. 11.) Každý bod kola rotuje kolem této osy úhlovou rychlostí ω. Libovolný bod na jeho vnějším obvodu má obvodovou rychlost v_T, danou vztahem (12.2). Obr. 12.3b zachycuje pouze posuvný pohyb kola, který bychom pozorovali, kdyby se kolo vůbec neotáčelo. Každý jeho bod by se v takovém případě pohyboval doprava rychlostí $\boldsymbol{v}_T$.



Obr. 12.3 Valení kola jako kombinace posuvného a otáčivého pohybu. (a) Otáčení kola: všechny body kola obíhají se stejnou úhlovou rychlostí ω. Body na jeho vnějším obvodu mají stejnou obvodovou rychlost $v = v_T$. V obrázku jsou vyznačeny vektory rychlosti $\boldsymbol{v}$ nejvýše a nejníže položeného bodu kola V, resp. P. (b) Posuv kola: všechny body se pohybují doprava se stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}_T$, shodnou s rychlostí středu O. (c) Valivý pohyb kola je složením pohybů (a) a (b).

Složením pohybů na obr. 12.3a, b vznikne výsledný valivý pohyb, který vidíme na obr. 12.3c. Všimněme si, že body v bezprostřední blízkosti bodu P jsou téměř v klidu, zatímco body u vrcholu V se pohybují rychleji než kterákoli jiná část kola, rychlostí blízkou $2v_T$. Fotografie



Obr. 12.4 Fotografie valícího se bicyklového kola. Obraz kovových paprsků v dolní části fotografie je podstatně ostřejší než nahoře. Pohyb paprsků v horní části kola je tedy rychlejší, ve shodě s obr. 12.3c.

valícího se bicyklového kola na obr. 12.4 to dokumentuje velmi přesvědčivě. Obraz drátů u vrcholu kola je zcela rozmazán, zatímco dráty ve spodní části jsou zachyceny poměrně ostře.

Valení libovolného tělesa kruhového průřezu lze tedy rozložit na „čisté" otáčení a „čistý" posuv, přesně podle obr. 12.3a, b.

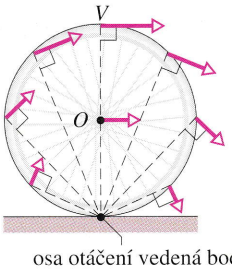
Valení jako otáčivý pohyb

Jiný způsob pohledu na valivý pohyb nabízí obr. 12.5. Můžeme jej totiž interpretovat také jako „čisté" otáčení kolem *okamžité* osy, která je kolmá k rovině kola a právě prochází bodem jeho dotyku se silnicí (bod P na obr. 12.5). Okamžité rychlosti jednotlivých bodů valícího se kola jsou v obr. 12.5 vyznačeny šipkami.

Otázka: Jakou úhlovou rychlost přisoudí kolu pozorovatel v klidu, posuzuje-li jeho pohyb jako otáčení kolem této nové osy?

Odpověď: Úhlová rychlost otáčivého pohybu kola vzhledem ke klidnému pozorovateli je stejná jako vzhledem k cyklistovi, který pozoruje „čistou" rotaci kola kolem osy vedené jeho středem.

Abychom se o správnosti odpovědi na předchozí otázku přesvědčili, vypočtěme rychlost bodu V na vrcholu kola ve vztažné soustavě spojené s pozorovatelem v klidu. Vzdálenost vrcholu V od osy vedené bodem P na obr. 12.5 je rovna průměru kola $2R$. Bod V se tedy podle rov. (12.2)



Obr. 12.5 Valivý pohyb může být chápán jako otáčení s úhlovou rychlostí ω kolem osy, která v každém okamžiku prochází bodem P. Šipky znázorňují vektory okamžité rychlosti vybraných bodů na obvodu kola. Lze je získat sečtením odpovídajících rychlostí posuvného a otáčivého pohybu podle obr. 12.3.

pohybuje rychlostí o velikosti

$$v_{\text{vrchol}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_T,$$

přesně v souhlasu s obr. 12.3c. Podobně můžeme určit rychlosti bodů O a P a ověřit tak správnost obr. 12.3c.

KONTROLA 1: Zadní kolo klaunova jízdního kola má dvakrát větší poloměr než kolo přední. (a) Rozhodněte, zda je rychlost bodu na vrcholu zadního kola větší, menší, nebo stejná jako rychlost odpovídajícího bodu předního kola. (b) Rozhodněte, zda je úhlová rychlost zadního kola větší, menší, nebo stejná jako úhlová rychlost předního kola.

Obruč na obrázku se valí bez prokluzování. Kdo jde rychleji? Pes nebo poník?

Kinetická energie

Pokusme se nyní vypočítat kinetickou energii valícího se kola vzhledem k vztažné soustavě spojené s pozorovatelem v klidu. Chápeme-li valení jako otáčení kolem osy vedené bodem P na obr. 12.5, dostaneme

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2, \tag{12.3}$$

kde ω je úhlová rychlost kola a I_P jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené bodem P. Podle Steinerovy věty (11.27) je

$$I_P = I_T + mR^2, \tag{12.4}$$

kde m je hmotnost kola a I_T jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Dosazením z rovnice (12.4) do (12.3) dostáváme

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_T \omega^2 + \tfrac{1}{2} m R^2 \omega^2.$$

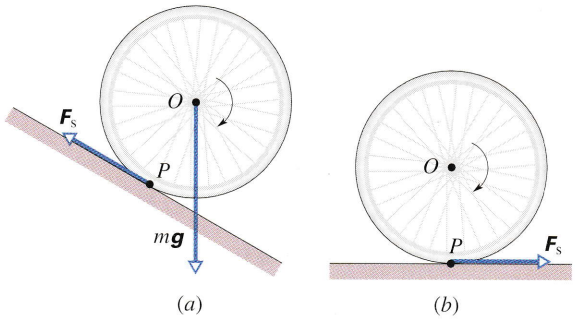
Pomocí vztahu $v_T = \omega R$ (rov. (12.2)) získáme nakonec výsledný vztah pro E_k ve tvaru

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_T \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_T^2. \tag{12.5}$$

První z členů na pravé straně této rovnice představuje kinetickou energii otáčivého pohybu kola kolem osy vedené jeho těžištěm (obr. 12.3a), druhý člen odpovídá pohybu posuvnému (obr. 12.3b).

Valení a třecí síly

Jakou roli vlastně hrají při valivém pohybu třecí síly? Představme si, že se kolo valí po vodorovné podložce stálou rychlostí, právě tak, jak ukazuje obr. 12.2. Mohli bychom je do takového pohybu vůbec uvést, kdyby byla podložka dokonale hladká? Pokud bychom je roztočili kolem jeho osy na úhlovou rychlost ω a udělili mu ještě vodorovnou rychlost o velikosti $v_T = \omega R$, mohlo by se to podařit. Vzhledem k přesně „nastavenému" vztahu mezi úhlovou rychlostí kola a rychlostí jeho posuvného pohybu by kolo v bodě P samozřejmě neprokluzovalo, nesmýkalo by se po podložce. Popsaným způsobem však můžeme uvést kolo do valivého pohybu bez klouzání i v případě, že podložka *nebude* dokonale hladká. Kolo se po ní nebude smýkat ani v tomto případě. Zanedbáme-li tzv. valivý odpor podložky proti jeho pohybu, způsobený mírnými deformacemi obou objektů, snadno si uvědomíme, že jedinou silou, kterou by podložka *mohla* na kolo působit, je vodorovná síla statického tření. Posuvný pohyb kola je však podle předpokladu rovnoměrný a žádnou další vodorovnou silou na kolo nepůsobíme. Statická třecí síla je proto nulová. Jiná situace nastane, pokusíme-li se změnit postupnou (v_T) nebo úhlovou (ω) rychlost kola. V takovém případě musíme na kolo působit určitou vodorovnou silou a připustit, že se kolo může v bodě P smýknout po podložce. Podložka bude na kolo působit v bodě P třecí silou. Pokud ke smyku kola ještě nedojde, bude tato síla $\boldsymbol{F}_s$ mít povahu *statického* tření a bude směřovat *„proti snaze"* kola podklouznout. V případě smyku již půjde o tření *dynamické* a třecí síla $\boldsymbol{F}_d$ bude namířena proti směru *skutečného* skluzu.



(a) (b)

Obr. 12.6 (a) Kolo se valí bez klouzání po nakloněné rovině. V bodě P na ně působí síla statického tření $\boldsymbol{F}_s$ proti „snaze" kola sklouznout, tj. proti směru, ve kterém by kolo v bodě P uklouzlo, kdyby byla podložka dokonale hladká. (b) Kolo se valí vodorovně s narůstající úhlovou rychlostí. Bod P má v tomto případě snahu uklouznout směrem dozadu (představte si automobil, který se prudce rozjíždí na zledovatělém parkovišti). Síla statického tření $\boldsymbol{F}_s$ působí na kolo v bodě P opět *proti* jeho možnému skluzu. Pokud by se již kolo na obrázcích (a) a (b) smýkalo, působila by na ně podložka v bodě P silou dynamického tření $\boldsymbol{F}_d$.

Na obr. 12.6a se kolo valí po nakloněné rovině. V jeho těžišti na ně působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, jejíž rameno vzhledem k ose otáčení vedené těžištěm je nulové. Je tedy nulový i odpovídající silový moment. Tíhová síla nepřispívá k roztáčení kola, pouze se snaží kolo smýkat dolů po nakloněné rovině. V bodě P působí na kolo ještě třecí síla směřující proti jeho „tendenci ke skluzu", tj. vzhůru podél nakloněné roviny. Její rameno vzhledem k ose otáčení kola je *nenulové* a má velikost poloměru kola. Moment třecí síly roztáčí kolo vzhledem k ose vedené jeho středem.

Na obr. 12.6b se kolo valí po vodorovné rovině s narůstající úhlovou rychlostí ω. Při tom se jeho spodní část snaží podklouznout doleva. (Abychom si tuto skutečnost lépe uvědomili, můžeme si představit automobil, jehož řidič se snaží o prudký rozjezd na zledovatělém parkovišti.) Třecí síla, jíž působí podložka na kolo v bodě P, směřuje opět proti očekávanému směru skluzu. Z hlediska soustavy cyklista+jízdní kolo je silou vnější a určuje zrychlení jejího těžiště.

PŘÍKLAD 12.1

Tuhý homogenní válcový kotouč o hmotnosti $m = 1{,}4\,\text{kg}$ a poloměru $R = 8{,}5\,\text{cm}$ se valí po vodorovném stole rychlostí $v = 15\,\text{cm/s}$.

(a) Vypočtěte rychlost bodu na jeho vrcholu.

ŘEŠENÍ: „Rychlostí valícího se tělesa", v našem příkladu kotouče, rozumíme vždy rychlost jeho těžiště. Z obr. 12.3c je zřejmé, že rychlost bodu na vrcholu kotouče je v porovnání s rychlostí jeho těžiště dvojnásobná, tj.

$$v_{\text{vrchol}} = 2v_T = 2(15\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}) = 30\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Určete úhlovou rychlost kotouče ω.

ŘEŠENÍ: Z rov. (12.2) dostaneme

$$\omega = \frac{v_T}{R} = \frac{(15\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1})}{(8{,}5\,\text{cm})} = \\ = 1{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 0{,}28\,\text{ot/s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Výsledek je nezávislý na volbě polohy osy otáčení: můžeme ji vést bodem P podle obr. 12.5 stejně dobře jako těžištěm kotouče.

(c) Vypočtěte kinetickou energii kotouče.

ŘEŠENÍ: Užitím vztahů $I_T = \frac{1}{2}mR^2$, $v_T = \omega R$ a rovnice (12.5) dostaneme

$$E_k = \tfrac{1}{2}I_T\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2 = \\ = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mR^2)(v_T/R)^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2 = \tfrac{3}{4}mv_T^2 = \\ = \tfrac{3}{4}(1{,}4\,\text{kg})(0{,}15\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 = \\ = 0{,}024\,\text{J} = 24\,\text{mJ}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(d) Jaká část celkové kinetické energie kotouče souvisí s jeho posuvným pohybem a jaká část přísluší otáčivému pohybu kolem osy vedené jeho těžištěm?

ŘEŠENÍ: Kinetická energie posuvného pohybu odpovídá druhému členu v rov. (12.5), tj. $\frac{1}{2}mv_T^2$, a podle výsledku části (c) tedy představuje

$$\frac{\frac{1}{2}mv_T^2}{\frac{3}{4}mv_T^2} = \frac{2}{3} \doteq 67\,\% \quad \text{(Odpověď)}$$

celkové kinetické energie. Zbývajících 33 % odpovídá pohybu otáčivému.

Příspěvek posuvného a otáčivého pohybu k celkové kinetické energii valícího se tělesa závisí na jeho momentu setrvačnosti. V tab. 12.1 jsou shrnuty momenty setrvačnosti tří těles, prstence, válcového kotouče a koule, vzhledem k ose největší symetrie. Prstenec má svou hmotnost rozloženou ze všech těles nejdále od této osy. Poměrně velká část kinetické energie valícího se prstence proto připadá na otáčivý pohyb. Koule, jejíž hmotnost je rozložena blízko osy otáčení, má moment setrvačnosti nejmenší. Příspěvek její rotace k celkové kinetické energii valivého pohybu je tedy malý.

Moment setrvačnosti obecného rotačně symetrického tělesa je možné zapsat jako β-násobek momentu setrvačnosti prstence stejné hmotnosti, jehož poloměr R je shodným s poloměrem největšího řezu tělesa rovinou kolmou k ose symetrie. Je-li těleso homogenní, lze pomocí parametru β vyjádřit zvlášť příspěvky posuvného a otáčivého pohybu k celkové kinetické energii valícího se tělesa. Odpovídající vztahy pro prstenec, válec a kouli jsou uvedeny v posledním řádku tab. 12.1. Pro prstenec, válec a kouli nabývá parametr β hodnot 1, $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{5}$.

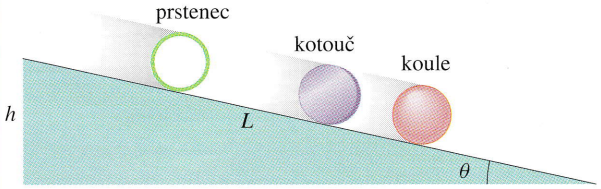
Tabulka 12.1 **Podíl kinetické energie translačního a rotačního pohybu na celkové kinetické energii valivého pohybu těles**

TĚLESO	MOMENT SETRVAČNOSTI I_T	PŘÍSP. K CELK. ENERGII TRANSLACE	PŘÍSP. K CELK. ENERGII ROTACE
Prstenec	$1mR^2$	50 %	50 %
Válec, válc. kotouč	$\frac{1}{2}mR^2$	67 %	33 %
Koule	$\frac{2}{5}mR^2$	71 %	29 %
Obecné těleso[a]	βmR^2	$100\frac{1}{1+\beta}$ %	$100\frac{\beta}{1+\beta}$ %

[a] Hodnotu β určíme jako $\beta = I_T/(mR^2)$.

PŘÍKLAD 12.2

Homogenní kuželková koule o poloměru $R = 11\,\text{cm}$ a hmotnosti $m = 7{,}2\,\text{kg}$ se valí dolů po nakloněné rovině o délce $L = 2{,}1\,\text{m}$ a úhlu sklonu $\theta = 34°$ (obr. 12.7). Jakou rychlostí se bude koule pohybovat na konci nakloněné roviny?



Obr. 12.7 Příklady 12.2 a 12.3. Prstenec, kotouč a koule se valí dolů po nakloněné rovině o úhlu sklonu θ. Přestože tělesa uvolníme ve stejném místě a stejném okamžiku, dorazí na konec nakloněné roviny v různém pořadí.

ŘEŠENÍ: Uvažujme pohyb koule od okamžiku jejího uvolnění v nejvyšším bodě nakloněné roviny až do chvíle, kdy dorazí k jejímu konci. Těžiště koule pokleslo během tohoto pohybu o svislou vzdálenost $h = L\sin\theta$. Tíhová potenciální energie soustavy koule + Země se tak snížila o hodnotu $mgL\sin\theta$. O stejnou hodnotu však vzrostla kinetická energie

koule. Podle rov. (12.5) platí

$$mgL\sin\theta = \tfrac{1}{2}I_T\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2. \qquad (12.6)$$

Podle vztahu (g) v tab. 11.2 platí pro plnou kouli $I_T = \frac{2}{5}mR^2$. Úhlovou rychlost ω můžeme nahradit výrazem v_T/R. Dosazením do rov. (12.6) dostáváme

$$mgL\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(mR^2)\left(\frac{v_T}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_T^2.$$

Z této rovnice vyjádříme v_T:

$$v_T = \sqrt{\tfrac{10}{7}gL\sin\theta} =$$
$$= \sqrt{\tfrac{10}{7}(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}1\ \mathrm{m})\sin 34^\circ} =$$
$$= 4{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že výsledek nezávisí ani na hmotnosti, ani na poloměru koule.

PŘÍKLAD 12.3

Úvahy v př. 12.2 nyní zobecníme. Homogenní prstenec, kotouč a koule o stejné hmotnosti m a stejném poloměru R jsou současně uvolněny v nejvyšším bodě nakloněné roviny o délce $L = 2{,}5$ m a úhlu sklonu $\theta = 12^\circ$ (obr. 12.7).

(a) Které z těles dorazí na konec nakloněné roviny nejdříve?

ŘEŠENÍ: Odpověď snadno najdeme v tab. 12.1. U koule je poměrný příspěvek posuvného pohybu k celkové kinetické energii ze všech tří těles největší (71 %). Koule tedy závod vyhraje. Jako druhý skončí kotouč a poslední bude prstenec.

(b) Určete rychlost každého z těles na konci nakloněné roviny.

ŘEŠENÍ: Těžiště každého z těles poklesne během „závodu" o tutéž svislou vzdálenost h. Stejně jako při volném pádu klesne potenciální energie soustavy těleso + Země o hodnotu mgh. O stejnou hodnotu vzroste kinetická energie tělesa. Na konci nakloněné roviny mají tedy všechna tělesa stejnou kinetickou energii. Pouze část této energie, závislá na rozložení hmotnosti tělesa, však připadá na posuvný pohyb.

V rov. (12.5) položíme $\omega = v_T/R$ a dostaneme

$$mgh = \tfrac{1}{2}I_T\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}I_T(v_T^2/R^2) + \tfrac{1}{2}mv_T^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}(I_T/R^2)v_T^2 + \tfrac{1}{2}mv_T^2. \qquad (12.7)$$

Po dosazení $h = L\sin\theta$ vyřešíme získanou rovnici vzhledem k neznámé v_T:

$$v_T = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1 + I_T/mR^2}}. \qquad \text{(Odpověď)} \qquad (12.8)$$

Řešení je vyjádřeno pomocí momentu setrvačnosti tělesa I_T.

Všimněme si, že rychlost tělesa nezávisí ani na jeho hmotnosti ani na poloměru, ale pouze na rozložení hmoty kolem osy jeho rotační symetrie. Tato skutečnost je z výsledku (12.8) patrná na první pohled. Moment setrvačnosti tělesa I_T v něm totiž vystupuje pouze v podílu I_T/mR^2. Dětská hrací kulička i kuželková koule budou mít na konci nakloněné roviny stejnou rychlost. Z nakloněné roviny se tedy skutálí za stejnou dobu. Koule v tomto závodě porazí kotouč libovolné hmotnosti a poloměru. Prstenec o libovolné hmotnosti i poloměru je naopak za všech okolností odsouzen k porážce.

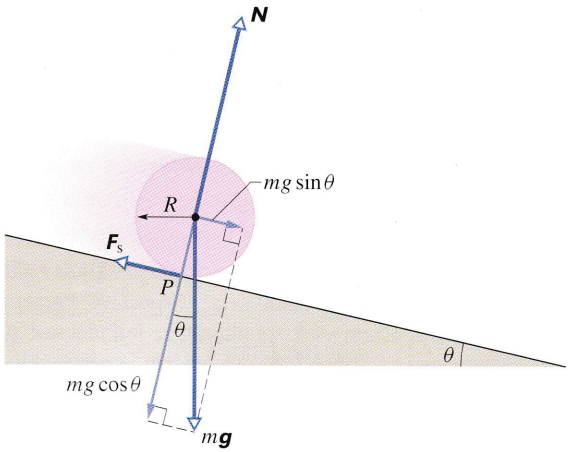
Pro prstenec (viz tab. 12.1) je $I_T/mR^2 = 1$. Jeho rychlost na konci „závodní dráhy" je podle rov. (12.8)

$$v_T = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1 + I_T/mR^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2(9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}5\ \mathrm{m})\sin 12^\circ}{1+1}} =$$
$$= 2{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Podobně získáme $v_T = 2{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pro kotouč ($I_T/mR^2 = \frac{1}{2}$) a $2{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pro kouli ($I_T/mR^2 = \frac{2}{5}$). Tyto výsledky potvrzují náš odhad pořadí těles v části (a).

PŘÍKLAD 12.4

Uvažujme opět těleso o hmotnosti m a kruhovém průřezu o poloměru R, které se valí po nakloněné rovině o úhlu sklonu θ (obr. 12.8). Při rozboru jeho pohybu se však nyní opřeme pouze o věty o hybnosti a o momentu hybnosti soustavy. Výsledek pak porovnáme s řešením př. 12.3, kde jsme použili zákon zachování mechanické energie.



Obr. 12.8 Příklad 12.4. Homogenní těleso kruhového průřezu o poloměru R se valí dolů po nakloněné rovině. Země na ně působí tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$, podložka pak normálovou silou $\boldsymbol{N}$ a třecí silou $\boldsymbol{F}_s$. Třecí síla směřuje vzhůru podél nakloněné roviny. Působiště síly $\boldsymbol{N}$ jsme pro přehlednost přesunuli podél její vektorové přímky do středu tělesa.

(a) Vypočtěte zrychlení valícího se tělesa.

