

---

*Horolezectví může být vaší — doslova — poslední praktickou zkouškou z fyziky. Pád může znamenat smrt a i mírné zaváhání může způsobit vážné zranění. Např. lezete-li dlouhým „komínem“, máte ramena zapřena o jednu stěnu široké svislé pukliny a chodidla o její druhou stěnu. Občas však musíte odpočívat, jinak spadnete vyčerpáním. Otázka zní: Jak se můžete uvolnit, abyste si odpočinuli? Budete-li odpočívat bez uvážení fyzikálních zákonů, stěny vás neudrží. Tedy — jaká je odpověď na tuto otázku života a smrti?*

---

## 13.1 ROVNOVÁHA

Uvažujme několik těles: (1) kniha ležící na stole, (2) hokejový puk klouzající se zanedbatelným třením po ledě stálou rychlostí, (3) lopatky stropního větráku otáčející se stálou rychlostí a (4) kolo automobilu, jedoucího po rovné cestě stálou rychlostí. Pro každý z těchto případů platí (pozorováno ze Země, kterou v celé kapitole bereme za inerciální systém):

1. Celková hybnost  $\mathbf{P}$  tělesa je konstantní.
2. Celkový moment hybnosti  $\mathbf{L}$  tělesa je konstantní.

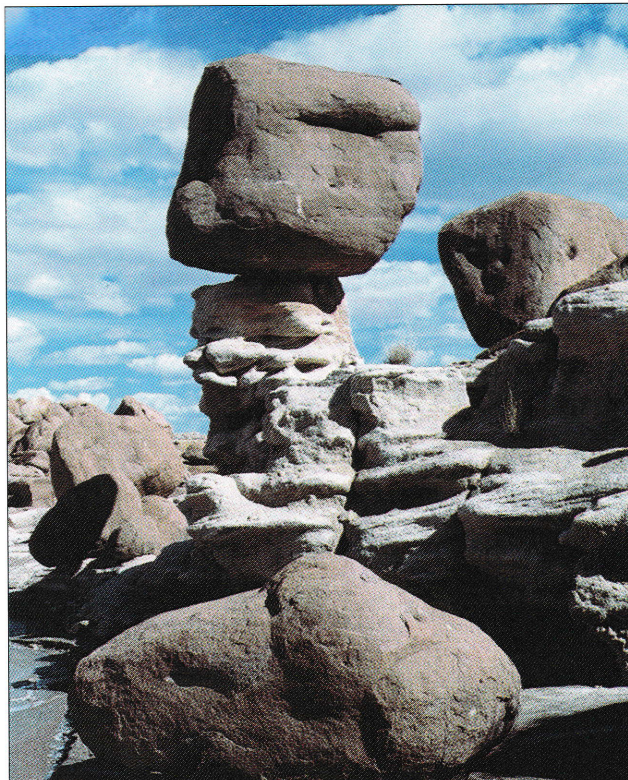
Říkáme, že taková tělesa jsou v rovnováze. Podmínky rovnováhy tedy jsou

$$\mathbf{P} = \text{konst.} \quad \text{a} \quad \mathbf{L} = \text{konst.} \quad (13.1)$$

V této kapitole se zaměříme na případy, kdy v naší inerciální soustavě jsou konstanty v rov. (13.1) nulové. To znamená, že sledovaná tělesa se vůči Zemi žádným způsobem nepohybují — neposouvají ani neotáčejí. Jsou tedy v klidu vůči zvolené inerciální soustavě, ve které je popisujeme; rovnoměrný posuv lze vždy vhodnou volbou inerciální soustavy odstranit, otáčení nikoliv. Taková tělesa jsou ve **statické rovnováze**. Ze čtyř těles uvedených na začátku tohoto odstavce je ve statické rovnováze pouze jedno — kniha ležící na stole.

Nebezpečně vyhlížející kámen — viklan — z obr. 13.1 je též příkladem tělesa, které je ve statické rovnováze —

**Obr. 13.1** Viklan u národního parku Zkamenělý les v Arizoně. I když jeho podložka vypadá podezřele, je kámen ve statické rovnováze.

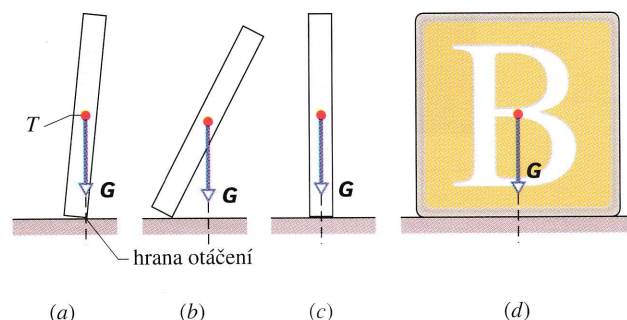


alespoň prozatím. Sdílí tuto vlastnost s nesčetnými dalšími objekty, jakými jsou katedrály, domy, čerpací stanice nebo budky v poli, které zůstávají na místě v průběhu času.

Jestliže se těleso vrátí do své rovnovážné polohy poté, co z ní bylo vychýleno, říkáme (viz čl. 8.5), že je **stále** neboli **stabilní** rovnováze. Příkladem je kulička na dně důlku. Naopak, jestliže malá síla nevratně vychýlí těleso ze statické rovnovážné polohy, označujeme rovnováhu za **vratkou** neboli **labilní**. Mírou stability polohy je práce, kterou je nutno vynaložit, aby těleso nevratně změnilo svou polohu za jinou, zpravidla stabilnější. (A pro úplnost připomeňme z čl. 8.5 i rovnováhu **volnou** neboli **indiferentní**.)

Předpokládejme např., že vychýlíme dominovou kostku tak, jak je naznačeno v obr. 13.2a. Těžiště kostky leží přímo nad hranou, kolem které se kostka může otáčet a o kterou se opírá. Moment  $\mathbf{M}$  její tíhové síly  $\mathbf{G}$  vůči této hraně je zřejmě nulový, protože přímka, podél které síla  $\mathbf{G}$  působí, prochází podpůrnou hranou. Nenutí tedy dominovou kostku konat rotační pohyb a kostka je ve statické rovnováze. Ovšem sebemenší náhodná síla rovnováhu poruší, protože posune **těžnici** (přímku, podél které síla  $\mathbf{G}$  působí) mimo podpůrnou hranu (obr. 13.2b) a její moment pak bude otáčet dominovou kostku víc a víc. Statická rovnováha kostky znázorněná na obr. 13.2a je **labilní** (vratká).

Dominová kostka na obr. 13.2c již není tak nestabilní. Aby se kostka převrátila, musí na ni zapůsobit síla, která ji převalí přes rovnovážnou polohu znázorněnou na obr. 13.2a, kdy těžiště kostky leží přesně nad hranou otáčení. Slabá síla kostku nepřevrátí, ale silnější cvrnknutí prstem již ano. (Sestavíme-li z takto postavených dominových kostek řetězec, cvrnknutí na první kostku může způsobit postupný pád celého řetězce — „dominový efekt“.)



**Obr. 13.2** (a) Dominová kostka vyvážená na hraně, těžiště leží přesně nad hranou. Těžnice (přímka, ve které tíhová síla  $\mathbf{G}$  na kostku působí) prochází hranou otáčení. (b) Když je dominová kostka vychýlena i nepatrně za rovnovážnou polohu, vytvoří síla  $\mathbf{G}$  moment, který zrychleně otáčí kostku dál. (c) Dominová kostka stojící na úzké stěně je o něco stabilnější než kostka v poloze (a). (d) Krychlová kostka je ještě stabilnější.



**Obr. 13.3** Dělník balancující nad New Yorkem je ve statické rovnováze, jeho rovnováha ve směru nosníku je však stabilnější než ve směru kolmém na nosník.

Dětská kostka z obr. 13.2d je ještě stabilnější, protože její těžiště je nutno ještě více zdvihnout, aby přešlo přes hranu otáčení. Cvrknutí prstem kostku nepřevrátí. Dělník z obr. 13.3 má vlastnosti jak dominové kostky, tak kostky čtvercového průřezu: podél nosníku je široce rozkročen a jeho postavení je stabilní, příčně na nosníku spočívá úzkou částí chodidel, takže jeho postavení je v tomto směru podstatně méně stabilní (je vydán na milost náhodnému závanu větru).

Analýza statické rovnováhy je velmi důležitá v inženýrské praxi. Konstruktor musí nalézt a určit všechny vnější síly a momenty sil, které mohou působit na navrhované dílo a zaručit vhodným konstrukčním návrhem a volbou materiálů, že jim vytvořené dílo odolá. Taková analýza je nezbytná, aby se např. zajistilo, že se most nezřítí vlivem dopravního ruchu či poryvem větru nebo že podvozek letadla vydrží prudké nárazy při tvrdých přistáních.

## 13.2 PODMÍNKY ROVNOVÁHY

Posuvný (translační) pohyb tělesa se řídí *větou o hybnosti* neboli *první impulzovou větou*, která vyjadřuje pro těleso totéž, co druhý Newtonův zákon pro hmotný bod. Podle

rov. (9.28) platí

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (13.2)$$

Když je těleso v rovnováze pro posuvný pohyb, tj. když je  $\mathbf{P}$  konstantní, pak je  $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{0}$  a platí

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (\text{rovnováha sil}). \quad (13.3)$$

Otáčivý (rotační) pohyb tělesa se řídí *větou o momentu hybnosti* neboli *druhou impulzovou větou*, která vyjadřuje pro otáčení to, co předchází rovnice pro posuvný pohyb. Podle rov. (12.37) platí

$$\sum \mathbf{M}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (13.4)$$

Když je těleso v rovnováze pro otáčivý pohyb, tj. když je  $\mathbf{L}$  konstantní, pak  $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$  a platí

$$\sum \mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (\text{rovnováha momentů sil}). \quad (13.5)$$

Z uvedeného plynou dvě **podmínky rovnováhy** tělesa, kladené na vnější síly:

V rovnováze musí být roven nule

1. vektorový součet všech vnějších sil působících na těleso,
2. vektorový součet všech momentů vnějších sil působících na těleso.

Tyto podmínky platí jak pro *statickou* rovnováhu, tak i pro obecnější případ rovnováhy, kdy  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{L}$  jsou konstantní, ale ne nulové. (Je dobré připomenout, že každý moment  $\mathbf{M}_i$  každé síly  $\mathbf{F}_i$  obecně závisí na poloze bodu  $B$ , vůči němuž moment počítáme. Je-li však  $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ , pak  $\sum \mathbf{M}_i$  na volbě  $B$  nezávisí.)

Rov. (13.3) a (13.5) jakožto vektorové rovnice odpovídají každá třem nezávislým rovnicím pro jednotlivé souřadnice:

Rovnováha sil	Rovnováha momentů sil	
$\sum F_x = 0$	$\sum M_x = 0$	
$\sum F_y = 0$	$\sum M_y = 0$	(13.6)
$\sum F_z = 0$	$\sum M_z = 0$	

Pro jednoduchost jsme v posledních rovnicích vypustili index  $\text{ext}$ , který v předcházejících rovnicích zdůrazňoval,

že se jedná o vnější (externí) síly a vnější momenty sil působící na těleso.

Problém si zjednodušíme tím, že budeme uvažovat pouze případy, kdy síly působící na těleso leží v rovině  $xy$ . To znamená, že momenty sil mohou vyvolávat pouze otáčení kolem osy rovnoběžné s osou  $z$ . Tímto předpokladem vyloučíme jednu rovnici pro složky sil a dvě rovnice pro složky momentů sil ze soustavy rovnic (13.6). Zbývají rovnice

$$\sum F_x = 0 \quad (\text{rovnováha sil}), \quad (13.7)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{rovnováha sil}), \quad (13.8)$$

$$\sum M_z = 0 \quad (\text{rovnováha momentů sil}). \quad (13.9)$$

Zde  $F_x$  a  $F_y$  jsou  $x$ -ové, resp.  $y$ -ové složky vnějších sil působících na těleso a  $M_z$  je moment vnějších sil způsobující otáčení tělesa kolem osy  $z$  nebo kolem *libovolné* osy  $s$  ní rovnoběžné.

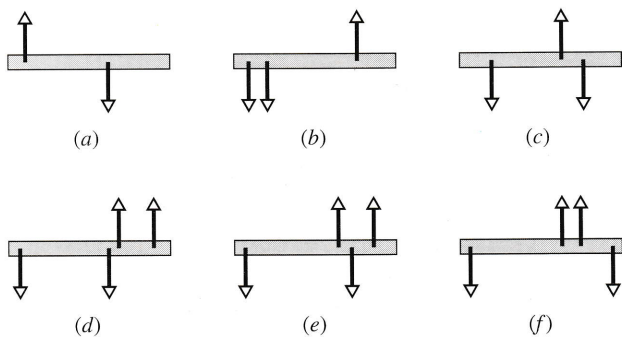
Hokejový puk klouzající stálou rychlostí po ledě splňuje rov. (13.7) až (13.9), a je tedy v rovnováze (dokonce i když rotuje), *ale nikoli ve statické*. Pro dosažení podmínek statické rovnováhy musí být hybnost puku  $\mathbf{P}$  dokonce nulová; puk musí na ledě klidně ležet. Tak můžeme vyjádřit další podmínky statické rovnováhy kladené na okamžitý stav tělesa:

Ve statické rovnováze musí být také rovny nule

3. úhrnná hybnost  $\mathbf{P}$  tělesa,

4. úhrnný moment hybnosti  $\mathbf{L}$  tělesa.

**KONTROLA 1:** Na obrázku je pohled shora na šest homogenních tyčí, na které kolmo působí různé soustavy dvou a více sil. V kterých případech lze při správně volených nenulových velikostech sil dosáhnout statické rovnováhy?

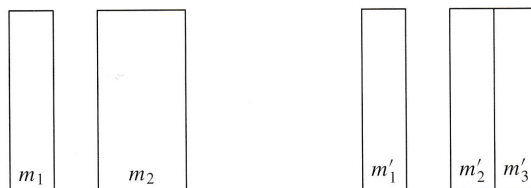


### 13.3 TĚŽIŠTĚ; STŘED HMOTNOSTI

Nyní rozebereme dva velmi blízké pojmy — střed hmotnosti a těžiště. Ukážeme si, v čem se liší i proč v praxi obvykle splývají. (Termín „těžiště“ je běžný i v hovorové češtině, zatímco „střed hmotnosti“ je výhradně odborný termín. V angličtině je však „center of mass“ obvyklý i v hovorovém stylu.)

#### Střed hmotnosti

**Střed hmotnosti (SH)** soustavy neboli **hmotný střed** je jednoznačně určen rozložením hmotnosti v soustavě a fakticky jsme ho již studovali v čl. 9.2. SH jediné částice splývá s její polohou:  $\mathbf{r}_{SH} = \mathbf{r}_1$ . SH soustavy dvou *stejných* částic leží uprostřed mezi nimi:  $\mathbf{r}_{SH} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ . Analogicky je tomu u soustavy  $N$  stejných částic:  $\mathbf{r}_{SH} = \sum_i \mathbf{r}_i / N$ , což můžeme zapsat i jako  $\mathbf{r}_{SH} = \sum_i \mathbf{r}_i / \sum_i 1$ . Jedničky, které sčítáme ve jmenovateli, nám ukazují, že všechny částice bereme se stejnou vahou.



K odvození středu hmotnosti

A co když mají částice různé hmotnosti? Představme si nejprve soustavu dvou částic, kde druhá je dvakrát těžší než první:  $m_2 = 2m_1$ . S takovou soustavou je zřejmě ekvivalentní soustava tří stejných částic, kde  $m'_1 = m'_2 = m'_3 = m_1$  a  $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'_3 = \mathbf{r}_2$  podle obrázku. Snadno tedy najdeme její střed hmotnosti:

$$\mathbf{r}_{SH} = \frac{\sum_i \mathbf{r}'_i}{\sum_i 1} = \frac{\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}'_3}{1 + 1 + 1}.$$

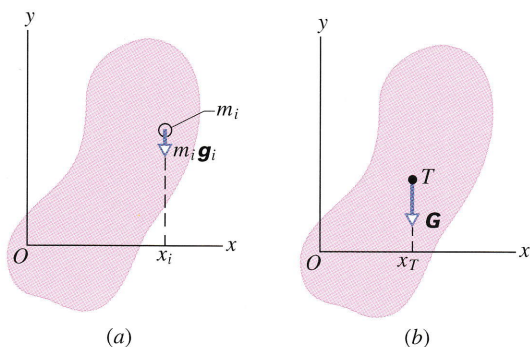
To můžeme zapsat sugestivněji:

$$\mathbf{r}_{SH} = \frac{m'_1 \mathbf{r}'_1 + 2\mathbf{r}'_2}{m'_1 + 2} = \frac{m'_1 \mathbf{r}'_1 + 2m'_1 \mathbf{r}'_2}{m'_1 + 2m'_1} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Tento vzorec lze snadno zobecnit na  $N$  různých částic:

$$\mathbf{r}_{SH} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad (13.10)$$

kde  $m = \sum_i m_i$  značí celkovou hmotnost soustavy. Dostali jsme též vzorec, který jsme používali v rov. (9.8) pro těžiště. Nepoužili jsme přitom žádné jiné veličiny než vnitřní parametry  $N$ ,  $m_i$ ,  $m$ ,  $\mathbf{r}_i$  soustavy.



**Obr. 13.4** (a) Na element tělesa o hmotnosti  $m_i$  působí tíhová síla  $m_i \mathbf{g}_i$  a vytváří vůči počátku  $O$  soustavy souřadnic moment s ramenem rovným souřadnici  $x_i$ . (b) Výsledná tíhová síla  $\mathbf{G}$  působí v těžišti  $T$  tělesa. Její rameno vzhledem k počátku  $O$  je rovno  $x_T$ .

### Těžiště

Uvažujme nyní tuhé těleso (tj. soustavu částic, které mají navzájem neproměnné vzdálenosti) nacházející se ve vnějším silovém poli  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ . Na jeho  $i$ -tou částici působí tedy síla  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_i$ . Příkladem může být nepravidelný kámen v tíhovém poli Země. Chceme nyní nahradit silové působení na jednotlivé částice tělesa jedinou silou  $\mathbf{G}$  působící v jistém bodě — **těžišti**  $T$ . Nahrazení znamená, že kdybychom mohli vypnout působení tíhového pole na jednotlivé částice tělesa a místo něj zapnuli tíhovou sílu v těžišti, celkové silové a momentové působení na těleso by se nezměnilo.

Doposud jsme tvrdili, že tíhová síla  $\mathbf{G}$  působí ve středu hmotnosti (SH) tělesa, že tedy těžiště splývá se středem hmotnosti tělesa. Ukážeme nyní, že toto tvrzení je správné, když tíhové zrychlení  $\mathbf{g}$  je v celém tělese konstantní.

Obr. 13.4a ukazuje těleso hmotnosti  $m$  s vyznačenou  $i$ -tou částicí hmotnosti  $m_i$ . Na každou takovou částici působí tíhová síla  $m_i \mathbf{g}_i$ , kde  $\mathbf{g}_i$  je tíhové zrychlení v místě, kde se částice nachází. Každá tíhová síla  $m_i \mathbf{g}_i$  vytváří vůči ose, která prochází počátkem  $O$  soustavy souřadnic kolmo k obrázku, moment síly  $\mathbf{M}_i$ , který dle rov. (11.32) má velikost

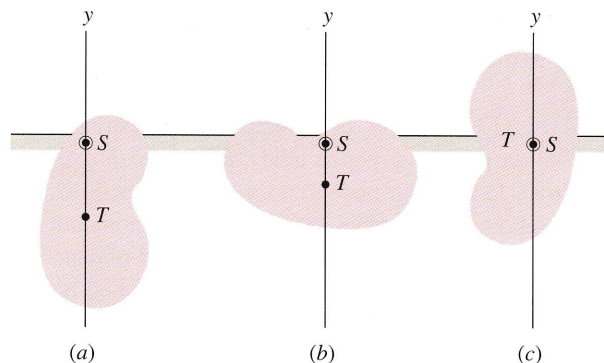
$$M_i = x_i m_i g_i,$$

kde  $x_i$  je rameno  $r_{\perp}$  síly  $m_i \mathbf{g}_i$ . Velikost výsledného momentu  $M_v$  od všech částic je pak

$$M_v = \sum M_i = \sum x_i m_i g_i. \quad (13.11)$$

Obr. 13.4b ukazuje tíhovou sílu  $\mathbf{G}$  působící v těžišti  $T$  tělesa. Dle rov. (11.32) velikost momentu síly vyvolaného silou  $\mathbf{G}$  vůči ose procházející počátkem je

$$M = x_T G, \quad (13.12)$$



**Obr. 13.5** Těleso volně otočné kolem podpěrného bodu  $S$  se bude otáčet tak dlouho, dokud těžiště nezaujme polohu svísele pod bodem  $S$ , jako je tomu v případech (a) a (b). Výjimkou je jenom případ (c), kdy bod  $S$  leží právě v těžišti.

kde  $x_T$  je rameno síly  $\mathbf{G}$ . Síla  $\mathbf{G}$  je rovna součtu tíhových sil  $m_i \mathbf{g}_i$  působících na jeho elementy. Když nyní do rov. (13.12) dosadíme  $\sum m_i \mathbf{g}_i$  za  $\mathbf{G}$ , můžeme psát

$$M = x_T \sum m_i g_i. \quad (13.13)$$

Těžiště jsme zavedli jako bod, vůči němuž je moment  $\mathbf{M}$  výsledné tíhové síly  $\mathbf{G}$  stejný jako součet  $M_v$  všech momentů  $\mathbf{M}_i$  sil  $\mathbf{G}_i$  působících na částice tělesa. Je tedy  $M$  z rov. (13.13) stejný jako  $M_v$  z rov. (13.11) a můžeme psát

$$x_T \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i. \quad (13.14)$$

Je-li tedy  $\mathbf{g}$  konstantní, jsou všechna  $g_i$  stejná, můžeme je ze součtů na obou stranách rov. (13.14) vytknout a pak zkrátit. Dosadíme-li ještě na levé straně rov. (13.14) za  $\sum m_i$  úhrnnou hmotnost tělesa  $m$  a touto hmotností vydělíme pravou stranu rovnice, dostaneme

$$x_T = \frac{1}{m} \sum x_i m_i. \quad (13.15)$$

Porovnáním s rov. (13.10) vidíme, že pravá strana (13.15) dává souřadnici  $x_{SH}$  středu hmotnosti. Můžeme tedy napsat

$$x_{SH} = x_T. \quad (13.16)$$

Střed hmotnosti tělesa a jeho těžiště mají stejnou souřadnici  $x$ .

Tento výsledek můžeme rozšířit na všechny tři souřadnice použitím vektorového vyjádření momentů sil. Výsledek zní: Těžiště splývá se středem hmotnosti tělesa, jestliže tíhové zrychlení je stejné ve všech bodech tělesa.

Jednoslovné a stručné označení „těžiště“, umožňující pohodlné odvození typu „těžišťový vztažný systém“, se

proto běžně používá též jako synonymum pro delší a dvojslovný termín „střed hmotnosti“. (V této knize tak činíme všude.)

Z rov. (13.12) plyne, že moment síly vyvolaný tíhovou silou tělesa je nulový pouze tehdy, když rameno síly  $x_T$  je nulové. Je-li těleso podepřeno v nějakém bodu  $S$ , kolem kterého se může otáčet, otáčí se (vlivem momentu síly  $M = x_T G$  vzhledem k  $S$ ) tak dlouho, dokud rameno síly  $x_T$  není nulové. Těžiště tělesa pak leží svisle pod bodem podepření, jak je naznačeno na obr. 13.5a, b, a těleso je ve stálé rovnováze. Když je těleso podepřeno v těžišti jako na obr. 13.5c, potom pro jakékoliv natočení tělesa je  $x_T$  nulové a těleso je v *rovnováze volné*.

### „Těžiště“ v nehomogenním poli

Co se změní, když silové pole  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  není homogenní? I v takovém případě bychom mohli — při každé konkrétní poloze tělesa v poli — zavést „tíhovou sílu“ a „těžiště“ tak, aby tato tíhová síla byla součtem dílčích sil a celkový moment dílčích sil by byl roven nule. Přesněji řečeno, našli bychom takto těžnici, tj. přímkou (se směrem daným výslednou silou), na níž by leželo těžiště. Problém je v tom, že pro různé polohy tělesa se těžnice v nehomogenním poli nemusí protínat, a v tělese tedy neexistuje těžiště jakožto *univerzální* bod, do něhož bychom mohli pro zjednodušení „stáhnout“ veškerou hmotu tělesa. Pro každou konkrétní polohu tělesa je vždy nutno určit znovu jak výslednou tíhovou sílu, tak i její působíště („těžiště“).

Není pravděpodobné, že bychom kdy vyšetřovali v tíhovém poli zemském těleso tak rozlehlé, abychom museli započítat nehomogenitu tíhového pole. Nebudeme také asi nikdy měřit natolik přesně, abychom museli zahrnout nehomogenost tíhového pole v rámci běžných předmětů.

Je třeba si uvědomit, že např. *odstředivá síla*, kterou uplatníme při zkoumání v otáčejícím se systému, roste se vzdáleností od osy otáčení:  $F = m\omega^2 r$ , a pole odstředivé síly je tedy výrazně nehomogenní.

V nehomogenním poli, a tedy i při studiu kývání či otáčení *nemůžeme* tuhé těleso nahradit hmotným bodem v jeho středu hmotnosti.

## 13.4 PŘÍKLADY STATICKÉ ROVNOVÁHY

V tomto odstavci budeme řešit šest příkladů na statickou rovnováhu. V každém vybereme systém o jednom či více objektech, na které aplikujeme rovnice rovnováhy



Michel Menin kráčí po laně napjatém ve výši 3 150 m nad francouzskou zemědělskou krajinou. Svou polohu stabilizuje těžkou ohnutou tyčí, která snižuje těžiště systému Menin+tyč do blízkosti lana, a umožní mu tak čelit závanům větru.

(rov. (13.7) až (13.9)). Ve všech příkladech budeme uvažovat jen síly působící v rovině  $xy$ , které vůči počátku soustavy souřadnic vytvářejí moment síly mířící ve směru osy  $z$ . Ve smyslu rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů vybereme osu rovnoběžnou s osou  $z$ , vůči které budeme počítat momenty sil. I když je rov. (13.9) splněna pro jakoukoliv volbu takové osy, ukážeme si, že vhodnou volbou osy můžeme vyloučit jednu či více neznámých sil, čímž se použití rov. (13.9) zjednoduší.

### PŘÍKLAD 13.1

Homogenní nosník délky  $d$  a hmotnosti  $m_n = 1,8$  kg spočívá svými konci na dvou digitálních siloměrech, jak je naznačeno v obr. 13.6a. Homogenní kvádr hmotnosti  $m_k = 2,7$  kg leží na nosníku, přičemž jeho střed leží ve vzdálenosti  $\frac{1}{4}d$  od levého konce nosníku. Jaké síly ukáží siloměry?

Náš systém bude tvořit nosník a kvádr. Obr. 13.6b je diagram systému, který uvažujeme jako volný, s vyznačením všech sil na něj působících. Siloměry podírají levý a pravý konec nosníku silami  $\mathbf{F}_l$  a  $\mathbf{F}_p$ . Velikosti těchto sil odečteme na siloměrech. Na nosník působí tíhová síla  $m_n \mathbf{g}$  svisle dolů v jeho středu. Podobně na kvádr působí tíhová síla  $m_k \mathbf{g}$  svisle dolů v jeho středu. V diagramu na obr. 13.6b je kvádr reprezentován pouze tečkou uvnitř schématu nosníku a vektor  $m_k \mathbf{g}$  je znázorněn jako vycházející z této tečky. (Při překreslování obr. 13.6a do obr. 13.6b je vektor  $m_k \mathbf{g}$  posunut podél přímky, ve které působí. Takové posunutí nezmění ani velikost síly  $m_k \mathbf{g}$ , ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.)

Náš systém je ve statické rovnováze, takže musí být splněny jak rovnice rovnováhy sil rov. (13.7) a (13.8), tak i rov-

nice rovnováhy momentů sil (13.9). Zadaný příklad budeme řešit dvojím způsobem.

**PRVNÍ ŘEŠENÍ:** Síly nemají žádné  $x$ -ové složky, takže rov. (13.7)  $\sum F_x = 0$  je splněna automaticky, aniž poskytně nějaké informace. Rov. (13.8) dá pro velikosti  $y$ -ových složek sil podmínku

$$\sum F_y = F_1 + F_p - m_n g - m_k g = 0. \quad (13.17)$$

V rovnici vystupují dvě neznámé síly ( $F_1$  a  $F_p$ ), ale nemůžeme je obě určit z této jediné rovnice. Máme však po ruce ještě jednu rovnici, totiž rov. (13.9), která vyjadřuje rovnováhu momentů sil.