ŘEŠENÍ: Na obr. 12.8 jsou znázorněny síly, kterými na těleso působí okolní objekty: tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, normálová síla $\boldsymbol{N}$ a statická třecí síla $\boldsymbol{F}_s$. Působištěm tíhové síly je těžiště tělesa. Je-li hmotnost tělesa rozložena symetricky vzhledem k ose o jeho geometrické rotační symetrie, splývá těžiště se středem geometrickým. Normálová síla a síla tření působí na nepatrnou plošku v okolí bodu P, kde se těleso dotýká nakloněné roviny. Momenty všech sil vztahujeme k ose o. Momenty tíhové a normálové síly vzhledem k této ose jsou ovšem nulové, a nepřispívají proto k urychlování otáčivého pohybu. Roztáčení tělesa ve směru chodu hodinových ručiček je způsobeno výhradně silou tření, jejíž moment je záporný. Rameno třecí síly vzhledem k ose o má délku R.

Pro posuvný pohyb tělesa platí věta o hybnosti ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$). V soustavě souřadnic, jejíž osa x směřuje vzhůru podél nakloněné roviny, má zápis x-ové složky této vektorové rovnice tvar

$$ma_x = \sum F_x = F_s - mg\sin\theta. \qquad (12.9)$$

Rovnice obsahuje dvě neznámé, F_s a a_x. Potřebujeme pro ně další rovnici. Získáme ji z věty o momentu hybnosti ($I\varepsilon = \sum M$) vztažené k ose o, v níž použijeme vztah $\varepsilon = a_x/R$ (rov. (11.20)):

$$\sum M = -F_s R = I_T\varepsilon = \frac{I_T a_x}{R}. \qquad (12.10)$$

Z rov. (12.10) dostaneme výraz pro sílu tření

$$F_s = -\frac{I_T a_x}{R^2}. \qquad (12.11)$$

Znaménko minus znamená, že vektor třecí síly $\boldsymbol{F}_s$ má opačný směr než vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$. Dosazením z rov. (12.11) do (12.9) a řešením vzhledem k neznámé veličině a_x nakonec dostáváme

$$a_x = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_T/mR^2}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.12)$$

(Větu o momentu hybnosti $I\varepsilon = \sum M$ jsme v kap. 11 odvodili pro otáčivý pohyb tělesa kolem osy, která je v klidu vzhledem ke vhodně zvolené inerciální vztažné soustavě. Poměrně elementárním výpočtem však lze ukázat, že její platnost zůstane zachována i pro případ, že osa otáčení je nepohyblivá ve vztažné soustavě spojené s těžištěm tělesa, jejíž pohyb vzhledem k soustavám inerciálním je pouze posuvný. Uvědomme si, že tato speciální *těžišťová* vztažná soustava může být i neinerciální.)

Při řešení úlohy bychom mohli vztáhnout větu o momentu hybnosti i k ose o_P vedené bodem P, v němž se těleso *dotýká* nakloněné roviny. Moment třecí síly vzhledem k této ose je nulový. V roli výsledného momentu sil $\sum M$ vystupuje nyní moment tíhové síly $m\boldsymbol{g}$, jejíž rameno vzhledem k ose o_P má hodnotu $R\sin\theta$. Dostáváme tedy

$$\sum M = -mg(R\sin\theta) = I_P\varepsilon = \frac{I_P a_x}{R}, \qquad (12.13)$$

kde I_P je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose o_P, vedené bodem P. Vypočteme jej pomocí Steinerovy věty

$$I_P = I_T + mR^2. \qquad (12.14)$$

Dosadíme za I_P z rov. (12.14) do (12.13) a vyjádříme neznámou a_x, dostaneme opět výsledek (12.12).

(b) Vypočtěte velikost třecí síly F_s.

ŘEŠENÍ: Dosazením z rov. (12.12) do (12.11) dostaneme

$$F_s = mg\,\frac{\sin\theta}{1 + mR^2/I_T}. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.15)$$

Z tohoto výsledku vyplývá, že síla tření je menší než průmět tíhové síly do směru nakloněné roviny, jehož velikost je $mg\sin\theta$. Těleso se proto valí dolů zrychleně.

Například pro plný kotouč je podle tab. 12.1 $I_T/mR^2 = \frac{1}{2}$. Pro zrychlení a velikost třecí síly pak z rov. (12.12) a (12.15) dostáváme

$$a_x = -\frac{2}{3}g\sin\theta \quad \text{a} \quad F_s = \frac{1}{3}mg\sin\theta.$$

(c) Určete rychlost tělesa na konci nakloněné roviny o délce L.

ŘEŠENÍ: Těleso se pohybuje podél osy x s konstantním zrychlením. Platí tedy

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x(x - x_0). \qquad (12.16)$$

Položíme-li $x - x_0 = -L$ a $v_0 = 0$ a dosadíme-li za a_x výsledek (12.12), získáme rov. (12.8), přesně ve shodě s výpočtem pomocí zákona zachování mechanické energie.

KONTROLA 2: Stejné kotouče A a B se valí po vodorovné podlaze stejnou rychlostí. Kotouč A najede na nakloněnou rovinu a valí se po ní bez prokluzu vzhůru až do bodu obratu, který leží nad úrovní podlahy ve výšce h. Kotouč B stoupá po stejné nakloněné rovině, která je však dokonale hladká. Rozhodněte, zda je výška bodu obratu kotouče B nad úrovní podlahy větší, menší, či stejná jako h.

12.2 JOJO

Oblíbená hračka zvaná **jojo**, to je fyzikální laboratoř, která se vejde do kapsy. Nevěříte? Ukážeme si, co všechno lze pomocí pohybu joja demonstrovat. Představme si, že se jojo odvaluje podél vlákna dolů a urazí vzdálenost h. Potenciální energie soustavy jojo + Země při tom poklesne o hodnotu mgh, o kterou naopak vzroste energie kinetická. Tato změna přispěje ke zvýšení kinetické energie posuvného ($\frac{1}{2}mv_T^2$) i otáčivého ($\frac{1}{2}I_T\omega^2$) pohybu joja. Při zpětném pohybu hračky je naopak pokles kinetické energie kompenzován vzrůstem energie potenciální.

V modernějším provedení není vlákno joja pevně přivázáno k osičce, ale vytváří kolem ní volnou smyčku. Jakmile tělísko joja „narazí" na dolní konec vlákna, začne vlákno působit na osičku svislou silou směřující vzhůru. Tato síla zastaví pokles tělíska, které pak spočívá ve smyčce vlákna a otáčí se kolem své osy. Jeho celková kinetická energie bude v tuto chvíli dána pouze kinetickou energií otáčivého pohybu. Takové „spící" jojo můžeme opět „probudit" zatáhnutím za vlákno. Vlákno se třením zachytí za osičku a jojo po něm začne „šplhat" nahoru. Kinetickou energii otáčivého pohybu tělíska v nejnižší poloze (tedy ve spícím stavu) lze výrazně zvýšit, nebude-li se jojo roztáčet z klidu, ale udělíme-li mu určitou počáteční rychlost v_T (směrem dolů) a určitou počáteční úhlovou rychlost ω.

Zabývejme se nyní podrobněji pohybem hračky na základě impulzových vět. Na obr. 12.9a vidíme idealizované jojo se zanedbatelnou tloušťkou vlákna. Obr. 12.9b představuje příslušný silový diagram, v němž je vyznačena pouze osička. Odvodíme vztah pro zrychlení $\boldsymbol{a}$ tělíska. Pro posuvný pohyb použijeme větu o hybnosti ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$). V soustavě souřadnic s osou x namířenou svisle vzhůru dostaneme

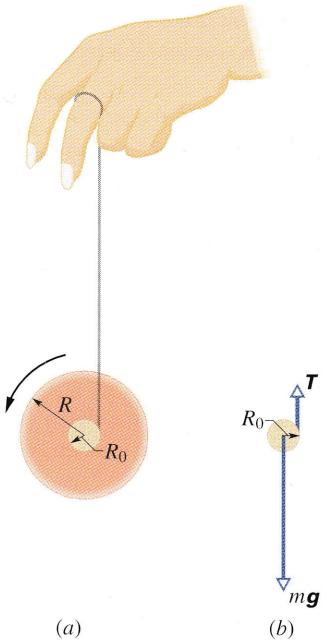
$$ma_x = \sum F_x = T - mg. \qquad (12.17)$$

Symbolem m jsme označili hmotnost tělíska a T představuje velikost tahové síly vlákna.

Pro rotační pohyb máme k dispozici větu o momentu hybnosti ($I\varepsilon = \sum M$), kterou vztáhneme k ose vedené těžištěm joja:

$$I\varepsilon = \sum M = TR_0, \qquad (12.18)$$

kde R_0 je poloměr osičky a I moment setrvačnosti joja vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Zrychlení $\boldsymbol{a}$ směřuje dolů (složka a_x je tedy *záporná*). Síly působící na jojo jsou, včetně správné orientace, zakresleny v obr. 12.9b. Moment tíhové síly vzhledem k ose vedené těžištěm tělíska je nulový, moment síly tahové je orientován proti směru otáčení hodinových ručiček. Úhlové zrychlení ε směřuje tedy rovněž proti směru otáčení hodinových ručiček (je *kladné*).



(a) (b)

Obr. 12.9 (a) Jojo. Vlákno zanedbatelného průměru je navinuto na osičce o poloměru R_0. (b) Silový diagram tělíska při pádu. Ve skutečnosti nelze průměr vlákna zcela zanedbat, a tak je třeba počítat s efektivní změnou poloměru osičky, v závislosti na okamžité délce navinutého vlákna.

Veličiny a a ε jsou proto spjaty vztahem $a_x = -\varepsilon R_0$. Dosazením $\varepsilon = -a_x/R_0$ do rov. (12.18) dostáváme

$$TR_0 = -\frac{Ia_x}{R_0}.$$

Z tohoto vztahu vyjádříme T a dosadíme do rov. (12.17). Nakonec získáme zrychlení tělíska ve tvaru

$$a_x = -g\,\frac{1}{1 + I/mR_0^2}. \qquad (12.19)$$

Ideální jojo se tedy odvaluje podél vlákna dolů s konstantním zrychlením. Požadujeme-li, aby zrychlení bylo malé, potřebujeme lehké tělísko s velkým momentem setrvačnosti a malým poloměrem osičky.

PŘÍKLAD 12.5

Jojo je vyrobeno ze dvou mosazných kotoučů o tloušťce $b = 8{,}5\,\text{mm}$ a poloměru $R = 3{,}5\,\text{cm}$, spojených krátkou osičkou o poloměru $R_0 = 3{,}2\,\text{mm}$.

(a) Vypočtěte moment setrvačnosti joja vzhledem k jeho rotační ose symetrie. Při výpočtu zanedbejte moment setrvačnosti osičky. Hustota mosazi je $\varrho = 8\,400\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

ŘEŠENÍ: Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k jeho ose symetrie je $\frac{1}{2}mR^2$. S dvojicí souosých kotoučů můžeme

pracovat jako s jediným diskem. Jeho celková hmotnost m, vypočtená pomocí jeho objemu V a hustoty ϱ materiálu, je

$$m = V\varrho = 2\pi R^2 b\varrho = \\ = 2\pi(0{,}035\,\mathrm{m})^2(0{,}008\,5\,\mathrm{m})(8\,400\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}) = \\ = 0{,}550\,\mathrm{kg}.$$

Jeho moment setrvačnosti je pak

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}550\,\mathrm{kg})(0{,}035\,\mathrm{m})^2 = \\ = 3{,}4\cdot10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Vlákno navinuté na osičce má délku $l = 1{,}1\,\mathrm{m}$. Jeho tloušťka je zanedbatelná. Zjistěte, s jakým zrychlením se jojo odvaluje dolů podél vlákna.

ŘEŠENÍ: Podle rov. (12.19) je

$$a_x = -g\frac{1}{1 + I/mR_0^2} = \\ = -\frac{(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{1 + \dfrac{(3{,}4\cdot10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2})}{(0{,}550\,\mathrm{kg})(0{,}003\,2\,\mathrm{m})^2}} = \\ = -0{,}16\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vektor zrychlení směřuje dolů a je nezávislý na tom, zda jojo právě klesá či stoupá.

Všimněme si, že v rov. (12.19) vystupuje parametr $\beta = I/mR_0^2$, definovaný v tab. 12.1. V našem příkladu má tento parametr ($\beta = 60$) hodnotu mnohem větší než pro tělesa uvedená v citované tabulce. Zrychlení joja je proto velmi malé. Odpovídá například valení prstence po nakloněné rovině s úhlem sklonu pouhých 1,9°!

(c) Jak velkou tahovou silou působí na tělísko joja jeho vlákno?

ŘEŠENÍ: Tahovou sílu snadno vypočteme z rov. (12.17). Stačí dosadit za a_x výraz (12.19). Po malé úpravě dostaneme pro T vztah

$$T = \frac{mg}{1 + mR_0^2/I}. \qquad (12.20)$$

Tahová síla vlákna je tedy menší než síla tíhová. Pro číselné údaje uvedené v zadání úlohy dostaneme

$$T = \frac{(0{,}550\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})}{1 + (0{,}550\,\mathrm{kg})(0{,}003\,2\,\mathrm{m})^2/(3{,}4\cdot10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2})} = \\ = 5{,}3\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

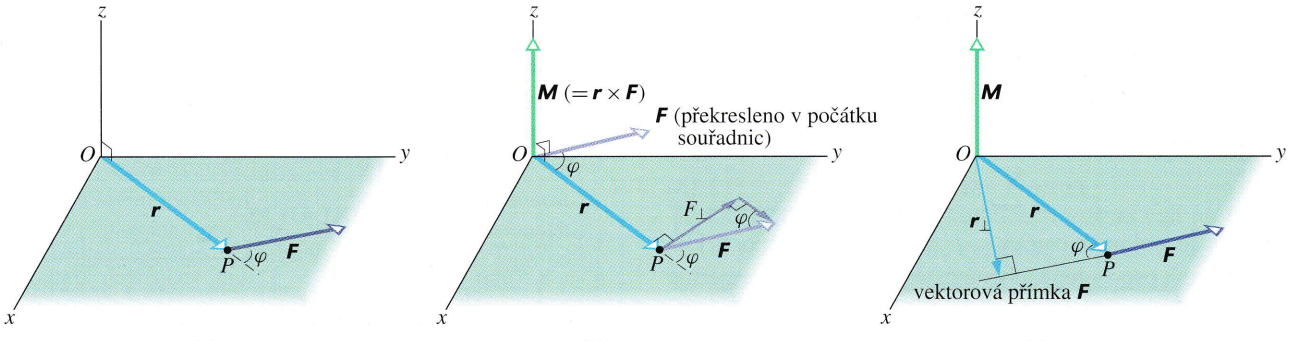
Z výsledku je patrné, že ani tahová síla vlákna nezávisí na okamžitém směru pohybu joja.

12.3 JEŠTĚ JEDNOU MOMENT SÍLY

V kap. 11 jsme definovali moment síly vzhledem k ose otáčení tuhého tělesa. Tato definice nebyla zcela obecná. Uvažovali jsme totiž výhradně o otáčivém pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy, kdy se jednotlivé částice tělesa pohybují po kružnicích se středy na ose otáčení, ležících v rovinách k této ose kolmých. Další omezení, které umožňovalo definovat moment síly *vzhledem k ose*, spočívalo v předpokladu, že vektorové přímky sil působících na těleso jsou kolmé k ose otáčení.

Definici momentu síly však dokážeme zobecnit tak, aby byla použitelná i pro takové případy pohybu tělesa, kdy tvar trajektorií jednotlivých částic není takto omezen. Moment síly budeme nyní vztahovat k pevnému *bodu*.

Obr. 12.10a znázorňuje silové působení na částici P v okamžiku, kdy je v souřadnicové rovině xy. Polohový vektor částice je $\boldsymbol{r}$. Na částici působí jediná síla $\boldsymbol{F}$, která leží



Obr. 12.10 Definice momentu síly. (a) Síla $\boldsymbol{F}$, působící na částici v bodě P, leží v souřadnicové rovině xy. (b) Moment této síly vzhledem k bodu O je $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Podle pravidel pro vektorový součin je tento vektor kolmý k rovině xy a má směr kladné osy z. Jeho velikost lze vyjádřit vztahem $rF_\perp$ (obr. b) nebo $r_\perp F$ (obr. c).

v daném okamžiku rovněž v rovině xy. Momentem této síly $\boldsymbol{M}$ vzhledem k pevnému bodu O rozumíme vektorovou veličinu definovanou vztahem

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \qquad (12.21)$$

K výpočtu vektorového součinu můžeme samozřejmě použít pravidel shrnutých v odst. 3.7. Abychom určili směr vektoru $\boldsymbol{M}$, posuneme vektor $\boldsymbol{F}$ tak, aby jeho počáteční bod splynul s bodem O. (Velikost ani směr vektoru při tomto posunutí nesmíme pochopitelně měnit.) Počáteční body vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{r}$ jsou teď totožné (obr. 12.10b). Nyní již použijeme pravidlo pravé ruky pro vektorový součin (obr. 3.20a): Prsty pravé ruky směřují od vektoru $\boldsymbol{r}$ (první činitel ve vektorovém součinu) k vektoru $\boldsymbol{F}$ (druhý činitel). Natažený palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{M}$. Vektor $\boldsymbol{M}$ na obr. 12.10b je rovnoběžný s kladným směrem osy z.

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{M}$ platí obecný vztah (3.20) ($c = ab \sin\varphi$), tj.

$$M = rF \sin\varphi, \qquad (12.22)$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Z obr. 12.10b, c je zřejmé, že vztah (12.22) je možné zapsat ještě dvěma dalšími ekvivalentními způsoby:

$$M = rF_\perp, \qquad (12.23)$$

kde $F_\perp = F \sin\varphi$ je složka vektoru $\boldsymbol{F}$ do směru kolmého k $\boldsymbol{r}$,

$$M = r_\perp F, \qquad (12.24)$$

kde $r_\perp = r \sin\varphi$ je rameno síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k bodu O (vzdálenost bodu O od vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$).

PŘÍKLAD 12.6

Na částici P na obr. 12.11a působí tři síly o stejné velikosti 2,0 N. Částice je právě v souřadnicové rovině xz a její polohový vektor $\boldsymbol{r}$ je zadán svou velikostí $r = 3{,}0$ m a úhlem $\theta = 30°$. Síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ mají směr souřadnicových os x, y a z. Vypočtěte jejich momenty vzhledem k počátku O soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ: Obr. 12.11b, c představují pohled na rovinu xz. Aby bylo možné snadněji vyznačit úhly, které svírají síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$, jsou síly překresleny tak, aby jejich počáteční body splynuly s bodem O. Úhel mezi silou $\boldsymbol{F}_3$ a vektorem $\boldsymbol{r}$ je 90°. Pomocí rov. (12.22) vypočteme velikosti jednotlivých momentů sil:

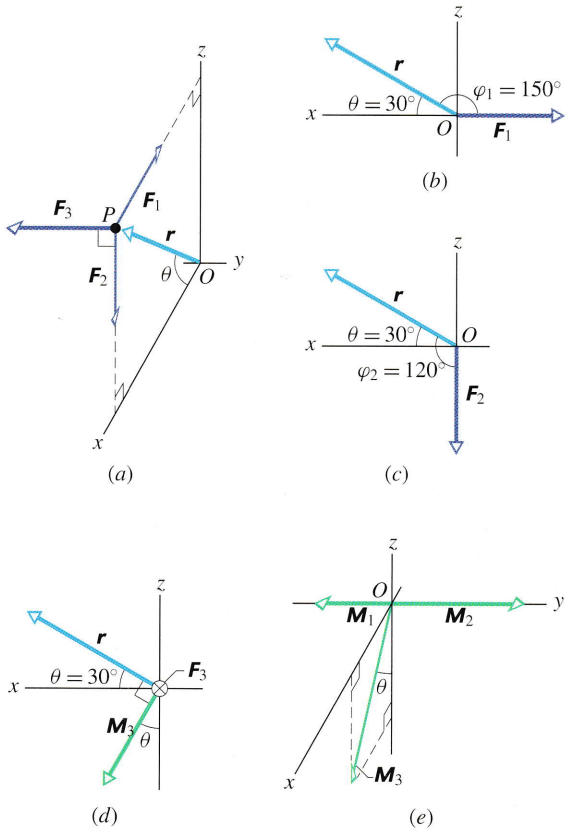
$$M_1 = rF_1 \sin\varphi_1 = (3{,}0\,\text{m})(2{,}0\,\text{N}) \sin 150° = 3{,}0\,\text{N·m},$$

$$M_2 = rF_2 \sin\varphi_2 = (3{,}0\,\text{m})(2{,}0\,\text{N}) \sin 120° = 5{,}2\,\text{N·m}$$

a

$$M_3 = rF_3 \sin\varphi_3 = (3{,}0\,\text{m})(2{,}0\,\text{N}) \sin 90° = 6{,}0\,\text{N·m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Jejich směry určíme pomocí pravidla pravé ruky: pravou ruku položíme na obrázek tak, aby její prsty směřovaly od vektoru $\boldsymbol{r}$ k vektoru $\boldsymbol{F}$ a dlaň obepínala *menší* z obou možných úhlů. Na obr. 12.11d jsme sílu $\boldsymbol{F}_3$ znázornili křížkem v kroužku ⊗. Tento symbol vyjadřuje skutečnost, že síla $\boldsymbol{F}_3$ směřuje *do obrázku*. (Symbol ⊗ připomíná pohled na šíp zezadu). Kdyby síla $\boldsymbol{F}_3$ směřovala *z obrázku* k pozorovateli, označili bychom ji symbolem ⊙ (pohled na šíp zepředu). Pomocí pravidla pravé ruky určíme směr vektoru $\boldsymbol{M}_3$. Všechny momenty sil jsou vyznačeny v obr. 12.11e.