Momenty sil v rov. (13.9) můžeme vyjádřit vůči libovolné ose kolmé k rovině obr. 13.6. Zvolíme osu procházející levým koncem nosníku. Za kladné budeme pokládat ty momenty sil, které — působí-li samostatně — vyvolají kolem zvolené osy otáčení proti směru hodinových ručiček. Z rov. (13.9) potom plyne

$$\begin{aligned} \sum M_z = (F_1)(0) - (m_k g)\left(\frac{1}{4}d\right) - \\ - (m_n g)\left(\frac{1}{2}d\right) + (F_p)(d) = 0, \end{aligned}$$

odkud

$$\begin{aligned} F_p &= \left(\frac{1}{4}g\right)(2m_n + m_k) = \\ &= \frac{1}{4}(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(2 \cdot 1,8 \text{ kg} + 2,7 \text{ kg}) = \\ &= 15 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned} \quad (13.18)$$

Všimněte si: tím, že jsme zvolili osu procházející působitěm jedné z neznámých sil ( $F_1$ ), jsme tuto sílu vyloučili z rov. (13.9), a tím umožnili přímo z ní vypočítat druhou z neznámých sil. *Vhodná volba osy zjednoduší řešení problému.*

Neznámou sílu  $F_1$  pak určíme z rov. (13.17), když do ní dosadíme již známé hodnoty:

$$\begin{aligned} F_1 &= (m_k + m_n)g - F_p = \\ &= (2,7 \text{ kg} + 1,8 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}) - (15 \text{ N}) = \\ &= 29 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

**DRUHÉ ŘEŠENÍ:** Pro kontrolu vyřešíme příklad ještě pro jinou volbu osy. Když jsme zvolili osu procházející levým koncem nosníku, dostali jsme rov. (13.18) a velikost síly  $F_p = 15 \text{ N}$ .

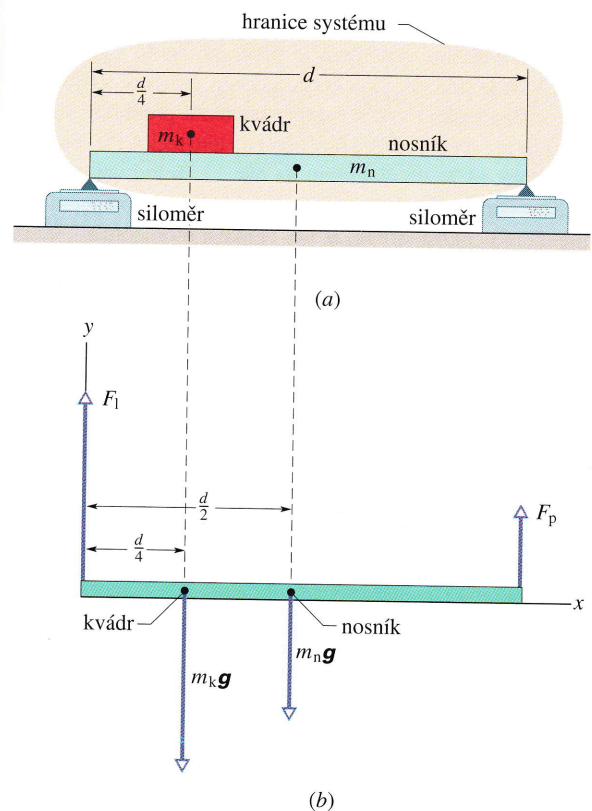
Pro osu procházející pravým koncem nosníku rov. (13.9) dává

$$\begin{aligned} \sum M_z = -(F_1)(d) + (m_k g)\left(\frac{3}{4}d\right) + \\ + (m_n g)\left(\frac{1}{2}d\right) + (F_p)(0) = 0. \end{aligned}$$

Když tuto rovnici řešíme pro  $F_1$ , dostaneme

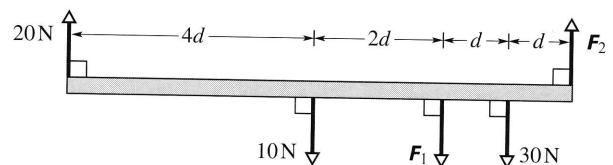
$$\begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{1}{4}g\right)(2m_n + 3m_k) = \\ &= \frac{1}{4}(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(2 \cdot 1,8 \text{ kg} + 3 \cdot 2,7 \text{ kg}) = \\ &= 29 \text{ N}, \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

což je ve shodě s naším předcházejícím výsledkem. Všimněte si ještě, že délka nosníku nevystupuje v poslední rovnici přímo, ale jen prostřednictvím toho, jak ovlivňuje hmotnost nosníku. Všimněte si také, že podmínku rovnováhy sil nepotřebujeme, když podmínku rovnováhy momentů sil užijeme pro dvě různé osy.



**Obr. 13.6** Příklad 13.1. (a) Nosník hmotnosti  $m_n$  nese kvádr o hmotnosti  $m_k$ . Hranice systému je vyznačena. (b) Diagram systému, který uvažujeme jako volný, ukazuje síly působící na systém nosník + kvádr.

**KONTROLA 2:** Na obrázku je pohled shora na homogenní tyč, která je ve statické rovnováze. (a) Můžete najít velikosti neznámých sil  $F_1$  a  $F_2$  pouze z podmínky rovnováhy sil? (b) Chcete-li určit velikost síly  $F_2$  použitím jediné rovnice, kam musíte umístit osu otáčení? (c) Ukáže se, že velikost síly  $F_2$  je 65 N. Jaká je pak velikost síly  $F_1$ ?



## PŘÍKLAD 13.2

Kuželkář drží v ruce kouli o hmotnosti  $m_k = 7,2$  kg. Jak ukazuje obr. 13.7a, vrchní část jeho ruky (paže) je ve svislé, spodní část (předloktí) ve vodorovné poloze. Jakou silou v tomto případě musí působit biceps a jeho úpony na předloktí? Předloktí má hmotnost  $m = 1,8$  kg; předpokládané rozměry jsou vyznačeny na obr. 13.7a.

**ŘEŠENÍ:** Naším systémem je předloktí spolu s koulí. Na obr. 13.7b je znázorněn silový diagram systému. (Koule je znázorněna tečkou uvnitř hranic schématu předloktí; tíhová síla  $m_k g$  má své působíště umístěno do této tečky. Při překreslování obr. 13.7a do diagramu na obr. 13.7b byl vektor  $m_k g$  posunut podél přímky, ve které působí. Takové posunutí nezmění ani velikost síly  $m_k g$ , ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.) Neznámé síly jsou síla  $T$ , kterou působí biceps, a síla  $F$ , kterou působí kost paže v loketním kloubu na kost předloktí. Všechny síly působí svisle.

Z rov. (13.8), která říká  $\sum F_y = 0$ , dostáváme

$$\sum F_y = T - F - mg - m_k g = 0. \quad (13.19)$$

Užijeme momentovou rovnici (13.9). Proložíme osu otáčení loketním kloubem (bod  $O$ ) kolmo k rovině obrázku, momenty sil vyvolávající rotaci proti směru otáčení hodinových ručiček budeme pokládat za kladné a dostaneme

$$\sum M_z = (F)(0) + (T)(d) - (mg)(D) - (m_k g)(a) = 0. \quad (13.20)$$

Volbou osy procházející bodem  $O$  jsme vyloučili neznámou  $F$  z rov. (13.20). Z rovnice vypočítáme  $T$ :

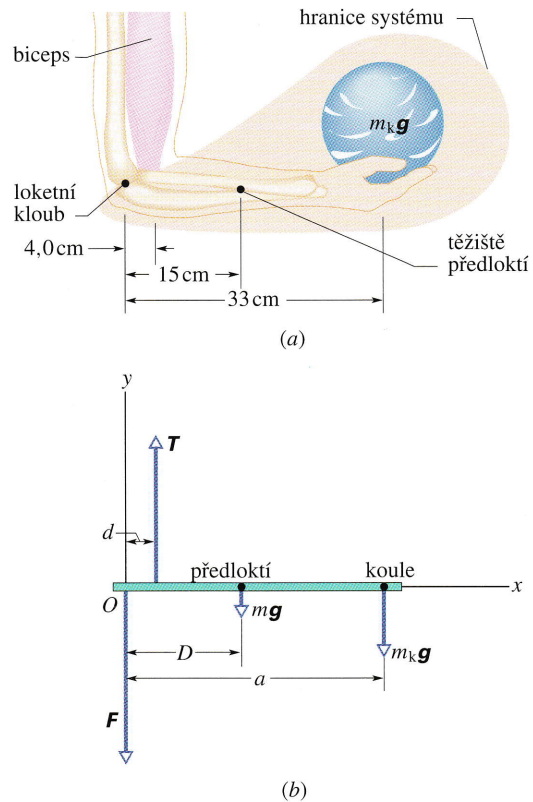
$$\begin{aligned} T &= g \frac{mD + m_k a}{d} = \\ &= (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}) \frac{(1,8 \text{ kg})(15 \text{ cm}) + (7,2 \text{ kg})(33 \text{ cm})}{(4,0 \text{ cm})} = \\ &= 648 \text{ N} \doteq 650 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Biceps musí držet předloktí silou, která je přibližně devětkrát větší než tíha koule; držet těžkou koulí způsobem znázorněným na obr. 13.7a je obtížné.

Z rov. (13.19) po dosazení již známých hodnot dostaneme pro  $F$  vyjádření

$$\begin{aligned} F &= T - g(m_k + m) = \\ &= (648 \text{ N}) - (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(7,2 \text{ kg} + 1,8 \text{ kg}) = \\ &= 560 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Síla  $F$  je přibližně osmkrát větší než tíha koule.



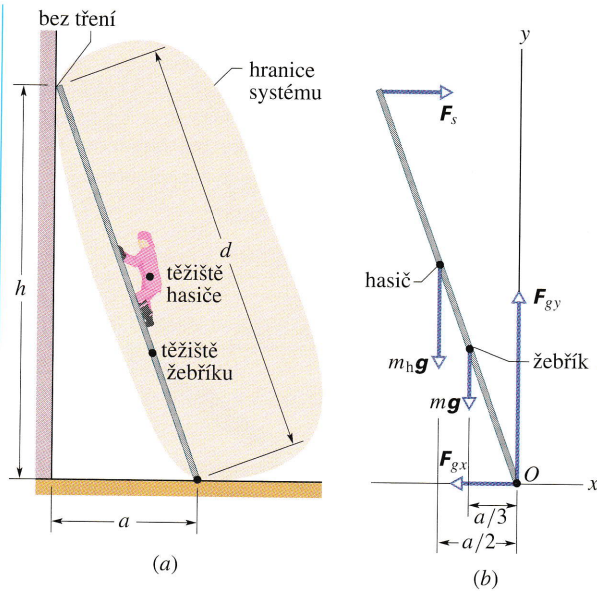
**Obr. 13.7** Příklad 13.2 (a) Ruka drží kuželkovou kouli. Hranice systému je vyznačena. (b) Diagram systému předloktí + koule ukazuje působící síly, když pokládáme systém za volný. Vektory nejsou znázorněny ve stejném měřítku; síla  $T$  přenášená bicipsem a síla  $F$  působící na loketní kloub jsou mnohonásobně větší než ostatní síly.

## PŘÍKLAD 13.3

Žebřík o délce  $d = 12$  m a hmotnosti  $m = 45$  kg je opřen o stěnu ve výšce  $h = 9,3$  m, jak je naznačeno na obr. 13.8a. Těžiště žebříku je v jedné třetině jeho výšky. Hasič o hmotnosti  $m_h = 72$  kg vyšplhá po žebříku tak vysoko, že jeho těžiště leží v polovině výšky žebříku. Předpokládejte, že tření mezi žebříkem a stěnou je zanedbatelné a opření žebříku o podlahu je pevné. Jaké síly působí na žebřík od stěny a od podlahy?

**ŘEŠENÍ:** Na obr. 13.8b je znázorněn diagram systému hasič + žebřík, když jej pokládáme za volný. (Hasič je znázorněn tečkou uvnitř hranic schématu žebříku; vektor tíhové síly  $m_h g$  má počátek v místě tečky. Při překreslování obr. 13.8a do obr. 13.8b byl vektor  $m_h g$  posunut podél přímky, ve které působí. Posunutí nezmění ani velikost síly  $m_h g$ , ani velikost momentu sil, který tato síla vytváří vůči kterékoliv ose.) Stěna působí na žebřík vodorovnou silou  $F_s$ . Síla nemůže mít žádnou svislou složku, protože předpokládáme, že mezi stěnou a žebříkem nevzniká tření. Podlaha působí na žeb-





**Obr. 13.8** Příklady 13.3 a 13.4. (a) Hasič vyšplhá do poloviny výšky žebříku, který je opřen o hladkou stěnu (mezi žebříkem a stěnou nepůsobí tření). Tření mezi podlahou a žebříkem zabrání podklouznutí žebříku. (b) Silový diagram systému, který pokládáme za volný, ukazuje síly působící na systém hasič + žebřík. Počátek  $O$  soustavy souřadnic je volen v místě, kde působí neznámá síla  $\mathbf{F}_g$  (její složky  $F_{gx}$  a  $F_{gy}$  jsou v diagramu vyznačeny). Taková volba usnadní nalezení další neznámé síly  $\mathbf{F}_s$ .

řík silou  $\mathbf{F}_g$ , která má vodorovnou složku  $F_{gx}$  (vzhledem k pevnému opření — dostatečně velké tření mezi podlahou a žebříkem nebo zapíchnutí žebříku do země) a svislou složku  $F_{gy}$  (obvyklá normálová síla). Jak je ukázáno v diagramu, zvolíme soustavu souřadnic s počátkem  $O$  v místě, kde je žebřík opřen o podlahu. Vzdálenost  $a$  od stěny k patě žebříku vypočteme jako odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku:

$$a = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{(12 \text{ m})^2 - (9,3 \text{ m})^2} = 7,58 \text{ m}.$$

Z rovnic rovnováhy složek sil (13.7) a (13.8) dostaneme pro náš systém rovnice

$$\sum F_x = F_s - F_{gx} = 0 \quad (13.21)$$

a

$$\sum F_y = F_{gy} - m_h g - m g = 0. \quad (13.22)$$

Rov. (13.22) dává

$$F_{gy} = g(m_h + m) = (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg}) = 1146,6 \text{ N} \doteq 1100 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď})$$

Pro výpočet rovnováhy momentů sil zvolíme osu procházející počátkem  $O$  kolmo na rovinu obrázku. Ramena sil  $\mathbf{F}_s$ ,  $m_h \mathbf{g}$ ,  $m \mathbf{g}$ ,  $\mathbf{F}_{gx}$  a  $\mathbf{F}_{gy}$  vůči zvolené ose jsou postupně  $h$ ,  $\frac{1}{2}a$ ,  $\frac{1}{3}a$ ,  $0$  a  $0$ . Nulová ramena sil  $\mathbf{F}_{gx}$  a  $\mathbf{F}_{gy}$  způsobí, že tyto síly mají nulový

moment vůči zvolené ose. Z rovnice rovnováhy momentů sil (13.9) potom plyne

$$\sum M_z = -(F_s)h + (m_h g)\left(\frac{1}{2}a\right) + (m g)\left(\frac{1}{3}a\right) = 0. \quad (13.23)$$

Řešením rov. (13.23) dostaneme pro  $F_s$  vyjádření

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{ga\left(\frac{1}{2}m_h + \frac{1}{3}m\right)}{h} = \\ &= \frac{(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(7,58 \text{ m})(36 \text{ kg} + 15 \text{ kg})}{(9,3 \text{ m})} = \\ &= 407 \text{ N} \doteq 410 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Z rov. (13.21) potom ještě dostaneme

$$F_{gx} = F_s = 410 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď})$$

### PŘÍKLAD 13.4

Nechť v př. 13.3 má statický koeficient tření  $f_s$  mezi žebříkem a podlahou hodnotu  $0,53$ . Na jakou část  $0 \leq q \leq 1$  žebříku může hasič vylézt, než žebřík začne podklouzávat?

**ŘEŠENÍ:** Síly mají stejná označení jako na obr. 13.8. Nechť  $qd$  je délka, kam může po žebříku hasič vylézt, než žebřík začne podklouzávat (jeho vodorovná vzdálenost od počátku  $O$  je pak  $qa$ ). V okamžiku podklouznutí je splněna rovnice

$$F_{gx} = f_s F_{gy}, \quad (13.24)$$

ve které je  $F_{gx}$  statická síla tření (obvykle značená  $F_s$ ) a  $F_{gy}$  je normálová síla (obvykle značená  $N$ ).

Použijeme-li rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů a volíme-li osu procházející počátkem  $O$ , dostaneme v okamžiku podklouznutí rovnici

$$\sum M_z = -(F_s)(h) + (m_h g)(qa) + (m g)\left(\frac{1}{3}a\right) = 0,$$

odkud

$$F_s = \frac{ga}{h}\left(\frac{1}{3}m + m_h q\right). \quad (13.25)$$

Rovnice ukazuje toto: jak hasič stoupá po žebříku, tj. jak roste  $q$ , tak musí vzrůstat i síla  $F_s$ , kterou působí stěna na žebřík, aby byla dosažena rovnováha. Abychom našli hledanou hodnotu  $q$  v okamžiku podklouznutí, musíme nejprve nalézt, jaká bude v tomto okamžiku síla  $F_s$ .

Rov. (13.7) pro rovnováhu  $x$ -ových složek sil dává

$$\sum F_x = F_s - F_{gx} = 0.$$

Porovnáme-li tuto rovnici s rov. (13.24), dostaneme, že v okamžiku podklouznutí

$$F_s = F_{gx} = f_s F_{gy}. \quad (13.26)$$

Z rov. (13.8) pro rovnováhu y-ových složek sil dostáváme

$$\sum F_y = F_{gy} - m_h g - m g = 0,$$

odkud

$$F_{gy} = (m_h + m)g. \quad (13.27)$$

Porovnáme-li rovnice (13.26) a (13.27), dostaneme

$$F_s = f_s g (m_h + m). \quad (13.28)$$

Jestliže nakonec porovnáme rov. (13.25) a (13.28) a řešíme je pro  $q$ , dostaneme

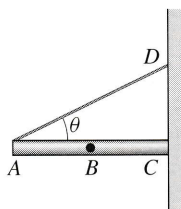
$$\begin{aligned} q &= \frac{f_s h (m_h + m)}{a m_h} - \frac{m}{3m_h} = \quad (13.29) \\ &= \frac{(0,53)(9,3 \text{ m}) (72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})}{(7,6 \text{ m}) (72 \text{ kg})} - \frac{(45 \text{ kg})}{3(72 \text{ kg})} = \\ &= 0,85. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Hasič může vylézt do 85 % délky žebříku, než začne žebřík podklouzávat.

Z rov. (13.29) můžete dále vyčíst, že hasič může vylézt až na konec žebříku (tomu odpovídá  $q = 1$ ), aniž žebřík podklouzne, pokud činitel tření  $f_s > 0,61$ . Na druhé straně žebřík podklouzne už vlastní vahou ( $q = 0$ ), když činitel tření  $f_s < 0,11$ .

Příklad lze vyřešit jednodušeji, zvolíme-li za počátek souřadnic místo dotyku žebříku o stěnu.

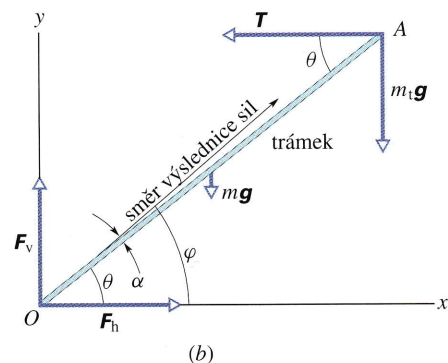
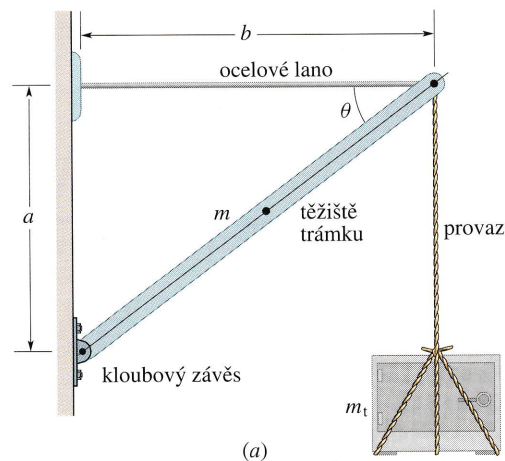
**KONTROLA 3:** Tyč  $AC$  o hmotnosti 5 kg, znázorněná na připojeném obrázku, je držena v klidu jednak silou  $T$  přenášenou přes provaz  $AD$ , jednak silou tření mezi stěnou a tyčí. Homogenní tyč je dlouhá 1 m a úhel, který svírá provaz s tyčí, činí  $\theta = 30^\circ$ . (a) Do kterého z označených bodů musíte umístit osu, vůči níž budete počítat momenty sil, máte-li jedinou rovnici najít sílu  $T$ , kterou na tyč působí provaz? S takto zvolenou osou určete, jaká znaménka budou mít (b) moment síly  $M_t$ , způsobený tíhou tyče, a (c) moment síly  $M_p$ , kterým na tyč působí provaz, když budete pokládat momenty sil působící proti směru otáčení hodinových ručiček za kladné. (d) Je  $M_p$  větší, menší, nebo stejně velké jako  $M_t$ ?



### PŘÍKLAD 13.5

Obr. 13.9a zobrazuje trezor o hmotnosti  $m_t = 430$  kg, který je provazem přivázán k nosníku s rozměry  $a = 1,9$  m a  $b = 2,5$  m. Homogenní trámek nosníku má hmotnost  $m = 85$  kg, hmotnost vodorovného lana je zanedbatelná.

(a) Jak velkou silou  $T$  je napínáno lano?



**Obr. 13.9** Příklad 13.5. (a) Trezor je zavěšen na nosníku, který sestává z homogenního šikmého trámku a vodorovného ocelového lana. (b) Silový diagram trámku uvažovaného jako volné těleso. Všimněte si, že výslednice sil  $F_v$  a  $F_h$  nemíří přesně ve směru osy trámku.

**ŘEŠENÍ:** Na obr. 13.9b je silový diagram trámku, který pokládáme za náš systém. Na trámek působí v jeho těžišti tíhová síla  $m g$ , v bodě  $A$  síla  $T$  od lana a síla  $m_t g$  od provazu (tíha trezoru), a konečně v kloubovém závěsu  $O$  síla  $F$  od stěny s horizontální složkou  $F_h$  a vertikální  $F_v$ .

Použijme rov. (13.9) vyjadřující rovnováhu momentů sil, přičemž osu otáčení necháme procházet kloubovým závěsem (bod  $O$ ) kolmo k rovině obrázku. Když pokládáme za kladné ty momenty sil, které vyvolávají rotaci působící proti směru otáčení hodinových ručiček, dostáváme

$$\sum M_z = (T)(a) - (m_t g)(b) - (m g)\left(\frac{1}{2}b\right) = 0.$$

Chytrou volbou osy jsme z rovnice vyloučili neznámé síly  $F_h$  a  $F_v$  (nevytváří totiž žádný moment síly vůči zvolené ose) a zbyla nám jen jediná neznámá síla  $T$ . Tu z rovnice vypočteme:

$$\begin{aligned} T &= \frac{gb(m_t + \frac{1}{2}m)}{a} = \\ &= \frac{(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(2,5 \text{ m})(430 \text{ kg} + 42,5 \text{ kg})}{(1,9 \text{ m})} = \\ &= 6090 \text{ N} \doteq 6100 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(b) Najděte složky  $F_h$  a  $F_v$  síly, která na trámek působí přes kloubový závěs.

**ŘEŠENÍ:** Použijeme rovnice rovnováhy sil. Z rov. (13.7) dostaneme

$$\sum F_x = F_h - T = 0,$$

a tedy

$$F_h = T = 6090 \text{ N} \doteq 6100 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď})$$

Z rov. (13.8) dostaneme

$$\sum F_y = F_v - mg - m_t g = 0,$$

a tedy

$$\begin{aligned} F_v &= g(m + m_t) = (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(85 \text{ kg} + 430 \text{ kg}) = \\ &= 5047 \text{ N} \doteq 5000 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(c) Jakou silou působí kloubový závěs na trámek?

**ŘEŠENÍ:** Z obrázku vidíme, že

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = \\ &= \sqrt{(6090 \text{ N})^2 + (5047 \text{ N})^2} \doteq 7900 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Všimněte si, že síla  $F$  je podstatně větší než společná tíha trezoru a trámku (5000 N) i než napětí ve vodorovném lanu (6100 N).

(d) Jaký je úhel  $\alpha$  mezi osou trámku a směrem působení výsledné síly  $F$ , která působí od kloubového závěsu na trámek?

**ŘEŠENÍ:** Z obrázku vidíme, že

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &= \frac{a}{b} = \frac{(1,9 \text{ m})}{(2,5 \text{ m})} = 0,760, \quad \text{tedy } \theta = 37,2^\circ, \\ \text{tg } \varphi &= \frac{F_v}{F_h} = \frac{(5047 \text{ N})}{(6090 \text{ N})} = 0,829, \quad \text{tedy } \varphi = 39,6^\circ, \end{aligned}$$

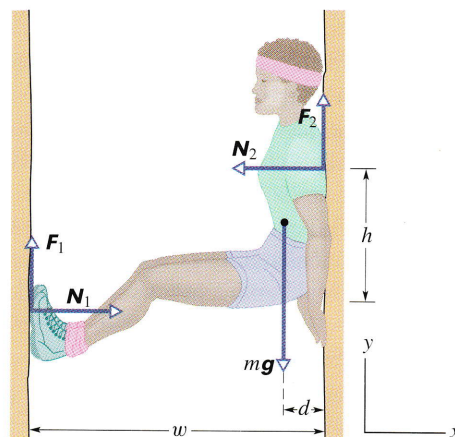
a tedy

$$\alpha = \varphi - \theta = 39,6^\circ - 37,2^\circ = 2,4^\circ. \quad (\text{Odpověď})$$

Kdyby tíha trámku byla tak malá, že by se dala zanedbat, úhel  $\alpha$  by se rovnal nule. Síla od kloubového závěsu by pak působila přesně ve směru osy trámku.

### PŘÍKLAD 13.6

Na obr. 13.10 je zobrazena horolezkyně o hmotnosti  $m = 55 \text{ kg}$ , která odpočívá při lezení „komínem“. Má zapřena ramena a nohy ve spáře, jejíž šířka  $w = 1,0 \text{ m}$ . Její těžiště je ve vzdálenosti  $d = 0,2 \text{ m}$  od stěny, na které má zapřena ramena. Činitel statického tření mezi botami a stěnou  $f_1 = 1,1$  a mezi rameny a stěnou  $f_2 = 0,70$ .



**Obr. 13.10** Příklad 13.6. Na obrázku jsou znázorněny síly, které působí na horolezkyni odpočívající při lezení skalním komínem. Síla, kterou horolezkyně působí na stěny komínu, vede ke zvýšení normálových sil  $N_1$ ,  $N_2$  (obě jsou stejně velké), a tím i třecích sil  $F_1$  a  $F_2$ .

(a) Jakou minimální silou musí horolezkyně působit na stěny, aby nespadla?

**ŘEŠENÍ:** Horizontální síly působící na ramena ( $N_2$ ) i boty ( $N_1$ ) mají stejnou velikost  $N$ , ale opačnou orientaci. Proto je výsledná horizontální síla nulová a rov. (13.7), tj.  $\sum F_x = 0$ , je splněna.

Tíhová síla působí na horolezkyni svisle dolů. Proti ní působí třecí síly  $F_1$  na chodidla a  $F_2$  na ramena. Dokud je síla působící na stěny dostatečně velká, ustaví se automaticky rovnováha a je splněna rov. (13.8) ( $\sum F_y = 0$ ), která dává

$$F_1 + F_2 = mg. \quad (13.30)$$

Předpokládejme, že zpočátku horolezkyně tlačí na stěny velmi silně a potom tlak uvolňuje. Jak uvolňuje tlak, klesá velikost normálové síly  $N$ , a spolu s ní klesají i hodnoty součinů  $f_1 N$  a  $f_2 N$ , které limitují velikosti automatického nastavení rovnováhy třecích sil působících na ramena a chodidla horolezkyně a její tíhy (viz rov. (6.1)).