Obr. 12.11 Příklad 12.6. (a) Na částici P působí tři síly rovnoběžné se souřadnicovými osami. Úhel φ_1 mezi polohovým vektorem částice a silou $\boldsymbol{F}_1$ je vyznačen v obrázku (b), úhel φ_2, který svírá s polohovým vektorem částice síla $\boldsymbol{F}_2$, je zadán v obr. (c). (Zadání úhlů je potřebné pro výpočet momentů sil.) (d) Moment třetí síly $\boldsymbol{M}_3$ je kolmý k vektorům $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}_3$. Síla $\boldsymbol{F}_3$ je kolmá k rovině nákresu a míří do obrázku). (e) Momenty sil působících na částici P, vztažené k bodu O.

RADY A NÁMĚTY

Bod 12.1: *Vektorové součiny a momenty sil*

Rov. (12.21) představuje první praktické použití vektorového součinu. Vraťte se k odst. 3.7, kde jsou shrnuta pravidla pro výpočet vektorového součinu, a osvěžte si je. Citovaný odstavec obsahuje i výčet chyb, kterých bychom se při určování směru vektorového součinu mohli dopustit (bod 3.5).

Nezapomeňme, že moment síly je třeba vztahovat *k danému bodu*, který musí být předem pevně zvolen. V opačném případě nemá výpočet momentu síly smysl. Změníme-li vztažný bod, může se změnit jak velikost, tak i směr momentu síly. V př. 12.6 jsme počítali momenty tří sil vzhledem k počátku O soustavy souřadnic. Pokud bychom momenty těchto sil vztáhli přímo k bodu P, byly by nulové.

KONTROLA 3: Polohový vektor částice $\boldsymbol{r}$ je rovnoběžný s kladným směrem osy z. Určete směr jediné síly působící na částici, víte-li, že její moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic je (a) nulový, (b) míří proti směru osy x, (c) míří proti směru osy y.

12.4 MOMENT HYBNOSTI

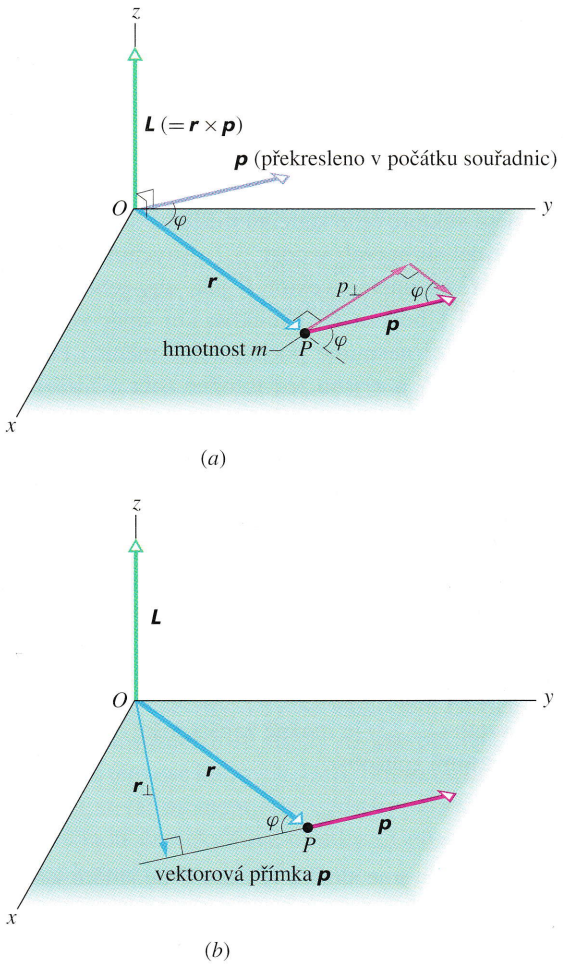
Celá řada veličin popisujících posuvný pohyb tělesa má své „partnerské protějšky" vztahující se k pohybu otáčivému. Také hybnost má jako svůj protějšek veličinu, která má pro popis otáčivého pohybu analogický význam jako hybnost pro popis pohybu posuvného. Je jí **moment hybnosti**. Na obr. 12.12 je znázorněna částice P o hybnosti $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Částice je v daném okamžiku v souřadnicové rovině xy a její hybnost je s touto rovinou rovnoběžná. Její moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ vzhledem k počátku O je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}), \qquad (12.25)$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor částice vzhledem k bodu O.

Porovnáme-li vztahy (12.21) a (12.25), zjistíme, že vztah hybnosti a jejího momentu je stejný jako vztah síly a momentu síly. Jednotkou momentu hybnosti v soustavě SI je $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$, tj. J·s.

Směr vektoru momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ určíme podle obrázku 12.12. Vektor $\boldsymbol{p}$ posuneme tak, aby jeho počáteční bod splynul s bodem O. Použijeme pravidlo pravé ruky: prsty směřují od $\boldsymbol{r}$ k $\boldsymbol{p}$, napjatý palec ukazuje směr vektoru $\boldsymbol{L}$, v tomto případě je rovnoběžný s kladnou osou z. Takto určený směr odpovídá otáčení polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ kolem osy z proti směru otáčení hodinových ručiček. Kdyby



Obr. 12.12 Definice momentu hybnosti. Hybnost $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ částice P o hmotnosti m leží v rovině xy. Moment hybnosti částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic O je $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Podle pravidla pravé ruky je to vektor rovnoběžný s kladným směrem osy z. (a) Velikost momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ lze vyjádřit vztahem $L = rp_\perp = rmv_\perp$, neboli (b) $L = r_\perp p = r_\perp mv$.

vektor $\boldsymbol{L}$ směřoval proti směru osy z, otáčel by se polohový vektor $\boldsymbol{r}$ kolem ní ve směru chodu hodinových ručiček.

Velikost vektoru $\boldsymbol{L}$ určíme pomocí obecného vztahu (3.20). Platí

$$L = rmv \sin\varphi, \qquad (12.26)$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$. Situaci lze jednoduše zakreslit a vyznačit i úhel φ, jestliže počáteční body vektorů splývají. Z obr. 12.12a, b je vidět, že pro velikost momentu hybnosti (12.26) lze použít i jiného zápisu:

$$L = rp_\perp = rmv_\perp, \qquad (12.27)$$

kde $p_\perp$ je složka vektoru $\boldsymbol{p}$ ve směru kolmém k $\boldsymbol{r}$ a $p_\perp = mv_\perp$. Další ekvivalentní vyjádření velikosti momentu

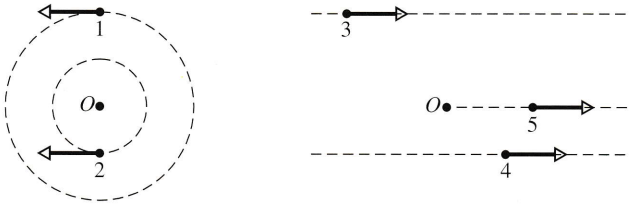
hybnosti má tvar

$$L = r_\perp p = r_\perp mv, \qquad (12.28)$$

kde $r_\perp$ je vzdálenost bodu O od vektorové přímky vektoru $\boldsymbol{p}$.

Podobně jako u momentu síly má výpočet momentu hybnosti smysl pouze v případě, že je zadán pevný vztažný bod. Uvědomme si také, že kdyby částice na obr. 12.12 neležela v rovině xy nebo kdyby vektor její hybnosti nebyl s touto rovinou rovnoběžný, nebyl by moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ rovnoběžný s osou z. Vektor momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je vždy kolmý k rovině určené vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$.

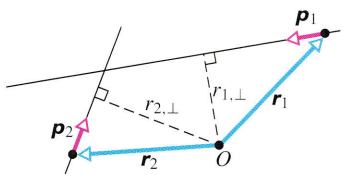
KONTROLA 4: Částice 1 a 2 na obrázku (a) obíhají kolem bodu O v opačných směrech po kružnicích s poloměry 2 m a 4 m. Částice 3 a 4 na obrázku (b) se pohybují ve stejném směru, po přímkách, jejichž vzdálenosti od bodu O jsou rovněž 2 m a 4 m. Částice 5 se pohybuje po přímce procházející bodem O. Všechny částice mají stejnou hmotnost i stejnou velikost rychlosti. Jejich pohyb je ve všech případech rovnoměrný. (a) Seřaďte je sestupně podle velikosti jejich momentů hybnosti vzhledem k bodu O. (b) Rozhodněte, pro které z nich má moment hybnosti vzhledem k bodu O souhlasný směr se směrem otáčení hodinových ručiček.



(a) (b)

PŘÍKLAD 12.7

Na obr. 12.13 je pohled shora na dvě částice pohybující se s konstantními hybnostmi po vodorovných přímkových drahách. Částice 1, jejíž hybnost má velikost $p_1 = 5{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$, je právě v místě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a mine bod O ve vzdálenosti 2,0 m. Velikost hybnosti částice 2 je v daném okamžiku $p_2 = 2{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$ a polohový vektor $\boldsymbol{r}_2$. Částice mine bod O ve vzdálenosti 4,0 m. Vypočtěte výsledný moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ této dvoučásticové soustavy vzhledem k bodu O.



Obr. 12.13 Příklad 12.7. Dvě částice míjejí bod O.

ŘEŠENÍ: Nejprve vypočtěme momenty hybnosti $\boldsymbol{L}_1$ a $\boldsymbol{L}_2$ jednotlivých částic. Pro výpočet velikosti vektoru $\boldsymbol{L}_1$ zvolíme rov. (12.28), do níž dosadíme $r_{1,\perp} = 2{,}0\,\mathrm{m}$ a $p_1 = 5{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$:

$$L_1 = r_{1,\perp} p_1 = (2{,}0\,\mathrm{m})(5{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}) = 10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}.$$

Směr vektoru $\boldsymbol{L}_1$ je zřejmý z rov. (12.25) a pravidla pravé ruky pro vektorový součin. Vektorový součin $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1$ je kolmý k rovině obrázku a směřuje k pozorovateli. Tento směr označíme za kladný v souladu se směrem otáčení vektoru $\boldsymbol{r}_1$ proti směru chodu hodinových ručiček.

Podobně získáme velikost momentu hybnosti $\boldsymbol{L}_2$ částice 2:

$$L_2 = r_{2,\perp} p_2 = (4{,}0\,\mathrm{m})(2{,}0\,\mathrm{kg\,m{\cdot}s^{-1}}) = 8{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}.$$

Vektorový součin $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2$ je opět kolmý rovině obrázku, tentokrát však směřuje od pozorovatele. Tento směr je záporný, neboť odpovídá otáčení vektoru $\boldsymbol{r}_2$ ve směru hodinových ručiček.

Výsledný moment hybnosti soustavy má tedy velikost

$$L = L_1 + L_2 = (+10\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}) + (-8{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}) = +2{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladné znaménko získané hodnoty odpovídá skutečnosti, že vektor výsledného momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$, kolmý k rovině obrázku, směřuje k pozorovateli.

12.5 VĚTA O MOMENTU HYBNOSTI

V předchozích úvahách jsme se podrobně zabývali veličinami popisujícími posuvný a otáčivý pohyb a zjistili jsme, že všechny důležité charakteristiky posuvného pohybu mají své protějšky, které odpovídají popisu pohybu otáčivého. Můžeme proto celkem přirozeně očekávat, že pro časovou změnu momentu hybnosti částice $\boldsymbol{L}$ a výsledný moment $\boldsymbol{M}$ všech sil, které na ni působí, bude platit nějaká obdoba druhého Newtonova zákona. Druhý Newtonův zákon, zapsaný pro naši částici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}, \qquad (12.29)$$

vyjadřuje souvislost časové změny její hybnosti a výslednice těchto sil. Tušíme, že hledaný „protějšek" druhého Newtonova zákona bude mít obdobný tvar:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}. \qquad (12.30)$$

Tento vztah představuje analogii druhého Newtonova zákona v úhlových veličinách. Slovy jej lze vyjádřit takto:

Časová změna momentu hybnosti částice je rovna vektorovému součtu momentů všech sil na ni působících.

Rov. (12.30) má smysl pouze tehdy, jsou-li silové momenty obsažené v součtu $\boldsymbol{M}$ a moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ vztaženy k témuž bodu.

Odvození věty o momentu hybnosti

Základem výpočtu je definiční vztah (12.25) pro moment hybnosti. Platí

$$\boldsymbol{L} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}),$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor částice a $\boldsymbol{v}$ je její rychlost. Derivováním* obou stran rovnice podle času dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m\left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{v}\right). \qquad (12.31)$$

Ve výrazu $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ poznáváme zrychlení částice $\boldsymbol{a}$, zatímco $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ je její rychlost $\boldsymbol{v}$. Rov. (12.31) lze tedy upravit do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}).$$

Poněvadž je $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (vektor $\boldsymbol{v}$ svírá sám se sebou nulový úhel), dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a}.$$

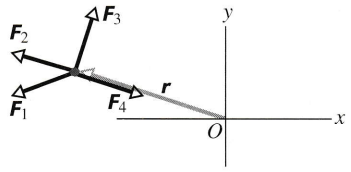
Vzhledem k platnosti druhého Newtonova zákona ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$) můžeme výraz $m\boldsymbol{a}$ nahradit vektorovým součtem sil působících na částici. Nakonec je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \left(\sum \boldsymbol{F}\right) = \sum(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}). \qquad (12.32)$$

Podle rov. (12.21) představuje výraz $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k bodu O. Poslední úpravou rov. (12.32) tak dostáváme požadovanou „úhlovou" analogii druhého Newtonova zákona

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}.$$

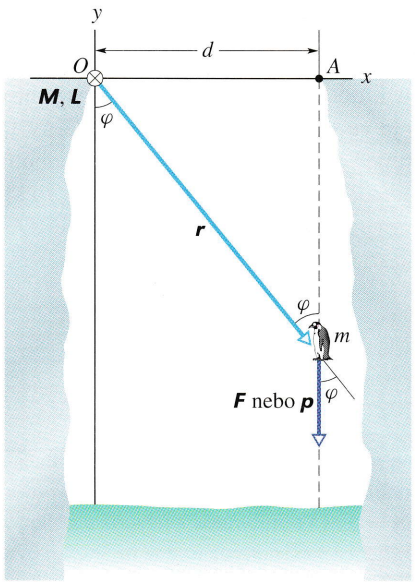
KONTROLA 5: Na obrázku je znázorněna částice, jejíž poloha je v daném okamžiku určena vektorem $\boldsymbol{r}$. Na částici působí síla, která může mít některý ze čtyř vyznačených směrů, ležících v rovině xy. Síla udílí částici zrychlení $\boldsymbol{a}$. (a) Seřaďte možné směry podle odpovídající velikosti časové derivace momentu hybnosti částice $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ vzhledem k bodu O. (b) Rozhodněte, pro které z nich je tato derivace (vektorová veličina) nesouhlasně rovnoběžná s osou z.



* Při derivování vektorového součinu nesmíme zaměnit pořadí vektorů v součinu.

PŘÍKLAD 12.8

Tučňák o hmotnosti m stál na okraji jámy v místě A a spadl dolů. Vodorovná vzdálenost bodu A od počátku O soustavy souřadnic je d (obr. 12.14).



Obr. 12.14 Příklad 12.8. Tučňák o hmotnosti m volně padá z bodu A na okraji jámy. Moment tíhové síly $\boldsymbol{M}$ i moment hybnosti tučňáka vztažené k bodu O jsou kolmé k rovině obrázku a směřují do nákresny.

(a) Vyjádřete moment hybnosti padajícího tučňáka vzhledem k bodu O v obecném okamžiku během jeho pádu.

ŘEŠENÍ: Moment hybnosti jako vektor vyjádříme pomocí rov. (12.25)) ($\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$). Jeho velikost je dána vztahem (12.26), tj.

$$L = rmv \sin\varphi.$$

Veličiny r a φ se během pádu tučňáka samozřejmě mění, výraz $r \sin\varphi$ však má v každém okamžiku stálou hodnotu d. Pro rychlost pádu platí $v = gt$. Pro velikost momentu hybnosti L tak dostáváme

$$L = mgtd. \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.33)$$

Vektor momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je kolmý k rovině vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$, vyznačených v obr. 12.14, a podle pravidla pravé ruky směřuje za nákresnu. Zvolme souřadnicovou osu z tak, aby byla orientována nesouhlasně s tímto směrem. V obrázku pak vyznačíme vektor $\boldsymbol{L}$ křížkem v kroužku $\otimes$, umístěným v počátku soustavy souřadnic. S časem se mění pouze velikost vektoru $\boldsymbol{L}$, jeho směr a orientace se zachovávají.

(b) Vypočtěte moment tíhové síly $m\boldsymbol{g}$, působící na tučňáka, vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ: Moment síly je dán vztahem (12.21) ($\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$), jeho velikost určíme pomocí rov. (12.22). Platí

$$M = rF \sin\varphi,$$

kde $F = mg$ a $r \sin\varphi = d$. Dostáváme tedy

$$M = mgd = \text{konst.} \quad \text{(Odpověď)} \qquad (12.34)$$

Vidíme, že velikost momentu síly je součinem velikosti síly mg a jejího ramene d vzhledem k bodu O. Vektor $\boldsymbol{M}$ je kolmý k rovině tvořené vektory $\boldsymbol{r}$ a $m\boldsymbol{g}$ a podle pravidla pravé ruky směřuje za nákresnu (obr. 12.14). Je tedy souhlasně rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{L}$. Vztah (12.34) lze získat také derivováním vztahu (12.33) podle času a dosazením získaného výsledku do rov. (12.30).

Všimněme si, že vektory $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{L}$ podstatným způsobem závisí na volbě vztažného bodu O. Kdyby tučňák padal z bodu O, platilo by $d = 0$ a moment síly i moment hybnosti by byly nulové.

12.6 MOMENT HYBNOSTI SOUSTAVY ČÁSTIC

Při diskusích o otáčivém pohybu jsme se prozatím omezili pouze na pohyb tuhého tělesa. Nyní rozšíříme naše úvahy na případ obecné soustavy částic a jejich pohyb budeme popisovat vzhledem k pevně zvolenému vztažnému bodu, počátku soustavy souřadnic. „Soustava částic" je již dostatečně obecným modelem fyzikálního objektu a jako zvláštní případ zahrnuje i tuhé těleso. Celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy je definován jako vektorový součet momentů hybnosti $\boldsymbol{L}_i$ jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_3 + \ldots + \boldsymbol{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i, \qquad (12.35)$$

kde index $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ probíhá jednotlivé částice.

Momenty hybnosti jednotlivých částic se mohou s časem měnit buď vlivem jejich vzájemného působení, nebo vlivem sil, jimiž na částice soustavy působí její okolí. Časovou změnu momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ vypočteme jako derivaci výrazu na pravé straně rov. (12.35):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t}. \qquad (12.36)$$

Podle rov. (12.30) je derivace momentu hybnosti i-té částice dána vektorovým součtem momentů sil, které na ni působí, tj. $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i/\mathrm{d}t = \sum \boldsymbol{M}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$. Symbolem $\boldsymbol{r}_i$ jsme označili polohový vektor i-té částice a $\boldsymbol{F}_i$ výslednici všech sil, kterými na ni působí její okolí, tvořené jednak ostatními částicemi soustavy, jednak objekty, které náleží do okolí soustavy jako celku. Pravá strana rov. (12.36) je tedy vektorovým součtem momentů *všech sil*, působících na jednotlivé částice soustavy.

Zaměřme se nyní na výpočet tohoto součtu. Momenty sil působících na částice soustavy můžeme rozdělit do dvou skupin. První skupinu tvoří momenty sil *vnitřních*, tj. momenty sil vzájemného působení částic. Druhá skupina obsahuje momenty *vnějších* sil. Vnějšími silami působí na částice soustavy její okolí, tj. objekty, které do ní nejsou zahrnuty. Všimněme si nejprve momentů vnitřních sil. Vyberme libovolnou dvojici částic soustavy. Síly, popisující vzájemné působení částic této dvojice, představují akci a reakci. Podle třetího Newtonova zákona jsou stejně velké, avšak opačně orientované. Jejich celkový příspěvek do *výslednice sil* je tedy samozřejmě nulový. Jak je tomu však s jejich momenty? Působí-li tyto síly ve směru spojnice interagujících částic, tj. jsou-li centrální, pak mají společnou vektorovou přímku, a tedy i společné rameno vzhledem k vztažnému bodu. Jejich momenty jsou stejně velké, avšak opačně orientované. Mají nulový součet a jejich „společný" příspěvek k součtu všech momentů na pravé straně rov. (12.36) je proto rovněž nulový. Časová derivace celkového momentu hybnosti soustavy je dána výhradně momenty *vnějších* sil působících na částice soustavy:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_{\text{ext}} \quad \text{(pro soustavu částic).} \qquad (12.37)$$

Rov. (12.37) je matematickým zápisem **věty o momentu hybnosti** (soustavy částic) neboli **druhé impulzové věty** pro soustavu částic. Slovy ji můžeme vyjádřit velmi jednoduše: Časová změna *momentu hybnosti* soustavy částic je dána vektorovým součtem momentů *vnějších sil* působících na částice této soustavy.

Všimněme si její fyzikální interpretace: rov. (12.30), platná pro jednotlivou částici, vyplývá přímo z druhého Newtonova zákona, a má analogický tvar v úhlových veličinách. Věta o momentu hybnosti, která je důsledkem

druhého a třetího Newtonova zákona a předpokladu vnitřních centrálních sil, je analogií rov. (12.30) pro soustavu částic. Můžeme ji interpretovat jako pohybovou rovnici pro případ rotačního pohybu soustavy, a tedy jako „protějšek" věty o hybnosti (kap. 11), popisující dynamiku pohybu translačního.