Když velikost síly  $N$  klesne na hodnotu, kdy součin  $f_1 N$  je právě roven třecí síle  $F_1$  působící na chodidla horolezkyně

a součin  $f_2 N$  třecí síle  $F_2$  působící na její ramena, je horolezkyně na pokraji podklouznutí na obou místech. Kdyby ještě dále snížila tlak na stěny, bude součet zmíněných součinů menší než její tíha  $mg$  a horolezkyně spadne. Nejmenší hodnotu velikosti síly  $N$ , při které ještě nedojde k podklouznutí, tak dostaneme z rovnice

$$f_1 N + f_2 N = mg, \quad (13.31)$$

kteřá plyne z rov. (13.30). Jejím řešením dostaneme hledanou hodnotu

$$N = \frac{mg}{f_1 + f_2} = \frac{(55 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}{(1,1 + 0,70)} = 299 \text{ N} \doteq 300 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď})$$

Minimální síla, kterou horolezkyně musí tlačit na stěny, aby nespadla, je přibližně 300 N.

(b) Jaká musí být při této síle vertikální vzdálenost  $h$  mezi horolezčíny rameny a chodidly, aby byla ve stabilní rovnováze?

**ŘEŠENÍ:** Aby byla splněna momentová rov. (13.9), tj.  $\sum M_z = 0$ , musí mít síly působící na horolezkyni nulový výsledný moment vůči libovolné ose otáčení kolmé k rovině obrázku. Zvolíme-li takovou osu v místě, kde působí síla mezi rameny a stěnou, dostaneme rovnici

$$\sum M_z = -F_1 w + Nh + mgd = 0. \quad (13.32)$$

Vyřešíme-li tuto rovnici pro  $h$ , dosadíme za  $F_1$  hodnotu  $f_1 N$ , položíme  $N = 299 \text{ N}$  a užijeme ostatní známé hodnoty, dostaneme postupně

$$\begin{aligned} h &= \frac{F_1 w - mgd}{N} = \frac{f_1 N w - mgd}{N} = f_1 w - \frac{mgd}{N} = \\ &= (1,1)(1,0 \text{ m}) - \frac{(55 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(0,20 \text{ m})}{(299 \text{ N})} = \\ &= 0,739 \text{ m} \doteq 0,74 \text{ m}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme, když zvolíme jakoukoliv jinou osu kolmou k rovině obrázku, např. osu procházející místem působení chodidel na stěnu.

(c) Jaké jsou hodnoty třecích sil držících horolezkyni?

**ŘEŠENÍ:** Ze známé hodnoty síly  $N = 299 \text{ N}$  dostaneme

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 N = (1,1)(299 \text{ N}) = \\ &= 328,9 \text{ N} \doteq 330 \text{ N} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

a z rov. (13.30) dále plyne

$$\begin{aligned} F_2 &= mg - F_1 = (55 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}) - (328,9 \text{ N}) = \\ &= 210,1 \text{ N} \doteq 210 \text{ N}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(d) Je horolezkyně ve stabilní rovnováze, když působí na stěny stejnou silou (299 N), ale její chodidla jsou výše? Uvažujte případ, kdy  $h = 0,37 \text{ m}$ .

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (13.32) pro stejnou volbu osy, stejnou hodnotu síly (299 N) a novou hodnotu výšky  $h$  dostáváme pro velikost síly  $F_1$  vyjádření

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{Nh + mgd}{w} = \\ &= \frac{(299 \text{ N})(0,37 \text{ m}) + (55 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(0,20 \text{ m})}{(1,0 \text{ m})} = \\ &= 218 \text{ N}. \end{aligned}$$

To je méně než mezní hodnota  $f_1 N = 329 \text{ N}$ , a sílu tedy lze vyvinout.

Dále užijeme rov. (13.30), abychom našli hodnotu  $F_2$ , která vyhoví rovnici rovnováhy sil  $\sum F_y = 0$ :

$$F_2 = mg - F_1 = (55 \text{ kg})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}) - (218 \text{ N}) = 321 \text{ N}.$$

Tato hodnota přesahuje mezní hodnotu  $f_2 N = 209 \text{ N}$ , a je tedy nemožné ji realizovat tlakem 299 N. Jediný způsob, jak zabránit pádu při hodnotě  $h = 0,37 \text{ m}$  (a též každé jiné hodnotě menší než 0,74 m), je tlačit na stěnu větší silou než 299 N, a tak zvýšit mezní hodnotu  $f_2 N$ .

Podobně je nutno vyvozovat tlak na stěny větší než 299 N i v případech, kdy  $h > 0,74 \text{ m}$ . Zde je právě výhoda těch, kteří se seznámí s fyzikou, než začnou lézt komínem. Když potřebujete odpočívat, vyhněte se chybě horolezeckých nováčků, kteří zapřou chodidla buď příliš vysoko nebo příliš nízko. Budete vědět, že existuje optimální svislá vzdálenost mezi rameny a chodidly, která vám dovoluje bezpečně odpočívat s nejmenší silou, kterou se musíte opírat o stěny. Tak můžete odpočívat nejpohodlněji.

## RADY A NÁMĚTY

### Bod 13.1: Úlohy na statickou rovnováhu

Takové úlohy řešte podle následujících kroků:

1. Nakreslete si *náčrtek* problému.
2. Zvolte *systém*, na který budete aplikovat rovnice rovnováhy. Hranice systému vyznačte na náčrtku uzavřenou křivkou, abyste si je dobře zapamatovali. Někdy zvolíte za systém pouze jeden objekt, který chcete mít v rovnováze (jako v př. 13.6 horolezkyni). Jindy je výhodnější zahrnout do systému více objektů. Zjednoduší se tím výpočet. Kdybyste např. v př. 13.3 a 13.4 zvolili za systém pouze žebřík, museli byste v silovém diagramu (obr. 13.8b) uvažovat i síly, kterými na žebřík působí ruce a nohy hasiče. Tyto další neznámé síly by vám zkomplikovaly výpočet. Systém byl na obr. 13.8 zvolen tak, aby zahrnoval i hasiče, a tím se zmíněné neznámé síly staly *vnitřními silami* soustavy, které není nutné pro vyřešení př. 13.3 a 13.4 znát.
3. Namalujte diagram, kde považujete systém za volné těleso, tj. nepodrobené vazbám. V diagramu vyznačte všechny

síly působící na těleso (nezapomeňte na síly nahrazující vazby, např. na reakci podložky), zřetelně je označte a ujistěte se, že jejich působíště a směry působení jsou správně vyznačeny.

4. Vyznačte v diagramu osy  $x$  a  $y$  souřadnicového systému. Volte je tak, aby nejméně jedna osa byla rovnoběžná s jednou či více neznámými silami. Síly, které neleží ve směru jedné z os rozložte na složky. Ve všech našich řešených příkladech bylo rozumné volit osu  $x$  vodorovně a osu  $y$  svisle.
5. Napište pro složky sil ve směru obou os *rovnice rovnováhy sil* se správným vyznačením symbolů.
6. Vyberte jednu nebo více os otáčení kolmých k rovině obrázku a napište pro ně *rovnici rovnováhy momentů sil*. Vyberte-li osu, která prochází působíštěm některé z neznámých sil, rovnice se zjednoduší, protože zmíněná neznámá funkce v ní nebude vystupovat.
7. Řešte rovnice *algebraicky* pro příslušné neznámé. Někteří studenti raději již v této fázi dosazují hodnoty veličin včetně jejich jednotek. Zkušební řešitelé však dávají přednost algebraickému řešení, protože v něm lépe vynikne závislost řešení na jednotlivých proměnných.
8. Nakonec do algebraického řešení *dosadte číselné hodnoty* s příslušnými jednotkami, abyste dostali číselné hodnoty neznámých veličin.
9. Zamyslete se nad výsledkem — má vůbec smysl? Nemí výsledek na první pohled příliš velký nebo příliš malý? Má správné znaménko? Odpovídají jednotky veličině, kterou určujeme?

### 13.5 NEÚPLNĚ URČENÉ SOUSTAVY

Pro řešení úloh této kapitoly máme k dispozici pouze tři nezávislé rovnice. Zpravidla to jsou dvě rovnice rovnováhy pro složky sil ve směru souřadnicových os a jedna rovnice rovnováhy momentů sil kolem osy kolmé k rovině dané souřadnicovými osami užitými v rovnicích rovnováhy sil. Když má úloha více než tři neznámé, nestačí soustava tří rovnic na její řešení. Takové úlohy nemůžeme jednoznačně řešit.

Je jednoduché najít takové problémy. Např. v př. 13.3 a 13.4 stačí předpokládat, že tření působí také mezi žebříkem a svislou stěnou. Musíme pak uvažovat také svislou třecí sílu mezi vrchním koncem žebříku a stěnou, čímž počet neznámých stoupne na čtyři. Tyto čtyři neznámé nemůžeme ze tří rovnic jednoznačně určit a úlohu nelze dořešit.

Dále můžeme uvažovat nesymetricky zatížené auto. Jaké síly — obecně všechny různé — působí na čtyři pneumatiky? Znovu nemůžeme tyto síly najít, protože máme k dispozici pouze tři nezávislé rovnice.

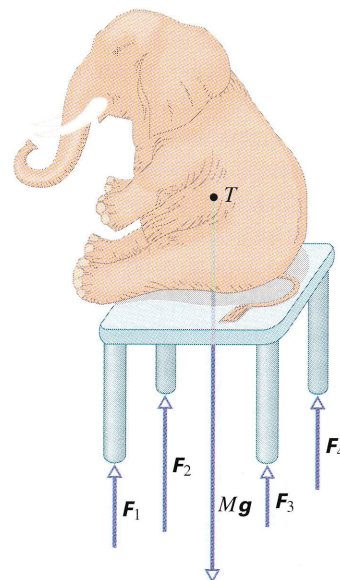
Podobně můžeme řešit problém statické rovnováhy stolu o třech nohách, ale už ne stolu o čtyřech nohách. Takové úlohy, kde je více neznámých než rovnic, označujeme jako **neúplně určené**.

V reálném světě však existují řešení i pro tyto neúplně určené úlohy. Postavíme-li kola aut na čtyři siloměry, každý ukáže nějakou hodnotu síly, přičemž součet těchto hodnot dá tíhu auta. Co nám brání v řešení problému nalézt hodnoty údajů na jednotlivých siloměrech početně?

Každý takový rozpor naznačuje, že původně zvolený model *není* dost dobrý pro úlohu, kterou právě řešíme. Zde jsme např. předpokládali — aniž jsme to zvláště zdůraznili — že tělesa, na která jsme aplikovali rovnice statické rovnováhy, jsou dokonale tuhá. To znamená, že se vůbec nedeformují, když na ně působí síly. Skutečná tělesa však tuhá nejsou. Např. pneumatiky vozu se po jeho zatížení snadno deformují, dokud nenastane statická rovnováha.

Všichni máme zkušenosti s viklajícím se restauračním stolem, jehož jednu nohu podložíme několikrát přeloženým kouskem papíru, abychom viklání odstranili. Můžeme si představit, že kdyby si dostatečně těžké slůně sedlo na takový stůl a on se pod ním nerozpadl, zdeformuje se stůl (i podlaha) tak, že se nakonec všechny čtyři nohy dotknou podlahy. Síly podpírající nohy dosáhnou zcela určitých hodnot (obecně pro každou nohu jinou hodnotu) a stůl se přestane viklat (obr. 13.11). Jak ale najdeme jejich velikosti?

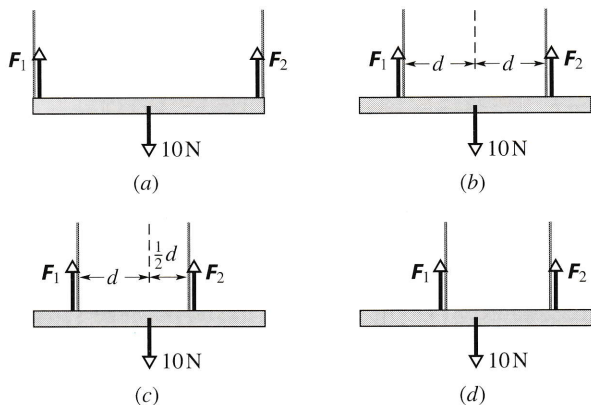
Abychom vyřešili tuto zatím neúplně určenou úlohu, musíme doplnit rovnice rovnováhy jistými poznatkami z teo-



**Obr. 13.11** Stůl je neúplně určená soustava. Čtyři síly působící na jeho nohy jsou různé velké a nemohou být určeny pouze z rovnic statické rovnováhy.

rie pružnosti (*elasticity*), části fyziky a technických věd, která popisuje, jak se reálná tělesa deformují, když na ně působí síly.

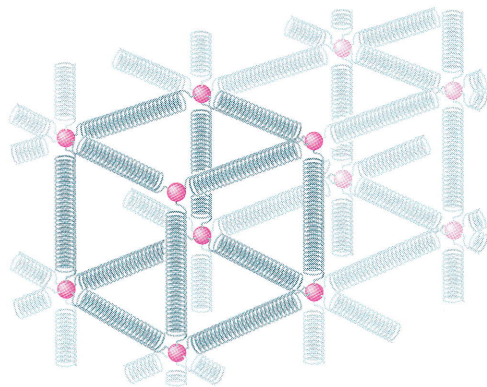
**KONTROLA 4:** Homogenní vodorovná tyč vážící 10 N je zavěšena na strop dvěma dráty, které ji drží dvěma silami  $F_1$  a  $F_2$ . Obrázek ukazuje čtyři uspořádání drátů. Jsou mezi nimi uspořádání, která vedou na neúplně určenou soustavu (tj. takovou soustavu, že nemůžeme určit číselné hodnoty sil  $F_1$  a  $F_2$ )?



### 13.6 PRUŽNOST

Když se spojí velké množství atomů, aby vytvořilo kus kovu (např. hřebík), uspořádají se zpravidla tak, že jejich rovnovážné polohy vytvoří trojrozměrnou *mřížku*, tedy pravidelné prostorové uspořádání, ve kterém každý atom má jisté vzdálenosti od svých nejbližších sousedů\*. Atomy jsou drženy pohromadě meziatomovými silami, které jsou na obr. 13.12 reprezentovány pružinkami. Mřížka je neobvykle pevná, což jinak řečeno znamená, že meziatomové pružinky jsou velmi tuhé. Z toho důvodu pokládáme mnohé běžné předměty, jako např. kovový žebřík, stůl nebo lžiči, za dokonale tuhé. Ovšem jiné běžné předměty, např. zahradní hadice nebo gumové rukavice, se vůbec jako tuhé nejeví. Molekuly těchto předmětů *netvoří* pevné mřížky znázorněné na obr. 13.12, ale jsou uspořádány do dlouhých molekulárních řetězců, které jsou vzájemně vázány velmi volně.

\* Běžné kovové předměty, např. hřebík, jsou tvořeny kovovými zrnky, jejichž vnitřní struktura má podobu více méně pravidelné mřížky, jaká je znázorněna na obr. 13.12. Síly působící mezi zrny jsou však podstatně slabší než síly držící pohromadě mřížku. Proto deformace nastává přeuspořádáním zrn a lom probíhá po hranicích zrn, a to výrazně snadněji než „drcení zrn“.



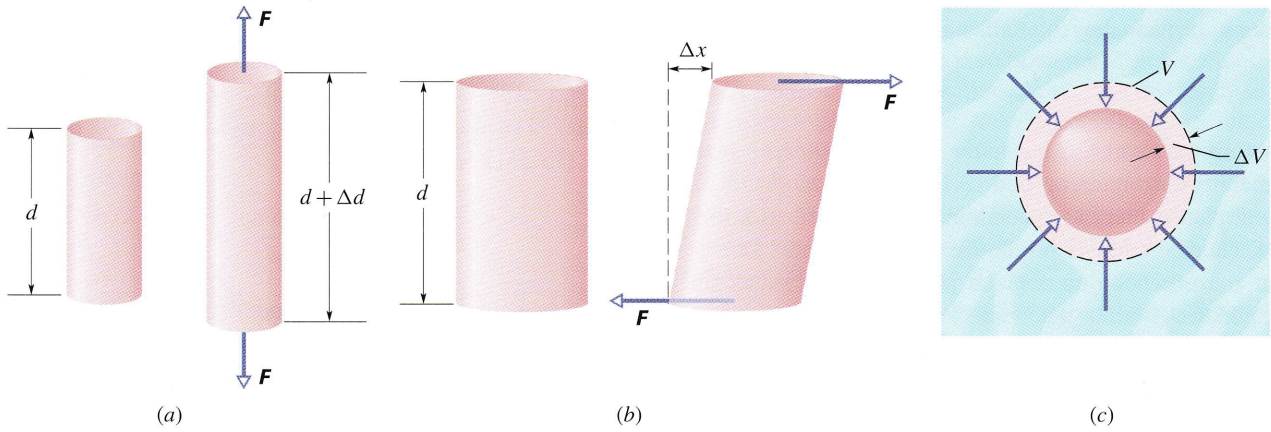
**Obr. 13.12** Atomy pevných kovových materiálů jsou rozmístěny v trojrozměrné mřížce, kde motiv mřížky se opakuje až k hranicím krystalových zrn. Pružinky představují meziatomové síly.

Všechny reálné „pevné“ předměty jsou do určité míry pružné. To znamená, že můžeme do určité míry měnit jejich rozměry tahem, jednosměrným tlakem, kroucením či všestranným tlakem. Abychom odhadli řádovou velikost těchto změn, představme si ocelovou tyč délky 1 m a průměru 1 cm, na kterou zavěsíme malé osobní auto. Tyč se protáhne, ale pouze o 0,5 mm neboli o 0,05 %. Po odlehčení se opět zkrátí na svou původní délku.

Když zavěsíme na tyč dvě auta, tyč se trvale deformuje, po odlehčení se nevrátí přesně do své původní délky. Když na tyč zavěsíme tři auta, tyč se přetrhne. Těsně před přetržením bude deformace menší než 0,2 %. I když uvedené deformace vypadají jako malé, hrají důležitou roli v inženýrské praxi. (Je zřejmě důležité, zda křídlo letadla přečká náhodně zvýšené zatížení bez pohromy a neodtrhne se od letadla.)

Na obr. 13.13 jsou znázorněny tři způsoby změny rozměru tělesa pod vlivem vnějších sil. Na obr. 13.13a je válec natahován. Na obr. 13.13b je válec namáhán silou, která působí kolmo k jeho ose. Je to podobný způsob namáhání, jakým můžeme měnit tvar balíčku karet nebo knihy. Na obr. 13.13c je znázorněno pevné těleso umístěné v kapalině, které je rovnoměrně stlačováno všestranným vysokým tlakem přenášeným kapalinou. Co mají společného uvedené tři typy namáhání těles? **Napětí**, tj. síla přečtená na jednotkovou plochu, v nich vyvolává **deformaci**, kterou v nauce o pružnosti chápeme jako relativní změnu tvaru. Napětí zobrazené na obr. 13.13a označujeme jako **tah**, na obr. 13.13b jako **smyk** a napětí z obr. 13.13c označujeme jako **všestranný tlak** (nebo jen tlak, když nemůže dojít k záměně s případem probíraným v následujícím odstavci „Tah a tlak“).

Napětí i deformace jsou v případech znázorněných v obr. 13.13 různé, ale je jim společné, že v prvním při-

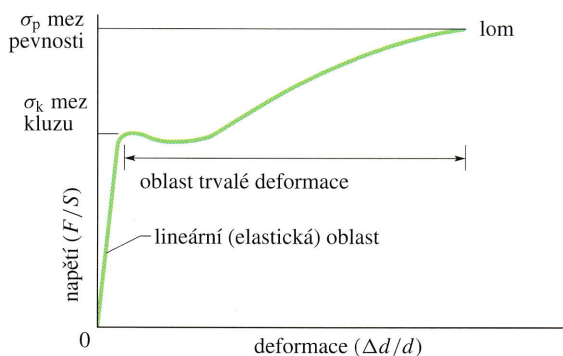


**Obr. 13.13** (a) Válec podrobený tahu se protáhne o  $\Delta d$ . (b) Válec podrobený smyku se deformuje o  $\Delta x$  podobným způsobem, jako když se sesune balíček hracích karet. (c) Pevná koule podrobená všestrannému tlaku, který vytvoří hydrostatický tlak kapaliny, se smrští o objem  $\Delta V$ . Velikost deformací je v obrázku značně zvětšena.

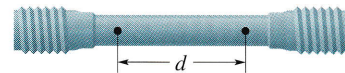
blížení, které většinou stačí k řešení praktických úloh, jsou vzájemně úměrné. Konstanta úměrnosti se nazývá **modul pružnosti**, takže můžeme psát

$$\text{napětí} = \text{modul pružnosti} \cdot \text{deformace} \quad (13.33)$$

Na obr. 13.14 je graf závislosti napětí na deformaci pro ocelový zkušební válcový vzorek, jehož tvar je znázorněn na obr. 13.15. Při standardní zkoušce se tahové napětí působící na vzorek pomalu zvyšuje z nuly až na hodnotu, při které se zkušební vzorek přetrhne. V celém průběhu děje pečlivě měříme a zaznamenáváme deformaci a k ní příslušné napětí. Pro podstatný rozsah použitých napětí je mezi napětím a deformací přímá úměrnost. Zrušíme-li napětí, vrátí se vzorek do svých původních rozměrů; v tomto oboru platí rov. (13.33). Jestliže napětí zvýšíme nad **mez kluzu**  $\sigma_k$  materiálu, zůstane vzorek trvale deformován. Jestliže napětí dále zvyšujeme, vzorek se nakonec přetrhne při napětí  $\sigma_p$ , které se nazývá **mez pevnosti**.



**Obr. 13.14** Křivka napětí-deformace pro ocelový zkušební vzorek tvaru znázorněného na obr. 13.15. Vzorek se začne trvale deformovat, jakmile napětí dosáhne *meze kluzu* oceli a přetrhne se, když napětí dosáhne její *meze pevnosti*.



**Obr. 13.15** Vzorek, který se užívá ke stanovení křivky napětí-deformace zobrazené na obr. 13.14. Odpovídající hodnoty napětí a deformace tvořící křivku se měří a zobrazují.

## Tah a tlak

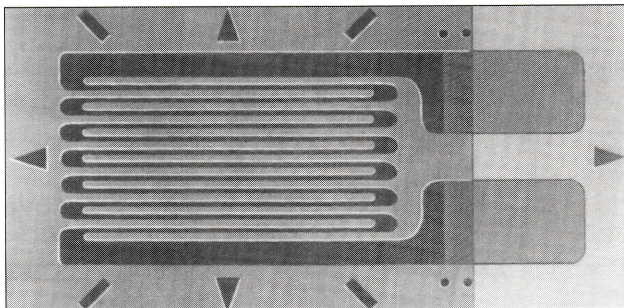
Pro případ namáhání vzorku tahem (obr. 13.13a) získáme napětí  $\sigma$  na ploše kolmé k působící síle jednoduše vydělením velikosti  $F$  působící síly velikostí  $S$  plochy průřezu, tedy  $\sigma = F/S$ . Působí-li síly protahující vzorek tak, jak je vyznačeno na obrázku, nazýváme napětí **tahem**. Jsou-li síly opačně orientované, takže vzorek zkracují, mluvíme o **tlaku** a znaménko napětí  $\sigma$  pokládáme za záporné. (V tahově namáhané tyči je na ploše říznuté šikmo ke směru působící síly napětí jiné než právě uvedený tlak. Tlak právě zavedený nesmíme zaměňovat se všestranným tlakem v kapalinách a plynech. Ten je stejný na všech plochách procházejících daným bodem a setkáme se s ním na str. 344.) **Deformace**  $e$  je bezrozměrová veličina, kterou pro tahové namáhání vzorku vyjádříme jako podíl prodloužení vzorku  $\Delta d$  k jeho délce  $d$ , tedy  $e = \Delta d/d$ . Deformaci v tomto případě nazýváme **relativní prodloužení**. Je dána hodnotou zlomku a často ji vyjadřujeme v procentech. Působí-li na tyč tlak, tyč se zkrátí a relativní prodloužení pokládáme za záporné. Jestliže tyč je dostatečně dlouhá a napětí v ní nepřesáhne hodnotu meze kluzu, pak deformace, kterou spočítáme pro celou tyč, platí také pro každou její část. Protože deformace je bezrozměrová, má modul pružnosti z rov. (13.33) stejný rozměr jako napětí, tj. sílu na jednotku plochy.

Modul pružnosti pro tahové (a tlakové) namáhání vzorku se nazývá **Youngův modul** neboli **modul pružnosti v tahu** a užíváme pro něj symbol  $E$ . Obecná rov. (13.33)

tak pro případ tahového namáhání dostane tvar

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta d}{d}. \quad (13.34)$$

Deformace vzorku  $\Delta d/d$  může často být poměrně snadno změřena tenzometrem (obr. 13.16). Je to jednoduché zařízení: plátek, který se speciálním lepidlem přilepí k místu, kde chceme relativní prodloužení měřit. Činnost tenzometru znázorněného na obrázku je založena na skutečnosti, že elektrický odpor jeho vodivé cesty (značena tmavěji) se s protažením tenzometru zvětší.



**Obr. 13.16** Tenzometr vnějších rozměrů 9,8 mm × 4,6 mm. Tenzometr se přilepí na místo předmětu, ve kterém potřebujeme změřit deformaci; tenzometr se deformuje spolu s předmětem v místě, kde je přilepen. Elektrický odpor tenzometru se mění s deformací a umožňuje měřit deformace asi do velikosti 3 %.

I když Youngův modul pro tah a tlak bývá téměř stejný, mez pevnosti se často pro obě namáhání velmi liší. Např. beton je velmi pevný v tlaku, ale má velmi malou mez pevnosti v tahu, a proto se jako materiál přenášející tah téměř neužívá. V tab. 13.1 jsou uvedeny hodnoty Youngových modulů a dalších elastických konstant často užívaných materiálů.

### Smyk

Napětí je síla na jednotku plochy i v případě smykového namáhání vzorku, ale síla zde působí v rovině plochy

a ne kolmo na ni jako v případě tahu. Smyková deformace je bezrozměrové číslo  $\Delta x/d$  — význam veličin plyne z obr. 13.13b. Odpovídající modul se označuje písmenem  $G$  a nazývá se **modul pružnosti ve smyku**. Pro smyk dostane rov. (13.33) konkrétní tvar

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{d}. \quad (13.35)$$

Smykové napětí hraje rozhodující úlohu při kroucení tyčí, a tedy též při lyžařům známých spirálních zlomeninách, zaviněných zkroucením končetin.

### Všestranný tlak

Napětí působící na kouli z obr. 13.13c je realizováno všestranným tlakem přenášeným kapalinou (srovnej s kap. 15). Deformace je dána poměrem  $\Delta V/V$ , kde  $V$  je původní objem deformovaného tělesa a  $\Delta V$  je absolutní hodnota změny jeho objemu způsobená tlakem. Odpovídající modul se označuje symbolem  $K$  a nazývá se **modul objemové pružnosti**. Říkáme, že takto namáhané těleso je pod hydrostatickým tlakem. Tlak přenášený kapalinou, která je v klidu, označujeme jako hydrostatický tlak  $p$ . Pro popsanou objemovou deformaci vzorku přejde obecná rov. (13.33) na tvar

$$p = K \frac{\Delta V}{V}. \quad (13.36)$$

Modul objemové pružnosti vody je  $2,2 \cdot 10^9$  Pa a oceli  $16 \cdot 10^{10}$  Pa. Hydrostatický tlak v průměrné hloubce Tichého oceánu, která je 4 000 m, je  $4,0 \cdot 10^7$  Pa. Relativní smrštění  $\Delta V/V$  objemu vody způsobené tímto tlakem je 1,8 %, ocel se pod stejným tlakem smrští jen o 0,025 %. Obecně jsou pevné látky díky svým tuhým atomovým mřížkám podstatně méně stlačitelné než kapaliny, jejichž atomy či molekuly jsou ke svým sousedům vázány mnohem méně pevně.

**Tabulka 13.1** Elastické vlastnosti často užívaných materiálů

MATERIÁL	$\rho$ kg·m <sup>-3</sup>	$E$ 10 <sup>9</sup> Pa	$\sigma_p$ 10 <sup>6</sup> Pa	$\sigma_k$ 10 <sup>6</sup> Pa
Ocel <sup>a</sup>	7 860	200	400	250
Hliník	2 710	70	110	95
Sklo	2 190	65	50 <sup>b</sup>	–
Beton <sup>c</sup>	2 320	30	40 <sup>b</sup>	–
Dřevo <sup>d</sup>	525	13	50 <sup>b</sup>	–
Kost	1 900	9 <sup>b</sup>	170 <sup>b</sup>	–
Polystyren	1 050	3	48	–

<sup>a</sup> konstrukční ocel (ASTM-A36)    <sup>b</sup> v tlaku    <sup>c</sup> vysokotlaký    <sup>d</sup> jedle douglaska



## PŘÍKLAD 13.7

Tyč kruhového průřezu z konstrukční oceli má poloměr  $R = 9,5 \text{ mm}$  a délku  $d = 81 \text{ cm}$ . Síla  $F$  o velikosti  $6,2 \cdot 10^4 \text{ N}$  (přibližně 6 tun) ji protahuje ve směru její délky.

(a) Jaké je napětí v tyči?

**ŘEŠENÍ:** Z definice plyne, že

$$\begin{aligned} \text{napětí} &= \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{(6,2 \cdot 10^4 \text{ N})}{\pi(9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \\ &= 2,2 \cdot 10^8 \text{ Pa.} \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Mez kluzu pro konstrukční ocel je  $2,5 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ , tyč je tedy nebezpečně blízko ke své mezní hodnotě, při které začne plasticky téci.

(b) Jaké je prodloužení tyče při tomto zatížení? Jaká je hodnota deformace?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (13.34), po dosazení právě získaných výsledků a hodnoty Youngova modulu pro ocel (tab. 13.1), plyne

$$\begin{aligned} \Delta d &= \frac{(F/S)d}{E} = \frac{(2,2 \cdot 10^8 \text{ Pa})(0,81 \text{ m})}{(2,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa})} = \\ &= 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,89 \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

a pro deformaci dále dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\Delta d}{d} &= \frac{(8,9 \cdot 10^{-4} \text{ m})}{(0,81 \text{ m})} = \\ &= 1,1 \cdot 10^{-3} = 0,11 \%. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

## PŘÍKLAD 13.8

Femur, základní kost stehna, má u dospělého člověka minimální průměr asi  $2,8 \text{ cm}$ , což odpovídá ploše průřezu  $S = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Při jakém tlaku kost praskne?

**ŘEŠENÍ:** Z tab. 13.1 plyne, že mez pevnosti  $\sigma_p$  pro kost namáhanou tlakem je  $170 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ . Síla  $F$ , která vytvoří ve femuru napětí  $\sigma_p$ , je tedy

$$\begin{aligned} F &= \sigma_p S = (170 \cdot 10^6 \text{ Pa})(6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = \\ &= 1,0 \cdot 10^5 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

To je přibližně 10 tun. I když je to velká síla, může být dosažena např. při nešikovném přistání parašutisty. Vhodným rozložením nárazu do delšího časového intervalu je však možno sílu zmenšit hluboko pod nebezpečnou hodnotu.

## PŘÍKLAD 13.9

Stůl má tři nohy, které jsou  $d = 1,00 \text{ m}$  dlouhé, a čtvrtou, která je delší o  $\Delta d = 0,50 \text{ mm}$ , takže se stůl mírně viklá. Těžký

ocelový válec o hmotnosti  $m = 290 \text{ kg}$  je vzpřímeně postaven na stůl (hmotnost stolu, která je podstatně menší než hmotnost válce, při výpočtu zanedbáme), takže všechny čtyři nohy se zkrátí a stůl se přestane viklat. Nohy jsou umělohmotné válce s plochou průřezu  $S = 1,0 \text{ cm}^2$  a mají Youngův modul  $E = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ . Předpokládejte, že na dokonale tuhé vrchní desce stolu je válec umístěn tak, že deska zůstane vodorovná, že nohy stolu se neohnou a že podlaha je dokonale tuhá. Jakou silou nese podlaha každou ze čtyř noh?

**ŘEŠENÍ:** Za systém zvolíme stůl a ocelový válec. Situace je podobná jako na obr. 13.11, pouze slona zastupuje ocelový válec. Aby zůstala deska stolu vodorovná, musí být všechny tři stejně dlouhé nohy stlačeny o stejný úsek, který označíme  $\Delta d_3$ . Síly, které způsobí tato stlačení také musí být stejné, jejich velikost označíme  $F_3$ . Delší noha musí být stlačena o delší úsek  $\Delta d_4$  větší silou  $F_4$ . Musí platit rovnice

$$\Delta d_4 = \Delta d_3 + \Delta d. \quad (13.37)$$

Rovnici (13.34) můžeme přepsat na tvar  $\Delta d = Fd/(ES)$ . Tuto rovnici užijeme, abychom dosadili za  $\Delta d_3$  a  $\Delta d_4$  do rov. (13.37). Přitom za  $d$  budeme pokládat původní délku všech noh, tj.  $1 \text{ m}$ . Nepatrný rozdíl jejich délek zde můžeme zanedbat. Z rov. (13.37) tak dostaneme

$$F_4 d = F_3 d + SE \Delta d. \quad (13.38)$$

Z rov. (13.8), která udává rovnováhu  $y$ -ových složek sil, pro náš systém plyne

$$\sum F_y = 3F_3 + F_4 - mg = 0. \quad (13.39)$$

Ze soustavy rov. (13.38) a rov. (13.39) vypočteme neznámou sílu  $F_3$

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{mg}{4} - \frac{SE \Delta d}{4d} = \\ &= \frac{(290 \text{ kg})(9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})}{4} - \\ &\quad - \frac{(1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)(1,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa})(5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m})}{4(1,00 \text{ m})} = \\ &= 711 \text{ N} - 163 \text{ N} = 548 \text{ N} \doteq 550 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

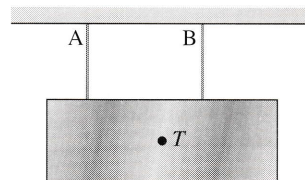
Z rov. (13.39) potom získáme

$$\begin{aligned} F_4 &= mg - 3F_3 = (290 \text{ kg})(9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) - \\ &\quad - 3(548 \text{ N}) \doteq 1200 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Dále lze ukázat, že každá ze tří kratších noh byla stlačena o  $0,42 \text{ mm}$  a delší noha o  $0,92 \text{ mm}$ , tedy že rozdíl délek noh  $0,50 \text{ mm}$  byl vyrovnán.

**KONTROLA 5:** Obrázek ukazuje vodorovný homogenní blok zavěšený na dvou drátech A a B, které byly ustříženy z těžce cívky. Těžiště bloku je blíže k drátu B než

k drátu A. (a) Uvažujete-li momenty vzhledem k těžišti, udejte, zda moment vytvářený silou přenášenou drátem A je větší, menší, nebo stejně velký jako moment síly vytvářený drátem B. (b) Kterým drátem je přenášena větší síla? (c) Jestliže délky drátů jsou nyní stejné, který z drátů byl původně delší?



## PŘEHLED & SHRNUÍ

### Statická rovnováha

Říkáme, že tuhé těleso, které je a zůstává v klidu, je ve *statické rovnováze*. Vektorový součet všech vnějších sil působících na takové těleso musí být nulový:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (\text{rovnováha sil}). \quad (13.3)$$

Když všechny síly leží v rovině  $xy$ , je právě uvedená vektorová rovnice ekvivalentní dvěma skalárními rovnicím pro složky sil:

$$\sum F_x = 0 \quad (\text{rovnováha } x\text{-ových složek sil}) \quad (13.7)$$

a

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{rovnováha } y\text{-ových složek sil}). \quad (13.8)$$

Je-li těleso ve statické rovnováze, musí být také součet všech vnějších momentů sil na něj působících nulový, a to *nezávisle na tom*, vůči kterému bodu moment počítáme;

$$\sum \mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (\text{rovnováha momentů sil}). \quad (13.5)$$

Když všechny síly leží v rovině  $xy$ , jsou všechny vektory momentů sil rovnoběžné s osou  $z$ . Rov. (13.5) je potom ekvivalentní jedné skalární rovnici pro  $z$ -ové složky momentů sil,

$$\sum M_z = 0 \quad (\text{rovnováha } z\text{-ových složek momentů sil}). \quad (13.9)$$

### Těžiště

Tíhová síla působí na jednotlivé částice tělesa. Výsledek takového působení je stejný, jako když umístíme výslednici těchto individuálních sil — tíhovou sílu  $m\mathbf{g}$  — do význačného bodu tělesa, který nazveme *těžiště*. Těžiště splývá se středem hmotnosti, když je tíhové zrychlení  $\mathbf{g}$  konstantní v celém objemu tělesa, tedy stejně pro všechny jeho částice. Termíny „těžiště“ a „střed hmotnosti“ ve zbytku knihy nerozlišujeme.

### Moduly pružnosti

Uvedli jsme tři *moduly pružnosti*, které se užívají k popisu pružnostního (elastického) chování těles, na která působí síly. Deformace (relativní změna tvaru tělesa) je přímo úměrná napětí

(síle na jednotku plochy); jejich podíl je příslušným modulem. Obecná rovnice vztahu napětí a deformace je

$$\text{napětí} = \text{modul pružnosti} \cdot \text{deformace}. \quad (13.33)$$

### Tah a tlak

Pro těleso, které je namáháno tahem nebo tlakem (obr. 13.13a), dostane obecná rov. (13.33) tvar

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta d}{d}, \quad (13.34)$$

kde  $\Delta d/d$  je relativní prodloužení (deformace) vzorku (namáhaného tělesa),  $F$  je velikost síly  $\mathbf{F}$  působící na vzorek,  $S$  je plocha průřezu vzorku kolmé ke směru působící síly  $\mathbf{F}$  a  $E$  je *Youngův modul* látky, ze které je vzorek zhotoven. Napětí je  $F/S$ .

### Smyk

Pro objekt, který je namáhán smykovým napětím (obr. 13.13b), přejde rov. (13.33) na konkrétní tvar

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{d}, \quad (13.35)$$

kde  $\Delta x/d$  je smyková deformace vzorku,  $\Delta x$  je posunutí vrchního konce vzorku ve směru síly  $\mathbf{F}$  působící na vrchní konec vzorku a  $G$  je modul *pružnosti ve smyku* látky, z níž je vzorek zhotoven. Napětí je  $F/S$ .

### Všestranný tlak (hydrostatický)

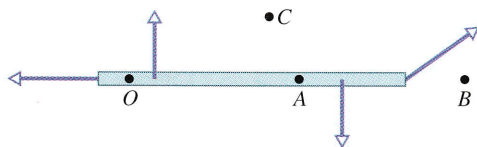
Když je vzorek vystaven *všestrannému tlaku* — nejnadhěji lze realizovat hydrostatickým tlakem kapaliny obklopující vzorek (obr. 13.13c) — přejde rov. (13.33) na tvar

$$p = K \frac{\Delta V}{V}, \quad (13.36)$$

kde  $p$  je *hydrostatický tlak* kapaliny obklopující vzorek. Deformace  $\Delta V/V$  je absolutní hodnota relativní změny objemu vzorku vyvolané působícím tlakem a  $K$  je *modul objemové pružnosti* látky, z které je zhotoven vzorek.

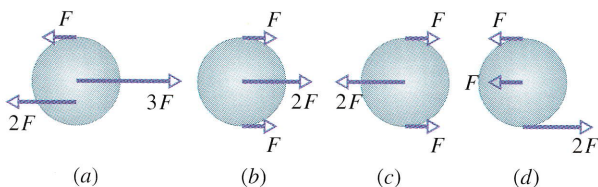
## OTÁZKY

1. Na obr. 13.17 je pohled shora na tyč namáhanou čtyřmi silami. Předpokládejme, že jsme zvolili osu otáčení bodem  $O$  kolmo k rovině obrázku a zjistili, že momenty sil vůči této ose jsou v rovnováze (jejich součet je nulový). Bude rovnováha momentů sil zachována, zvolíme-li místo osy procházející bodem  $O$  osu s ní rovnoběžnou, procházející body (a)  $A$ , (b)  $B$ , (c)  $C$ ? (d) Předpokládejme, že oproti předcházejícímu případu nyní zjistíme, že momenty sil vůči ose  $O$  nejsou v rovnováze. Existuje v tomto případě takový bod, aby — když jím povedeme rovnoběžnou osu — byly momenty sil vůči této ose v rovnováze?



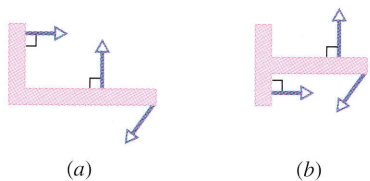
Obr. 13.17 Otázka 1

2. Obr. 13.18 ukazuje pohled shora na čtyři disky (puky), které bez tření kloužou po podložce. Tři síly o velikostech  $F$ ,  $2F$  nebo  $3F$  působí na každý z disků, přičemž působíště sil je buď ve středu disku, na jeho okraji, nebo na půl cesty mezi okrajem a středem. Vektory sil se otáčejí spolu s diskem a v momentce znázorněné na obr. 13.18 míří přesně doprava nebo doleva. Které disky jsou v rovnováze?



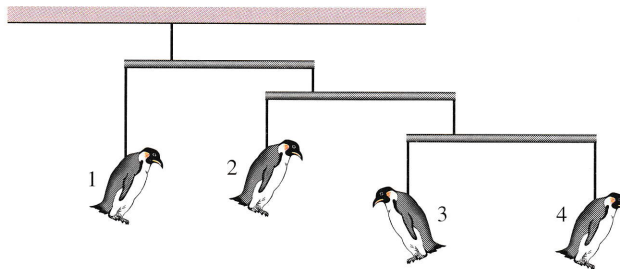
Obr. 13.18 Otázka 2

3. Na obr. 13.19 je pohled shora na dva pevné útvary, na které působí tři síly. Směry sil jsou na obrázku vyznačeny. Které útvary mohou být uvedeny do stavu statické rovnováhy vhodným nastavením velikostí působících sil (uvažujeme pouze nenulové síly)?



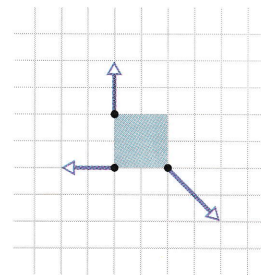
Obr. 13.19 Otázka 3

4. Na obr. 13.20 je zobrazena hračka s visícími tučňáky. Každá vodorovná tyčka (hmotnost tyček budeme v dalších úvahách zanedbávat) je zavěšena tak, že její část vpravo od závěsu je třikrát delší, než část vlevo od závěsu. Tučňák 1 má hmotnost  $m_1 = 48$  kg. Jaké jsou hmotnosti ostatních tučňáků, aby mohli viset tak, jak je znázorněno na obrázku?



Obr. 13.20 Otázka 4

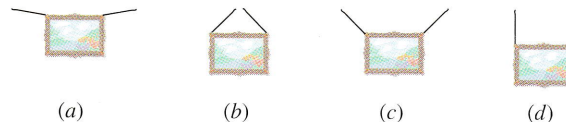
5. Na obr. 13.21 je pohled shora na kovový čtvereček ležící na dokonale hladké podložce (mezi čtverečkem a podložkou nepředpokládáme žádné tření). Tři síly, jejichž velikosti i směry jsou na obrázku přesně vyznačeny, působí na rohy čtverečku. (a) Je splněna první podmínka rovnováhy z rov. (13.1)? (b) Je splněna také druhá podmínka rovnováhy z této rovnice? (c) Jestliže některá z odpovědí na otázku (a) nebo (b) je záporná, můžeme přidáním vhodně volené čtvrté síly dosáhnout splnění obou podmínek rovnováhy?



Obr. 13.21 Otázka 5

6. (a) Kolik různých věží, které budou bez další podpory stát, můžete vytvořit ze tří malých kostek stavebnice Lego? Kostky se čtyřmi výčnělky lze postavit přímo nad sebe nebo je možné je spojit tak, že vrchní kostka je posunuta o půl své délky vpravo nebo vlevo. (Uspořádání a jeho zrcadlový obraz pokládáme za jedno uspořádání.) Kolik takových věží je (b) v stabilní rovnováze a kolik (c) v labilní rovnováze (těžiště nad hranou kostky)? (d) Které uspořádání je nejstabilnější (nejhůře se převrátí) a proč?

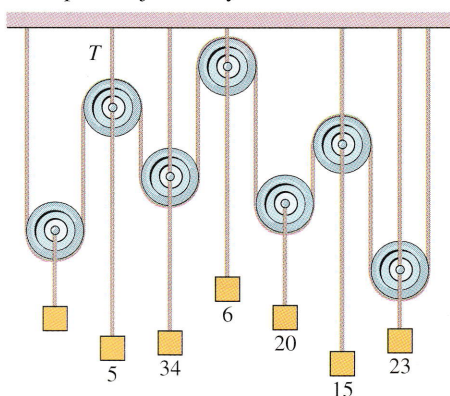
7. Na obr. 13.22 jsou znázorněny čtyři způsoby zavěšení obrazu na stěnu dvěma stejně dlouhými vlákny. Vlákna na obr. 13.22b, c svírají stejné úhly s vodorovnou přímkou. Seřadte všechna čtyři uspořádání podle velikosti sil přenášených vlákny. Uspořádání, kde jsou síly největší, zařadte jako první.



Obr. 13.22 Otázka 7

8. Žebřík je opřen o stěnu, přičemž tření mezi stěnou a žebříkem zanedbáme. Proti spadnutí je žebřík zabezpečen třením mezi ním a podlahou. Spodní konec žebříku přisuneme směrem ke stěně. Uveďte, které z následujících veličin se zvětší, zmenší, nebo zůstanou stejné: (a) síla, kterou působí podlaha na žebřík, (b) síla, kterou působí stěna na žebřík, (c) síla statického tření působící od podlahy na žebřík a (d) maximální hodnota  $F_{s,max}$  statické třecí síly.

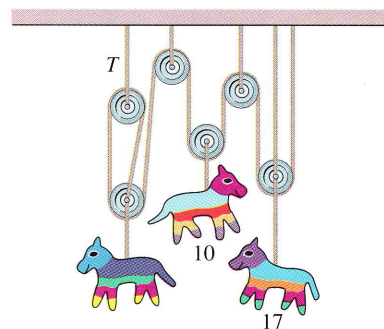
9. Jeden učitel fyziky, když se dostal do ráže, zkonstruoval statický systém kladek a lan, znázorněný na obr. 13.23. Jedno dlouhé lano vychází od stropu, obtáčí všechny kladky a končí opět na stropě. Na kratších lanech jsou od stropu zavěšeny některé kladky a také všechna závaží upevněná v ose kladek. Tíhy závaží jsou až na jednu výjimku na obrázku vyznačeny (čísla udávají tíhu v newtonech). (a) Jaká je velikost zbývající tíhy? (Tip: Obtáčí-li lano kladku z poloviny, jak je tomu na obrázku, je výsledná síla působící od lana na kladku dvojnásobkem síly přenášené lanem — neboli, jak se běžně ne zcela přesně říká, dvojnásobkem napětí lana.) (b) Jakou sílu  $T$  přenáší krátké lano? Při výpočtech pokládejte kladky a lana za nehmotné.



Obr. 13.23 Otázka 9

10. Tři figurky visí na statickém systému kladek a lan zobrazeném na obr. 13.24. Jedno dlouhé lano jde z místa upevnění vpravo na stropě přes všechny kladky až do osy kladky vlevo dole. Několik kratších lan slouží k zavěšení kladek na strop nebo figurek na kladky. Tíha dvou figurek (v newtonech) je vyznačena na obrázku. (a) Jaká je tíha třetí figurky? (Tip: Podobně

jako v předcházející otázce využijte skutečnosti, že síla přenášená dlouhým lanem je poloviční než síla, kterou lano působí na kladku.) (b) Jaká je síla přenášená v krátkém laně označeném  $T$ ?

Obr. 13.24  
Otázka 10

11. (a) Použijete v úloze uvedené v kontrole 3 při výpočtu velikosti momentu síly  $M_p$ , který na tyč působí od síly  $T$ , funkci  $\sin \theta$  nebo  $\cos \theta$ ? (b) Jestliže zmenšíme úhel  $\theta$  tak, že zkrátíme provaz a tyč ponecháme vodorovnou, bude nutno moment  $M_p$  síly pro zachování rovnováhy zvětšit, zmenšit, nebo ponechat stejný? (c) Sílu  $T$  vytvářející moment musíme v tom případě zvětšit, zmenšit, nebo ponechat stejnou?

12. Tabulka udává velikosti ploch tří povrchů a velikosti výsledných sil, které na tyto plochy působí. Síly působí kolmo k povrchům a jsou podél nich rovnoměrně rozloženy. Seřadte povrchy podle velikostí napětí, která na ně působí.

	VELIKOST PLOCHY	SÍLA
Povrch A	$0,5S_0$	$2F_0$
Povrch B	$2S_0$	$4F_0$
Povrch C	$3S_0$	$6F_0$

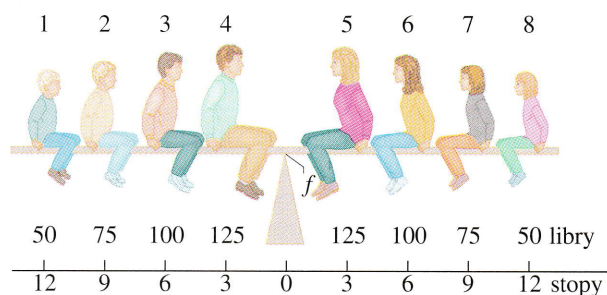
13. Dlouhá tyč byla rozřezána na tyče A, B, C. Tyče se přiloženými silami prodloužily. Seřadte je sestupně podle velikosti napětí v nich.

	PŮVODNÍ DÉLKA	ZMĚNA DÉLKY
Tyč A	$2d_0$	$\Delta d_0$
Tyč B	$4d_0$	$2\Delta d_0$
Tyč C	$10d_0$	$4\Delta d_0$

## CVIČENÍ & ÚLOHY

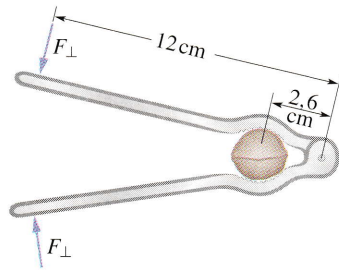
### ODST. 13.4 Příkladů statické rovnováhy

1C. Osmičlenná americká rodinka, jejíž váhy v librách jsou uvedeny na obr. 13.25, se houpe na prkně. Kteří z členů rodiny (udejte čísla) vytvářejí největší momenty síly vůči ose houpačky (a) mířící před rovinu stránky, (b) mířící za rovinu stránky?



Obr. 13.25 Cvičení 1

**2C.** Na obr. 13.26 je znázorněn ořech, který chceme rozlousknout louskáčkem. Předpokládejme, že k rozlousknutí ořechu je třeba na něj působit z obou stran silou o velikosti 40 N. Jaké velikosti  $F_{\perp}$  musí mít síly, kterými působíme kolmo na rukojeti louskáčku, abychom ořech rozlouskli? Důležité rozměry jsou udány na obrázku.



**Obr. 13.26**  
Cvičení 2

**3C.** Šikmá věž v Pise (obr. 13.27) je 55 m vysoká a její průměr je 7 m. Vršek věže je odchýlen 4,5 m od svislice. Pokládejte věž



**Obr. 13.27** Cvičení 3. Šikmá věž v Pise (fotografie není pootočená).

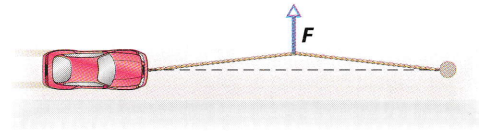
za homogenní kruhový válec. (a) Jak velká další odchylka vršku věže by vedla k jejímu pádu převrácením? (b) Jaký by přitom byl úhel mezi svislicí a osou věže?

**4C.** Na částici působí síly  $F_1 = 10i - 4j$  a  $F_2 = 17i + 2j$ . (a) Jaká síla  $F_3$  vyrovná tyto síly? (Tip: Vektorový součet všech tří sil musí být nulový.) (b) Jaký úhel svírá síla  $F_3$  s osou  $x$ ? Pro číselný výpočet předpokládejte, že čísla udávají velikosti sil v newtonech.

**5C.** Lukostřelec napíná luk. Jaký úhel svírají dvě části tětiny, známe-li sílu, jakou ji lukostřelec natahuje?

**6C.** Na obr. 13.28 je znázorněno, jak řidič znalý fyziky vyprošťuje svůj vůz z hlubokého bláta na krajnici silnice. Jeden konec lana uvázal pevně kolem předního nárazníku a druhý kolem patníku vzdáleného 20 m. Potom zatáhne za střed lana kolmo k jeho délce silou 600 N. Lano se protáhne, takže jeho

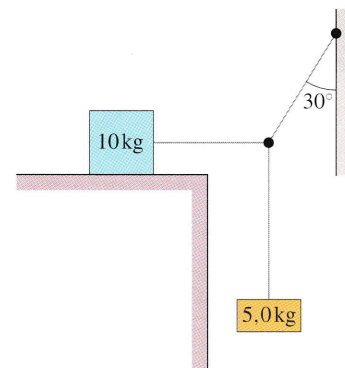
střed se vysune ve směru síly o 30 cm, když se vůz nepatrně pohne. Jaká síla působí na vůz v tomto okamžiku?



**Obr. 13.28** Cvičení 6

**7C.** Provaz, jehož hmotnost budeme zanedbávat, je natažen mezi dvěma úchyty vzdálenými 3,44 m. Provaz se prohne o 35 cm, když se na něj uprostřed zavěsí předmět o tíze 3 160 N. Jaká je potom síla napínající provaz?

**8C.** Na obr. 13.29 je znázorněn systém, který je v rovnováze, ale jehož blok spočívající na vodorovné podložce začne klouzat, když k předmětu o hmotnosti 5 kg je přidáno jakékoliv další závaží. Jaký je statický činitel tření mezi desetikilogramovým blokem a jeho podložkou?



**Obr. 13.29**  
Cvičení 8

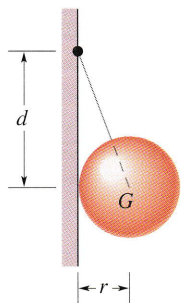
**9C.** Lešení o hmotnosti 60 kg a délce 5 m je drženo ve vodorovné poloze závěsnými lany na obou jeho koncích. Čistič oken o hmotnosti 80 kg stojí v místě, které je vzdáleno 1,5 m od jednoho konce. Jaká síla napínající lano je přenášena (a) lanem, které je blíže k čističi, (b) vzdálenějším lanem?

**10C.** Tři muži nesou trám. Jeden muž je na konci trámu a druzí dva nesou trámek mezi sebou na příčném trámu. Kde musí být umístěn příčný trámek, aby všichni muži nesli stejně? (Zanedbejte hmotnost příčného trámu.)

**11C.** Rovnoměrně naložená přepravka tvaru krychle o hraně 0,750 m a tíze 500 N spočívá na podlaze a je zapřena o velmi nízkou pevnou překážku. V jaké výšce nad podlahou musí působit síla 350 N, aby přepravku právě nadzvedla?

**12C.** Homogenní koule tíhy  $G$  a poloměru  $r$  visí na vlákně připevněném k dokonale hladké stěně ve výšce  $d$  nad středem koule (obr. 13.30). Najděte (a) napětovou sílu přenášenou vláknem, (b) sílu, kterou stěna působí na kouli.

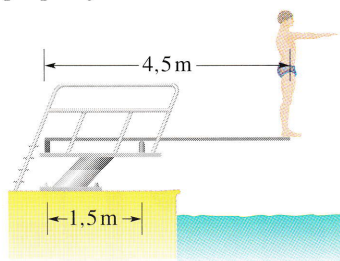
**13C.** Auto hmotnosti 1 360 kg má rozvor (vzdálenost mezi přední a zadní nápravou) 3,05 m. Těžiště auta je 1,78 m za přední nápravou. Určete zatížení (a) kol přední nápravy, (b) kol zadní nápravy, za předpokladu, že auto stojí na rovině a obě kola též jsou zatížena stejně.



**Obr. 13.30**  
Cvičení 12

**14C.** Muž o hmotnosti 75 kg se na vodorovné lávce zastaví, když urazil čtvrtinu vzdálenosti od jednoho jejího konce. Lávka je homogenní a její hmotnost je 300 kg. Jakou svislou silou působí lávka a muž (a) na vzdálenější pilíř, (b) na bližší pilíř? Pilíře jsou umístěny na koncích lávky.

**15C.** Skokan vážící 580 N stojí na konci 4,5 m dlouhého skákacího prkna. Prkno je připevněno k dvěma podpěrám vzdáleným 1,5 m, jak je ukázáno na obr. 13.31. Jaká je velikost a orientace síly působící na prkno od (a) levé podpěry, (b) pravé podpěry? (c) Která podpěra je natahována a která stlačována?