Připomeňme, že rov. (12.37) platí za předpokladu, že jsou momenty sil i moment hybnosti soustavy vztaženy k *témuž bodu*, pevnému v jisté inerciální vztažné soustavě. Jedinou výjimkou z požadavku inerciálnosti je *těžišťová* vztažná soustava, v níž je zápis věty o momentu hybnosti stejný jako v kterékoliv soustavě inerciální. Těžišťová soustava* je speciálním případem obecně neinerciální vztažné soustavy. Jejím počátkem je těžiště soustavy částic, resp. tělesa a směr jejích os je pevný vzhledem k jisté inerciální vztažné soustavě. (Těžišťová soustava je tedy spjata s *translačním pohybem* tělesa, rotační pohyb však spolu s ním nevykonává.)

12.7 MOMENT HYBNOSTI TUHÉHO TĚLESA VZHLEDEM K PEVNÉ OSE

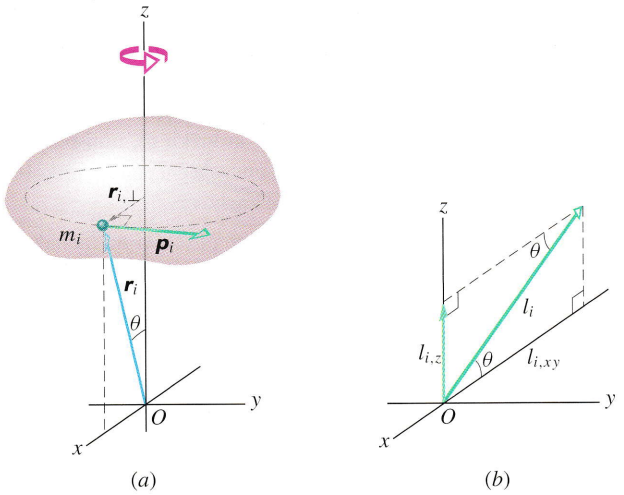
Otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy je sice speciálním, avšak v praktických úlohách velmi častým, případem pohybu obecné soustavy částic. Jistě má smysl položit si otázku, zda i věta o momentu hybnosti bude mít v tomto případě speciální tvar. Očekáváme pochopitelně, že se její zápis výrazně zjednoduší, neboť při rotaci tuhého tělesa kolem pevné osy obíhají všechny jeho částice po kružnicích stejnou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. To nám umožní vyjádřit pomocí veličiny $\boldsymbol{\omega}$ moment hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení. Tuhé těleso na obr. 12.15, složené z částic o hmotnostech m_i, se otáčí kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$.

Moment hybnosti tělesa je, jak již víme, součtem momentů hybnosti jeho jednotlivých částic. Na obr. 12.15 je znázorněna jedna z nich, které jsme přisoudili index i a hmotnost m_i. Při otáčení tělesa obíhá tato částice po kružnici, jejíž střed leží na ose otáčení (v obrázku osa z) a jejíž rovina je k této ose kolmá. Poloha částice je vzhledem k počátku O soustavy souřadnic určena vektorem $\boldsymbol{r}_i$. Poloměr její kruhové trajektorie $r_{i,\perp}$ je roven její vzdálenosti od osy z, která se s časem nemění.

Podle rov. (12.26) má moment hybnosti i-té částice vzhledem k bodu O velikost

$$L_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(m_i v_i),$$

kde p_i a v_i představují velikost hybnosti a rychlosti částice. Úhel mezi vektory $\boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{p}_i$ je 90°. Moment hybnosti částice $\boldsymbol{L}_i$ je kolmý k vektorům $\boldsymbol{r}_i$ a $\boldsymbol{p}_i$. Podle obr. 12.15b jej můžeme vyjádřit jako součet jeho průmětu do osy otáčení (osa z) a průmětu do roviny kolmé k ose otáčení (rovina xy). Platí $\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{L}_{i,z} + \boldsymbol{L}_{i,xy}$. Stejným způsobem lze rozložit momenty hybnosti všech částic tělesa, a tedy i celkový moment hybnosti soustavy:



Obr. 12.15 (a) Tuhé těleso se otáčí kolem osy z úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. Jedna z jeho částic hmotnosti m_i opisuje kolem osy z kružnici o poloměru $r_{i,\perp}$. Její hybnost je $\boldsymbol{p}_i$ a polohový vektor vzhledem k počátku soustavy souřadnic O je označen jako $\boldsymbol{r}_i$. Obrázek zachycuje polohu částice v okamžiku, kdy je vektor $\boldsymbol{r}_{i,\perp}$ rovnoběžný s osou x. (b) Moment hybnosti i-té částice vzhledem k bodu O je označen symbolem $\boldsymbol{L}_i$, jeho průmět do osy z je $\boldsymbol{L}_{i,z}$.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_z + \boldsymbol{L}_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{L}_{i,z} + \boldsymbol{L}_{i,xy}).$$

Momentem hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení nazveme průmět celkového momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ do této osy. V našem případě, kdy je osou otáčení osa z, je tento průmět určen z-ovou složkou celkového momentu hybnosti soustavy, tj.

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{i,z} = \sum_{i=1}^{n} L_i \sin\theta_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i \sin\theta_i)(m_i v_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} r_{i,\perp} m_i v_i .$$

Vzhledem k platnosti vztahu $v_i = \omega r_{i,\perp}$, můžeme psát

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{i,z} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_{i,\perp} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\omega r_{i,\perp}) r_{i,\perp} =$$
$$= \omega \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_{i,\perp}^2 \right). \qquad (12.38)$$

* Setkali jsme se s ní už v př. 9.10.

Při úpravě posledního výrazu jsme využili skutečnosti, že úhlová rychlost ω všech částic tuhého tělesa je stejná a vytkli jsme ji před součet.

Ve výrazu $\sum m_i r_{i,\perp}^2$ v rov. (12.38) poznáváme moment setrvačnosti tělesa vzhledem k pevné ose (rov. (11.24)). Rov. (12.38) můžeme tedy upravit do tvaru

$$L_z = I\omega, \quad \text{tj.} \quad \boldsymbol{L}_z = I\boldsymbol{\omega} \qquad \begin{matrix}\text{(moment hybnosti}\\ \text{tuhého tělesa}\\ \text{vzhledem k pevné ose).}\end{matrix} \qquad (12.39)$$

Moment hybnosti v rov. (12.39) se vztahuje *k ose otáčení tuhého tělesa*. Budeme-li mít tuto skutečnost stále na paměti, můžeme index z i vynechat. Symbol L pak ovšem nesmíme zaměnit s velikostí momentu hybnosti vztaženého k *pevnému bodu* O. Moment setrvačnosti I je samozřejmě rovněž vztažen k ose otáčení.

Promítneme-li do osy otáčení i výsledný moment vnějších sil působících na naše těleso, dostaneme odpovídající průmět rov. (12.37), vyjadřující větu o momentu hybnosti:

$$I\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_z, \quad \text{tj.} \quad I\omega = M_z.$$

Tento vztah se často nazývá **věta o momentu hybnosti** (**druhá impulzová věta**) pro otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy.

Jeho mimořádně jednoduchý tvar nás snad ani příliš nepřekvapuje. Je však možné zapsat tak prostým způsobem i průmět pohybové rovnice do roviny kolmé k ose otáčení? Abychom na tuto otázku odpověděli co nejpřesněji, pokusme se vyjádřit odpovídající průmět momentu hybnosti tělesa. Platí

$$\boldsymbol{L}_{i,xy} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_{i,xy} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{L}_{i,z}) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i,\perp}) \times \boldsymbol{p}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_{i,z} \times \boldsymbol{p}_i) = \sum_{i=1}^{n} (m_i \boldsymbol{r}_{i,z} \times \boldsymbol{v}_i).$$

Průměty momentů hybnosti jednotlivých částic do roviny kolmé k ose rotace, tj. vektory $\boldsymbol{L}_{i,xy} = m_i \boldsymbol{r}_{i,z} \times \boldsymbol{v}_i$, mají velikosti $m_i r_i v_i |\cos\theta_i \sin\theta_i| = m_i r_i^2 \omega |\cos\theta_i \sin\theta_i|$. Jejich směry jsou však různé. Abychom je mohli sečíst, musíme je ještě rozložit do směrů os x a y. Označíme-li symbolem φ_i úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{r}_{\perp,i}$ se směrem osy x, dostaneme:

$$L_x = -\sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2 |\cos\theta_i \sin\theta_i| \cos\varphi_i)\omega = I_x \omega,$$
$$L_y = -\sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2 |\cos\theta_i \sin\theta_i| \sin\varphi_i)\omega = I_y \omega.$$

Všimněme si, že hodnoty $\sin\varphi_i$, $\cos\varphi_i$, $\sin\theta_i$, $\cos\theta_i$ v předchozích součtech vyjadřujících veličiny I_x a I_y mohou být jak kladné, tak záporné. Při vhodném rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose otáčení se tedy může stát, že se veličiny I_x a I_y anulují. Veličiny I_x a I_y, v nichž je informace o symetrii či nesymetrii rozložení hmotnosti obsažena, se nazývají **deviační momenty** tělesa vzhledem k ose otáčení. Jsou-li nenulové, pak setrvačník rotující kolem upevněné osy silně namáhá svá ložiska (kolo „hází" a „vymílá" ložisko). Vyvažování kol automobilu olůvky má tedy za cíl vynulovat I_x a I_y.

Je-li hmotnost tělesa vzhledem k ose otáčení vhodně rozložena, průměty momentů hybnosti jednotlivých částic do roviny kolmé k ose otáčení se vyruší. Hovoříme pak o tzv. symetrickém rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose rotace. (Jednoduchým příkladem je těleso tvořené dvěma stejně hmotnými částicemi umístěnými souměrně vzhledem k ose otáčení, nebo těleso složené ze dvou částic různé hmotnosti, umístěných na protilehlých stranách osy rotace ve vzdálenostech, jejichž poměr je převrácenou hodnotou poměru hmotností částic.) V takovém případě je průmět momentu hybnosti tělesa do roviny kolmé k ose otáčení nulový. Moment hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení splývá s celkovým momentem hybnosti a platí $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

Tabulka 12.2 **Posuvný a otáčivý pohyb, pokračování tab. 11.3**

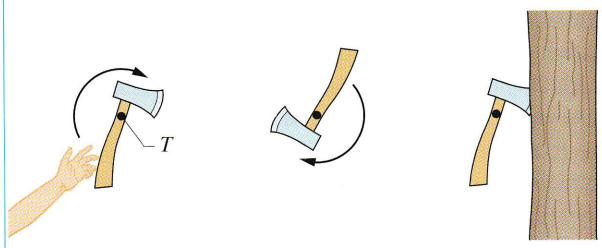
POSUVNÝ POHYB V DANÉM SMĚRU		OTÁČIVÝ POHYB KOLEM PEVNÉ OSY	
síla	$\boldsymbol{F}$	moment síly	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
hybnost	$\boldsymbol{p}$	moment hybnosti	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
hybnost[a]	$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}_i$	moment hybnosti[a]	$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L}_i$
hybnost[a]	$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_T$	moment hybnosti[b]	$L = I\omega$
věta o hybnosti[a]	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$	věta o momentu hybnosti[a]	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$
zákon zachování[c]	$\boldsymbol{P} = \text{konst.}$	zákon zachování[c]	$\boldsymbol{L} = \text{konst.}$

[a] Pro soustavu částic i tuhé těleso jako její speciální případ.
[b] Pro tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy. L je složka momentu hybnosti ve směru této osy.
[c] Pro izolovanou soustavu.

Tab. 12.2 je pokračováním soupisu veličin a vztahů, které představují analogii při popisu posuvného a otáčivého pohybu (tab. 11.3).

PŘÍKLAD 12.9

Správný dřevorubec ví, jak má vyhodit sekeru, aby během letu vykonala celý počet otáček kolem svého těžiště a zasekla se do kmene stromu (obr. 12.16). Předpokládejme, že vodorovná složka počáteční rychlosti sekery má hodnotu $v_x = 20{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, její dolet je $d = 5{,}90\ \mathrm{m}$ a sekera vykonala přesně jednu otáčku. Moment setrvačnosti I sekery vzhledem k ose vedené jejím těžištěm je $1{,}95{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$.



Obr. 12.16 Příklad 12.9. Dřevorubec hodil sekeru tak, aby se během letu otáčela kolem osy vedené jejím těžištěm (parabolický tvar trajektorie těžiště není na obrázku vyznačen).

(a) Vypočtěte velikost momentu hybnosti letící sekery vzhledem k jejímu těžišti.

ŘEŠENÍ: Sekera se otáčí stálou úhlovou rychlostí ω vzhledem k ose vedené jejím těžištěm. Její moment hybnosti určíme podle rov. (12.39) ($L = I\omega$). Nejprve však vypočteme úhlovou rychlost. Podle rov. (11.5) je úhlová rychlost ω určena otočením $\Delta\theta$ v časovém intervalu Δt_1 takto:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_1}.$$

Nahradíme-li Δt_1 výrazem d/v_x a dosadíme-li za $\Delta\theta$ hodnotu $1{,}00\ \mathrm{ot} = 2\pi\ \mathrm{rad}$, dostaneme

$$\omega = \frac{v_x\,\Delta\theta}{d} = \frac{(20{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}})(2\pi\ \mathrm{rad})}{(5{,}90\ \mathrm{m})} = 21{,}3\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}.$$

Pro získanou hodnotu ω a zadaný moment setrvačnosti I dostaneme z rov. (12.39) výsledek:

$$L = I\omega = (1{,}95{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2})(21{,}3\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}) = 4{,}15{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Uvedení sekery do pohybu trvá dřevorubci $\Delta t_2 = 0{,}150\ \mathrm{s}$. Určete průměrnou velikost momentu síly, jíž působí dřevorubec na sekeru, vzhledem k jejímu těžišti.

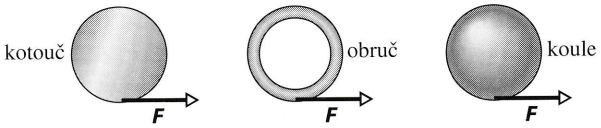
ŘEŠENÍ: Souvislost změny momentu hybnosti sekery ΔL s průměrnou hodnotou $\overline{M}$ výsledného momentu sil, které ji během časového intervalu Δt_2 uvedou do pohybu, je dána vztahem (12.37).

$$\overline{M} = \frac{\Delta L}{\Delta t_2} = \frac{L_\mathrm{f} - L_\mathrm{i}}{\Delta t_2}.$$

Počáteční moment hybnosti sekery je nulový, tj. $L_\mathrm{i} = 0$, výsledný moment hybnosti je $L_\mathrm{f} = -4{,}15{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$. Výsledná hodnota je záporná. Sekera na obr. 12.16 se totiž otáčí ve směru chodu hodinových ručiček. Dosazením těchto hodnot a zadané doby Δt_2 do poslední rovnice dostaneme

$$\overline{M} = \frac{(-4{,}15{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}})}{(0{,}150\ \mathrm{s})} = -0{,}277\ \mathrm{N{\cdot}m}. \quad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Tři tělesa znázorněná na obrázku (kotouč, obruč a plná koule) jsou tažena vlákny navinutými na jejich obvodu. Tažná síla $\boldsymbol{F}$ je ve všech případech stejná a působí po stejnou dobu t. Každé z těles se roztáčí z klidu kolem pevné osy vedené jeho středem. Hmotnosti i poloměry těles jsou shodné. Seřaďte tělesa (a) podle jejich momentu hybnosti vzhledem k ose otáčení a (b) podle jejich úhlových rychlostí v okamžiku t.



12.8 ZÁKON ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBNOSTI

Prozatím jsme dokázali vyslovit dva důležité zákony zachování platné při pohybu těles: zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti. Nyní se setkáme s dalším podobným zákonem, zákonem zachování momentu hybnosti. Jestliže je studovaná soustava částic izolovaná nebo je-li výsledný moment vnějších sil, které na ni působí, nulový, je podle rov. (12.37) (druhá impulzová věta) $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = 0$, tj.

$$\boldsymbol{L} = \text{konst.} \qquad (12.40)$$

Tento výsledek, nazývaný **zákon zachování momentu hybnosti**, lze také přepsat ve tvaru

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \boldsymbol{L}_\mathrm{f}, \qquad (12.41)$$

kde indexy (i), resp. (f) označují moment hybnosti soustavy $\boldsymbol{L}$ v počátečním, resp. koncovém okamžiku. Rovnice (12.40) a (12.41) lze vyjádřit takto:

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ se zachovává bez ohledu na případné změny probíhající uvnitř soustavy, pokud je výsledný moment vnějších sil působících na soustavu nulový.

Rov. (12.40) a (12.41) jsou vektorové. Každá z nich je tedy ekvivalentní trojici skalárních rovnic, vyjadřujících zachování tří nezávislých kartézských složek momentu hybnosti soustavy. Mohou nastat případy, kdy se některá ze složek momentu hybnosti soustavy zachovává i při nenulovém momentu sil:

Je-li některá ze složek výsledného momentu vnějších sil působících na soustavu nulová, zachovává se odpovídající složka momentu hybnosti soustavy, a to bez ohledu na změny, které uvnitř soustavy probíhají.

Použijme tento zákon pro případ izolovaného tělesa na obr. 12.15, které se otáčí kolem osy z. Předpokládejme, že těleso bylo zpočátku tuhé, později se však rozložení jeho hmotnosti vzhledem k ose otáčení změnilo. Změnil se tím i jeho moment setrvačnosti vzhledem k této ose. Podle rov. (12.40) a (12.41) se však nezměnil moment hybnosti tělesa. Dosazením z rov. (12.39) pro moment hybnosti tělesa při rotaci kolem pevné osy do rov. (12.41) dostaneme zákon zachování momentu hybnosti ve tvaru

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f. \qquad (12.42)$$

Indexy (i) a (f) jsme označili hodnoty momentu setrvačnosti I a úhlové rychlosti ω na počátku měření a po změně rozložení hmoty.

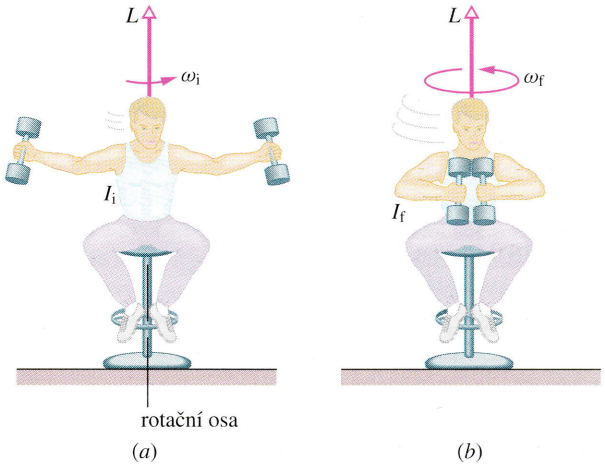
Podobně jako předchozí zákony zachování (energie a hybnosti) jsou rov. (12.40) a (12.41) platné i mimo rámec newtonovské (klasické) mechaniky. Platí totiž i pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla (které se řídí relativistickou mechanikou) a dokonce pro částice subatomární, při jejichž popisu se neobejdeme bez kvantové mechaniky. Až dosud nebyl objeven žádný jev, který by platnost zákona zachování momentu hybnosti narušil.

V dalším textu se budeme věnovat rozboru čtyř typických situací, v nichž lze tento zákon uplatnit.

1. *Experimentátor na otočné stoličce.* Experimentátor na obr. 12.17 sedí na stoličce, která se pomalu otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω_i. V upažených rukou drží dvě činky. Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy stolička + člověk je rovnoběžný s osou otáčení a směřuje vzhůru.

Náhle člověk připaží a zmenší tak moment setrvačnosti soustavy z hodnoty I_i na hodnotu I_f. Hmota soustavy je nyní rozložena blíže k ose otáčení. Úhlová rychlost otáčení se naopak zvýší z hodnoty ω_i na ω_f. Upažením docílí experimentátor opětovného zpomalení otáčivého pohybu.

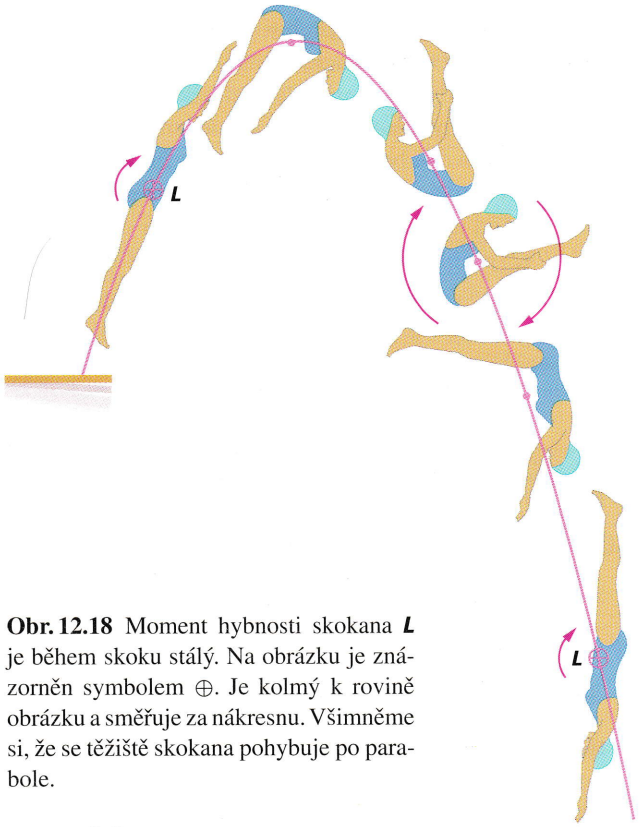
Výsledný moment vnějších sil působících na soustavu člověk s činkami + stolička je nulový (společná vektorová přímka tíhové síly a tlakové síly podložky leží v ose otáčení). Moment hybnosti soustavy vzhledem k ose otáčení se proto zachovává bez ohledu na to, jak člověk činkami pohybuje. Úhlová rychlost soustavy zachycené v situaci na obr. 12.17a je malá a moment setrvačnosti velký. Podle rov. (12.42) je úhlová rychlost soustavy na obr. 12.17b větší. Její zvýšení totiž kompenzuje pokles momentu setrvačnosti soustavy, způsobený změnou rozložení její hmoty.