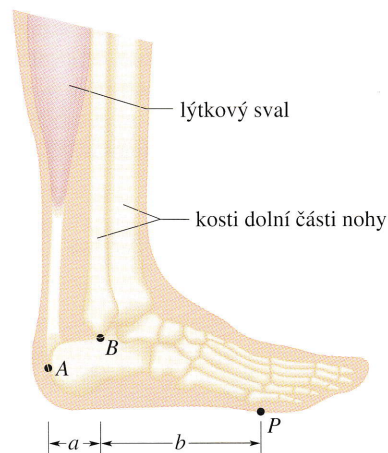


**Obr. 13.31**  
Cvičení 15

**16C.** Metrové pravítko je vyváženo na břitu podloženém v místě se značkou 50,0 cm. Na značku 12,0 cm položíme na sebe dvě mince a pravítko se nám pak povede vyrovnat, když břit podložíme pod značku 45,5 cm. Jedna mince má hmotnost 5,0 g. Jaká je hmotnost pravítka?

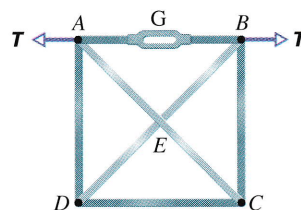
**17C.** Čistič oken hmotnosti 75 kg užívá žebřík, který má hmotnost 10 kg a je dlouhý 5,0 m. Spodní konec žebříku postaví na podlahu ve vzdálenosti 2,5 m od stěny a vrchní konec opře o naprasklé okno v této stěně. Když vyšplhá po žebříku 3,0 m, okno se rozbije. Vypočítejte (a) sílu, jakou žebřík působil na okno bezprostředně před jeho rozbitím, (b) velikost a směr síly, kterou podlaha působila na žebřík v tomto okamžiku. Zanedbejte tření mezi žebříkem a oknem a předpokládejte, že žebřík po podlaze neklouže.

**18C.** Obr. 13.32 ukazuje anatomickou stavbu spodní části nohy, která umožňuje stání na špičkách. Při něm je pata vysoko zvednutá nad podlahu a chodidlo se dotýká podlahy jen v malém okolí bodu  $P$ , které jsme na obrázku označili jako působiště síly podpírající nohu osoby stojící na špičkách. Vypočítejte síly, kterými působí na chodidlo (a) lýtkový sval v bodě  $A$ , (b) holenní a lýtková kost v bodě  $B$ , když osoba stojí na špičkách. Položte  $a = 5,0$  cm a  $b = 15,0$  cm a hledané síly vyjádřete v násobcích tíhy  $G$  osoby.



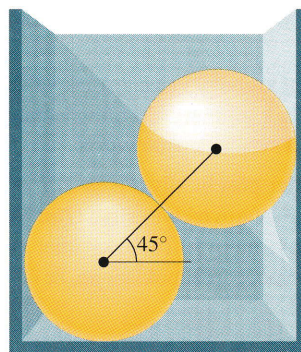
**Obr. 13.32**  
Cvičení 18

**19Ú.** Stahovákem  $G$  zkrátíme tyč  $AB$  čtvercového rámu  $ABCD$  znázorněného na obr. 13.33. Tím se tyč napne a na body  $A$  a  $B$  působí síly  $T$  mířící ven z rámu. Určete síly působící na ostatní tyče rámu. Najděte, které tyče jsou podrobeny tahu a které tlaku. Úhlopříčné tyče  $AC$  a  $BD$  se nedotýkají v místě  $E$ . Uvážení symetrie rámu zjednoduší řešení této a podobných úloh.



**Obr. 13.33**  
Úloha 19

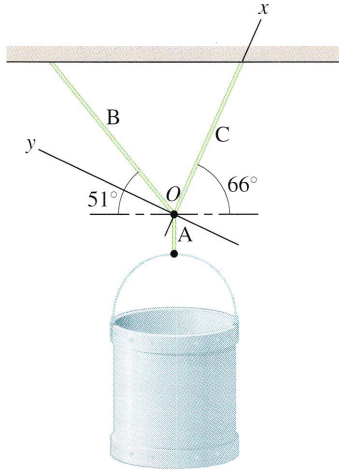
**20Ú.** Dvě stejné, homogenní koule jsou umístěny v pravouhlé pevné nádobě (obr. 13.34). Najděte síly, které působí na koule (a) od stěn nádoby, (b) síly vzájemného působení koulí, jestliže spojnice těžišť koulí svírá úhel  $45^\circ$  s vodorovnou rovinou. Výsledky vyjádřete v násobcích tíhy jedné koule. Neuvažujte tření.



**Obr. 13.34**  
Úloha 20

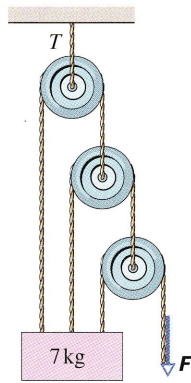
**21Ú.** Okov o hmotnosti 900 kg je zavěšen na svislém laně  $A$ , které je v místě  $O$  spojeno se dvěma dalšími lany  $B$  a  $C$ , která svírají s vodorovnou rovinou úhly  $51^\circ$  a  $66^\circ$  (obr. 13.35). Najděte napěťovou sílu přenášenou (a) lanem  $A$ , (b) lanem  $B$ , (c) lanem  $C$ . (Tip: Abyste nemuseli řešit systém dvou rovnic o dvou

neznámých, zvolte soustavu souřadnic tak, jak je naznačeno na obrázku.)



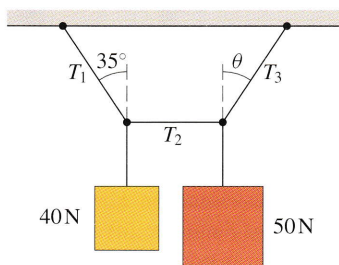
Obr. 13.35  
Úloha 21

22Ú. Síla  $F$  udržuje v systému znázorněném na obr. 13.36 rovnováhu. Hmotnost bloku je 7 kg. Vypočítejte sílu  $T$  přenášenou lanem, na kterém visí systém. Hmotnost kladek a tření v systému zanedbejte.



Obr. 13.36  
Úloha 22

23Ú. Systém z obr. 13.37 je v rovnováze, když prostřední vláknko je přesně vodorovné. Najděte (a) sílu  $T_1$ , (b) sílu  $T_2$ , (c) sílu  $T_3$  a úhel  $\theta$ .

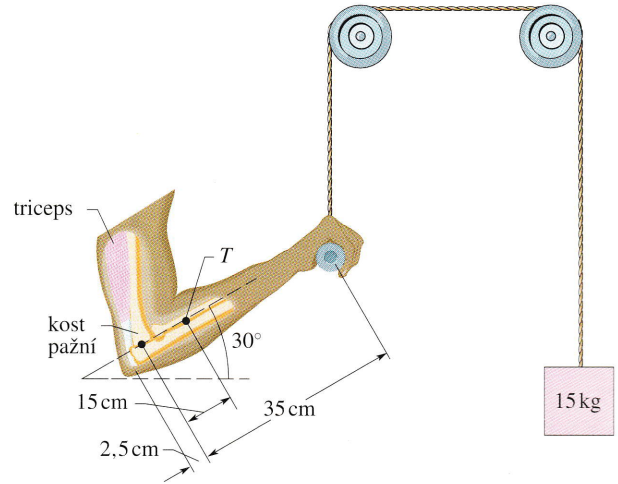


Obr. 13.37  
Úloha 23

24Ú. Nerovnoramenné váhy jsou tvořeny pevnou tyčí podepřeno břítem mimo střed tyče a miskami zavěšenými na koncích tyče. Hmotnost tyče a misek budeme v dalších úvahách zanedbávat. Váhy jsou vyrovnány, když závaží hmotnosti  $m$  je na

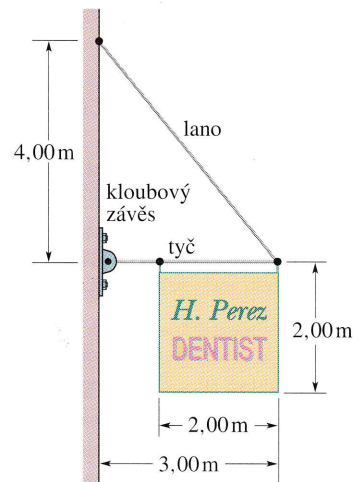
levé misce a závaží hmotnosti  $m_1$  na pravé misce vah. Když umístíme závaží hmotnosti  $m$  na pravou misku, musíme dát k vyrovnání vah na levou misku závaží hmotnosti  $m_2$ . Ukažte, že platí  $m = \sqrt{m_1 m_2}$ .

25Ú. Závaží o hmotnosti 15 kg je přes dvě kladky taženo rukou, jak je ukázáno na obr. 13.38. Paže je svislá, zatímco předloktí svírá úhel  $30^\circ$  s vodorovnou rovinou. Jakou silou působí na předloktí (a) triceps, (b) pažní kost? Předloktí a ruka mají dohromady hmotnost 2,0 kg. Těžiště systému je 15 cm od loketního kloubu směrem k ruce, místo upnutí tricepsu 2,5 cm na druhou stranu (srovnej s obrázkem).



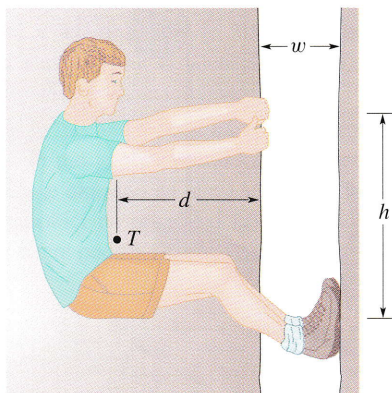
Obr. 13.38 Úloha 25

26Ú. Čtvercový vývěsní štít (hmotnost 50,0 kg, délka strany čtverce 2,0 m) je vysunut do ulice na tyči zanedbatelné hmotnosti a délky 3,00 m. Lano napnuté mezi vzdálenějším koncem tyče a místem upevnění na stěně, které je 4,00 m nad kloubovým závěsem nesoucím tyč, udržuje tyč ve vodorovné poloze (obr. 13.39). (a) Jaká je napěťová síla přenášená lanem? Jaká je (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou působí stěna přes kloubový závěs na tyč?



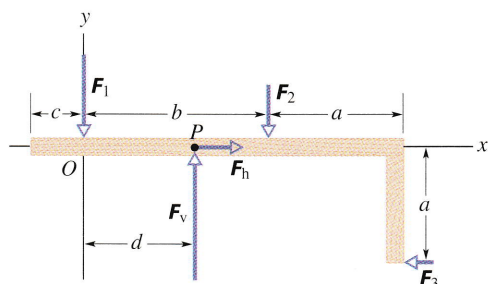
Obr. 13.39  
Úloha 26

**27Ú.** Na obr. 13.40 je schematicky znázorněn horolezec, který leze „na sokolika“ podél štěrbiny, přičemž rukama táhne za jednu stranu štěrbiny a chodidly tlačí na její druhou stranu. Štěrbina má šířku  $w = 0,20$  m. Těžiště horolezce je ve vodorovné vzdálenosti  $d = 0,40$  m od bližší stěny štěrbiny. Statický koeficient tření mezi rukama horolezce a skálou je  $f_1 = 0,40$  a mezi botami horolezce a skálou  $f_2 = 1,2$ . (a) Jaký nejmenší tah rukama a tlak nohama ve vodorovném směru udrží horolezce na skále? (b) Jaká musí být při tomto tahu svislá vzdálenost  $h$  mezi rukama a nohama, aby horolezec byl v rovnováze? (c) Když se horolezec setká s mokrou skálou, takže hodnoty  $f_1$  a  $f_2$  se zmenší, jak se změní odpovědi na otázky (a) a (b)?



Obr. 13.40 Úloha 27

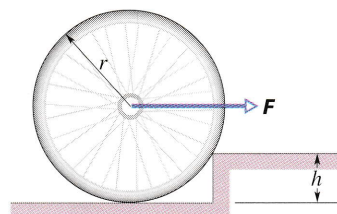
**28Ú.** Síly  $F_1$ ,  $F_2$  a  $F_3$  působí na systém znázorněný na obr. 13.41 při pohledu shora. Chceme dostat systém do rovnováhy tím, že do bodu  $P$  s vhodně zvolenou vzdáleností  $d$  umístíme sílu s vektorovými složkami  $F_h$  a  $F_v$ . Zadané jsou hodnoty  $a = 2,0$  m,  $b = 3,0$  m,  $c = 1,0$  m,  $F_1 = 20$  N,  $F_2 = 10$  N a  $F_3 = 5,0$  N. Najděte hodnoty: (a)  $F_h$ , (b)  $F_v$  a (c)  $d$ .



Obr. 13.41 Úloha 28

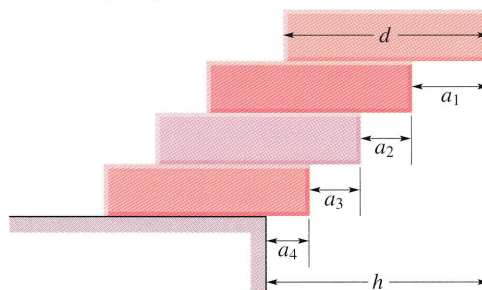
**29Ú.** Jak velká musí být síla  $F$  působící vodorovně na osu kola, aby kolo překonalo schod výšky  $h$  (obr. 13.42)? Kolo má poloměr  $r$  a váží  $G$ .

**30Ú.** Ve stropě je čtvercový poklop o straně  $0,91$  m a hmotnosti  $11$  kg. Na jedné straně jsou panty, na druhé držadlo. Těžiště poklopu je posunuto o  $10$  cm směrem k pantům od jeho geometrického středu. Jak velkou sílu musí být schopno přenést (a) držadlo, (b) panty?



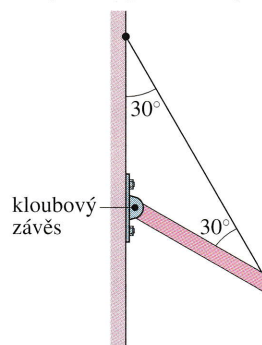
Obr. 13.42 Úloha 29

**31Ú.** Čtyři stejné cihly délky  $d$  jsou naskládány na sebe tak, že každá vyšší o něco přesahuje tu nižší (obr. 13.43). Nalezněte a vyjádřete v násobcích délky  $d$  maximální délky přesahů (a)  $a_1$ , (b)  $a_2$ , (c)  $a_3$ , (d)  $a_4$  a (e)  $h$ , při kterých ještě stavba zůstane v rovnováze, tedy nespadne.



Obr. 13.43 Úloha 31

**32Ú.** Jeden konec tyče hmotnosti  $20$  kg a délky  $1$  m je připevněn ke stěně kloubovým závěsem. Druhý konec je zavěšen na vlákně způsobem vyznačeným na obr. 13.44. (a) Najděte napěťovou sílu přenášenou vláknem. Jaká je (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou kloubový závěs působí na tyč?

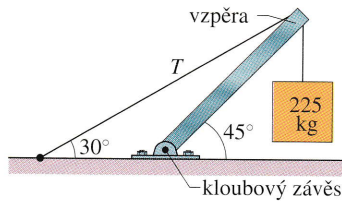


Obr. 13.44 Úloha 32

**33Ú.** Systém na obr. 13.45 je v rovnováze. Závaží o hmotnosti  $225$  kg je zavěšeno na konci homogenní vzpěry, jejíž hmotnost je  $45$  kg. Stanovte: (a) sílu přenášenou vláknem  $T$ , (b) vodorovnou a (c) svislou složku síly, kterou vzpěra působí na kloubový závěs.

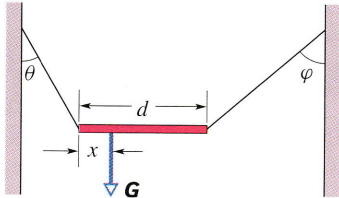
**34Ú.** Dveře vysoké  $2,1$  m a široké  $0,91$  m mají hmotnost  $27$  kg. Jeden pant je umístěn  $0,30$  m od vršku dveří, druhý ve stejné vzdálenosti od spodku dveří. Každý z pantů nese polovinu tíhy dveří. Předpokládejte, že těžiště dveří leží v jejich geometrickém



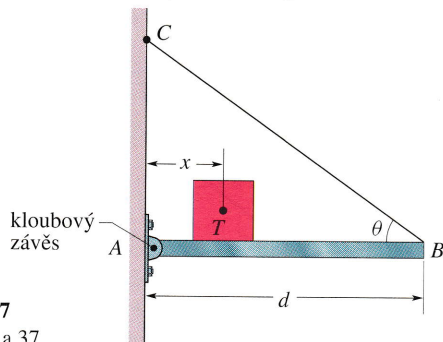
**Obr. 13.45**  
 Úloha 33


středu. Stanovte: (a) svislé a (b) vodorovné složky sil, kterými panty působí na dveře.

**35Ú.** Nehomogenní tyč tíhy  $G$  je zavěšena na dvou lanec tak, že je v rovnováze vodorovná (obr. 13.46). Jedno lano svírá se svislicí úhel  $\theta = 36,9^\circ$ , druhé úhel  $\varphi = 53,1^\circ$ . Délka tyče  $d$  je 6,1 m. Vypočítejte vzdálenost  $x$  těžiště tyče od jejího levého konce.

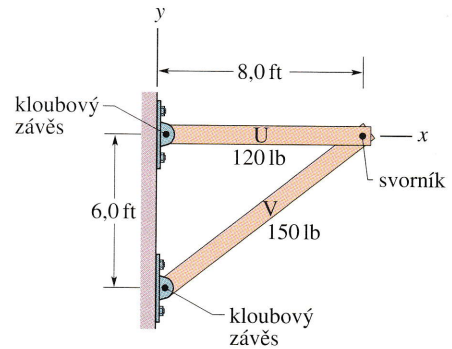

**Obr. 13.46**  
 Úloha 35

**36Ú.** Na obr. 13.47 je znázorněna vodorovná tyč  $AB$  připojená kloubovým závěsem ke svislé stěně a na opačném konci tenkým drátem  $BC$ , který se stěnou svírá úhel  $\theta$ . Závaží se může volně pohybovat podél tyče; jeho polohu určíme udáním vzdálenosti  $x$  těžiště závaží od stěny. Zjistěte, jak závisí na  $x$  (a) síla přenášená drátem, (b) vodorovná a (c) svislá složka síly, kterou kloub působí na tyč. Hmotnost tyče zanedbejte.

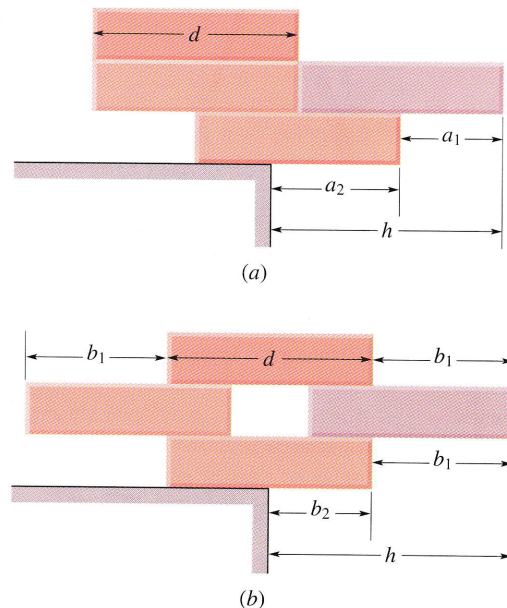

**Obr. 13.47**  
 Úlohy 36 a 37

**37Ú.** V uspořádání stejném jako v úloze 36 (obr. 13.47) předpokládejte, že délka tyče  $d$  je 3,0 m a její váha 200 N. Váha závaží je 300 N a úhel  $\theta = 30^\circ$ . Drát vydrží maximální zatížení 500 N. (a) Do jaké největší vzdálenosti  $x$  můžeme vysunout závaží, než drát praskne? Jaká je přitom velikost (b) vodorovné a (c) svislé složky síly, kterou kloub působí na tyč?

**38Ú.** Dva homogenní trámy  $U$  a  $V$  jsou přes kloub připojeny ke stěně a spolu volně spojeny svorníkem (obr. 13.48). Najděte vodorovnou a svislou složku síly působící (a) na trám  $U$  od jeho kloubového upevnění, (b) na trám  $U$  od svorníku, (c) na trám  $V$  od jeho kloubového upevnění a (d) na trám  $V$  od svorníku.

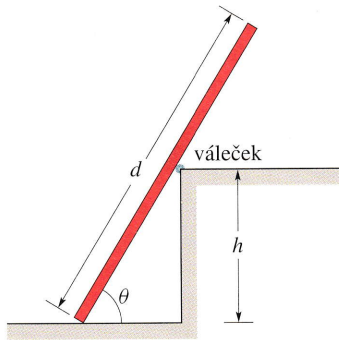

**Obr. 13.48**  
 Úloha 38

**39Ú.** Čtyři stejné cihly délky  $d$  jsou naskládány na stůl dvěma způsoby, jak je ukázáno na obr. 13.49 (srovnejte s úlohou 31). Snažte se v obou případech najít maximální vzdálenost  $h$ , o kterou může stavba přesáhnout stůl, aniž by spadla. Vypočítejte (v násobcích  $d$ ) příslušné vzdálenosti  $h$  a nalezněte hodnoty přesahů  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  a  $b_2$ , které k dosažení maximálních hodnot  $h$  musíte použít. (Podívejte se do *The Amateur Scientist, Scientific American*, June 1985, na podrobnější diskusi příkladu a ještě lepší uspořádání cihel typu (b).)

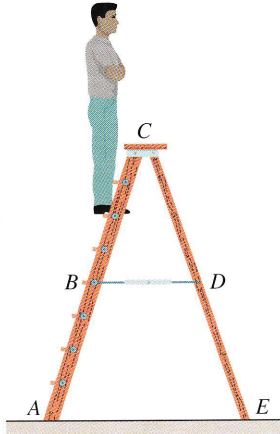

**Obr. 13.49** Úloha 39

**40Ú.** Homogenní fošna délky  $d = 14$  m a hmotnosti  $m = 50$  kg spočívá na podlaze a kluzném válečku (nulové tření) umístěném na vršku zdi vysoké 3 m (obr. 13.50). Fošna je v rovnováze, když  $\theta \geq 70^\circ$ , ale podklouzne, když  $\theta < 70^\circ$ . Určete činitel statického tření mezi fošnou a podlahou.

**41Ú.** Na obr. 13.51 jsou zobrazeny schůdky spojené osou v místě  $C$  s rameny  $AC$  a  $CE$  dlouhými 2,8 m. Zabezpečovací tyč dlouhá 0,75 m je umístěna v polovině výšky schůdků. Muž hmotnosti 85 kg stojí na schůdku, který je vzdálen 2,1 m od paty schůdků. Najděte: (a) napěťovou sílu v zabezpečovací tyči a síly, kterými podlaha působí na schůdky v místě (b)  $A$  a (c)  $E$ .

Obr. 13.50  
Úloha 40

Zanedbejte hmotnost schůdků a tření mezi schůdky a podlahou. (Tip: Použijte rovnice rovnováhy na jednotlivé části schůdků.)



Obr. 13.51 Úloha 41

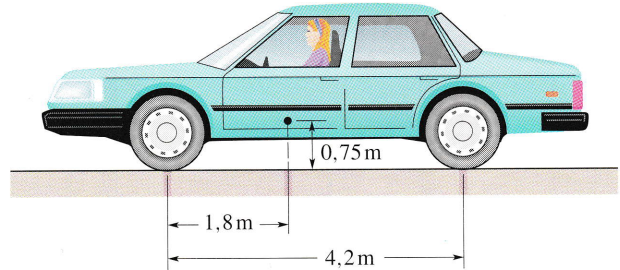
**42Ú.** Homogenní krychle o straně  $a$  spočívá na vodorovné podlaze. Činitel statického tření mezi krychlí a podlahou je  $f$ . Vodorovnou silou  $F$  tlačíme na jednu stranu krychle v její svislé ose symetrie ve výšce  $h$  nad podlahou. Když pomalu zvyšujeme velikost síly  $F$ , krychle začne po podlaze buď (a) klouzat, nebo se začne (b) převracet. Pro jaká  $f$  nastane případ (a) a pro jaká případ (b)? (Tip: Uvažte, kde je umístěna normálová síla v případě převrácení krychle.)

**43Ú.** Krychlová krabice naplněná pískem váží 890 N. Chceme krabici uvést do valivého pohybu tím, že začneme ve vodorovném směru tláčit na jednu z jejích vrchních hran. (a) Jakou minimální velikost síly k tomu potřebujeme? (b) Jaký minimální činitel statického tření mezi krabicí a podlahou musí působit? (c) Existuje efektivnější způsob, jak rozkutálet krabici? Jestliže ano, udejte minimální velikost síly, kterou to lze učinit. (Tip: Podívejte se na návod k úloze 42.)

**44Ú.** Bedna tvaru krychle s délkou hrany 1,2 m obsahuje část stroje, jehož tvar je takový, že se těžiště krychle nachází o 0,3 m výše, než je její geometrický střed. Bedna stojí na rampě, která svírá s vodorovnou rovinou malý úhel  $\theta$ . Když zvyšujeme úhel  $\theta$ , dosáhneme hodnoty, při které bedna začne po rampě klouzat, nebo se začne převracet. Jaký případ nastane: (a) když činitel statického tření mezi rampou a bednou je 0,60, (b) když jeho

hodnota je 0,70? Pro oba případy udejte úhel, kdy zjištěný případ nastane. (Tip: Podívejte se na návod k úloze 42.)

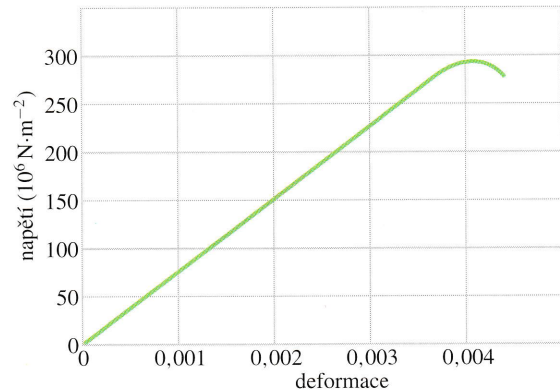
**45Ú\*** Auto jedoucí po vodorovné silnici prudce zabrzdí, takže všechna čtyři kola se zablokují a smýkají se po silnici. Dynamický činitel tření mezi koly a silnicí je 0,4. Rozvor, tj. vzdálenost mezi osou předních a zadních kol, je 4,2 m a těžiště auta je umístěno 1,8 m za osou předních kol ve výšce 0,75 m nad vozovkou (obr. 13.52). Auto váží 11 kN. Vypočtete: (a) brzdné zrychlení auta, (b) normálovou sílu působící na každé kolo a (c) brzdnu sílu působící na každé kolo. (Tip: Auto při brzdění není sice v rovnováze pro posuvný pohyb, ale dokud se nezačne otáčet, je v rovnováze pro rotační pohyb. Zachování rovnováhy pro rotační pohyb předpokládejte.)



Obr. 13.52 Úloha 45

### ODST. 13.6 Pružnost

**46C.** Na obr. 13.53 je graf závislosti napětí na deformaci (křivka napětí – deformace) pro křemen. Jaký je (a) jeho Youngův modul a jaká je (b) hodnota meze kluzu?



Obr. 13.53 Cvičení 46

**47C.** Po pádu zjistil horolezec hmotnosti 95 kg, že visí na konci lana. Lano délky 15 m a průměru 9,6 mm se vratně prodloužilo o 2,8 cm. Vypočtete: (a) relativní prodloužení (deformaci) lana, (b) napětí lana a jeho (c) Youngův modul.

**48C.** Důlní výtah visí na jediném ocelovém laně o průměru 2,5 cm. Celková hmotnost kabiny výtahu a přepravovaných osob je 670 kg. Jaké bude prodloužení lana, (a) když je výtah na povrchu 12 m pod těžním strojem (motorem výtahu) a (b) když je

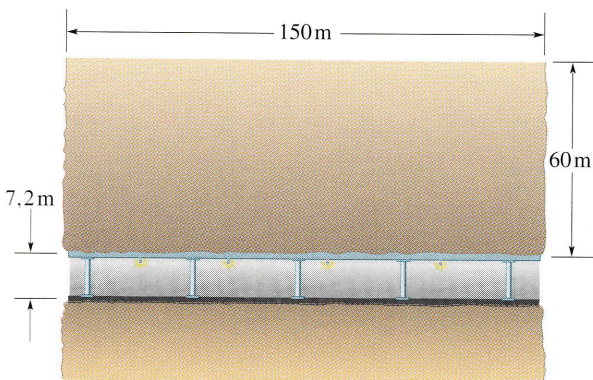
na dně šachty hluboké 350 m? (Při výpočtu zanedbejte hmotnost lana.)