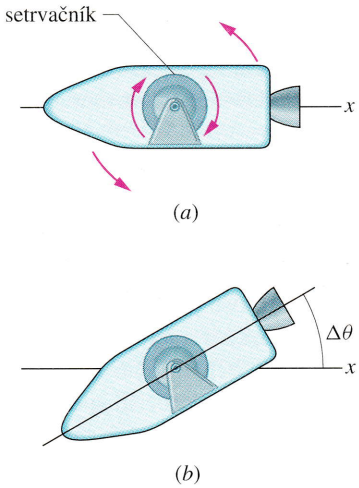
Obr. 12.17 (a) Soustava člověk + stolička má poměrně velký moment setrvačnosti a malou úhlovou rychlost. (b) Při poklesu momentu setrvačnosti se zvětší úhlová rychlost soustavy. Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ zůstává zachován.

2. *Skokan.* Obr. 12.18 ukazuje skok do vody s jedním a půl saltem vpřed. Podle očekávání se těžiště skokana pohybuje po parabole. Skokan opustí odrazový můstek s určitým momentem hybnosti $\boldsymbol{L}$ vzhledem k ose jdoucí jeho těžištěm. Vektor $\boldsymbol{L}$ je kolmý k rovině obrázku a směřuje za nákresnu. Jedinou silou, která na skokana během jeho letu působí, je síla tíhová. Její moment vzhledem k těžišti sportovce je však nulový. Moment hybnosti skokana se tedy zachovává. Pokrčením paží a nohou docílí akrobat poklesu momentu setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Podle rov. (12.42) tím urychlí rotaci svého těla (zvýší úhlovou rychlost). Natažením paží i nohou ke konci letu opět moment setrvačnosti zvýší a rotaci zpomalí natolik, že voda při doskoku téměř nevystříkne. Moment hybnosti skokana se samozřejmě zachovává co do velikosti i směru i při složitějších skocích se salty a výkruty.

3. *Orientace kosmické lodi.* Na obr. 12.19 je znázorněna kosmická loď s pevně uloženým setrvačníkem. Obrázek zachycuje změnu orientace lodi. Jestliže se loď ani setrvačník neotáčí, je celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy kosmická



Obr. 12.18 Moment hybnosti skokana $\boldsymbol{L}$ je během skoku stálý. Na obrázku je znázorněn symbolem $\oplus$. Je kolmý k rovině obrázku a směřuje za nákresnu. Všimněme si, že se těžiště skokana pohybuje po parabole.



Obr. 12.19 (a) Zjednodušený náčrtek kosmické lodi se setrvačníkem. Roztočíme-li setrvačník např. ve směru otáčení hodinových ručiček, roztočí se loď směrem opačným. Celkový moment hybnosti soustavy musí totiž zůstat nulový. (b) Jestliže setrvačník uvedeme opět do klidu, zastaví se i loď. Její osa se však vůči své původní orientaci natočila o úhel $\Delta\theta$.

loď + setrvačník nulový a díky její izolovanosti se zachovává.

Roztočíme-li setrvačník podle obr. 12.19a, roztočí se loď opačným směrem, neboť celkový moment hybnosti soustavy musí zůstat nulový. Zastavíme-li setrvačník, zastaví se i rotace kosmické lodi. Loď však už zůstane ve změněné poloze (obr. 12.19b).

Nežádoucí účinky zákona zachování momentu hybnosti se projevily při letu kosmické lodi *Voyager 2* kolem planety Uran (v roce 1986). Loď se roztočila pokaždé, když se její magnetofonové záznamové zařízení přepnulo na vyšší rychlost. Řízení letu v Jet Propulsion Laboratory muselo během letu naprogramovat palubní počítač lodi tak, aby při každém zapnutí či vypnutí magnetofonové jednotky došlo k zážehu korekčních motorů.

4. *Neuvěřitelná hroutící se hvězda.* Vyhasíná-li hvězda, tj. dochází-li jí jaderné „palivo", začne se postupně smršťovat a tlak v jejím nitru roste. Smršťování může pokračovat tak dlouho, až se původní poloměr hvězdy (srovnatelný např. s poloměrem našeho Slunce) zmenší na pouhých několik kilometrů. Hvězda se přemění v *neutronovou hvězdu*, jejíž hmota je stlačena v neuvěřitelně hustý plyn složený z neutronů.

Hvězda je izolovanou soustavou a její moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ se zachovává. Moment setrvačnosti hvězdy se během jejího smršťování podstatně zmenší. Její úhlová rychlost při tom vzroste až na hodnotu zhruba 600 až 800 otáček *za sekundu*. Pro srovnání uveďme, že naše Slunce, které můžeme považovat za typickou hvězdu, vykoná asi jednu otáčku na měsíc!

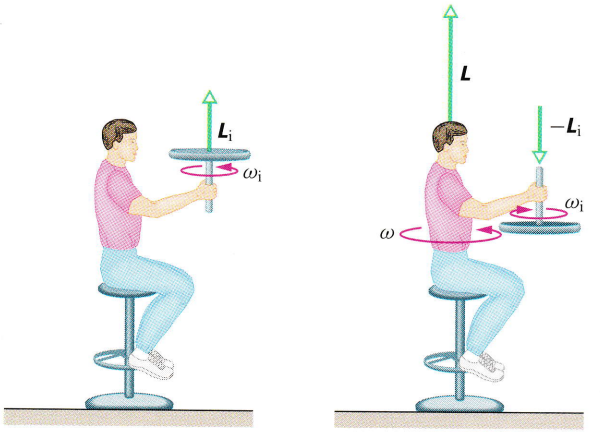
KONTROLA 7: Brouk sedící na obvodu kolotoče začne lézt k jeho středu. Rozhodněte, zda následující veličiny, vztažené k ose otáčení kolotoče, vzrostou, klesnou, nebo zůstanou zachovány: (a) moment setrvačnosti soustavy brouk + kolotoč, (b) moment hybnosti soustavy a (c) úhlová rychlost kolotoče s broukem.

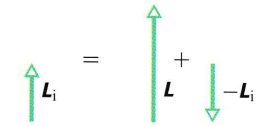
PŘÍKLAD 12.10

Experimentátor na obr. 12.20 sedí na stoličce, která se může otáčet kolem svislé osy. Drží v rukou bicyklové kolo, podél jehož obvodu je ohnut olověný prut. Moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem je $I = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^2}$. Zpočátku je člověk na stoličce v klidu a kolo se otáčí úhlovou rychlostí $\omega_i = 3{,}9$ ot/s proti směru chodu hodinových ručiček (viděno z nadhledu). Osa otáčení kola je svislá a jeho počáteční moment hybnosti $\boldsymbol{L}_i$ směřuje vzhůru. Experimentátor otočí kolo o 180° podle obr. 12.20b a stolička se s ním roztočí. Jakým směrem a jakou úhlovou rychlostí se bude člověk na stoličce otáčet? Moment setrvačnosti I_0 soustavy člověk + stolička + kolo vzhledem k ose otáčení je $6{,}8\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

ŘEŠENÍ: Vnější síly působící na soustavu člověk + stolička + kolo (tíhová síla a tlaková síla podlahy) mají vzhledem k libovolnému vztažnému bodu ležícímu na ose otáčení nulové momenty. Další síly na soustavu nepůsobí a její moment

hybnosti se proto zachovává. Počáteční moment hybnosti soustavy $\boldsymbol{L}_i$ je shodný s momentem hybnosti otáčejícího se kola. I při převrácení osy kola se zachová velikost a směr celkového momentu hybnosti soustavy.





(c)

Obr. 12.20 Příklad 12.10. (a) Experimentátor drží bicyklové kolo, které se otáčí kolem své svislé osy. (b) Člověk kolo převrátí a začne se otáčet. (c) Celkový moment hybnosti soustavy se zachovává.

Moment hybnosti kola po jeho převrácení je $-\boldsymbol{L}_i$. Člověk a stolička získají moment hybnosti $\boldsymbol{L}$. Podle obr. 12.20c musí platit

$$L_i = L + (-L_i),$$

tedy

$$L = 2L_i = I_0\omega,$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení člověka na stoličce po převrácení osy kola. Dostáváme

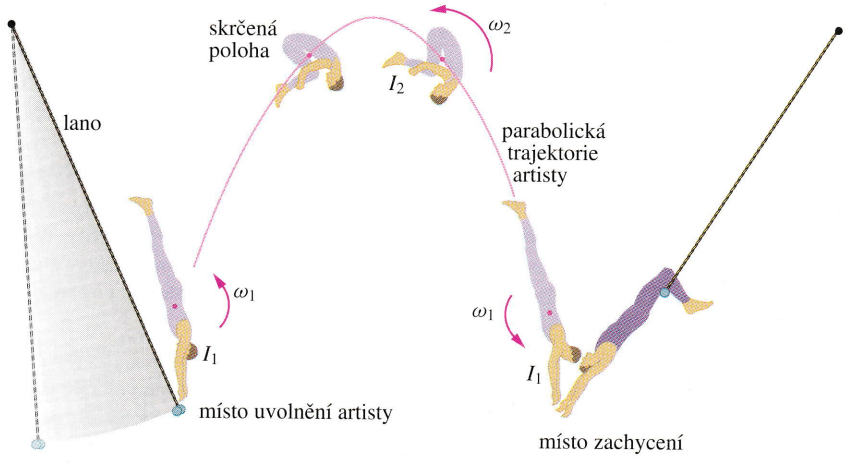
$$\omega = \frac{2L_i}{I_0} = \frac{2I\omega_i}{I_0} = \\ = \frac{2(1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^2})(3{,}9\,\mathrm{ot/s})}{(6{,}8\,\mathrm{kg\cdot m^2})} = \\ = 1{,}4\,\mathrm{ot/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Kladná hodnota výsledku znamená, že se člověk na stoličce otáčí proti směru chodu hodinových ručiček (viděno z nadhledu). K zastavení rotace stačí otočit kolo do původní polohy.

Při překlápění kola působí člověk na jeho osu určitou silou, jejíž moment je obecně nenulový. Stejně velkou, avšak opačně orientovanou silou působí osa kola na ruku člověka. Tyto síly jsou z hlediska soustavy člověk + stolička + kolo silami vnitřními, a neovlivní tedy její celkový moment hybnosti. K řešení úlohy můžeme zvolit i jiný přístup. Za soustavu můžeme zvolit samotného člověka na stoličce a kolo považovat za součást jejího okolí. Člověk působí na osu kola silou s nenulovým momentem. Osa působí na ruku člověka silou opačnou, která však je z hlediska soustavy člověk + stolička silou vnější. Vlivem jejího momentu se mění moment hybnosti soustavy a stolička s člověkem se roztočí. Vidíme, že třídění sil a jejich momentů na vnitřní a vnější závisí na volbě posuzované soustavy částic a že vhodnou volbou zkoumaného systému lze řešení úlohy zjednodušit.

PŘÍKLAD 12.11

Akrobat na visuté hrazdě provede během skoku trvajícího $t = 1{,}87$ s trojité salto. Během první a poslední čtvrtiny otáčky se akrobat otáčí v natažené poloze podle obr. 12.21. Jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm je při tom $I_1 = 19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Ve střední části letu se akrobat



Obr. 12.21 Příklad 12.11. Trojité salto

skrčí a jeho moment setrvačnosti se sníží na hodnotu $I_2 = 5{,}50\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

(a) Jakou má akrobat počáteční úhlovou rychlost ω_1, otáčí-li se kolem osy procházející jeho těžištěm?

ŘEŠENÍ: V napjaté poloze absolvuje akrobat dvě čtvrtiny otáčky za dobu t_1. Odpovídající úhel otočení je tedy $\theta_1 = 0{,}500$ ot. Úhel otočení ve skrčené poloze je $\theta_2 = 2{,}50$ ot, odpovídající dobu letu označme t_2. Pro tyto časové intervaly platí

$$t_1 = \frac{\theta_1}{\omega_1} \quad \text{a} \quad t_2 = \frac{\theta_2}{\omega_2}, \tag{12.43}$$

kde ω_2 je úhlová rychlost akrobata ve skrčené poloze. Protože se moment hybnosti akrobata během skoku zachovává, můžeme úhlovou rychlost určit pomocí rov. (12.42):

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1,$$

tj.

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1. \tag{12.44}$$

Celková doba letu akrobata je

$$t = t_1 + t_2.$$

Po dosazení z rov. (12.43) a (12.44) dostaneme

$$t = \frac{\theta_1}{\omega_1} + \frac{\theta_2 I_2}{\omega_1 I_1} = \frac{1}{\omega_1}\left(\theta_1 + \theta_2\frac{I_2}{I_1}\right). \tag{12.45}$$

Pro zadané číselné hodnoty je

$$(1{,}87\ \mathrm{s}) = \frac{1}{\omega_1}\left(0{,}500\ \mathrm{ot} + 2{,}50\ \mathrm{ot}\,\frac{5{,}50\,\mathrm{kg\cdot m^2}}{19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2}}\right).$$

Z poslední rovnice pak získáme výsledek

$$\omega_1 = 0{,}636\,9\ \mathrm{ot/s} \doteq 0{,}637\ \mathrm{ot/s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

(b) Podaří-li se akrobatovi ještě více se skrčit, může se pokusit o čtyřnásobné salto při stejných hodnotách ω_1 a t. Jaký musí být jeho moment setrvačnosti ve skrčené poloze?

ŘEŠENÍ: Úhel otočení ve skrčené poloze je nyní $\theta_2 = 3{,}50$ ot. Podle rov. (12.45) je nyní

$$(1{,}87\ \mathrm{s}) = \frac{1}{(0{,}636\,9\ \mathrm{ot/s})} \cdot \left(0{,}500\ \mathrm{ot} + 3{,}50\ \mathrm{ot}\,\frac{I_2}{19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2}}\right),$$

odkud

$$I_2 = 3{,}929\,\mathrm{kg\cdot m^2} \doteq 3{,}93\,\mathrm{kg\cdot m^2}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Menší hodnota I_2 umožní rychlejší otáčení ve skrčené poloze. Nemusí však již být v silách akrobata jí docílit. Pokud by se akrobat chtěl pokusit o čtyřapůlnásobné salto, musel by buď prodloužit dobu letu nebo zvýšit svou počáteční úhlovou rychlost. Pokud by se rozhodl pro druhou možnost, riskoval by, že se jeho kolegovi nemusí podařit ho zachytit. (Víte proč?)

(c) Určete periodu otáčení akrobata během čtyřnásobného salta ve skrčené poloze.

ŘEŠENÍ: Z rov. (12.44) nejprve vypočtěme úhlovou rychlost ω_2 ve skrčené poloze:

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{(19{,}9\,\mathrm{kg\cdot m^2})}{(3{,}929\,\mathrm{kg\cdot m^2})}\,(0{,}636\,9\ \mathrm{ot/s}) = 3{,}226\ \mathrm{ot/s}.$$

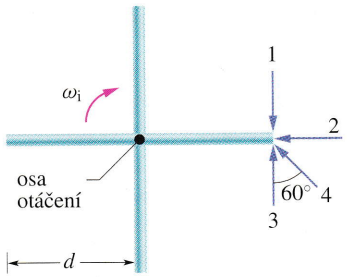
Periodu T již určíme velmi snadno:

$$T = \frac{1\ \mathrm{ot}}{\omega_2} = \frac{1\ \mathrm{ot}}{3{,}226\ \mathrm{ot/s}} = 0{,}310\ \mathrm{s}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Jednou z příčin mimořádné obtížnosti čtyřnásobného salta je skutečnost, že otáčení je velmi rychlé. Artista při něm nestačí sledovat své okolí a jemně regulovat svou úhlovou rychlost vzájemnou polohou trupu a končetin — tedy změnou svého momentu setrvačnosti.

PŘÍKLAD 12.12

Čtyři tenké tyče, každá o hmotnosti m a délce $d = 1{,}0$ m jsou pevně spojeny do tvaru rovnoramenného kříže. Soustava se volně otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. Počáteční úhlová rychlost je $\omega_i = -2{,}0$ rad/s, tj. ve směru otáčení hodinových ručiček (obr. 12.22). Koule z bláta o hmotnosti $m' = m/3$ a počáteční rychlosti $v_i = 12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ narazí na konec jedné tyče a přilne k ní. Jaká je výsledná úhlová rychlost soustavy kříž + koule? Uvažujme čtyři různé trajektorie koule podle obr. 12.22: trajektorie 1 — koule dopadá kolmo na tyč, trajektorie 2 — koule dopadá v radiálním směru, trajektorie 3 — koule dopadá kolmo na tyč v opačném směru než v případě 1, trajektorie 4 — koule dopadá na tyč pod úhlem 60° měřeným od kolmice k tyči.



Obr. 12.22 Příklad 12.12. Čtyři pevně spojené tyče se volně otáčejí kolem svislé osy. Blátivá koule může dopadnout na tyč čtyřmi různými způsoby a po dopadu zůstane k tyči přilepena. Obrázek představuje půdorysný průmět situace.

ŘEŠENÍ: Celkový moment hybnosti L soustavy kříž + koule vzhledem k ose otáčení se během srážky koule s rotujícím křížem zachovává, tj.

$$L_f = L_i. \tag{12.46}$$

Indexy (i) a (f) představují počáteční a výslednou hodnotu. Označme I_+ moment setrvačnosti kříže vzhledem k ose otáčení. Podle vztahu (f) v tab. 11.2 je

$$I_+ = 4(\tfrac{1}{3}md^2).$$

Moment setrvačnosti blátivé koule přilepené na jedné z tyčí vzhledem k ose otáčení je $I_{bk} = m'd^2$. Označme jako L_i moment hybnosti koule vzhledem k ose otáčení před dopadem na tyč a ω_f výslednou úhlovou rychlost soustavy. Pomocí známého vztahu $L = I\omega$ přepíšeme rovnici (12.46) do tvaru

$$I_+\omega_f + I_{bk}\omega_f = I_+\omega_i + L_i,$$

a tedy

$$(\tfrac{4}{3}md^2)\omega_f + (m'd^2)\omega_f = (\tfrac{4}{3}md^2)\omega_i + L_i. \quad (12.47)$$

Dosadíme $m = 3m'$ a $\omega_i = -2{,}0\,\mathrm{rad/s}$ a získanou rovnici vyřešíme vzhledem k neznámé ω_f:

$$\omega_f = \frac{1}{5m'd^2}\left(4m'd^2(-2\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}) + L_i\right). \quad (12.48)$$

Velikosti L_i pro trajektorie 1 a 3 vypočteme pomocí rov. (12.28), kde $r_\perp = d$ a $v = v_i$. Pro případ 2 použijeme rov. (12.28) s $r_\perp = 0$. U trajektorie 4 využijeme rov. (12.27), kde položíme $r = d$ a $v_\perp = v_i \cos 60°$. Znaménko veličiny L_i určíme tak, že sestrojíme polohový vektor dopadající koule a zjistíme, kterým směrem se otáčí při dopadu koule na kříž. Je-li zjištěný směr otáčení souhlasný se směrem otáčení hodinových ručiček, je hodnota L_i záporná, v opačném případě je kladná. Dostáváme:

dráha 1: $L_i = -m'dv_i$; dráha 2: $L_i = 0$;
dráha 3: $L_i = m'dv_i$; dráha 4: $L_i = m'dv_i \cos 60°$.

Dosazením zadaných číselných hodnot vypočteme L_i pro každý z případů 1 až 4 a výsledek dosadíme do rov. (12.48). Nakonec dostáváme

dráha 1: $\omega_f = -4{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$;
dráha 2: $\omega_f = -1{,}6\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$;
dráha 3: $\omega_f = 0{,}80\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$;
dráha 4: $\omega_f = -0{,}40\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. (Odpověď)

12.9 KVANTOVANÝ MOMENT HYBNOSTI

Říkáme, že fyzikální veličina je **kvantovaná**, může-li nabývat jen určitých hodnot, jejichž množina je diskrétní. Všechny ostatní hodnoty jsou zakázány. Prozatím jsme se setkali se dvěma příklady kvantované veličiny z oblasti fyziky mikrosvěta: kvantování hmotnosti (čl. 2.9) a energie (čl. 8.9). Třetím příkladem, spadajícím rovněž do mikrosvěta, je moment hybnosti.

Elementární částice, jakými jsou například elektron nebo proton, mají vždy jistý vnitřní (**spinový**) moment hybnosti, jako by se neustále otáčely okolo své osy jako káča. (Ve skutečnosti se nejedná o žádné otáčení v mechanickém smyslu. Spinový moment hybnosti je veličina daleko abstraktnější než třeba moment hybnosti káči, který postihuje její skutečné otáčení.) Spinový moment hybnosti S je kvantován, jeho složka v libovolném směru (který označíme z) je dána vztahem

$$S_z = m_s\hbar, \quad (12.49)$$

kde $\hbar = 1{,}056{\cdot}10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ je redukovaná Planckova konstanta a m_s je kvantové číslo. V případě elektronů, protonů, pozitronů a antiprotonů nabývá toto číslo pouze dvou hodnot: $+\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{2}$. Je-li $m_s = +\frac{1}{2}$, říkáme, že částice má *spin nahoru* a její spinový moment hybnosti je $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$. Je-li $m_s = -\frac{1}{2}$, má *spin dolů* a $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$.