**49C.** Předpokládejte, že trám na obr. 13.9a je z jedle douglasky a má čtvercový průřez. Jak musí být trám tlustý, aby tlak v něm nepřesáhl 1/6 jeho meze pevnosti v tlaku? (K řešení použijte výsledek př. 13.5.)

**50C.** Vodorovná hliníková tyč průměru 4,8 cm vyčnívá 5,3 cm ze zdi. Závaží hmotnosti 1 200 kg je zavěšeno na samý konec tyče. Modul pružnosti ve smyku hliníku je  $3,0 \cdot 10^{10}$  Pa. Vypočítejte (a) smykové napětí v tyči a (b) svislou odchylku konce tyče, když zanedbáte tíhu tyče.

**51C.** Jak velký všestranný tlak musí působit na měděnou krychli o hraně 85,5 cm, aby se její hrany zkrátily na 85,0 cm? Objemový modul pružnosti mědi je  $1,4 \cdot 10^{11}$  Pa.

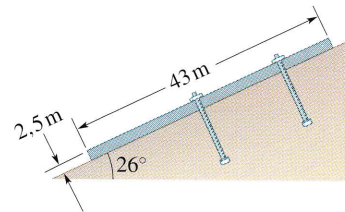
**52Ú.** Navrhujeme tunel s rovnou střechou dlouhý 150 m, vysoký 7,2 m, široký 5,8 m, který povede 60 m pod zemí (obr. 13.54). Střecha bude držena výlučně ocelovými sloupy, jejichž čtvercový průřez má plochu  $960 \text{ cm}^2$ . Zemina v nadloží (nad tunelem) má hustotu  $2,8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . (a) Jaká je celková síla, kterou sloupy musí unést? (b) Kolik musí být v tunelu sloupů, aby tlak ve sloupech nepřesáhl hodnotu rovnou polovině meze pevnosti v tlaku?



Obr. 13.54 Úloha 52

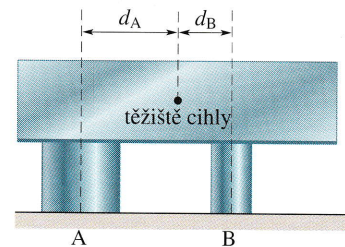
**53Ú.** Pravoúhlá břidlicová deska spočívá na nakloněné skalní podložce se sklonem  $26^\circ$  (obr. 13.55). Deska je 43 m dlouhá, 2,5 m tlustá a 12 m široká. Hustota desky je  $3,2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Činitel statického tření mezi deskou a podložní skálou je 0,39. (a) Vypočítejte složku tíhy desky působící podél nakloněné podložky. (b) Vypočítejte celkovou sílu statického tření působící na desku. Porovnáním výsledků (a) a (b) zjistíte, že desce hrozí sklouznutí z podložky a brání jí v tom pouze náhodné výčnělky vytvářející slabé přechodné záchyty. (c) Aby se deska upevnila, je kolmo provrtána i s podložní skálou a do otvorů jsou zasazeny svorníky. Jestliže plocha průřezu každého svorníku je  $6,4 \text{ cm}^2$  a mez pevnosti ve smyku materiálu, z kterého je svorník vyroben, je  $3,6 \cdot 10^8$  Pa, kolik svorníků musíme užít k upevnění desky? Předpokládejte, že svorníky jsou přitaženy tak mírně, že neovlivní velikost normálové síly (tlak desky na podložku).

**54Ú.** Olověná deska spočívá vodorovně na válci A a B, jak



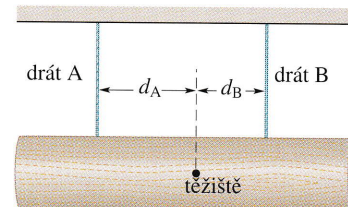
Obr. 13.55  
Úloha 53

je ukázáno na obr. 13.56. Válec A má dvakrát větší Youngův modul a dvakrát větší průřez než válec B. Než byly válce deformovány cihlou, měly stejnou délku. Jaká část tíhy cihly je podepřena (a) válcem A a (b) válcem B? Vodorovné vzdálenosti mezi těžištěm cihly a osami válců jsou  $d_A$  pro válec A a  $d_B$  pro válec B. (c) Jaký je poměr  $d_A/d_B$ ?



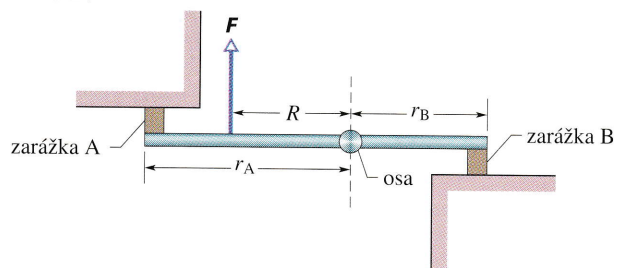
Obr. 13.56  
Úloha 54

**55Ú.** Homogenní kláda hmotnosti 103 kg visí na dvou ocelových drátech A a B, které mají poloměr 1,2 mm. Původně byl drát A 2,50 m dlouhý a byl o 2 mm kratší než drát B. Po zavěšení je kláda vodorovně. Jakou silou ji drží (a) drát A, (b) drát B? Jaký je poměr délek  $d_A/d_B$ ?



Obr. 13.57  
Úloha 55

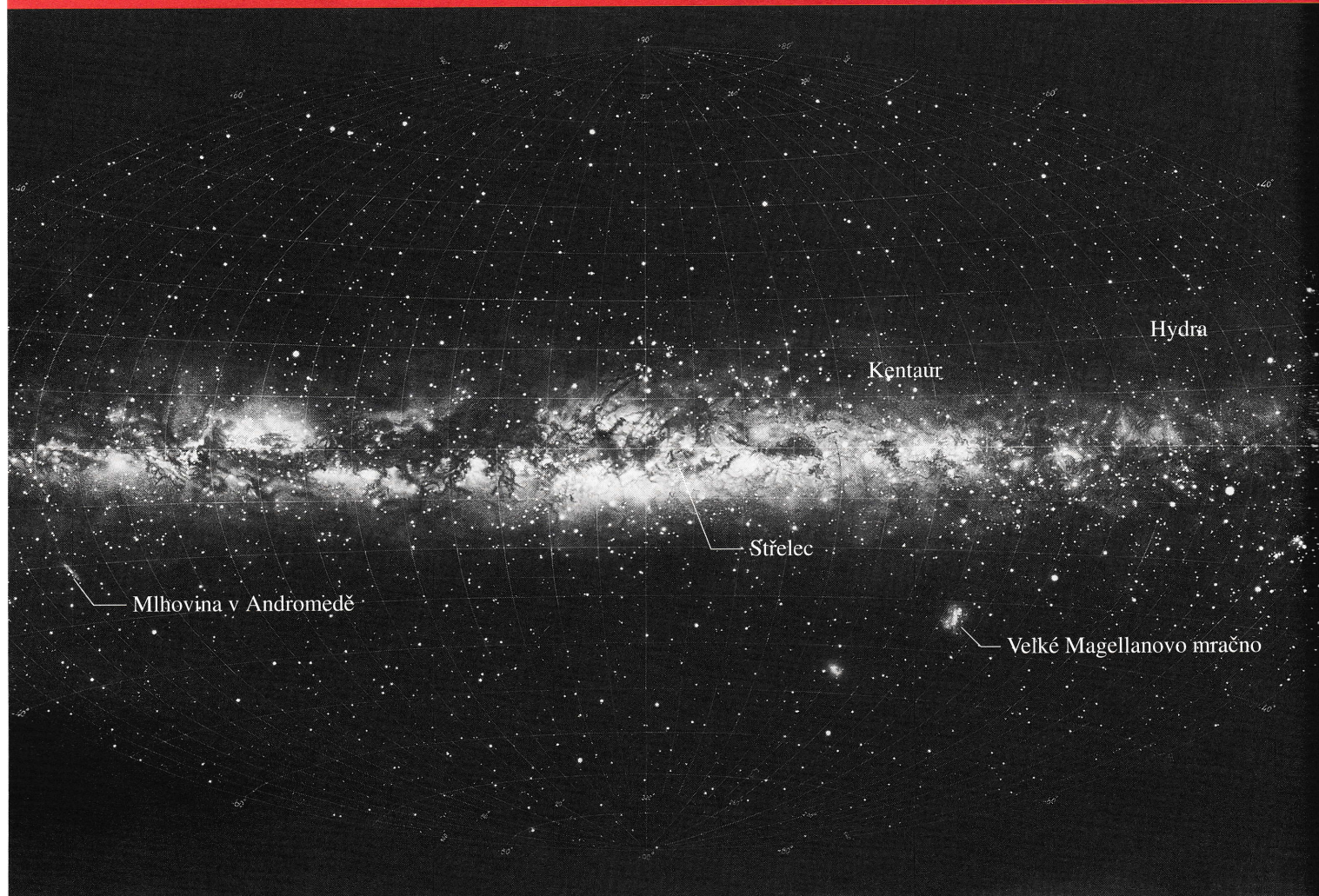
**56Ú.** Na obr. 13.58 je pohled shora na pevnou tyč, která se může otáčet kolem svislé osy, dokud ji nezastaví dvě stejné gumové zarážky A a B umístěné na tyči ve vzdálenosti  $r_A$  a  $r_B$  od osy. Nejprve zarážky po zastavení tyče zůstanou ve stavu, kdy nejsou stlačeny. Potom začne na tyč působit síla  $F$  ve vzdálenosti  $R$  od osy otáčení. Najděte síly, které stlačují (a) zarážku A, (b) zarážku B.



Obr. 13.58 Úloha 56

# 14

## Gravitace



---

*Naše Galaxie, kterou vidíme na obloze jako Mléčnou dráhu, má tvar disku. Je složena z miliard hvězd, jejich planet a z prachu. Síla, která váže dohromady všechny složky naší Galaxie nebo kterékoliv jiné galaxie, je tatáž jako síla, která drží Měsíc na jeho oběžné dráze a vás na Zemi — gravitace. Ta je také odpovědná za jeden z nejzvláštnějších objektů ve vesmíru, černou díru — hvězdu, která se úplně zhroutila (zkolabovala) dovnitř sebe samé. Gravitační síla poblíž černé díry je tak silná, že ji nepřekoná ani světlo. Ale je-li tomu tak, jak můžeme černou díru zjistit?*

---

## 14.1 SVĚT A GRAVITAČNÍ SÍLA

Úvodní obrázek ukazuje, jak vidíme Mléčnou dráhu; my se nacházíme poblíž okraje galaktického disku, asi 26 000 světelných let ( $2,5 \cdot 10^{20}$  m) od jejího středu, který na obrázku leží v souhvězdí Štřelce. Naše Galaxie je členem skupiny galaxií, která zahrnuje galaxii v souhvězdí Andromedy (obr. 14.1) ve vzdálenosti  $2,3 \cdot 10^6$  světelných let a jiné trpasličí galaxie, jako Velké Magellanovo mračno na úvodním obrázku.



**Obr. 14.1** Galaxie v Andromedě. Je od nás vzdálena  $2,3 \cdot 10^6$  světelných let, je slabě viditelná i prostým okem a je velmi podobná naší rodné Galaxii — Mléčné dráze.

Místní skupina galaxií je částí místní kupy galaxií. Měření provedená v osmdesátých letech ukazují, že místní kupa galaxií a kupa galaxií v souhvězdích Hydry a Kentaura se všechny řítí na výjimečně hmotný objekt zvaný Velký atraktor nebo též Velký poutač. Ten je vzdálen od nás přibližně 150 milionů světelných let, na opačnou stranu, než kde vidíme Mléčnou dráhu, mezi souhvězdími Hydry a Kentaura.

Síla, která váže dohromady tyto tak dalece rozsáhlé objekty, od hvězd přes galaxie ke skupinám, kupám a nadkupám galaxií, a která je patrně všechny přitahuje k Velkému poutači, je **gravitační síla**. Nejenom že vás přidržuje na Zemi, ale vládne i hlubinám mezigalaktického prostoru.

## 14.2 NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

Fyziky vždycky zajímá, zda by se při podrobnějším zkoumání nenašel mezi zdánlivě nesouvisejícími jevy nějaký vzájemný vztah. Tato snaha po sjednocování fyzikálních teorií panuje již po staletí. V roce 1665 učinil mladý, třiačtyřicetiletý Isaac Newton základní přínos pro fyziku, když ukázal, že síla držící Měsíc na jeho oběžné dráze je táž jako síla, která nutí padat jablko na Zem. My to nyní pokládáme za takovou samozřejmost, že si těžko představujeme starověké pojetí, podle kterého byly pohyby pozemských a nebeských těles zcela různých druhů a řídily se různými zákony.

Newton dospěl k názoru, že nejenom Země přitahuje jablko i Měsíc, ale že každé těleso ve vesmíru přitahuje každé jiné těleso; tuto tendenci všech těles přitahovat se navzájem nazýváme **gravitace**. Na tento závěr nejsme příliš zvyklí, protože na povrchu zemském je ona důvěrně známá přitažlivost zemská tak veliká, že zdaleka překrývá vzájemnou přitažlivou sílu ostatních těles mezi sebou. Tak například Země přitahuje jablko jistou silou (totiž jeho váhou). Také vy přitahujete jablko (a ono přitahuje vás), ale tato přitažlivá síla je menší než váha nejjemnějšího prášku.

Zákon o síle, který nyní nazýváme **Newtonův gravitační zákon**, formuloval Newton kvantitativně: každá částice přitahuje každou jinou částici **gravitační silou**, jejíž velikost je

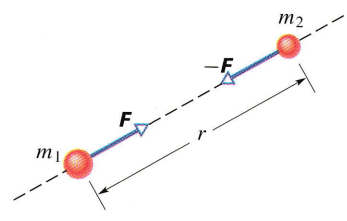
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{Newtonův gravitační zákon}). \quad (14.1)$$

Zde  $m_1, m_2$  značí hmotnosti obou částic,  $r$  vzdálenost mezi nimi a  $G$  je\* **gravitační konstanta**, jejíž hodnota činí

$$\begin{aligned} G &= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} = \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Obr. 14.2 ilustruje ověřenou skutečnost, že se částice vždy přitahují „k sobě“ a nikdy se neodpuzují „od sebe“; částice  $m_2$  přitahuje částici  $m_1$  gravitační silou  $\mathbf{F}$ , která směřuje k částici  $m_2$ .

**Obr. 14.2** Dvě částice o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  ve vzdálenosti  $r$  se navzájem přitahují podle Newtonova gravitačního zákona, rov. (14.1). Přitažlivé síly  $\mathbf{F}$  a  $-\mathbf{F}$  jsou stejné co do velikosti a mají opačné směry.



\* Symbol  $G$  je předepsán normou a užívá se v celém světě. U nás se někdy užívá symbol  $\kappa$ .

Podobně částice  $m_1$  přitahuje částici  $m_2$  gravitační silou, která je orientována k částici  $m_1$ . Síly  $\mathbf{F}$  a  $-\mathbf{F}$  jsou ve vztahu akce a reakce; mají stejné velikosti a opačné směry. Závisejí na vzdálenosti obou částic, ale nikoli na jejich umístění; částice by stejně dobře mohly být v nějaké dutině nebo přemístěny do hlubin vesmíru. Síly  $\mathbf{F}$  a  $-\mathbf{F}$  nejsou ovlivněny přítomností jiných těles, dokonce ani kdyby tato tělesa ležela mezi uvažovanými přitahujícími se částicemi.

Velikost gravitační síly, tj. to, jak silně se dvě částice daných hmotností na danou vzdálenost přitahují, závisí na velikosti gravitační konstanty  $G$ . Kdyby nějakým kouzlem vzrostlo  $G$  desetkrát, leželi bychom na podlaze rozdrčení zemskou přitažlivostí. A kdyby se naopak  $G$  desetkrát zmenšilo, zeslábla by zemská přitažlivost natolik, že bychom mohli skákat přes domy. (Ale spíš bychom zahynuli, protože by si Země neudržela svou atmosféru.)

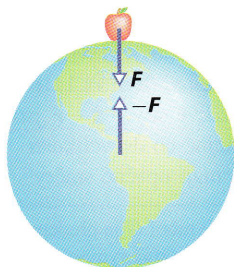
Ačkoliv Newtonův zákon platí přesně jen pro částice (tedy hmotné body), můžeme ho použít i na reálné předměty, pokud jsou jejich vlastní rozměry zanedbatelné vůči jejich vzdálenosti. Měsíc a Země jsou od sebe dostatečně daleko na to, abychom je mohli v dobrém přiblížení považovat za hmotné body. Ale co jablko na Zemi? Z hlediska jablka se veliká a široká Země, rozprostírající se od obzoru k obzoru, jistě nejeví jako hmotný bod.

Newton vyřešil problém jablko + Země tím, že formuloval tzv. „slupkový teorém“:

Homogenní hmotná kulová slupka přitahuje vně ležící částici stejně, jako kdyby veškerá hmota slupky byla soustředěna v jejím středu.

Zemi můžeme považovat za složenou z takových kulových slupek asi jako cibuli — jedna slupka uvnitř druhé. (Říkáme, že Země je **po vrstvách homogenní** neboli má hmotu rozloženu **sféricky symetricky**.) Každá z těchto slupek přitahuje vně ležící předmět tak, jako by její hmota byla soustředěna do jejího středu — tedy do středu Země. Z hlediska jablka se tedy (překvapivě) Země chová jako hmotný bod — jako částice umístěná ve středu Země, v níž je soustředěna veškerá hmota Země.

Předpokládejme tak jako na obr. 14.3, že Země při-



**Obr. 14.3** Jablko přitahuje nahoru Zemi stejně silně jako Země dolů jablko.

tahuje dolů jablko silou 0,8 N. Potom jablko musí přitahovat Zemi nahoru silou 0,8 N; tuto sílu si umístíme do středu Země. Ačkoliv obě síly mají stejnou velikost, udělí při uvolnění jablka různá zrychlení jablku a Zemi. Jablko získá zrychlení kolem  $9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , dobře známé zrychlení těles padajících nedaleko zemského povrchu. Země by však (v těžišovém systému soustavy jablko + Země) získala zrychlení pouze asi  $1\cdot 10^{-25} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

**KONTROLA 1:** Částici postupně umístíme vně čtyř objektů, z nichž každý má hmotnost  $m$ ; jsou to

- (1) velká homogenní plná koule;
- (2) velká homogenní kulová slupka;
- (3) malá homogenní plná koule;
- (4) malá homogenní kulová slupka.

Ve všech případech má částice stejnou vzdálenost  $d$  od středu objektu. Uspořádejte objekty podle velikosti gravitační síly, jakou působí na částici, od největší síly k nejmenší.

### 14.3 GRAVITACE A PRINCIP SUPERPOZICE

Pro skupinu částic nalezneme výslednou gravitační sílu (výslednici sil) působící na kteroukoliv z nich pomocí **principu superpozice**, což je obecný princip, předpokládající, že výsledný jev je součtem všech dílčích jevů. V tomto případě princip říká, že pro výpočet gravitační síly působící na konkrétní částici můžeme nejprve postupně vypočítat dílčí síly od každé z ostatních částic. Poté vypočteme výslednou sílu jako vektorový součet všech těchto sil — jako obvykle.

Pro  $n$  interagujících částic můžeme zapsat princip superpozice takto:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} + \mathbf{F}_{15} + \dots + \mathbf{F}_{1n}. \quad (14.3)$$

Zde je  $\mathbf{F}_1$  výsledná síla působící na částici 1 a např.  $\mathbf{F}_{13}$  je síla, kterou působí částice 3 na částici 1. Tento vektorový součet můžeme zapsat kompaktněji:

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{i=2}^n \mathbf{F}_{1i}. \quad (14.4)$$

Jak je tomu se silou, kterou na částici působí reálné těleso, zaujímající jistý prostor? Najdeme ji tak, že těleso rozložíme na kousíčky tak malé, abychom je mohli pokládat za hmotné body, a potom použijeme rov. (14.4) k nalezení vektorového součtu všech sil působících na částici ode všech kousíčků tělesa. V limitním případě můžeme těleso rozdělit na infinitezimální kousíčky o hmotnostech  $dm$ , z nichž

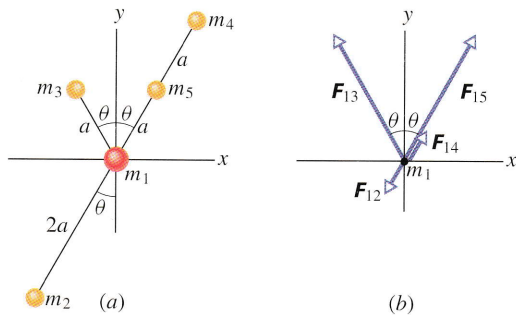
každý působí na uvažovanou částici jen infinitezimální silou  $d\mathbf{F}$ . V limitě přejde suma z rov. (14.4) na integrál:

$$\mathbf{F}_1 = \int d\mathbf{F}, \quad (14.5)$$

kde integrujeme přes celý objem zaujímaný tělesem. Jde-li však o homogenní kouli nebo kulovou slupku, můžeme namísto integrace v rov. (14.5) postupovat, tak jako by celá hmota tělesa byla soustředěna v jeho středu, a použít rov. (14.1).

#### PŘÍKLAD 14.1

Na obr. 14.4a je uspořádáno pět částic s hmotnostmi  $m_1 = 8,0 \text{ kg}$ ,  $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 2,0 \text{ kg}$ , délka  $a = 2,0 \text{ cm}$ , úhel  $\theta = 30^\circ$ . Jaká je výsledná gravitační síla  $\mathbf{F}_1$ , působící na částici  $m_1$  od ostatních čtyř částic?



Obr. 14.4 Příklad 14.1. Uspořádání pěti částic. Síly, kterými působí ostatní čtyři částice na částici  $m_1$ .

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (14.4) víme, že výslednice  $\mathbf{F}_1$  je vektorovým součtem sil  $\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{13}, \mathbf{F}_{14}, \mathbf{F}_{15}$ , což jsou gravitační síly působící na částici  $m_1$  od ostatních částic. Protože hmotnosti  $m_2$  a  $m_4$  jsou si rovny a protože obě částice jsou ve stejných vzdálenostech  $r = 2a$  od první, plyne z rov. (14.1)

$$F_{12} = F_{14} = \frac{Gm_1m_2}{(2a)^2}. \quad (14.6)$$

Podobně hmotnosti  $m_3$  a  $m_5$  jsou si rovny a obě částice jsou ve stejných vzdálenostech  $r = a$  od  $m_1$ , takže platí

$$F_{13} = F_{15} = \frac{Gm_1m_3}{a^2}. \quad (14.7)$$

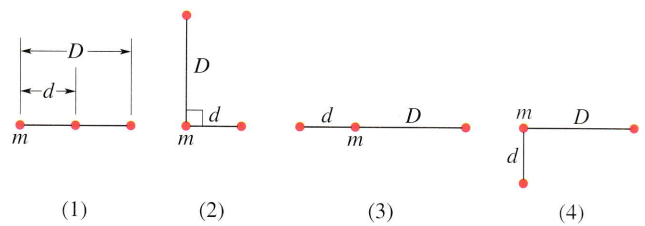
Na obr. 14.4b je silový diagram pro  $m_1$ . Odtud a z rov. (14.6) je zřejmé, že  $\mathbf{F}_{12}$  a  $\mathbf{F}_{14}$  mají stejné velikosti, ale opačné směry; tyto síly se proto vyruší. Z obr. 14.4b a rov. (14.7) vidíme, že x-ové složky sil  $\mathbf{F}_{13}$  a  $\mathbf{F}_{15}$  se také zruší, zatímco jejich y-ové složky mají stejnou velikost, ale směr tentokrát stejný — ve směru osy y. Výsledná síla  $\mathbf{F}_1$  tedy směřuje podél osy y a její

velikost je dvojnásobkem velikosti y-ové složky  $\mathbf{F}_{13}$ :

$$\begin{aligned} F_1 &= 2F_{13} \cos \theta = 2 \frac{Gm_1m_3}{a^2} \cos \theta = \\ &= 2 \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})(8,0 \text{ kg})(2,0 \text{ kg})}{(0,020 \text{ m})^2} \cos 30^\circ = \\ &= 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

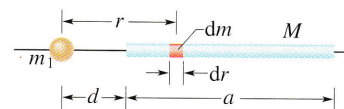
Všimněme si, že přítomnost částice  $m_5$  mezi částicemi  $m_1$  a  $m_4$  neměla vliv na jejich gravitační působení: síla mezi  $m_1$  a  $m_4$  zůstává táž.

**KONTROLA 2:** Obrázek ukazuje čtyři konfigurace tří částic se stejnými hmotnostmi. (a) Uspořádejte konfigurace sestupně podle velikostí výsledné gravitační síly působící na částici  $m$ . (b) Je v konfiguraci (2) směr výsledné síly blíže k úsečce délky  $d$ , nebo k úsečce délky  $D$ ?



#### PŘÍKLAD 14.2

Na obr. 14.5 je částice o hmotnosti  $m_1 = 0,67 \text{ kg}$  vzdálena  $d = 23 \text{ cm}$  od konce homogenní tyče délky  $a = 3 \text{ m}$  a hmotnosti  $M = 5 \text{ kg}$ . Jak velkou gravitační silou  $\mathbf{F}_1$  přitahuje tyč částici?



Obr. 14.5 Příklad 14.2. Částice o hmotnosti  $m_1$  leží na ose tyčky délky  $a$  ve vzdálenosti  $d$  od jejího konce. Infinitezimální kousek tyčky  $dm$  leží ve vzdálenosti  $r$  od  $m_1$ .

**ŘEŠENÍ:** Uvažujme infinitezimálně malý kousek tyče o hmotnosti  $dm$  a délce  $dr$ , vzdálený  $r$  od  $m_1$ . Z rov. (14.1) vyjádříme velikost gravitační síly  $d\mathbf{F}_1$ , kterou  $dm$  působí na  $m_1$ :

$$dF_1 = \frac{Gm_1}{r^2} dm. \quad (14.8)$$

Na obr. 14.5 směřuje tato síla doprava. Protože  $m_1$  leží na ose tyče, směřuje doprava také každá z částečných sil  $d\mathbf{F}_1$ , kterými působí kousek  $dm$  tyče na  $m_1$ . Velikost úhrnné síly  $F_1$  působící na  $m_1$  můžeme tedy najít prostým sečtením velikostí dílčích sil. Provedeme to integrací rov. (14.8) podél tyče.

(Kdyby bod  $m_1$  neležel na ose tyče, směřovaly by dílčí síly do různých směrů a bylo by nutno získat výslednou sílu jako vektorový součet dílčích sil.)

Pravá strana rov. (14.8) obsahuje dvě proměnné,  $r$  a  $m$ , resp.  $dm$ . Před integrací musíme z integrálu odstranit výraz  $dm$ . Protože je tyčka homogenní (má konstantní hustotu), můžeme psát

$$\frac{dm}{dr} = \frac{M}{a}. \quad (14.9)$$

To nám umožňuje nahradit  $dm = (M/a) dr$  v rov. (14.8). Potom integrujeme rov. (14.5) a dostaneme

$$\begin{aligned} F_1 &= \int dF_1 = \int_d^{a+d} \frac{Gm_1}{r^2} \frac{M}{a} dr = \frac{Gm_1M}{a} \int_d^{a+d} \frac{dr}{r^2} = \\ &= -\frac{Gm_1M}{a} \left[ \frac{1}{r} \right]_d^{a+d} = -\frac{Gm_1M}{a} \left( \frac{1}{a+d} - \frac{1}{d} \right) = \\ &= \frac{Gm_1M}{d(a+d)} = \\ &= \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})(0,67 \text{ kg})(5,0 \text{ kg})}{(0,23 \text{ m})(3,0 \text{ m} + 0,23 \text{ m})} = \\ &= 3,0 \cdot 10^{-10} \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

### RADY A NÁMĚTY

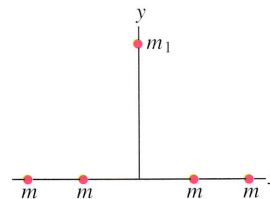
#### Bod 14.1: Znárodnění vektorů gravitační síly

Máme dáno rozložení částic (např. na obr. 14.4a) a chceme najít celkovou gravitační sílu působící na jednu z nich. Pak doporučujeme nakreslit silový diagram, který obsahuje jen zkoumanou částici (nikoli ostatní) a jen ty síly, které na ni působí, jako je to v obr. 14.4b. Pokud byste se rozhodli skládat vektory sil v původním diagramu, umísťujte je vždy do té částice, na kterou příslušná síla působí (a to raději „patičkou“ vektoru než jeho „špičkou“). Pokud nakreslíte vektory sil jinak, vnesete si do diagramu zmatek. A ten bude zaručený, pokud budete umísťovat vektory sil do těch částic, které na zkoumanou částici působí.