Při srážkách a reakcích elementárních částic (zahrnujících i změny jejich identity) na jiné elementární částice se spinový moment hybnosti jejich soustavy zachovává. Například se může stát, že při srážce protonu (p) a antiprotonu ($\bar{\mathrm{p}}$) obě částice *anihilují* a vzniknou jiné elementární částice, a to 4 kladné piony (π^+) a 4 záporné piony (π^-):

$$\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \rightarrow 4\pi^+ + 4\pi^-.$$

Všechny piony mají $m_s = 0$. Po anihilaci $\mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}$ podle této reakce je celkový spinový moment hybnosti soustavy nulový. Při anihilaci se však celkový spinový moment hybnosti zachovává. Má-li tedy uvedená reakce proběhnout, musí mít proton a antiproton spiny orientovány opačně (jeden nahoru, druhý dolů), aby jejich součet byl roven nule.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Valivý pohyb těles

Pro kolo o poloměru R valící se bez klouzání platí

$$v_T = \omega R, \tag{12.2}$$

kde v_T je rychlost středu kola a ω je úhlová rychlost kola (vzhledem k libovolnému bodu, např. k jeho středu). Valení kola lze také popsat jako otáčení kolem okamžité osy rotace procházející bodem dotyku P kola s podložkou. Úhlová rychlost otáčení kola kolem tohoto bodu je stejná jako kolem středu kola. Valící se kolo má kinetickou energii

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_T \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_T^2, \tag{12.5}$$

kde I_T je moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem a m je jeho celková hmotnost.

Moment síly jako vektor

Moment síly $\boldsymbol{M}$ je vektorová veličina definovaná vzhledem k pevnému bodu (obvykle počátku soustavy souřadnic) vztahem

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \tag{12.21}$$

kde $\boldsymbol{F}$ je síla působící v bodě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}$ vzhledem k vztažnému bodu (např. počátku soustavy souřadnic). Velikost vektoru $\boldsymbol{M}$ je dána vztahem

$$M = rF \sin\varphi = rF_\perp = r_\perp F, \tag{12.22–12.24}$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{r}$, $F_\perp$ je složka vektoru $\boldsymbol{F}$ v rovině kolmé k vektoru $\boldsymbol{r}$ a $r_\perp$ je rameno síly $\boldsymbol{F}$. Směr vektoru $\boldsymbol{M}$ je určen pravidlem pravé ruky pro vektorový součin.

Moment hybnosti částice

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ částice s hybností $\boldsymbol{p}$, hmotností m a rychlostí $\boldsymbol{v}$ je vektorová veličina definovaná vzhledem k pevnému bodu (většinou počátku soustavy souřadnic) vztahem

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}). \tag{12.25}$$

Velikost vektoru $\boldsymbol{L}$ je

$$L = rmv \sin\varphi = rp_\perp = rmv_\perp = r_\perp p = r_\perp mv, \tag{12.26–12.28}$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$, $p_\perp$ a $v_\perp$ jsou složky vektorů $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{v}$ v rovině kolmé k $\boldsymbol{r}$ a $r_\perp$ je vzdálenost vztažného bodu od vektorové přímky hybnosti $\boldsymbol{p}$. Směr momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je dán pravidlem pravé ruky.

Druhý Newtonův zákon pro úhlové veličiny

Druhý Newtonův zákon pro částici lze pomocí úhlových veličin zapsat ve vektorovém tvaru takto:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}, \tag{12.30}$$

kde $\sum \boldsymbol{M}$ je výsledný moment všech sil působících na částici a $\boldsymbol{L}$ je její moment hybnosti.

Moment hybnosti soustavy částic

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy částic je vektorovým součtem momentů hybnosti jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_2 + \ldots + \boldsymbol{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i. \tag{12.35}$$

Jeho časová změna je dána vektorovým součtem momentů všech vnějších sil působících na částice soustavy (tj. momentů sil popisujících působení objektů, které do soustavy nejsou zahrnuty, na částice soustavy):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}. \tag{12.37}$$

Moment hybnosti tuhého tělesa

Složka momentu hybnosti tuhého tělesa otáčejícího se kolem pevné osy do směru této osy je

$$L = I\omega. \tag{12.39}$$

Zákon zachování momentu hybnosti

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ soustavy se zachovává, je-li výsledný moment vnějších sil působících na soustavu nulový (zákon zachování momentu hybnosti):

$$\boldsymbol{L} = \text{konst.}, \tag{12.40}$$

nebo

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \boldsymbol{L}_\mathrm{f}. \tag{12.41}$$

Zákon zachování momentu hybnosti je jedním ze základních zákonů zachování. Jeho platnost byla ověřena i pro soustavy, v nichž Newtonovy zákony v klasickém tvaru neplatí (např. částice pohybující se velkými rychlostmi, subatomární částice).

Kvantovaný moment hybnosti

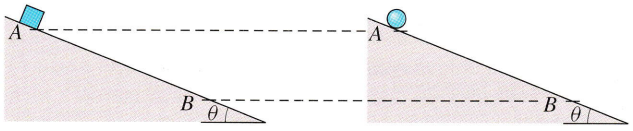
Spinový moment hybnosti S elementárních částic je kvantován. Jeho složka v libovolném směru má velikost

$$S = m_s \hbar, \tag{12.49}$$

kde $\hbar = 1{,}056 \cdot 10^{-34}$ J·s je redukovaná Planckova konstanta a m_s je kvantové číslo. *Orientace spinu nahoru*, resp. *dolů* odpovídají hodnotám $m_s = +\frac{1}{2}$, resp. $-\frac{1}{2}$. Spinový moment hybnosti soustavy elementárních částic se zachovává při jejich srážkách nebo reakcích.

OTÁZKY

1. Kvádr na prvním z obr. 12.23 klouže dolů po dokonale hladké nakloněné rovině s úhlem sklonu θ. Koule na vedlejším obrázku má stejnou hmotnost jako kvádr a bez klouzání se valí po nakloněné rovině se stejným úhlem sklonu. Obě tělesa byla po nakloněné rovině volně vypuštěna z bodu A a dorazila do bodu B. (a) Rozhodněte, zda tíhová síla působící na kvádr vykonala při jeho pohybu z bodu A do bodu B větší, menší, nebo stejnou práci jako tíhová síla působící na kouli. (b) Které z obou těles má v bodě B větší kinetickou energii připadající na posuvný pohyb? (c) Které z nich má v bodě B větší rychlost?



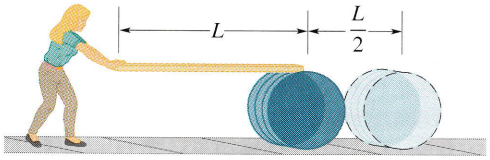
Obr. 12.23 Otázka 1

2. Dělová koule a dětská kulička se valí bez klouzání po nakloněné rovině. Obě tělesa byla zpočátku v klidu. (a) Rozhodněte, zda doba, za kterou dorazí dělová koule na konec nakloněné roviny, je větší, menší, či stejná jako v případě malé kuličky. (b) Zjistěte, zda část kinetické energie dělové koule připadající na její posuvný pohyb je větší, menší, nebo stejná jako u kuličky.

3. Dělová koule se valí bez klouzání nejprve po nakloněné rovině o úhlu sklonu θ, poté po jiné rovině stejné výšky, avšak s menším úhlem sklonu. Rozhodněte, zda (a) doba potřebná k dosažení konce nakloněné roviny a (b) kinetická energie posuvného pohybu na konci nakloněné roviny je při druhém experimentu větší, menší, nebo stejná jako v prvním případě.

4. Dva plné válce, mosazný a dřevěný, mají shodný poloměr i hmotnost (dřevěný válec je tedy delší). Oba jsou volně vypuštěny po nakloněné rovině a valí se bez klouzání. (a) Dorazí některý z nich na konec nakloněné roviny dříve? Pokud ano, který? (b) Pro další pokus byly válce upraveny tak, aby měly stejnou délku a hmotnost. Dřevěný válec byl zkrácen a v mosazném válci byl podél osy jeho rotační symetrie vyvrtán otvor vhodného průměru. Jak dopadne závod válců po nakloněné rovině nyní?

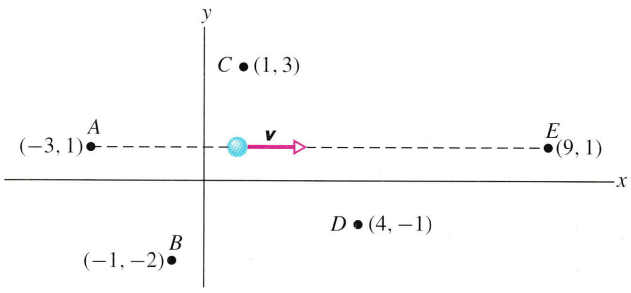
5. Skladnice na obr. 12.24 valí válcový soudek pomocí desky o délce L. Soudek se valí bez klouzání a urazí dráhu $L/2$. Deska po povrchu na soudku rovněž neklouže. (a) Jak dlouhá část desky přišla během pohybu do styku s povrchem soudku? (b) Jakou vzdálenost přitom ušla skladnice?



Obr. 12.24 Otázka 5

6. Polohový vektor částice $\boldsymbol{r}$, vztažený k bodu O, má délku 3 m. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 4 N. Jaký úhel svírají vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$, jestliže velikost momentu síly vzhledem k bodu O (a) je nulová, (b) má hodnotu 12 N·m?

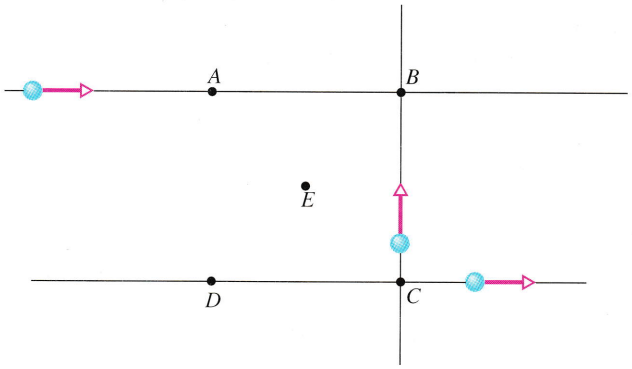
7. Na obr. 12.25 je rozmístěno pět vztažných bodů, jejichž polohy jsou určeny souřadnicemi (x, y). Částice, která je v obrázku rovněž zakreslena, se pohybuje stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Seřaďte vztažné body sestupně podle velikosti odpovídajícího momentu hybnosti částice.



Obr. 12.25 Otázka 7

8. (a) V kontrole 4 se částice 1 a 2 pohybují rovnoměrně po kružnicích. V obou případech určete moment dostředivé síly vzhledem k bodu O. (b) Částice 3, 4 a 5 se pohybují po přímkách zleva doprava. Pro každou z nich rozhodněte, zda velikost jejího momentu hybnosti vzhledem k bodu O roste, klesá, nebo zůstává stejná.

9. Na obr. 12.26 jsou znázorněny tři stejné částice pohybující se ve vyznačených směrech stejně rychle. Tyto částice tvoří soustavu. Vztažné body A, B, C a D leží ve vrcholech čtverce, bod E je v jeho středu. Seřaďte body (sestupně) podle velikosti celkového momentu hybnosti soustavy částic.



Obr. 12.26 Otázka 9

10. Následující funkce představují časovou závislost momentu hybnosti částice ve čtyřech různých situacích: (1) $L(t) = 3t + 4$, (2) $L(t) = -6t^2$, (3) $L(t) = 2$, (4) $L(t) = 4/t$. Ve které z nich je výsledný moment sil působících na částici (a) nulový,

(b) kladný a konstantní, (c) záporný s rostoucí velikostí (pro $t > 0$), (d) záporný s klesající velikostí (pro $t > 0$)?

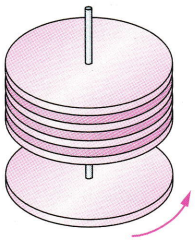
11. Bolaso se skládá ze tří těžkých koulí spojených třemi stejně dlouhými pevnými lany (obr. 12.27). S předmětem se zachází takto: jednu kouli držíme nad hlavou a zbývající dvě roztočíme tak, aby obíhaly po kružnici (obr. 12.27a). V určitém okamžiku střední kouli uvolníme. Rozložení koulí se změní podle obr. 12.27b. Rozhodněte, zda se (a) moment hybnosti a (b) úhlová rychlost bolasa během této změny zvětší, zmenší, případně nezmění.

(*a*) (*b*)

Obr. 12.27 Otázka 11

12. Brouk sedí na obvodu kolotoče, který se otáčí proti směru chodu hodinových ručiček. V určitém okamžiku začne brouk lézt po obvodu ve směru otáčení. Rozhodněte, zda následující veličiny při pohybu brouka rostou, klesají, nebo se nemění: (a) moment hybnosti soustavy kolotoč + brouk, (b) moment hybnosti a úhlová rychlost brouka a (c) moment hybnosti a úhlová rychlost kolotoče? (d) Jak se změní odpovědi na předchozí otázky, poleze-li brouk proti směru otáčení kolotoče?

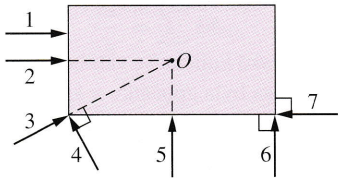
13. Spodní kotouč na obr. 12.28 se volně otáčí kolem vyznačené



Obr. 12.28 Otázka 13

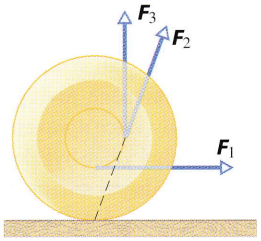
osy proti směru chodu hodinových ručiček. Jeho moment hybnosti vzhledem k jeho ose otáčení je 50 jednotek. Čtyři další rotující kotouče jsou postupně spuštěny po ose a dopadnou na spodní kotouč. Jejich momenty hybnosti před dopadem jsou (1) 20 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček, (2) 10 jednotek proti směru otáčení hodinových ručiček, (3) 10 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček a (4) 60 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček. Po dopadu se kotouče vlivem třecích sil spojí a celek se nakonec otáčí stejnou úhlovou rychlostí. (a) Jaký je výsledný moment hybnosti soustavy kotoučů? (b) V jakém pořadí je třeba kotouče přidávat, aby nastal okamžik, kdy je úhlová rychlost spojených kotoučů nulová?

14. Vodorovná obdélníková deska na obr. 12.29 se může otáčet kolem svislé osy procházející jejím středem O. Zpočátku je deska v klidu. Dítě hází na desku stejné kousky žvýkačky, které se s ní po dopadu spojí. V obrázku jsou vyznačeny možné trajektorie kousků dopadajících na desku ve vyznačených bodech jejího obvodu. Velikost rychlosti žvýkaček bezprostředně před dopadem je rovněž stejná. (a) Seřaďte vyznačené trajektorie podle velikosti úhlové rychlosti, kterou se budou otáčet soustava deska + žvýkačka po dopadu žvýkačky. (b) Pro kterou z nich bude moment hybnosti desky s kouskem žvýkačky záporný?



Obr. 12.29 Otázka 14

15. Jojo na obr. 12.30 je zpočátku v klidu. Promyslete, jak se bude pohybovat, bude-li na vlákno působit tažná síla (a) $\boldsymbol{F}_2$, jejíž vektorová přímka prochází bodem dotyku joja s podložkou, (b) $\boldsymbol{F}_1$ s vektorovou přímkou ležící nad bodem dotyku, (c) $\boldsymbol{F}_3$ s vektorovou přímkou procházející vpravo od bodu dotyku.



Obr. 12.30 Otázka 15

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 12.1 Valení

1C. Tenkostěnná trubice se valí po podlaze. Určete poměr kinetické energie jejího posuvného pohybu a kinetické energie otáčivého pohybu vzhledem k její podélné ose.

2C. Prstenec o hmotnosti 140 kg se valí po vodorovné podlaze. Jeho těžiště má rychlost 0,150 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jakou práci je třeba vykonat, aby se prstenec zastavil?

3C. Automobil jede rychlostí 80,0 km/h. (a) Určete úhlovou rychlost pneumatik vzhledem k jejich osám, víte-li, že průměr pneumatiky je 75,0 cm. (b) Řidič automobilu zastavil bez prokluzu kol. Od okamžiku, kdy začal rovnoměrně brzdit, vykonala kola 30,0 otáček. Určete jejich úhlové zrychlení. (c) Jakou dráhu automobil během brzdění urazil?

4C. Vůz o hmotnosti 1 000 kg má čtyři kola. Hmotnost každého z nich je 10 kg. Jaká část celkové kinetické energie vozu připadá na otáčivý pohyb jeho kol? Při výpočtu momentu setrvačnosti

považujeme kolo za homogenní kotouč. Proč nepotřebujete znát poloměr kol?

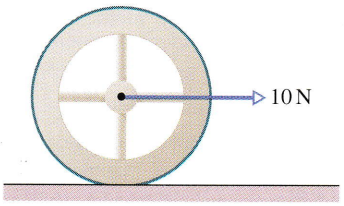
5C. Kolo o poloměru 0,250 m se valí bez klouzání s počáteční rychlostí 43,0 m·s^{-1} a zastaví se na dráze 225 m. Vypočtěte jeho (a) zrychlení a (b) úhlové zrychlení. (c) Moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem je 0,155 kg·m^2. Vypočtěte vzhledem k této ose moment třecích sil, které na kolo při brzdění působí.

6C. Automobil o celkové hmotnosti 1 700 kg se rozjíždí z klidu a za dobu 10 s dosáhne rychlosti 40 km/h. Každé jeho kolo považujeme za homogenní kotouč o hmotnosti 32 kg. Vypočtěte (a) kinetickou energii otáčivého pohybu každého kola vzhledem k jeho ose, (b) celkovou kinetickou energii každého kola, (c) celkovou kinetickou energii automobilu na konci desáté sekundy pohybu.

7C. Homogenní koule se valí dolů po nakloněné rovině. (a) Jak je třeba zvolit úhel sklonu roviny, aby se těžiště koule pohybovalo se zrychlením o velikosti $0,10g$? (b) Jaké by bylo zrychlení tělesa, které by po této nakloněné rovině klouzalo bez tření?

8C. Plná koule o hmotnosti 4,00 kg se valí vzhůru po nakloněné rovině se sklonem 30,0°. Počáteční rychlost jejího těžiště má velikost 5,0 m·s^{-1}. (a) Vypočtěte počáteční kinetickou energii koule. (b) Jakou dráhu koule po nakloněné rovině urazí, než vystoupí do bodu obratu? (c) Závisí odpověď na otázku (b) na hmotnosti koule?

9Ú. Na kolo o hmotnosti 10 kg a poloměru 0,30 m působí stálá vodorovná síla o velikosti 10 N (obr. 12.31). Kolo se valí bez klouzání po vodorovné rovině a zrychlení jeho těžiště je 0,60 m·s^{-2}. (a) Určete velikost a směr třecí síly působící na kolo. (b) Vypočtěte moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho těžištěm kolmo k jeho rovině.

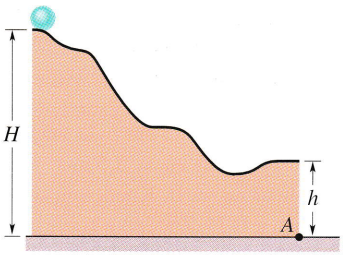


Obr. 12.31 Úloha 9

10Ú. Automobil jede rychlostí 80 km/h ve směru kladné osy x. Průměr pneumatik je 66 cm. Ve vztažné soustavě spojené s automobilem určete rychlost a zrychlení (a) středu kola, (b) bodu na vrcholu pneumatiky, (c) bodu dotyku pneumatiky se silnicí. (d) Úlohy (a), (b) a (c) řešte i ve vztažné soustavě spojené se silnicí.

11Ú. Těleso o poloměru R a hmotnosti m se valí bez klouzání po vodorovné podlaze rychlostí $\boldsymbol{v}$. V určitém okamžiku najede na nakloněnou rovinu a začne podél ní stoupat. Bod obratu leží ve výšce $h = 3v^2/(4g)$ nad úrovní podlahy. (a) Určete moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. (b) O jaké těleso se pravděpodobně jedná?

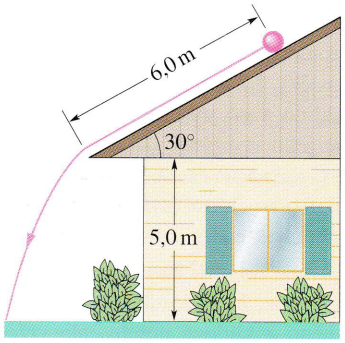
12Ú. Homogenní koule je uvolněna z klidové polohy v nejvyšším bodě dráhy znázorněné na obr. 12.32 a valí se po ní bez klouzání. Dráha končí nad bodem A, který je v obrázku vyznačen. V okamžiku, kdy koule opustí dráhu, má její rychlost vodorovný směr. Pro hodnoty $H = 6,0$ m a $h = 2,0$ m zjistěte, jak daleko od bodu A dopadne koule na podlahu.



Obr. 12.32 Úloha 12

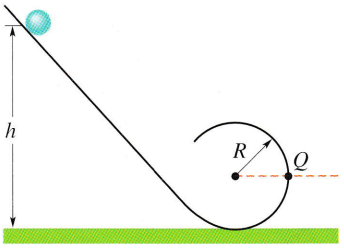
13Ú. Kulička o poloměru r a hmotnosti m se může valit bez klouzání po vnitřním povrchu nádoby polokulového tvaru o poloměru R. Kuličku uvolníme z klidové polohy na okraji nádoby. (a) Určete její kinetickou energii v nejnižším bodě trajektorie. (b) Jaká část vypočtené hodnoty odpovídá otáčivému pohybu kuličky vzhledem k ose vedené jejím těžištěm? (c) Určete tlakovou sílu, jíž působí kulička na polokouli v nejnižším bodě své trajektorie. Předpokládejte, že poloměr kuličky r je mnohem menší než poloměr nádoby R.

14Ú. Válec o poloměru 10 cm a hmotnosti 12 kg byl volně puštěn po šikmé střeše se sklonem 30° (obr. 12.33) a valí se po ní bez klouzání. Poté, co urazí dráhu 6,0 m, dospěje k okapu a spadne. (a) Určete jeho úhlovou rychlost vzhledem k ose vedené jeho těžištěm v tomto okamžiku. (b) Stěna domu je vysoká 5,0 m. Jak daleko od okapu dopadne válec na zem?