#### Bod 14.2: Zjednodušení součtu sil využitím symetrie

V př. 14.1 jsme použili symetrii systému k úspoře času a zjednodušení výpočtů vedoucích k řešení. Uvědomíme-li si, že  $m_2$  a  $m_4$  jsou umístěny symetricky vzhledem k  $m_1$ , a tedy  $F_{12}$  a  $F_{14}$  se vyruší, nemusíme tyto síly počítat. A pokud si uvědomíme, že  $x$ -ové složky sil  $F_{13}$  a  $F_{15}$  se vzájemně vyruší a jejich  $y$ -ové složky jsou shodné a sečtou se, ušetříme si další námahu.

**KONTROLA 3:** Určete, jaký směr má výslednice gravitační síly působící na částici o hmotnosti  $m_1$  od jiných částic o hmotnostech  $m$ , které jsou umístěny na ose  $x$  symetricky vůči ose  $y$  podle obrázku.



## 14.4 GRAVITACE V BLÍZKOSTI POVRCHU ZEMĚ

Zanedbejme prozatím rotaci Země a předpokládejme, že Země je stojící homogenní koule o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R = 6371$  km, odpovídajícímu objemu skutečné Země. Velikost gravitační síly působící na částici o hmotnosti  $m$  stojící ve vzdálenosti  $r > R$  od středu Země je podle rov. (14.1)

$$F = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (14.10)$$

Pokud na částici nepůsobí jiné síly, bude působením gravitační síly  $F$  padat ke středu Země. Síle  $F$  odpovídá zrychlení, které nazýváme **gravitační zrychlení**  $a_g$ . Newtonův druhý pohybový zákon nám říká, že pro  $F$  a  $a_g$  platí

$$F = ma_g. \quad (14.11)$$

Dosadíme-li nyní  $F$  z rov. (14.10) do rov. (14.11) a vyjádříme-li  $a_g$ , dostaneme

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \quad (14.12)$$

Tab. 14.1 ukazuje hodnoty  $a_g$  vypočítané pro různé výšky nad zemským povrchem.

**Tabulka 14.1** Změna gravitačního zrychlení  $a_g$  s výškou  $h$

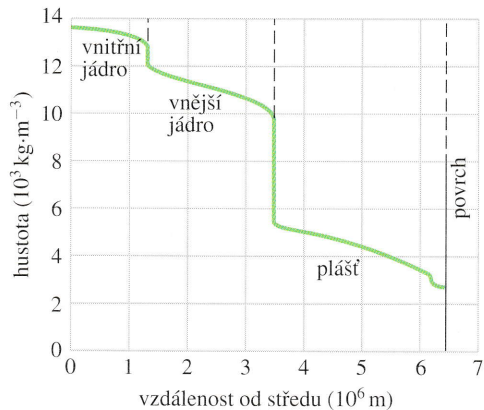
PŘÍKLAD VÝŠKY	$h$ km	$a_g$ $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
mořská hladina	0	9,83
Mount Everest	8,8	9,80
nejvyšší výška dosažená balonem s lidskou posádkou	36,6	9,71
oběžná dráha raketoplánu	400	8,70
kommunikační satelit	35 700	0,225

Gravitační zrychlení  $a_g$  vyjádřené z rov. (14.12) není úplně stejné jako **tíhové zrychlení**  $g$ , které opravdu naměříme na volně padajících tělesech (a které je přibližně  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  u povrchu Země). Tato dvě zrychlení se liší ze tří důvodů. Země totiž (1) není homogenní, (2) není dokonalá



koule, (3) rotuje, tj. otáčí se kolem vlastní osy. Protože je  $g$  různé od  $a_g$ , je také tíhová síla  $mg$  různá od gravitační síly podle rov. (14.10), a to ze stejných důvodů. Rozeberme si nyní tyto důvody.

**1. Země není homogenní.** Hustota Země se mění radiálně dosti výrazně, jak ukazuje obr. 14.6. To by podle slupkového teorému gravitační sílu vně Země neovlivnilo. Je-li hustota zemské kůry (či vnější části) se mění v jednotlivých oblastech pod povrchem Země. Proto se také  $g$  mění od oblasti k oblasti.



**Obr. 14.6** Hustota Země jako funkce vzdálenosti od středu. Hranice pevného vnitřního jádra, převážně tekutého vnějšího jádra a pevného pláště jsou v grafu vyneseny, ale zemská kůra je příliš tenká, než aby mohla být v tomto grafu zachycena v odpovídajícím měřítku.

**2. Země není koule.** Země je přibližně elipsoid, zploštělý na pólech a vypuklý na rovníku. Jeho rovníkový poloměr je 6 378 km, polární 6 357 km. Proto jsou body na pólech blíže hustému jádru Země než body na rovníku. To je jeden z důvodů, proč tíhové zrychlení  $g$  roste na úrovni mořské hladiny ve směru od rovníku k pólům.

**3. Země rotuje kolem své osy.** Osa rotace prochází severním a jižním pólem Země. Každý předmět umístěný na povrchu Země kdekoli kromě těchto pólů obíhá po kružnici kolem osy rotace, a proto musí mít dostředivé zrychlení, které míří do středu této kružnice. Toto dostředivé zrychlení lze popsat dostředivou silou, která také míří do středu této kružnice.

Ukážeme si, jak rotace Země způsobuje rozdíl mezi tíhovým zrychlením  $g$  a gravitačním zrychlením  $a_g$ , a tím i mezi tíhovou a gravitační silou podle rov. (14.10). Rozebereme za tím účelem jednoduchou situaci, v níž bedna o hmotnosti  $m$  leží na číslicové váze na rovníku. Obr. 14.7a názorně ukazuje tuto situaci z pohledu shora nad severním pólem.

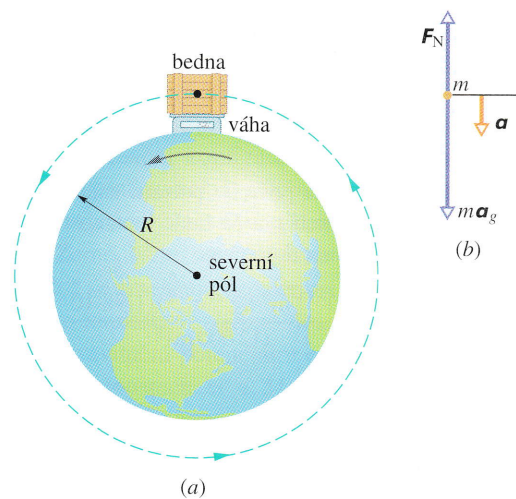
Obr. 14.7b je silový diagram pro bednu. Dostředivé zrychlení  $a$  bedny míří do středu kružnice, po níž se bedna pohybuje, a tento střed je totožný se středem Země (předpokládáme-li kouli). Země působí na bednu gravitační silou o velikosti  $ma_g$  podle rov. (14.11). Číslicová váha působí na bednu normálovou silou  $F_N$ . Užijeme druhý Newtonův zákon na bednu, kladný směr osy orientujeme ke středu Země a dostáváme

$$\sum F = ma_g - F_N = ma. \quad (14.13)$$

Velikost  $F_N$  síly čteme na stupnici váhy; bedna váží  $mg$ . Dosadíme-li  $mg$  za  $F_N$  do rov. (14.13), dostaneme

$$ma_g - mg = ma, \quad (14.14)$$

což ukazuje, že velikost tíhové síly bedny (její váha)  $mg$  se liší od velikosti gravitační síly  $ma_g$  působící na bednu. Vydělíme-li rov. (14.14)  $m$ , vidíme, že také  $g$  se liší od  $a_g$ , a to o dostředivé zrychlení  $a$ .



**Obr. 14.7** (a) Bedna ležící na váze na zemském rovníku. Pohled je podél osy zemské rotace, shora od severního pólu. (b) Silový diagram pro bednu. Bedna koná rovnoměrný kruhový pohyb, a má proto zrychlení orientované do středu Země. Gravitační síla na ni působící má velikost  $ma_g$ . Normálová síla  $F_N$  působící na váhu má velikost  $mg$ , kde  $g$  je tíhové zrychlení.

Dostředivé zrychlení  $a$  má velikost  $\omega^2 R$ , kde  $\omega$  je úhlová rychlost rotující Země a  $R$  je poloměr kruhové dráhy, kterou opisuje bedna. ( $R$  je přibližně poloměr Země.) Za  $\omega$  můžeme dosadit  $2\pi/T$ , kde  $T = 24$  h je přibližně doba jednoho oběhu Země. Po dosazení do rov. (14.14) a vydělení  $m$  dostaneme

$$\begin{aligned} a_g - g &= \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \\ &= 0,034 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Odtud plyne, že tíhové zrychlení  $g \doteq 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  měřené na rovníku skutečné, rotující planety je o něco menší než gravitační zrychlení  $a_g$  způsobené pouze gravitační silou.

Umístíme-li bednu kamkoli mezi rovník a pól, budou mít  $a_g$  a  $g$  různé směry, neboť dostředivá síla na rozdíl od síly gravitační nemíří do středu Země, nýbrž kolmo k ose otáčení. Rov. (14.15) by proto bylo nutno upravit. Přesto ale můžeme odhadnout, že se rozdíl mezi  $a_g$  a  $g$  směrem k pólům zmenšuje, protože bedna opisuje menší a menší kružnice při stejné úhlové rychlosti  $\omega$ . Na pólu je pak tíha bedny rovna gravitační síle, neboť se bedna pouze otáčí, ale nepohybuje se po kružnici.

Rozdíl tíhových zrychlení na rovníku a na pólu není velký (na rovníku je  $g \doteq 9,78 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , na pólu  $g \doteq 9,83 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ), a proto ho obvykle zanedbáváme. Také tíhovou sílu  $mg$  můžeme aproximovat gravitační silou podle rov. (14.10).

### PŘÍKLAD 14.3

Uvažujme pulzar, extrémně hustou zkolabovanou hvězdu, s hmotností Slunce  $M = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ , ale s poloměrem pouze  $R = 12 \text{ km}$  a s rotační periodou  $T = 0,041 \text{ s}$ . Jak se procentuálně liší na jeho rovníku tíhové zrychlení  $g$  od gravitačního  $a_g$ ?

**ŘEŠENÍ:** Hodnotu  $a_g$  na povrchu pulzaru najdeme podle rov. (14.12), kde  $R$  nahradí  $r$  a  $M$  bude hmotnost pulzaru. Dosazením daných hodnot dostaneme

$$a_g = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})(1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg})}{(12\,000 \text{ m})^2} = 9,2 \cdot 10^{11} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Dosazením daných hodnot do rov. (14.15) a vydělením  $a_g$  dostaneme

$$\frac{a_g - g}{a_g} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{a_g} = \left(\frac{2\pi}{0,041 \text{ s}}\right)^2 \frac{(12\,000 \text{ m})}{(9,2 \cdot 10^{11} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})} = 3,1 \cdot 10^{-4} = 0,031 \%. \quad (\text{Odpověď})$$

Přestože pulzar rotuje velmi rychle, ovlivní jeho rotace tíhové zrychlení jen málo, protože poloměr pulzaru je velmi malý.

### PŘÍKLAD 14.4

(a) Astronaut vysoký  $h = 1,70 \text{ m}$  se vznáší nohama dolů v raketoplánu na oběžné dráze ve vzdálenosti  $r = 6,77 \cdot 10^6 \text{ m}$  od středu Země. Jaký je rozdíl v gravitačním zrychlení jeho chodidel a hlavy?

**ŘEŠENÍ:** Rov. (14.12) nám říká, že gravitační zrychlení ve vzdálenosti  $r$  od středu Země je

$$a_g = \frac{GM_Z}{r^2}, \quad (14.16)$$

kde  $M_Z$  je hmotnost Země. Nemůžeme dost dobře použít dvakrát rov. (14.16), jednou  $s$   $r = 6,77 \cdot 10^6 \text{ m}$  pro chodidla a potom  $s$   $r = 6,77 \cdot 10^6 \text{ m} + 1,70 \text{ m}$  pro hlavu. Pokud bychom to udělali, kalkulačka by nám dala stejný výsledek pro obě hodnoty a rozdíl by byl nulový;  $h$  je totiž příliš malé v porovnání s  $r$ . Místo toho zderivujeme rov. (14.16) podle  $r$  a získáme

$$da_g = -2 \frac{GM_Z}{r^3} dr, \quad (14.17)$$

kde  $da_g$  je infinitezimální změna gravitačního zrychlení způsobená infinitezimální změnou  $dr$ . Pro astronauta je  $dr = h$  a  $r = 6,77 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Nahradíme-li veličiny v rov. (14.17), dostaneme

$$da_g = -2 \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{(6,77 \cdot 10^6 \text{ m})^3} \cdot (1,70 \text{ m}) = -4,37 \cdot 10^{-6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tento výsledek znamená, že gravitační zrychlení, a tím i síla působící směrem k Zemi na astronautova chodidla, je větší než na jeho hlavu. Tento rozdíl mezi silami, kterými působí nehomogenní pole na různé části tělo (dostatečně rozlehlého) tělesa, se nazývá **slapová síla**; způsobuje, že se astronautovo tělo protahuje. V tomto případě je ovšem tak malá, že je prakticky neměřitelná.

(b) Pokud by astronaut ve stejné poloze obíhal na stejné dráze o poloměru  $r = 6,77 \cdot 10^6 \text{ m}$ , ale tentokrát kolem černé díry o hmotnosti  $M_\zeta = 1,99 \cdot 10^{31} \text{ kg}$  (což je desetinásobek hmotnosti Slunce), jaký by byl rozdíl gravitačního zrychlení jeho chodidel a hlavy? Černá díra má povrch (zvaný **horizont černé díry**) o poloměru  $R_\zeta = 2,95 \cdot 10^4 \text{ m}$ . Nic, ani světlo, neunikne z této hranice, natož z vnitřního prostoru černé díry. Povšimněme si, že astronaut je (moudře) dost daleko od této hranice ( $r = 229 R_\zeta$ ).

**ŘEŠENÍ:** Opět použijeme rov. (14.17), kde dosadíme  $M_\zeta = 1,99 \cdot 10^{31} \text{ kg}$  za  $M_Z$ . Dostaneme

$$da_g = -2 \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})(1,99 \cdot 10^{31} \text{ kg})}{(6,77 \cdot 10^6 \text{ m})^3} \cdot (1,70 \text{ m}) = -14,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tentokrát je gravitační zrychlení astronautových chodidel směrem k černé díře značně větší než to, které působí na jeho hlavu. Slapová síla, natahující jeho tělo, by byla sice snesitelná, ale dosti bolestivá. Pokud by se přiblížil k černé díře ještě více, natahování by drasticky stoupl.

## 14.5 GRAVITAČNÍ POLE UVNITŘ ZEMĚ

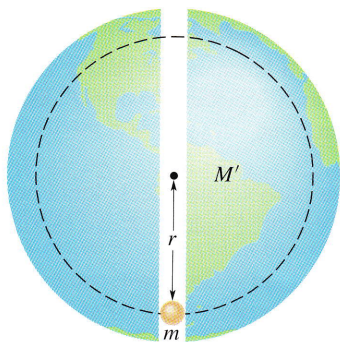
Newtonův slupkový teorém můžeme použít také na situaci, v níž je částice umístěna *uvnitř* homogenní kulové slupky, a to v tomto tvaru:

Homogenní kulová hmotná slupka *nepůsobí žádnou výslednou gravitační silou* na částici umístěnou uvnitř této slupky.

Kdyby byla hustota Země konstantní (tj. kdyby byla Země homogenní), pak by gravitační síla působící na částici byla maximální na povrchu Země. S klesající vzdáleností od středu Země by lineárně klesala k nule; hmotná slupka ležící nad částicí totiž nepřispívá k celkové síle působící na částici. Hustota Země však konstantní není a její jádro je podstatně hustší než její plášť. Začne-li tedy částice klesat pod povrch, převažuje nejprve vliv hustšího jádra a celková gravitační síla působící na částici roste. V určité hloubce dosáhne maxima a teprve při dalším pohybu směrem ke středu Země se opět začne zmenšovat, prakticky až k nule.

#### PŘÍKLAD 14.5

Představme si tunel procházející skrz Zemi od pólu k pólu (obr. 14.8). Předpokládejme, že Země je nerotující homogenní koule. Najděte gravitační sílu působící na částici o hmotnosti  $m$ , která je puštěna do tunelu, když dosáhne vzdálenosti  $r$  od středu Země.



Obr. 14.8 Příklad 14.5. Částice je puštěna do tunelu vyvrtnutého skrz zeměkouli.

**ŘEŠENÍ:** Síla působící na částici je vyvolána jen tou hmotou Země, která leží uvnitř koule o poloměru  $r$ . Část Země, která leží vně této koule, nepůsobí na částici žádnou výslednou silou. Hmotnost  $M'$  vnitřní části je dána vztahem

$$M' = \rho V' = \rho \frac{4\pi r^3}{3}, \quad (14.18)$$

kde  $V'$  je objem (který je ohraničen přerušovanou čarou v obr. 14.8),  $M'$  je hmotnost části Země uvnitř tohoto objemu a  $\rho$  je předpokládaná hustota homogenní Země.

Síla působící na částici je po užití rov. (14.1) a (14.18) určena vztahem

$$F = -\frac{GmM'}{r^2} = -\frac{Gm\rho 4\pi r^3}{3r^2} = -\left(\frac{4\pi m G\rho}{3}\right) \cdot r = -K \cdot r, \quad (\text{Odpověď}) \quad (14.19)$$

kde  $K$  je konstanta rovná  $4\pi m G\rho/3$ . Znaménko minus jsme ponechali proto, abychom zdůraznili, že síla  $\mathbf{F}$  a polohový vektor  $\mathbf{r}$  mají opačný směr. Síla směřuje do středu Země, zatímco polohový vektor směřuje od středu Země ven. Rov. (14.19) nám tedy říká, že síla působící na částici je přímo úměrná výchylce částice od středu Země, ale má opačný směr. Chová se tedy podobně jako síla pružnosti v Hookově zákonu.

## 14.6 GRAVITAČNÍ POTENCIÁLNÍ ENERGIE

V čl. 8.3 jsme probírali gravitační potenciální energii  $E_p$  soustavy částice + Země. Zabývali jsme se případem, kdy částice byla poměrně blízko zemského povrchu a gravitační sílu jsme mohli pokládat za konstantní. Zvolili jsme vhodnou referenční konfiguraci pro nulovou potenciální energii čili konfiguraci, k níž budeme potenciální energii vztahovat. Často bývá takovou konfigurací částice ležící na povrchu Země. Neleží-li částice na povrchu Země, pak  $E_p$  klesá, když se zmenšuje vzdálenost mezi částicí a Zemí.

V této kapitole rozšíříme dosavadní pojetí a budeme uvažovat gravitační potenciální energii  $E_p$  soustavy dvou částic o hmotnostech  $m$  a  $M$ , které jsou od sebe vzdáleny  $r$ . Znovu si zvolíme konfiguraci, při níž bude  $E_p = 0$ . Abychom si však zjednodušili rovnice, bude to tentokrát ve vzdálenosti  $r$  natolik velké, abychom ji mohli nahradit nekonečnou vzdáleností. Stejně jako předtím se potenciální energie zmenšuje, když se zmenšuje vzdálenost částic. Zavedeme-li tedy  $E_p = 0$  pro  $r \rightarrow \infty$ , bude potenciální energie pro každou konečnou vzdálenost záporná a bude mít tím větší absolutní hodnotu  $|E_p|$ , čím blíže budou částice u sebe.

Jak dále dokážeme, bude **gravitační potenciální energie** systému dvou částic rovna

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad (\text{gravitační potenciální energie}). \quad (14.20)$$

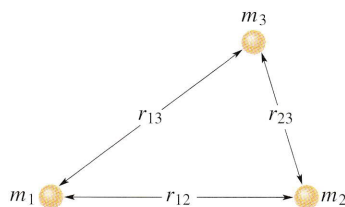
Všimněme si, že se  $E_p(r)$  skutečně blíží k nule, když se  $r$  blíží k nekonečnu, a že pro každou konečnou hodnotu  $r$  je  $E_p(r)$  záporné.

Energie daná rov. (14.20) je vlastností *soustavy dvou částic*, nikoli jedné osamocené částice. Tuto energii nelze

rozdělit a říci, že tolik a tolik přísluší jedné částici a zbytek té druhé. Je-li však  $M \gg m$ , jako třeba pro Zemi a míč, hovoříme často o „potenciální energii míče“. Můžeme to tak říci proto, že když se míč pohybuje v blízkosti zemského povrchu, projevují se změny v potenciální energii soustavy míč + Země jen jako změny kinetické energie míče, zatímco změny kinetické energie Země jsou příliš malé na to, aby byly měřitelné. (Naproti tomu změna hybnosti je stejně velká pro Zemi i pro malý míček; proč?) Podobně budeme v čl. 14.8 mluvit o „potenciální energii umělé družice“, která obíhá kolem Země, protože hmotnost družice je také mnohem menší než hmotnost Země. Budeme-li však mluvit o potenciální energii těles se srovnatelnými hmotnostmi, musíme s nimi zacházet zase jako s celkem — se soustavou.

Pokud náš systém obsahuje více než dvě částice, uvažujeme postupně každou dvojici částic a počítáme energii každé dvojice podle rov. (14.20), jako by tam ostatní částice nebyly. Nakonec všechny tyto příspěvky algebraicky sečteme. Použijeme-li rov. (14.20) na každou ze tří dvojic z obr. 14.9, dostaneme potenciální energii tohoto systému jako

$$E_p = - \left( \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \right). \quad (14.21)$$

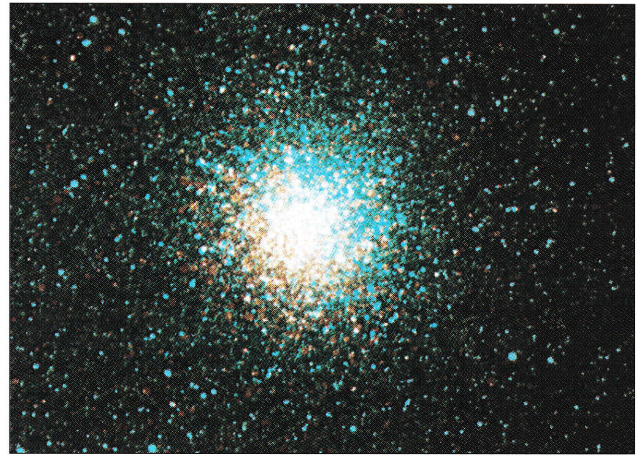


**Obr. 14.9** Tři částice působící na sebe vzájemnými gravitačními silami. Gravitační potenciální energie tohoto systému je součtem dílčích energií každé ze tří možných dvojic.

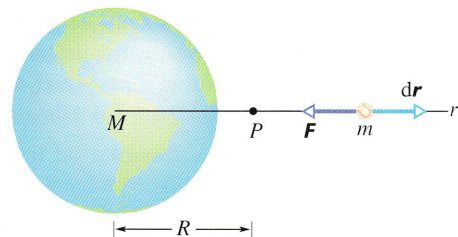
*Kulová hvězdokupa* (obr. 14.10) v souhvězdí Střelce je dobrým příkladem systému částic, který se vyskytuje v přírodě. Obsahuje kolem 70 000 hvězd, které lze spárovat  $2,5 \cdot 10^9$  různými způsoby. Zamyslíme-li se nad touto strukturou, uvědomíme si, jak obrovské množství gravitační potenciální energie je ve vesmíru nahromaděno.

### Odvození rov. (14.20)

Nechť míček, pohybující se z klidu ve velké (nekonečné) vzdálenosti od Země, padá do bodu  $P$ , jak je znázorněno na obr. 14.11. Potenciální energie soustavy míček + Země je na počátku nulová. Když míček dosáhne bodu  $P$ , bude potenciální energie rovna záporně vzaté práci  $W$  vykonané



**Obr. 14.10** Kulová hvězdokupa, jako např. tato v souhvězdí Střelce, obsahuje desítky tisíc hvězd uspořádaných ve výsledném kulovitěm útvaru. V naší Galaxii, kterou vidíme jako Mléčnou dráhu, je mnoho takových hvězdokup a některé z nich jsou viditelné již malým dalekohledem.



**Obr. 14.11** Míček o hmotnosti  $m$  padá k Zemi z nekonečna podél radiální přímky a prochází bodem  $P$ , který je ve vzdálenosti  $R$  od středu Země.

gravitační silou působící na míček, která ho přesunula do bodu  $P$  z jeho vzdálené polohy. Z rov. (8.5) plyne

$$E_p = -W = - \int_{\infty}^R \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r}. \quad (14.22)$$

Meze integrálu jsou dány počáteční vzdáleností míčku, kterou bereme jako nekonečnou, a jeho koncovou vzdáleností  $R$ .

Vektor  $\mathbf{F}(r)$  v rov. (14.22) směřuje radiálně do středu Země v obr. 14.11 a vektor  $d\mathbf{r}$  míří radiálně od něj, takže úhel  $\varphi$  mezi těmito vektory je  $180^\circ$ . Je tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} &= F(r)(\cos 180^\circ)(dr) = \\ &= -F(r) dr. \end{aligned} \quad (14.23)$$

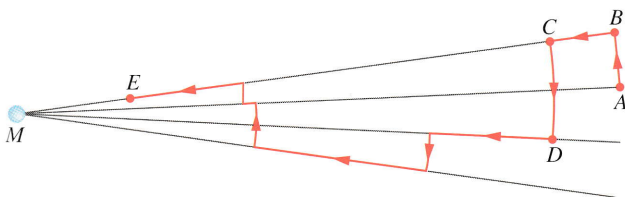
Za  $F(r)$  v rov. (14.23) nyní dosadíme z Newtonova gravitačního zákona (rov. (14.1)) a dostáváme

$$\mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{r} = - \frac{GMm}{r^2} dr.$$

Dosadíme-li ještě tento výraz do rov. (14.22), získáme výsledek

$$E_p = \int_{\infty}^R \left( \frac{GMm}{r^2} \right) dr = - \left[ \frac{GMm}{r} \right]_{\infty}^R = - \frac{GMm}{R},$$

což odpovídá přímo rov. (14.20).



**Obr. 14.12** Práce vykonaná gravitační silou při přesunu míčky z A do E je nezávislá na cestě, po níž se míček pohybuje.

V rov. (14.22) nezáleží na trajektorii, po které se míček k Zemi pohybuje. Uvažujme cestu vytvořenou z malých kroků, jako na obr. 14.12. Podél kroků, jako je AB nebo CD, kdy se nemění vzdálenost od Země, se nekoná žádná práce, protože gravitační síla je při nich kolmá na posunutí. Celková práce vykonaná při radiálních krocích, jako třeba BC, je tedy stejná jako práce vykonaná při pohybu podél jedné radiální přímky, což je vidět na obr. 14.12. Výsledná práce vykonaná gravitační silou působící na částici při jejím pohybu mezi libovolnými dvěma body je tedy nezávislá na cestě, po které se částice pohybuje, ale závisí pouze na počáteční a koncové poloze dané částice. Tuto práci můžeme jednoduše spočítat jako záporně vzatý rozdíl potenciální energie v těchto dvou bodech

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p,f} - E_{p,i}), \quad (14.24)$$

kde  $E_{p,f}$  je potenciální energie v koncovém a  $E_{p,i}$  v počátečním bodě. A právě to jsme chtěli říci v kap. 8 slovy, že gravitační síla je **konzervativní**. A jak jsme už výše rozebrali, pokud by práce na cestě *závisela* (jako např. u třecí síly), pak taková síla není potenciálová a potenciální energii nelze zavést.

### Potenciální energie a síla

V důkazu rov. (14.20) jsme odvodili potenciální energii  $E_p$  ze síly  $F$ . Měli bychom být také schopni postupovat obráceně, tedy začít od potenciální energie a dojít k síle. Se znalostí rov. (8.19) můžeme zapsat její radiální složku

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( -\frac{GMm}{r} \right) = \\ &= -\frac{GMm}{r^2}. \end{aligned} \quad (14.25)$$

To je právě Newtonův gravitační zákon (rov. (14.1)). Znaménko minus udává, že síla působící na hmotu  $m$  směřuje radiálně dovnitř, směrem k hmotě  $M$ .