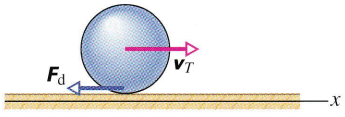
Obr. 12.33 Úloha 14

15Ú. Malá plná kulička o hmotnosti m a poloměru r se valí bez klouzání po nakloněné rovině zakončené smyčkou podle obr. 12.34. Kulička byla uvolněna ve výšce h nad úrovní vodorovné podlahy. (a) Určete nejmenší hodnotu h, při které kulička ještě projde vrcholem smyčky. Poloměr R smyčky je mnohonásobně větší než poloměr r kuličky. (b) Pro hodnotu $h = 6R$ vypočtěte vodorovnou složku síly, kterou působí dráha na kuličku v bodě Q.



Obr. 12.34 Úloha 15

16Ú. Koule o poloměru $R = 11$ cm byla vržena po vodorovné podlaze s počáteční rychlostí $v_0 = 8{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a nulovou počáteční úhlovou rychlostí $\omega_0 = 0$. Koeficient dynamického tření mezi koulí a podlahou je 0,21. Zpočátku koule po podlaze klouže. Vlivem dynamické třecí síly (obr. 12.35) $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ a jejího nenulového



Obr. 12.35 Úloha 16

momentu vzhledem k těžišti je nenulové jak zrychlení těžiště koule, tak její úhlové zrychlení. Velikost rychlosti posuvného pohybu koule v klesá a její úhlová rychlost ω naopak roste. V určitém okamžiku přestane koule po podlaze klouzat a začne se valit. Rychlost jejího těžiště v_T i úhlová rychlost ω se od té chvíle přestanou měnit. (a) Zapište vztah mezi „ustálenými" hodnotami v_T a ω. Zjistěte, (b) s jakým zrychlením se pohybovalo těžiště koule a (c) jaké bylo její úhlové zrychlení do okamžiku, než se začala valit bez klouzání. (d) Jak dlouho koule klouzala a (e) jakou dráhu přitom urazila? (f) Určete hodnotu v_T v okamžiku, kdy se koule začala valit.

ODST. 12.2 Jojo

17C. Jojo o hmotnosti 120 g má moment setrvačnosti 950 $\mathrm{g{\cdot}cm^2}$. Poloměr jeho osičky 3,2 mm a vlákno má délku 120 cm. Jojo je zpočátku v klidu a po uvolnění se odvaluje podél vlákna dolů. (a) Určete jeho zrychlení. (b) Určete okamžik, kdy jojo dospěje na konec vlákna, a zjistěte hodnoty následujících veličin v tomto okamžiku: (c) rychlost, (d) kinetickou energii posuvného pohybu, (e) kinetickou energii otáčivého pohybu, (f) úhlovou rychlost.

18Ú. Předpokládejme, že na rozdíl od předchozího cvičení nebylo jojo uvolněno z klidové polohy, ale vrženo svisle dolů počáteční rychlostí o velikosti $1{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (a) Za jak dlouho dorazí jojo na konec vlákna nyní? Vypočtěte v tomto okamžiku jeho (b) celkovou kinetickou energii, (c) rychlost, (d) kinetickou energii posuvného pohybu, (e) úhlovou rychlost a (f) kinetickou energii otáčivého pohybu.

ODST. 12.3 Ještě jednou moment síly

19C. Pro $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$ dokažte, že moment síly $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ je dán vztahem

$$\boldsymbol{M} = (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}.$$

20C. Dokažte následující tvrzení: Průmět momentu síly $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ do roviny vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$ je nulový.

21C. Na malý míček umístěný v bodě $(-2{,}0\ \mathrm{m};\ 0;\ 4{,}0\ \mathrm{m})$ působí síla $\boldsymbol{F}$, která má nenulovou pouze jedinou složku. Určete velikost a směr momentu této síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic v následujících případech: (a) $F_x = 6{,}0$ N, (b) $F_x = -6{,}0$ N, (c) $F_z = 6{,}0$ N a (d) $F_z = -6{,}0$ N.

22C. Na částici v bodě o souřadnicích $(0;\ -4{,}0\ \mathrm{m};\ 3{,}0\ \mathrm{m})$ působí (a) síla $\boldsymbol{F}_1$ o složkách $F_{1x} = 2{,}0$ N a $F_{1y} = F_{1z} = 0$, (b) síla $\boldsymbol{F}_2$ o složkách $F_{2x} = 0$, $F_{2y} = 2{,}0$ N a $F_{2z} = 4{,}0$ N. V obou případech vypočtěte velikost a směr momentu síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

23Ú. Síla $\boldsymbol{F} = (2{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$ působí na kamínek, jehož poloha vzhledem k počátku soustavy souřadnic je dána vektorem $\boldsymbol{r} = (0{,}50\ \mathrm{m})\boldsymbol{j} - (2{,}0\ \mathrm{m})\boldsymbol{k}$. Vypočtěte moment této síly (a) vzhledem k počátku soustavy souřadnic, (b) vzhledem k bodu o souřadnicích $(2{,}0\ \mathrm{m};\ 0;\ -3{,}0\ \mathrm{m})$.

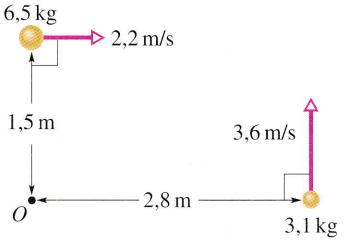
24Ú. Na částici v poloze určené souřadnicemi $(3{,}0\ \mathrm{m};\ -2{,}0\ \mathrm{m};\ 4{,}0\ \mathrm{m})$ působí (a) síla $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j} + (5{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$, (b) síla $\boldsymbol{F}_2 = (-3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} - (4{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j} - (5{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$, (c) výslednice sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Ve všech případech vypočtěte moment síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

25Ú. Na částici v bodě o souřadnicích $(0;\ -4{,}0\ \mathrm{m};\ 5{,}0\ \mathrm{m})$ působí síly $\boldsymbol{F}_1 = (3{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{F}_2 = (-2{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Vypočtěte jejich výsledný moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

26Ú. Na částici o poloze $\boldsymbol{r} = (3{,}0\ \mathrm{m})\boldsymbol{i} + (4{,}0\ \mathrm{m})\boldsymbol{j}$ působí síla $\boldsymbol{F} = (-8{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{i} + (6{,}0\ \mathrm{N})\boldsymbol{j}$. Vypočtěte (a) moment této síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (b) úhel mezi vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$.

ODST. 12.4 Moment hybnosti

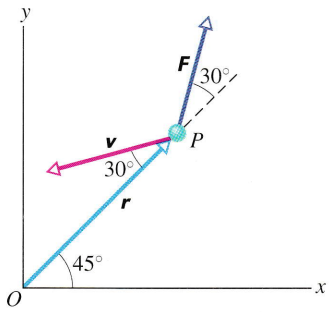
27C. Soustava na obr. 12.36 je složena ze dvou pohybujících se těles. Vypočtěte její celkový moment hybnosti vzhledem k bodu O.



Obr. 12.36 Cvičení 27

28C. Letadlo o hmotnosti 1 200 kg letí rychlostí $80\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Letí po přímce ve stálé výšce 1,3 km nad zemí. Vypočtěte velikost jeho momentu hybnosti vzhledem k bodu, který leží na zemském povrchu přímo pod ním.

29C. Částice o hmotnosti 2,0 kg je právě v poloze určené vektorem $\boldsymbol{r}$ ($r = 3{,}0$ m) a má rychlost $\boldsymbol{v}$ ($v = 4{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$) (obr. 12.37). Síla $\boldsymbol{F}$ ($F = 2{,}0$ N), která na ni působí, leží v rovině vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$. Vypočtěte vzhledem k počátku soustavy souřadnic (a) moment hybnosti částice a (b) moment síly $\boldsymbol{F}$.



Obr. 12.37 Cvičení 29

30C. Pomocí rov. (12.26) lze ze zadaných hodnot r, p a φ určit moment hybnosti částice. V některých případech jsou však místo velikostí vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$ a úhlu mezi nimi zadány pouze jejich složky (x, y, z) a (v_x, v_y, v_z). (a) Dokažte, že složky momentu hybnosti částice $\boldsymbol{L}$ jsou dány vztahy $L_x = m(yv_z - zv_y)$, $L_y = m(zv_x - xv_z)$ a $L_z = m(xv_y - yv_x)$. (b) Dokažte, že při pohybu částice v rovině xy má její moment hybnosti nenulovou jedině z-ovou složku.

31C. Částice má v bodě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r} = 2{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{k}$ (v metrech) rychlost $\boldsymbol{v} = -5{,}0\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{k}$ (v m/s) a působí na ni síla $\boldsymbol{F} = 4{,}0\boldsymbol{j}$ (v newtonech). Vypočtěte (a) moment hybnosti částice a (b) moment síly $\boldsymbol{F}$, obojí vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (*Tip*: Viz cvič. 19 a 30.)

32Ú. Člověk o hmotnosti 84 kg stojí na rovníku. Jaká je velikost jeho momentu hybnosti vzhledem ke středu Země?

33Ú. Soustava je tvořena dvěma stejně hmotnými částicemi, které se pohybují opačnými rychlostmi o velikosti v. Vzdálenost jejich přímkových trajektorií je d. (a) Vyjádřete velikost momentu hybnosti soustavy vzhledem k bodu ležícímu uprostřed mezi oběma trajektoriemi pomocí veličin m, v a d. (b) Jak se změní velikost momentu hybnosti, zvolíme-li jiný vztažný bod? (c) Jak se změní odpověď na otázky (a) a (b), budou-li se částice pohybovat po přímkách souhlasně?

34Ú. Těleso o hmotnosti 2,0 kg se pohybuje v rovině xy rychlostí $\boldsymbol{v}$ o složkách $v_x = 30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_y = 60\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V určitém okamžiku prochází bodem o souřadnicích $(x, y) = (3{,}0\,\mathrm{m};\ -4{,}0\,\mathrm{m})$. (a) Určete v tomto okamžiku moment hybnosti tělesa vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (b) Vypočtěte moment hybnosti tělesa v tomtéž okamžiku, avšak vzhledem k bodu $(-2{,}0\,\mathrm{m};\ -2{,}0\,\mathrm{m})$.

35Ú. (a) Pomocí údajů v dodatcích vypočtěte velikost celkového momentu hybnosti soustavy planet při jejich oběhu kolem Slunce. Slunce považujte za vztažný bod. (b) Jak velký je moment hybnosti samotného Jupiteru a jakou část velikosti celkového momentu hybnosti představuje?

ODST. 12.5 Věta o momentu hybnosti

36C. Částice o hmotnosti 3,0 kg má v bodě o souřadnicích $x = 3{,}0\,\mathrm{m}$ a $y = 8{,}0\,\mathrm{m}$ rychlost $\boldsymbol{v} = (5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (6{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Na částici působí síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti 7,0 N ve směru záporné osy x. (a) Vypočtěte její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (b) Určete moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (c) Jak rychle se mění moment hybnosti částice? (Rychlost změny fyzikální veličiny určuje její časová derivace.)

37C. Na částici působí dvě síly. Moment první síly, označený $\boldsymbol{M}_1$ a vztažený k počátku soustavy souřadnic, má velikost 2,0 N·m a směřuje podél kladné osy x. Moment druhé síly, $\boldsymbol{M}_2$, má velikost 4,0 N·m a je rovnoběžný se záporným směrem osy y. Určete velikost a směr vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$, představujícího časovou derivaci momentu hybnosti částice, vztaženého rovněž k počátku soustavy souřadnic.

38C. V každém z následujících případů určete moment síly, která působí na částici pohybující se v rovině xy, znáte-li její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic:

(a) $-4{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$, (c) $-4{,}0\sqrt{t}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$,
(b) $-4{,}0t^2\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$, (d) $-4{,}0/t^2\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$.

39C. Autíčko o hmotnosti 3,0 kg jede podél osy x. Časová závislost jeho rychlosti je dána funkcí $v_x = -2{,}0t^3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V obecném okamžiku $t > 0$ vyjádřete (a) moment hybnosti autíčka vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (b) moment síly, která na ně působí, vzhledem k témuž vztažnému bodu. Opakujte výpočet (a) a (b) pro vztažný bod o souřadnicích (c) $(2{,}0\,\mathrm{m};\ 5{,}0\,\mathrm{m};\ 0)$, (d) $(2{,}0\,\mathrm{m};\ -5{,}0\,\mathrm{m},\ 0)$.

40Ú. V okamžiku $t = 0$ je poloha částice o hmotnosti 2,0 kg dána polohovým vektorem $\boldsymbol{r} = (4{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} - (2{,}0\,\mathrm{m})\boldsymbol{j}$. Její rychlost závisí na čase vztahem $\boldsymbol{v} = (-6{,}0t^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} + (3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Pro libovolný okamžik $t > 0$ vyjádřete (a) moment hybnosti částice, (b) výsledný moment sil, které na ni působí. Za vztažný bod pro výpočet momentů zvolte počátek soustavy souřadnic. (c) Výpočet částí (a) a (b) zopakujte pro vztažný bod $(-2{,}0\,\mathrm{m};\ -3{,}0\,\mathrm{m};\ 0\,\mathrm{m})$.

41Ú. Kulka o hmotnosti m je vystřelena ze země počáteční rychlostí o velikosti v_0 pod elevačním úhlem θ_0. (a) Vyjádřete její moment hybnosti vzhledem k místu výstřelu v závislosti na čase. (b) Jak rychle se moment hybnosti mění? (c) Vypočtěte velikost vektoru $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ přímo a porovnejte ji s výsledkem úlohy (b). Proč jsou oba výsledky shodné?

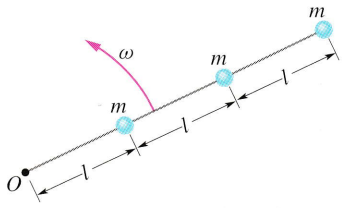
ODST. 12.7 Moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k pevné ose

42C. Brusný kotouč s momentem setrvačnosti $1{,}2{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ je připojen k motoru, který na něj působí silou s momentem 16 N·m. Určete (a) moment hybnosti kotouče vzhledem k ose vedené jeho středem a (b) jeho úhlovou rychlost po uplynutí doby 33 ms od zapnutí motoru.

43C. Velikost momentu hybnosti setrvačníku vzhledem k ose vedené jeho středem se během 1,50 s zmenšila z $3{,}00\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$ na $0{,}800\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$. Těleso má vzhledem k této ose moment setrvačnosti $0{,}140\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. (a) Určete průměrný moment sil, které na setrvačník při jeho brzdění působily, vzhledem k ose otáčení. (b) Vypočtěte celkový úhel otočení setrvačníku během brzdění

za předpokladu, že bylo rovnoměrné. (c) Jakou práci vykonaly brzdné síly? (d) Jaký byl jejich průměrný výkon?

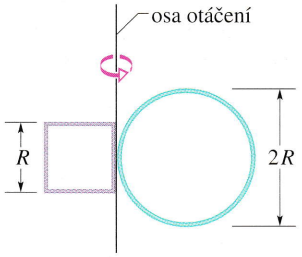
44C. Tři částice se stejnými hmotnostmi m jsou navzájem spojeny třemi vlákny délky l a připojeny k ose otáčení vedené bodem O (obr. 12.38). Hmotnost vláken je zanedbatelná. Soustava částic se otáčí kolem této osy s úhlovou rychlostí ω tak, že částice leží na přímce. Pomocí veličin m, l a ω vyjádřete (a) moment setrvačnosti soustavy vzhledem k bodu O, (b) moment hybnosti prostřední částice vzhledem k témuž bodu a (c) celkový moment hybnosti soustavy vzhledem k bodu O.



Obr. 12.38 Cvičení 44

45C. Homogenní tyč se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím koncem. Délka tyče je 6,00 m, tíhová síla má velikost 10,0 N. Tyč se otáčí úhlovou rychlostí 240 ot/min ve směru otáčení hodinových ručiček při pohledu shora. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení a (b) její moment hybnosti vzhledem k této ose.

46Ú. Na obr. 12.39 je znázorněno tuhé těleso, které se skládá z kruhové obruče o poloměru $R = 0{,}50$ m a hmotnosti $m = 2{,}0$ kg a ze čtverce vyrobeného ze čtyř stejných tenkých tyčí o délce R a hmotnosti m. Těleso se otáčí konstantní úhlovou rychlostí kolem svislé osy s periodou 2,5 s. Vypočtěte (a) moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení a (b) jeho moment hybnosti vzhledem k této ose.

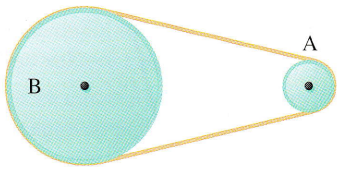


Obr. 12.39 Úloha 46

47Ú. Kola A a B na obr. 12.40 jsou spojena neprokluzujícím řemenem. Poloměr kola B je třikrát větší než poloměr kola A. Určete poměr momentů setrvačnosti kol I_A/I_B víte-li, že mají (a) stejný moment hybnosti vzhledem k osám otáčení, nebo (b) stejnou kinetickou energii otáčivého pohybu.

48Ú. Síla $F(t)$ působí po krátkou dobu Δt na rotující tuhé těleso s momentem setrvačnosti I. Ukažte, že platí

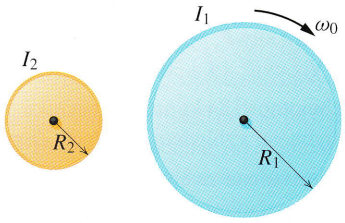
$$\int M\,\mathrm{d}t = \overline{F} R \Delta t = I(\omega_\mathrm{f} - \omega_\mathrm{i}),$$



Obr. 12.40 Úloha 47

kde R je rameno síly, $\overline{F}$ průměrná hodnota síly F v časovém intervalu Δt a ω_i, ω_f jsou úhlové rychlosti tělesa na začátku a na konci intervalu Δt. (Veličina $\int M\,\mathrm{d}t = \overline{F} R \Delta t$ se nazývá *impulz momentu síly*, v analogii s impulzem síly $\overline{F}\Delta t$.)

49Ú*. Dva válce s poloměry R_1 a R_2 se mohou volně otáčet kolem svých os (obr. 12.41). Odpovídající momenty setrvačnosti vzhledem k těmto osám jsou I_1 a I_2. Zpočátku se větší válec otáčí úhlovou rychlostí ω_0. Menší válec je v klidu a v určitém okamžiku se dotkne většího válce. Vlivem třecí síly se začne rovněž roztáčet. Po jisté době přestanou válce klouzat a od té chvíle se budou otáčet stálými úhlovými rychlostmi v opačných směrech. Vyjádřete úhlovou rychlost ω_2 menšího válce pomocí veličin I_1, I_2, R_1, R_2 a ω_0. (*Tip*: Moment hybnosti soustavy ani její kinetická energie se nezachovávají. Použijte vztah pro impulz momentu síly z úlohy 48.)



Obr. 12.41 Úloha 49

ODST. 12.8 Zákon zachování momentu hybnosti

50C. Rotor elektrického motoru má vzhledem k ose své rotační symetrie moment setrvačnosti $I_\mathrm{m} = 2{,}0\cdot10^{-3}$ kg·m^2. Motor je umístěn na palubě vesmírné sondy a slouží ke změně její orientace. Moment setrvačnosti sondy vzhledem k její ose, rovnoběžné s osou motoru, je $I_\mathrm{s} = 12$ kg·m^2. Vypočtěte, kolik otáček musí rotor vykonat, aby se sonda pootočila kolem své osy o úhel 30°.

51C. Člověk stojí s upaženýma rukama na desce, která se otáčí bez tření úhlovou rychlostí 1,2 ot/s. V každé ruce drží závaží. Moment setrvačnosti soustavy člověk+závaží+podložka vzhledem k ose otáčení má hodnotu 6,0 kg·m^2. Člověk připaží a zmenší tak moment setrvačnosti soustavy na hodnotu 2,0 kg·m^2. (a) Jakou úhlovou rychlostí se potom bude deska otáčet? (b) Určete poměr výsledné a počáteční kinetické energie soustavy. (c) Odkud se vzala „přebytečná" kinetická energie?

52C. Dva kotouče jsou připojeny k ose pomocí ložisek a mohou se volně otáčet bez tření. Posouváním kotoučů podél osy lze docílit jejich spojení v jedno těleso. (a) První kotouč, jehož moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení je 3,3 kg·m^2, byl roztočen úhlovou rychlostí 450 ot/min. Druhý kotouč s momen-

tem setrvačnosti 6,6 kg·m^2 má úhlovou rychlost 900 ot/min. Kotouče se otáčejí souhlasně. (a) Určete společnou úhlovou rychlost kotoučů po jejich spojení. (b) Zodpovězte otázku (a) pro případ, že se kotouče před spojením otáčejí úhlovými rychlostmi 900 ot/min v opačných směrech.

53C. Kolo se volně otáčí úhlovou rychlostí 800 ot/min. Druhé kolo má dvakrát větší moment setrvačnosti a je zpočátku v klidu. V jistém okamžiku připojíme druhé kolo k hřídeli prvního kola. Hřídel má zanedbatelný moment setrvačnosti. (a) Určete výslednou úhlovou rychlost soustavy kol na hřídeli. (b) Určete změnu kinetické energie soustavy při spojení kol.

54C. Moment setrvačnosti rotující hvězdy se zmenšil na jednu třetinu své původní hodnoty. Určete poměr výsledné a počáteční kinetické energie otáčivého pohybu hvězdy.

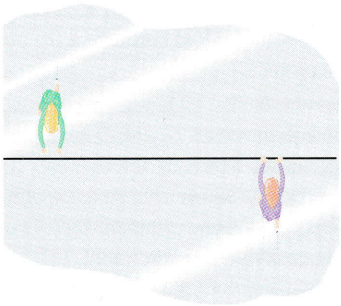
55C. Předpokládejme, že by Slunce spotřebovalo všechno jaderné palivo a náhle se smrštilo v bílého trpaslíka s poloměrem shodným s poloměrem Země. Jaká by byla nová perioda otáčení Slunce za předpokladu, že by se při smršťování neztratila žádná sluneční hmota? Současná perioda otáčení Slunce je asi 25 dní.

56C. Malý kolotoč má poloměr 1,20 m a hmotnost 180 kg. Jeho gyrační poloměr (úloha 58 v kap. 11) je 91,0 cm. Kolotoč je zpočátku v klidu. Chlapec o hmotnosti 44,0 kg běží rychlostí 3,00 m·s^{-1} po přímé dráze, která se dotýká obvodu kolotoče. V bodě dotyku hoch na kolotoč naskočí. Zanedbejte tření v ložiscích a vliv hřídele kolotoče a vypočtěte (a) moment setrvačnosti kolotoče vzhledem k ose otáčení, (b) moment hybnosti běžícího chlapce vzhledem k ose otáčení kolotoče a (c) výslednou úhlovou rychlost kolotoče a chlapce.

57C. Vodorovná kruhová deska se otáčí bez tření kolem svislé osy vedené jejím středem. Deska má hmotnost 150 kg, poloměr 2,0 m a moment hybnosti 300 kg·m^2 vzhledem k ose otáčení. Člověk o hmotnosti 60 kg pomalu kráčí od obvodu desky k jejímu středu. V okamžiku, když se nacházel na obvodu desky, byla úhlová rychlost soustavy deska + člověk 1,5 rad/s. Určete úhlovou rychlost soustavy v okamžiku, kdy je člověk vzdálen od osy otáčení o 0,50 m?

58C. Ráfek bicyklového kola má hmotnost 3,79 kg a poloměr 34,7 cm. Může se otáčet v ložisku bez tření. Člověk stojí na otočné stoličce a drží kolo nad hlavou tak, aby jeho osa byla svislá. Kolo se otáčí úhlovou rychlostí 57,7 rad/s ve směru chodu hodinových ručiček při pohledu shora. Otočná stolička je zpočátku v klidu. Moment setrvačnosti soustavy kolo + člověk + stolička vzhledem ke společné ose otáčení je 1,36 kg·m^2. Člověk volnou rukou náhle zastaví otáčení kola (vzhledem ke stoličce). Určete výslednou úhlovou rychlost (velikost a směr) soustavy. Moment setrvačnosti loukotí a středního ložiska kola zanedbejte.

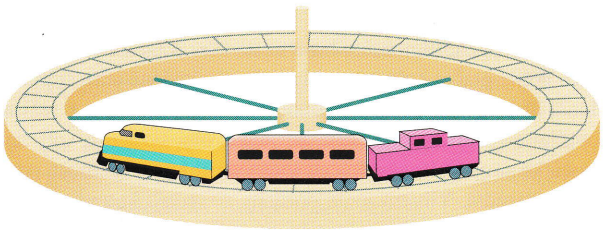
59Ú. Dva bruslaři o hmotnostech 50 kg se přibližují po rovnoběžných přímých drahách vzdálených o 3,0 m. Rychlosti bruslařů mají stejnou velikost 1,4 m·s^{-1}, jsou však opačně orientovány. První bruslař svírá v rukou konec dlouhé tyče zanedbatelné hmotnosti. Druhý bruslař uchopí tyč v okamžiku, kdy ji míjí (obr. 12.42). Tření mezi bruslemi a ledem považujeme za zanedbatelné. (a) Popište kvantitativně pohyb bruslařů po jejich spojení. (b) Ručkováním podél tyče se bruslaři přiblížili na vzdálenost 1,0 m. Určete výslednou úhlovou rychlost soustavy. (c) Vypočtěte kinetickou energii bruslařů ve stavech (a) a (b). (d) Odkud se vzala „přebytečná" kinetická energie?



Obr. 12.42 Úloha 59

60Ú. Dvě děti o stejných hmotnostech m sedí na opačných koncích úzké desky o délce L a hmotnosti m shodné s hmotností dítěte. Deska se může otáčet bez tření kolem svislé osy vedené jejím středem. (a) Vypočtěte moment setrvačnosti desky s dětmi vzhledem k ose otáčení. (b) Určete moment hybnosti soustavy, otáčí-li se úhlovou rychlostí ω_0 ve směru otáčení hodinových ručiček při pohledu shora. Určete směr vektoru momentu hybnosti. (c) Během otáčení se děti posunuly podél desky a zmenšily svou vzdálenost od osy otáčení na polovinu původní hodnoty. Vyjádřete výslednou úhlovou rychlost soustavy pomocí ω_0. (d) Vypočtěte změnu kinetické energie soustavy. Jak vznikla „přebytečná" kinetická energie? Při výpočtech nahraďte desku tenkou tyčí.

61Ú. Koleje dětského vláčku leží na velkém kole o hmotnosti m a poloměru R, které se může volně otáčet bez tření kolem svislé osy (obr. 12.43). Na kolejích stojí vláček o hmotnosti m'. Soustava je v klidu. Vláček uvedeme do pohybu rychlostí v vzhledem ke kolejím. Vypočtěte úhlovou rychlost ω kola. Při výpočtu nahraďte kolo obručí a zanedbejte hmotnost loukotí a středního ložiska.



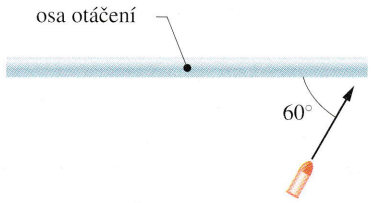
Obr. 12.43 Úloha 61

62Ú. Moucha o hmotnosti m se pohybuje proti směru chodu hodinových ručiček po obvodu kruhového talíře, který se může bez tření otáčet kolem svislé osy. Talíř má poloměr R a moment setrvačnosti I. Rychlost mouchy vzhledem k zemi je v, talíř se otáčí úhlovou rychlostí ω_0 ve směru chodu hodinových ručiček. Moucha se najednou zastaví. (a) Jaká je výsledná úhlová rychlost talíře? (b) Zachovala se mechanická energie soustavy?

63Ú. Děvče o hmotnosti m stojí na obvodu kolotoče o poloměru R a momentu setrvačnosti I. Kolotoč se může otáčet bez tření kolem svislé osy, zpočátku je však v klidu. Děvče hodí kámen o hmotnosti m' vodorovným směrem tečně k obvodu kolotoče. Rychlost kamene vzhledem k zemi je v. Vypočtěte (a) výslednou úhlovou rychlost kolotoče a (b) obvodovou rychlost děvčete na kolotoči.

64Ú. Gramofonová deska o hmotnosti 0,10 kg a poloměru 0,10 m se otáčí kolem svislé osy vedené jejím středem úhlovou rychlostí 4,7 rad/s. Moment setrvačnosti desky vzhledem k ose otáčení je $5{,}0{\cdot}10^{-4}$ kg·m^2. Na desku spadne hrudka tmelu o hmotnosti 0,020 kg a zůstane přilepena na jejím obvodu. Určete úhlovou rychlost desky po dopadu tmelu.

65Ú. Tenká homogenní tyč o délce 0,50 m a hmotnosti 4,0 kg se může otáčet ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. Tyč je zpočátku v klidu. Na konec tyče narazí střela o hmotnosti 3,0 g. Dráha střely je vodorovná a svírá s osou tyče úhel 60° (obr. 12.44). Střela se do tyče zaryje a roztočí ji úhlovou rychlostí 10 rad/s. Jakou rychlostí střela do tyče narazila?



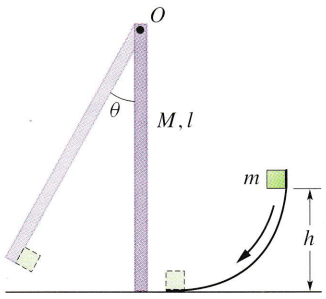
Obr. 12.44 Úloha 65

66Ú. Moucha o hmotnosti m sedí na obvodu homogenního kotouče o hmotnosti $10{,}0m$, který se může volně otáčet kolem svislé osy vedené jeho středem. Zpočátku se kotouč s mouchou otáčí úhlovou rychlostí ω_0. Moucha přejde po kotouči směrem k jeho středu a zastaví se v bodě vzdáleném od středu o polovinu poloměru kotouče. (a) Určete změnu úhlové rychlosti $\Delta\omega$ soustavy kotouč + moucha. (b) Vypočtěte poměr $E_k/E_{k,0}$ výsledné a počáteční kinetické energie soustavy. (c) Jak vznikl přírůstek kinetické energie?

67Ú. Homogenní kotouč o hmotnosti $10m$ a poloměru $3{,}0r$ se může volně otáčet kolem pevné svislé osy vedené jeho středem. Menší homogenní kotouč o hmotnosti m a poloměru r leží na povrchu většího kotouče tak, že jejich osy symetrie splývají. Zpočátku se oba kotouče otáčejí společně úhlovou rychlostí o velikosti 20 rad/s. Vlivem malé poruchy se menší kotouč vychýlí ze své původní polohy a klouže po velkém kotouči až k jeho obvodu, kde se zachytí. Poté se oba kotouče opět otáčejí společně, bez prokluzování. (a) Vypočtěte výslednou úhlovou rychlost velkého kotouče. (b) Vypočtěte poměr $E_{k,f}/E_{k,i}$ výsledné a počáteční kinetické energie soustavy kotoučů.

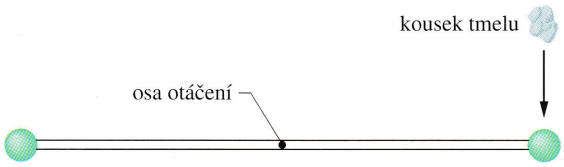
68Ú. Znečištění atmosféry prý může způsobit zvýšení průměrné teploty a roztavení polárních čepiček. Kdyby se polární ledové čepičky Země rozpustily a voda se vrátila do světového oceánu, zvětšila by se hloubka oceánu asi o 30 m. Jaký vliv by tato změna měla na otáčení Země? Odhadněte, jak by se změnila délka dne.

69Ú*. Částice o hmotnosti m klouže po dokonale hladké skluzavce na obr. 12.45. Narazí na homogenní svislou tyč a spojí se s ní. Po nárazu se tyč otočí kolem bodu O o úhel θ. Vyjádřete tento úhel pomocí veličin uvedených na obrázku.



Obr. 12.45 Úloha 69

70Ú*. Dva míče o hmotnostech 2,00 kg jsou připevněny ke koncům tenké tyče délky 50,0 cm zanedbatelné hmotnosti. Tyč se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy vedené jejím středem. V okamžiku, kdy má tyč vodorovnou polohu, dopadne na ni hrudka tmelu o hmotnosti 50,0 g rychlostí 3,00 m·s^{-1} a zůstane s ní spojena (obr. 12.46). (a) Určete výslednou úhlovou rychlost tyče. (b) Vypočtěte poměr výsledné a počáteční kinetické energie soustavy tyč s míči + hrudka. (c) Vypočtěte úhlovou výchylku tyče z vodorovné polohy v okamžiku, kdy je její okamžitá úhlová rychlost nulová (bod obratu).



Obr. 12.46 Úloha 70

ODST. 12.9 Kvantovaný moment hybnosti

71C. Jakou hodnotu má složka spinového momentu hybnosti elektronu do libovolného pevného směru?

72C. Kladný pion (π^+) se může spontánně rozpadnout na kladný mion (μ^+) a neutrino (ν):

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu.$$

Má-li neutrino $m_s = +\frac{1}{2}$, vypočtěte (a) kvantové číslo m_s a (b) spinový moment hybnosti S kladného mionu.

73C. Dva protony, které se sráží velkými rychlostmi, se mohou přeměnit na tři protony a antiproton:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}.$$

Vypočtěte orientaci spinového momentu hybnosti produktů reakce (nahoru nebo dolů), víte-li, že oba protony mají spinové momenty hybnosti orientovány nahoru.

PRO POČÍTAČ

74Ú. Kuželková koule se obvykle bezprostředně po vrhu nejprve smýká a teprve pak se valí bez klouzání. Během smýkání na ni působí dynamická třecí síla, která zpomaluje její posuvný pohyb a urychluje její otáčení. Koule se přestane smýkat v okamžiku, kdy je $\omega R = v$, kde ω je úhlová rychlost, R je poloměr koule a v rychlost jejího těžiště. Na kouli působí třecí síla o velikosti $F = f_d N$, kde f_d je koeficient dynamického tření a N je velikost normálové síly. Protože je dráha koule vodorovná, platí $N = mg$, kde m je hmotnost koule. Moment třecí síly je $M = FR$. Koule má hmotnost 7,25 kg a poloměr 10,9 cm, její moment setrvačnosti přibližně odpovídá momentu setrvačnosti homogenní koule. Sestavte počítačový program pro výpočet časových závislostí úhlové rychlosti a rychlosti těžiště koule a vypočtěte tyto hodnoty s krokem 0,1 s od okamžiku vrhu až do doby, kdy se koule začne valit. Za koeficient dynamického tření dosaďte 0,35 a za počáteční hodnotu rychlosti koule $20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Sestrojte grafy závislostí úhlové rychlosti a rychlosti koule na čase. Určete okamžik, kdy se koule přestane smýkat, a velikost její rychlosti v tomto okamžiku. (Touto rychlostí narazí koule do kuželek, neuvažujeme-li malý pokles rychlosti způsobený odporem vzduchu). Výpočty proveďte pro kouli, která (a) se zpočátku neotáčela, (b) byla vržena s počáteční úhlovou rychlostí 150 rad/s a otáčela se stejným směrem jako po skončení smýkání, (c) byla vržena se stejnou velikostí úhlové rychlosti jako v (b), ale směr otáčení byl opačný. (d) Jak musíme kouli hodit, aby narazila na kuželky největší možnou rychlostí?

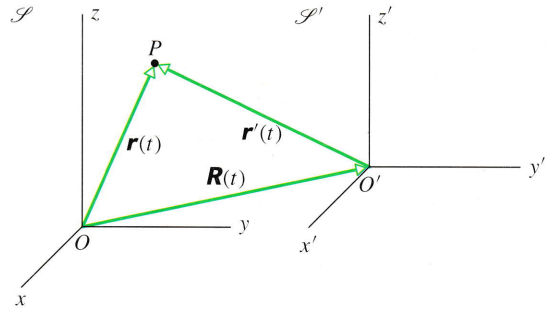
75Ú. Střela o hmotnosti 0,15 kg je vypálena počáteční rychlostí $50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 35°. Odpor vzduchu je zanedbatelný. (a) Sestavte počítačový program pro výpočet časové závislosti momentu hybnosti střely vzhledem k místu výstřelu. Použijte numerické integrace. Moment hybnosti tabelujte s krokem 0,1 s až do okamžiku, kdy střela dopadne na vodorovnou rovinu. Sestrojte graf závislosti velikosti momentu hybnosti střely na druhé mocnině času a ověřte, že je přímkový. Znázorněte závislost velikosti momentu tíhové síly na čase a ověřte, že i v tomto případě je grafem přímka. Při výpočtu použijte vztah $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor střely vzhledem k vztažnému bodu a $\boldsymbol{F}$ je tíhová síla, která na ni působí. Platí pro získané výsledky také vztah $\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$, analogický druhému Newtonovu pohybovému zákonu? (b) Započtěme nyní i vliv odporu vzduchu. Předpokládejme, že mezní rychlost střely je $v_m = 75\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a že zrychlení střely může být vyjádřeno ve tvaru $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j} - bv\boldsymbol{v}$, kde $b = g/v_m^2$. Bude i nyní velikost momentu hybnosti přímo úměrná druhé mocnině času? Je velikost momentu síly opět lineární funkcí času? Pro obecně zvolený okamžik rozhodněte, zda je velikost výsledného momentu sil působících na střelu větší, nebo menší než v případě bez odporu vzduchu. Získané numerické výsledky fyzikálně interpretujte.

76Ú. V určitém okamžiku je poloha částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic dána vektorem $\boldsymbol{d} = (2{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (4{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{j} - (3{,}00\,\mathrm{m})\boldsymbol{k}$, její rychlost je $\boldsymbol{v} = -(6{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{i} + (3{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j} + (3{,}00\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{k}$. Na částici působí síla $\boldsymbol{F} = (6{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{i} - (8{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{j} + (4{,}00\,\mathrm{N})\boldsymbol{k}$. Určete (a) zrychlení částice, (b) její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic, (c) výsledný silový moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (d) úhel mezi vektorem rychlosti a vektorem výslednice sil působících na částici.

PROBLÉM

77. Při odvození věty o momentu hybnosti pro soustavu částic (rov. (12.37)) jsme momenty hybnosti všech částic i momenty sil působících na tyto částice vztahovali k pevně zvolenému bodu O. Tento vztažný bod byl vždy v *klidu* vzhledem k určité *inerciální* vztažné soustavě. Na druhé straně jsme konstatovali, že věta o momentu hybnosti ve tvaru (12.37) platí i za předpokladu, že za vztažný bod zvolíme těžiště studované soustavy částic či tělesa. V příkladech a úlohách jsme pak valení těles interpretovali jako jejich otáčení kolem pevné osy vedené těžištěm. Je takový postup opravdu přípustný? Vždyť vztažná soustava spojená s těžištěm může být neinerciální! (Právě tak tomu je například u těles valících se zrychleně po nakloněné rovině.) A jestliže je možné spojit počátek vztažné soustavy s těžištěm, je třeba nějak omezit volbu souřadných os? Odpověď na poslední otázku prozradíme, zbytek dokážete pomocí návodu odvodit sami:

Označme $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}'$ dvě vztažné soustavy, jejichž odpovídající si souřadnicové osy jsou trvale rovnoběžné (obr. 12.47). Soustava $\mathscr{S}$ je inerciální a pohyb počátku O' soustavy $\mathscr{S}'$ je v ní popsán polohovým vektorem $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t)$. Poloha částice P je v okamžiku t zadána vektorem $\boldsymbol{r}(t)$ vzhledem k soustavě $\mathscr{S}$ a vektorem $\boldsymbol{r}'(t)$ vzhledem k soustavě $\mathscr{S}'$.



Obr. 12.47 Vztažná soustava $\mathscr{S}'$ se vzhledem k inerciální soustavě $\mathscr{S}$ pohybuje čistě posuvným pohybem se zrychlením $\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}$.

(a) Vyjádřete $\boldsymbol{r}(t)$ pomocí $\boldsymbol{r}'(t)$ a $\boldsymbol{R}(t)$. Označte $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{v}'(t)$, $\boldsymbol{V}(t)$ a $\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{a}'(t)$, $\boldsymbol{A}(t)$ odpovídající rychlosti a zrychlení a ukažte, že platí následující *transformační vztahy*:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{V}(t), \quad \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}'(t) + \boldsymbol{A}(t).$$

(V dalších výpočtech již nebudeme závislost veličin na čase explicitně vypisovat.) Uvědomte si, že požadavek neustálé rovnoběžnosti souřadnicových os soustav $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ zaručuje, že vzájemný pohyb těchto soustav je čistě posuvný. Zamyslete se nad tím, zda by předchozí transformační vztahy pro rychlosti a zrychlení zůstaly v platnosti, kdybychom připustili možnost otáčení soustavy $\mathscr{S}'$ vzhledem k $\mathscr{S}$.

(b) Označme $\boldsymbol{L}$ moment hybnosti soustavy částic vzhledem ke vztažné soustavě $\mathscr{S}$. Platí (rov. (12.25) a (12.35))

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i .$$

(Výpočet $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ proveďte a zdůvodněte poslední rovnost.) Do vztahu pro $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ dosaďte $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_i' + \boldsymbol{A}$ a vyjádřete tak výsledek pomocí čárkovaných veličin. Přesvědčte se, že platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i'\right) \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{R} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i' + \boldsymbol{R} \times m\boldsymbol{A},$$

kde $\boldsymbol{L}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i'$ je moment hybnosti soustavy částic vztažený k bodu O' a $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ je celková hmotnost soustavy.

(c) Obdobně postupujte při vyjádření celkového momentu vnějších sil působících na částice soustavy. Platí

$$\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}},$$

kde $\boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}}$ je výslednice sil, jimiž objekty náležející do okolí soustavy působí na její i-tou částici. Použijte věty o hybnosti pro soustavu částic $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i = \sum \boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}}\right)$ a ukažte, že

$$\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}} = \sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}' + \boldsymbol{R} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i' + \boldsymbol{R} \times m\boldsymbol{A},$$

kde $M_{\mathrm{ext}}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_{i,\mathrm{ext}}$ je výsledný moment vnějších sil působících na soustavu, vztažený k bodu O'.

(d) Veličiny $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$ jsou vázány větou o momentu hybnosti (rov. (12.37)). Porovnejte výrazy pro $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}$, získané v částech (b) a (c) a ukažte, že platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}' + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i'\right) \times \boldsymbol{A}.$$

(e) V případě, že jsou všechny momenty vztaženy k bodu O' se tedy veličiny $\mathrm{d}\boldsymbol{L}'/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{M}_{\mathrm{ext}}'$ liší o vektor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i'\right) \times \boldsymbol{A}.$$

Tento vektor, představující „odchylku“ od zápisu věty o momentu hybnosti v inerciální vztažné soustavě, je nulový v každé ze tří situací (zdůvodněte použitím definice vektorového součinu):

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$,
2. $\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{0}$, a tedy $\boldsymbol{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i$ (ověřte zpětným dosazením $\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$),
3. $\boldsymbol{A} \parallel \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i'$ v každém okamžiku,

   $\boldsymbol{A}(t) = K\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}(t)\right)$, tj. $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} + K\boldsymbol{R} = K\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$.

K je jistá (neznámá) konstanta. V uvedených situacích budou formulace věty o momentu hybnosti ve vztažných soustavách $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}'$ formálně shodné. Fyzikálně významné jsou pouze případy 1 a 2. Interpretujte je. (Třetí případ představuje soustavu diferenciálních rovnic pro neznámý vektor $\boldsymbol{R}(t)$, s konstantou K jako parametrem.)