## Úniková rychlost

Když vypálíme střelu svisle vzhůru, začne se zpomalovat, až se obvykle v jisté výšce na okamžik zastaví a pak se zase vrací k Zemi. Existuje však jistá počáteční rychlost, při které se částice bude pohybovat vzhůru navždy a zastaví se teoreticky až v nekonečnu. Tato počáteční rychlost se nazývá **úniková rychlost**.

Uvažujme střelu o hmotnosti  $m$ , která opouští povrch planety (nebo nějakého astronomického tělesa či systému) s únikovou rychlostí  $v$ . Její kinetická energie je rovna  $\frac{1}{2}mv^2$  a potenciální energie  $E_p$  je dána podle rov. (14.20):

$$E_p = -\frac{GMm}{R},$$

kde  $M$  je hmotnost planety a  $R$  její poloměr.

Když střela dosáhne nekonečna, zastaví se a nemá tedy žádnou kinetickou energii. Nemá ani žádnou potenciální energii, protože polohu v nekonečnu jsme zvolili za konfiguraci s nulovou potenciální energií. Celková energie střely v nekonečnu je proto nulová. Ze zákona zachování energie plyne, že její celková energie na povrchu planety musela být také nulová, takže platí

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left( -\frac{GMm}{R} \right) = 0.$$

Z toho plyne

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (14.26)$$

Úniková rychlost nezávisí na směru, kterým je střela vypuštěna. Uvážíme-li však rotaci Země kolem vlastní osy, je získání této rychlosti snadnější, pokud je střela vypuštěna ve směru pohybu Země. Například rakety startující na východ od mysu Canaveral mají navíc rychlost 1 500 km/h, kterou se mys pohybuje na východ díky rotaci Země.

**Tabulka 14.2** Příklady únikových rychlostí

TĚLESO	$\frac{M}{\text{kg}}$	$\frac{R}{\text{m}}$	$\frac{v}{\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$
Ceres <sup>a</sup>	$1,17\cdot 10^{21}$	$3,8\cdot 10^5$	0,64
Měsíc	$7,36\cdot 10^{22}$	$1,74\cdot 10^6$	2,38
Země	$5,98\cdot 10^{24}$	$6,37\cdot 10^6$	11,2
Jupiter	$1,90\cdot 10^{27}$	$7,15\cdot 10^7$	59,5
Slunce	$1,99\cdot 10^{30}$	$6,96\cdot 10^8$	618
Sirius B <sup>b</sup>	$2\cdot 10^{30}$	$1\cdot 10^7$	5 200
neutronová hvězda <sup>c</sup>	$2\cdot 10^{30}$	$1\cdot 10^4$	$2\cdot 10^5$

<sup>a</sup> nejhmotnější asteroid (planetka)

<sup>b</sup> bílý trpaslík (hvězda v koncovém stádiu vývoje), který je souputníkem jasné hvězdy Siria

<sup>c</sup> zhroutilé jádro hvězdy, které zbylo po jejím výbuchu v *supernovu*.

Rov. (14.26) můžeme použít k určení únikové rychlosti střely z jakéhokoli astronomického objektu, dosadíme-li za  $M$  hmotnost tohoto objektu a za  $R$  jeho poloměr. Tab. 14.2 udává únikové rychlosti z vybraných astronomických těles.

**KONTROLA 4:** Míč o hmotnosti  $m$  vzdalujeme z povrchu koule o hmotnosti  $M$ . (a) Roste, nebo klesá gravitační potenciální energie soustavy míč+koule? (b) Je práce konaná gravitační silou mezi míčem a koulí kladná, nebo záporná?

#### PŘÍKLAD 14.6

Asteroid letící přímo na Zem má ve vzdálenosti deseti poloměrů Země od jejího středu rychlost  $12 \text{ km/s}$  vůči Zemi. Pokud pomíneme vliv zemské atmosféry na jeho pohyb, určete, jakou rychlostí na Zemi dopadne.

**ŘEŠENÍ:** Jelikož je hmotnost asteroidu mnohem menší než hmotnost Země, můžeme gravitační potenciální energii systému Země + asteroid připsat jen samotnému asteroidu. Můžeme také zanedbat změnu relativní rychlosti Země vzhledem k asteroidu během jeho letu. Protože zanedbáváme vliv atmosféry na asteroid, zachovává se mechanická energie asteroidu během letu, tedy

$$E_{k,f} + E_{p,f} = E_{k,i} + E_{p,i},$$

kde  $E_k$  a  $E_p$  jsou kinetická a potenciální energie asteroidu a indexy  $f$  a  $i$  označují stav koncový (ve vzdálenosti 1 poloměrů Země) a počáteční (ve vzdálenosti 10 poloměrů Země).

Označme  $m$  hmotnost asteroidu,  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  hmotnost Země a  $R = 6378 \text{ km}$  poloměr Země. Použijeme-li rov. (14.20) pro potenciální energii a  $\frac{1}{2}mv^2$  pro kinetickou energii, dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{10R}.$$

Úpravou rovnice a dosazením známých hodnot získáme

$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_i^2 + \frac{2GM}{R} \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \\ &= (12 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 + \\ &\quad + \frac{2(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{(6,37 \cdot 10^6 \text{ m})} 0,9 = \\ &= 2,567 \cdot 10^8 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

a odtud plyne

$$v_f = 1,60 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 16 \text{ km/s}. \quad (\text{Odpověď})$$

Při této rychlosti by asteroid nemusel být nijak zvlášť veliký k tomu, aby způsobil na Zemi vážné škody. I kdyby měl

například průměr pouhých  $5 \text{ m}$ , uvolnil by jeho dopad tolik energie jako výbuch jaderné bomby v Hirošimě. Varovné je, že v blízkosti oběžné dráhy Země se nachází  $500$  milionů podobných asteroidů. V roce 1944 jeden z nich zřejmě pronikl zemskou atmosférou a explodoval ve výšce  $20 \text{ km}$  nedaleko osamělého ostrova v jižním Pacifiku. Tím způsobil, že se na šesti válečných satelitech spustil varovný signál před jadernou explozí. Asteroid o průměru  $500 \text{ m}$  (a takových může být poblíž zemské oběžné dráhy milion) by mohl zničit celou moderní civilizaci a téměř vyhladit celé lidstvo. Víme-li však o něm včas, umíme ho už (výbuchem) vhodně vychýlit z dráhy. (Jak je vidět, fyzika, astronomie i technika mohou lidstvu opravdu prospět.)

## 14.7 PLANETY A DRUŽICE: KEPLEROVY ZÁKONY

Pohyby planet, které po obloze putují na pozadí hvězd, byly hádankou již od dávných časů. Smyčkovitý pohyb Marsu, znázorněný na obr. 14.13, byl obzvláště matoucí. Johannes Kepler (1571–1630) formuloval po celoživotním studiu empirické zákony, kterými se tyto pohyby řídí. Tycho Brahe (1546–1601), který jako poslední z velkých astronomů prováděl pozorování bez pomoci dalekohledu, nashromáždil rozsáhlé množství poznatků a údajů, které umožnily Keplerovi odvodit tři zákony o pohybech planet, nesoucí dnes Keplerovo jméno. Později ukázal Newton (1642–1727), že z jeho gravitačního zákona lze Keplerovy empirické zákony odvodit i teoreticky.



**Obr. 14.13** Dráha planety Mars, po níž se pohybovala na pozadí souhvězdí Kozoroha během roku 1971. Na obrázku je znázorněna jeho poloha ve čtyřech různých dnech. Planety Mars i Země se obě pohybují po oběžných drahách kolem Slunce; zde vidíme polohu Marsu vzhledem k Zemi. Díky tomu pozorujeme na dráze Marsu zdánlivé smyčky.

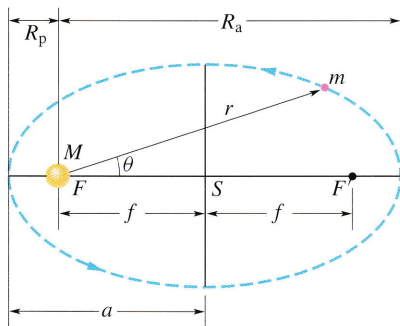
Probereme si postupně každý z Keplerových zákonů. Nejprve formulace pro skutečné planety naší sluneční soustavy:

**1. Keplerův zákon (zákon oběžných drah):** Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách (jen málo odlišných od kružnic), v jejichž společném ohnisku je Slunce.

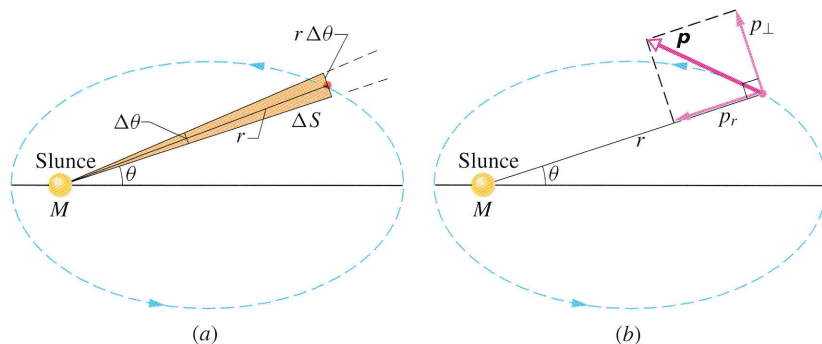
Ačkoli jsou zde zákony formulovány pro planety, které se pohybují kolem Slunce, platí stejně dobře pro družice (satelity), ať už přírodní nebo umělé, které obíhají kolem Země nebo jakéhokoli jiného objektu, v tomto trochu obecnějším znění:

**Obecná formulace 1. Keplerova zákona:** Částice se pod vlivem centrální síly pohybuje po kuželosečce (kružnici, elipse, parabole nebo hyperbole), která má ohnisko v centru síly.

Obr. 14.14 představuje planetu o hmotnosti  $m$  obíhající po jedné z oběžných drah kolem Slunce, jehož hmotnost je  $M$ . Předpokládáme, že  $M \gg m$ , a proto těžiště soustavy planeta + Slunce leží téměř ve středu Slunce (úloha 88).



**Obr. 14.14** Planeta o hmotnosti  $m$  pohybující se po eliptické oběžné dráze kolem Slunce. Slunce o hmotnosti  $M$  se nachází v jednom ohnisku  $F$  dané elipsy; druhé, „prázdné“ ohnisko, je označeno  $F'$ . Každé z ohnisek je vzdáleno o  $f = |SF| = ea$  od středu elipsy, kde  $e$  je excentricita elipsy a  $a$  je její hlavní poloosa. Perihelium (nejbližší místo ke Slunci) je ve vzdálenosti  $R_p$  a afelium (nejvzdálenější místo od Slunce) je ve vzdálenosti  $R_a$ .



**Obr. 14.15** (a) Za čas  $\Delta t$  opíše průvodič  $r$  úhel  $\Delta\theta$  a plochu o obsahu  $\Delta S$ . (b) Hybnost  $\mathbf{p}$  dané planety a její složky.

Oběžná dráha na obr. 14.14 je popsána vyznačenou hlavní poloosou  $a$  a excentricitou  $e$  neboli výstředností, definovanou tak, že  $f = ea$  je vzdálenost středu elipsy  $S$  od ohniska  $F$  nebo  $F'$ . Nulová excentricita odpovídá kružnici, v níž obě ohniska splynou do jednoho bodu — do středu kružnice. Excentricity oběžných drah planet jsou poměrně malé, takže tyto dráhy — načrtnuty na papíru — vypadají skoro jako kružnice. Excentricita elipsy na obr. 14.14, která je pro větší názornost přehnaně velká, činí 0,74. Skutečná excentricita oběžné dráhy Země je pouze 0,0167. Jiné objekty než planety (např. komety) mohou mít excentricitu podstatně větší.

**2. Keplerův zákon (zákon ploch):** Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou stejně velké.

Z tohoto zákona plyne, že se planeta bude pohybovat nejpomaleji, když bude od Slunci nejdále, a nejrychleji, když bude k Slunci nejbližší. Druhý Keplerův zákon je ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti. Dokažme to:

Obsah vystínovaného klínu na obr. 14.15a je přibližně roven obsahu plochy opsané průvodičem planety o délce  $r$  za čas  $\Delta t$ . Obsah tohoto klínu  $\Delta S$  je přibližně roven obsahu trojúhelníka o základně  $r \Delta\theta$  a výšce  $r$ , tedy  $\Delta S \doteq \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$ . Toto vyjádření pro  $\Delta S$  bude tím přesnější, čím více se bude  $\Delta t$  (a také  $\Delta\theta$ ) blížit nule. Okamžitá rychlost, s jakou přibývá plocha, je tedy

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 \omega}{2}, \quad (14.27)$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost průvodiče.

Obr. 14.15b znázorňuje hybnost planety a její jednotlivé průměty. Z rov. (12.27) je velikost momentu hybnosti  $L$  planety obíhající kolem Slunce dána ramenem  $r$  a složkou  $p_{\perp}$  hybnosti  $\mathbf{p}$  kolmou k  $r$ :

$$\begin{aligned} L &= r p_{\perp} = (r)(m v_{\perp}) = (r)(m \omega r) = \\ &= m r^2 \omega, \end{aligned} \quad (14.28)$$

kde jsme za  $v_{\perp}$  dosadili  $\omega r$  z rov. (11.16). Vyloučíme-li společný výraz  $r^2\omega$  z rov. (14.27) a (14.28), dostáváme

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}. \quad (14.29)$$

Pokud bude  $dS/dt$  konstanta, a to tvrdí 2. Keplerův zákon, pak podle rov. (14.29) musí být  $L$  také konstanta, což znamená, že se moment hybnosti  $L$  bude zachovávat. Druhý Keplerův zákon je tedy skutečně ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti.

**3. Keplerův zákon (zákon oběžných dob):** Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich drah.

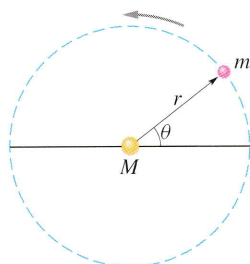
Pro ilustraci, uvažujme kruhovou oběžnou dráhu o poloměru  $r$  (poloměr u kružnice je ekvivalentem hlavní poloosy u elipsy). Užitím druhého Newtonova zákona  $F = ma$  pro obíhající planetu na obr. 14.16 dostáváme

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r). \quad (14.30)$$

Za sílu  $F$  jsme dosadili z rov. (14.1) a dále jsme použili rov. (11.21), odkud jsme za velikost dostředivého zrychlení dosadili výraz  $\omega^2 r$ . Když podle rov. (11.18) dosadíme  $\omega = 2\pi/T$ , kde  $T$  je oběžná doba, získáme třetí Keplerův zákon:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \quad (\text{zákon oběžných dob}). \quad (14.31)$$

Výraz v závorkách je konstanta, jejíž hodnota závisí pouze na hmotnosti centrálního tělesa.



**Obr. 14.16** Planeta o hmotnosti  $m$  pohybující se kolem Slunce po kruhové oběžné dráze o poloměru  $r$ .

Rov. (14.31) platí také pro eliptické dráhy, zaměníme-li v ní  $r$  za  $a$ , čili hlavní poloosu elipsy. Tento zákon předpovídá, že poměr  $T^2/a^3$  bude stejný pro oběžné dráhy všech planet obíhajících kolem daného hmotného tělesa. Tab. 14.3 ukazuje, jak dalece zákon platí pro oběžné dráhy planet naší Sluneční soustavy.



Dne 7. února 1984, ve výšce 102 km nad Havajskými ostrovy v rychlosti 29 000 km/h, vystoupil Bruce McCandless z raketoplánu (s nímž nebyl pevně spojen) do vesmíru. Tím se stal prvním lidským satelitem.

**Tabulka 14.3** Třetí Keplerův zákon pro Sluneční soustavu

PLANETA	$\frac{a}{10^{10} \text{ m}}$	$\frac{T}{\text{y}}$	$\frac{T^2/a^3}{10^{-34} \text{ y}^2/\text{m}^3}$
Merkur	5,79	0,241	2,99
Venuše	10,8	0,615	3,00
Země	15,0	1,00	2,96
Mars	22,8	1,88	2,98
Jupiter	77,8	11,9	3,01
Saturn	143	29,5	2,98
Uran	287	84,0	2,98
Neptun	450	165	2,99
Pluto	590	248	2,99

**KONTROLA 5:** Družice 1 obíhá planetu po jisté kruhové dráze, družice 2 ji obíhá po větší kruhové dráze. Která z družic má (a) delší dobu oběhu a (b) větší rychlost?

#### PŘÍKLAD 14.7

Družice, obíhající po kruhové dráze ve výšce  $h = 230$  km nad Zemí, má dobu oběhu  $T = 89$  min. Jakou hmotnost by podle těchto údajů měla mít Země?

**ŘEŠENÍ:** K výpočtu použijeme 3. Keplerův zákon pro soustavu družice + Země. Vyjádříme-li z rov. (14.31) hmot-



nost  $M$ , získáme vztah

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}. \quad (14.32)$$

Poloměr  $r$  dráhy družice je

$$r = R + h = (6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 230 \cdot 10^3 \text{ m}) = 6,60 \cdot 10^6 \text{ m},$$

kde  $R$  je poloměr Země. Dosazením této hodnoty poloměru a doby oběhu do rov. (14.32) dostaneme

$$M = \frac{4\pi^2 (6,60 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})(89 \cdot 60 \text{ s})^2} = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}. \quad (\text{Odpověď})$$

Stejným způsobem můžeme také určit hmotnost Slunce ze známých hodnot doby oběhu Země a poloměru její oběžné dráhy kolem Slunce (předpokládáme-li, že je kruhová) nebo třeba hmotnost Jupitera pomocí doby oběhu a poloměru oběžné dráhy některého z jeho měsíců (jehož hmotnost znát nemusíme).

#### PŘÍKLAD 14.8

Halleyova kometa obíhá kolem Slunce s periodou 76 let. V roce 1986 měla nejbližší vzdálenost od Slunce, tj. vzdálenost v **periheliu**, rovnou  $R_p = 8,9 \cdot 10^{10} \text{ m}$ . Tab. 14.3 ukazuje, že se nacházela mezi oběžnými drahami Merkura a Venuše. (a) Jaká je největší vzdálenost této komety od Slunce, čili její vzdálenost v **aféliu**\*  $R_a$ ?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (14.31) můžeme určit velikost hlavní poloosy oběžné dráhy Halleovy komety. Nahradíme-li  $r$  za  $a$  a vyjádříme-li  $a$  z této rovnice, dostaneme

$$a = \left( \frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}. \quad (14.33)$$

Nyní stačí dosadit za hmotnost Slunce  $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  a dobu oběhu komety  $T = 76 \text{ let} = 2,4 \cdot 10^9 \text{ s}$ ; vypočteme, že  $a = 2,7 \cdot 10^{12} \text{ m}$ . Z obr. 14.14 vidíme, že  $R_a + R_p = 2a$  neboli

$$\begin{aligned} R_a &= 2a - R_p = \\ &= 2(2,7 \cdot 10^{12} \text{ m}) - (8,9 \cdot 10^{10} \text{ m}) = \\ &= 5,3 \cdot 10^{12} \text{ m}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Z tab. 14.3 je vidět, že tato vzdálenost je jen o něco málo menší než hlavní poloosa oběžné dráhy planety Pluto.

(b) Jakou excentricitu má oběžná dráha Halleovy komety?

\* Při oběhu kolem Slunce se užívají tvary perihelium i perihel, a afélium (stažené z apo-helium). Při oběhu kolem Země jde o **perigeum** a **apogeum**.

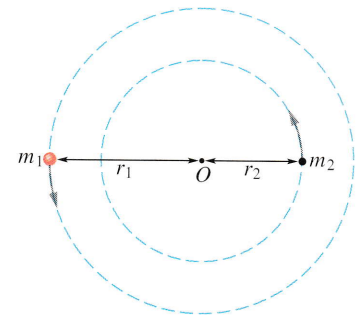
**ŘEŠENÍ:** Na obr. 14.14 vidíme, že  $ea = a - R_p$  neboli

$$\begin{aligned} e &= \frac{a - R_p}{a} = 1 - \frac{R_p}{a} = \\ &= 1 - \frac{(8,9 \cdot 10^{10} \text{ m})}{(2,7 \cdot 10^{12} \text{ m})} = 0,97. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že oběžná dráha Halleovy komety, jejíž excentricita je blízká jedné, má tvar velmi protáhlé úzké elipsy.

#### PŘÍKLAD 14.9

Pozorování světla z jisté hvězdy nám naznačuje, že tato hvězda je součástí dvojhvězdy. Viditelná hvězda má oběžnou rychlost  $v = 270 \text{ km/s}$  (což zjistíme z Dopplerova posuvu v jejím spektru, viz čl. 18.9), dobu oběhu  $T = 1,70 \text{ dní}$  a hmotnost přibližně rovnou  $m_1 = 6M_S$ , kde  $M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  je hmotnost Slunce. Předpokládejme, že se hvězda a její společník, který je temný, a proto neviditelný, pohybují po kruhových oběžných drahách (obr. 14.17). Určete přibližnou hmotnost  $m_2$  jejího temného společníka.



**Obr. 14.17** Příklad 14.9. Viditelná hvězda o hmotnosti  $m_1$  a temný, neviditelný objekt o hmotnosti  $m_2$  obíhají kolem hmotného středu dvojhvězdy v bodě  $O$ .

**ŘEŠENÍ:** Stejně jako u soustavy dvou částic v čl. 9.2 leží těžiště této dvojhvězdy na spojnici středů obou hvězd. A stejně jako volně rotující tělesa a systémy v kap. 12 rotuje tato dvojhvězda kolem společného těžiště. Na obr. 14.17 je těžiště vyznačeno bodem  $O$ . Viditelná hvězda a temná hvězda obíhají kolem bodu  $O$  po oběžných drahách o poloměrech  $r_1$  a  $r_2$ , čili mají navzájem stálou vzdálenost  $r = r_1 + r_2$ . Z rov. (14.1) můžeme určit velikost gravitační síly, jakou působí temný objekt na viditelnou hvězdu,

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

Použitím Newtonova zákona síly,  $F = ma$ , pro viditelnou hvězdu platí

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1a = (m_1)(\omega^2r_1), \quad (14.34)$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost viditelné hvězdy a  $\omega^2r_1$  velikost jejího dostředivého zrychlení mířícího do bodu  $O$ .

Pro tytéž veličiny však můžeme získat ještě další vztah, totiž vzorec pro polohu těžiště  $O$

$$r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}.$$

Z toho plyne

$$r = r_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2}. \quad (14.35)$$

Když teď dosadíme  $r$  z rov. (14.35) do rov. (14.34) a nahradíme  $\omega$  výrazem  $2\pi/T$ , pak po jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4\pi^2}{GT^2} r_1^3. \quad (14.36)$$

Stále zůstávají dvě neznámé,  $m_2$  a  $r_1$ . Hodnotu  $r_1$  však můžeme určit z kruhového pohybu viditelné hvězdy: doba oběhu  $T$  je rovna podílu obvodu oběžné dráhy ( $2\pi r_1$ ) a rychlosti  $v$  hvězdy. Tedy

$$T = \frac{2\pi r_1}{v}$$

neboli

$$r_1 = \frac{vT}{2\pi}. \quad (14.37)$$

Dosadíme-li  $m_1 = 6M_S$  a  $r_1$  z rov. (14.37), pak rov. (14.36) nabude tvaru

$$\begin{aligned} \frac{m_2^3}{(6M_S + m_2)^2} &= \frac{v^3 T}{2\pi G} = \\ &= \frac{(2,7 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^3 (1,70 \text{ d})(86400 \text{ s/d})}{2\pi(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2})} = \\ &= 6,90 \cdot 10^{30} \text{ kg} \end{aligned}$$

neboli

$$\frac{m_2^3}{(6M_S + m_2)^2} = 3,47M_S. \quad (14.38)$$

Mohli bychom řešit tuto kubickou rovnici pro  $m_2$ . Pokud nám však stačí jen odhad (stejně počítáme jen s přibližnými hodnotami hmotností), stačí zkoušet postupně dosazovat za  $m_2$  celočíselné násobky  $M_S$ . Hodnota, která nejlépe vyhovuje dané rovnici, je

$$m_2 \doteq 9M_S. \quad (\text{Odpověď})$$

Tyto hodnoty přibližně odpovídají systému LMC X-3 ve Velkém Magellanově mračnu (viz obrázek na začátku této kapitoly). Z dalších údajů zjistíme, že temný objekt je obzvláště hustý: mohla by to být vlastní gravitací zhroucená hvězda, ze které se stala buď neutronová hvězda, nebo černá díra. Vzhledem k tomu, že neutronová hvězda nemůže mít hmotnost větší než  $2M_S$ , utvrzuje nás výsledek  $m_2 \doteq 9M_S$  v přesvědčení, že se jedná o černou díru.

O přítomnosti černé díry se tedy můžeme přesvědčit např. tehdy, pokud je součástí binárního systému s viditelnou hvězdou, jejíž hmotnost, oběžnou rychlost a oběžnou dobu můžeme měřit.



## 14.8 DRUŽICE: OBĚŽNÉ DRÁHY A ENERGIE

S pohybem družice kolem Země se mění jak její rychlost, která určuje její kinetickou energii, tak vzdálenost od středu Země, která určuje její gravitační potenciální energii, a to ve stejných časových intervalech. Přesto však její celková mechanická energie  $E$  zůstává stejná. Vzhledem k tomu, že hmotnost družice je mnohem menší než hmotnost Země, připisujeme tyto energie  $E_p$  a  $E$  soustavy družice + Země jen samotné družici.

Potenciální energie je dána rov. (14.20) a je rovna

$$E_p = -\frac{GMm}{r},$$

kde  $E_p = 0$  pro  $r \rightarrow \infty$ . Zde je  $r$  poloměr oběžné dráhy; předpokládáme zatím, že je kruhová.

Abychom určili kinetickou energii družice na kruhové oběžné dráze, použijeme druhý Newtonův zákon  $F = ma$  a napíšeme ho ve tvaru

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}, \quad (14.39)$$

kde  $v^2/r$  je velikost dostředivého zrychlení družice. Potom z rovnice (14.39) plyne vztah pro kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \quad (14.40)$$

kteří nám ukazuje, že pro družici obíhající po kruhové dráze platí

$$E_k = -\frac{E_p}{2}. \quad (14.41)$$

Celková mechanická energie pohybující se družice je

$$E = E_k + E_p = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

neboli

$$E = -\frac{GMm}{2r}. \quad (14.42)$$

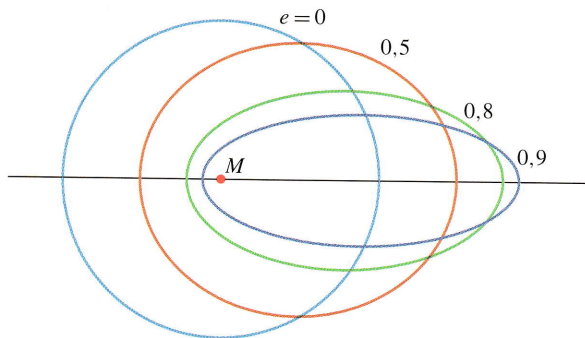
To nám říká, že celková energie  $E$  družice je záporně vzatá kinetická energie  $E_k$ :

$$E = -E_k \quad (\text{pro kruhovou dráhu}). \quad (14.43)$$

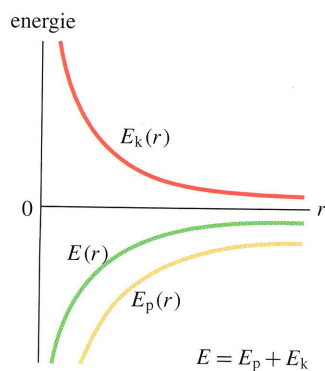
Pro družici pohybující se po eliptické oběžné dráze s hlavní poloosou  $a$  můžeme dosadit  $r = a$  v rov. (14.42) a určit celkovou mechanickou energii vztahem

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (\text{pro eliptickou dráhu}). \quad (14.44)$$

Rov. (14.44) ukazuje, že celková mechanická energie obíhající družice závisí pouze na velikosti hlavní poloosy její oběžné dráhy a nezávisí na její excentricitě  $e$ . Např. na obr. 14.18 jsou nakresleny čtyři oběžné dráhy o stejné dlouhé poloose  $a$ . Družice pohybující se po těchto čtyřech odlišných drahách by však měly stejné celkové mechanické energie  $E$ . Obr. 14.19 ukazuje závislosti veličin  $E_k$ ,  $E_p$  a  $E$  na poloměru  $r$  u družice, která se pohybuje po kruhové dráze kolem těžkého centrálního tělesa.



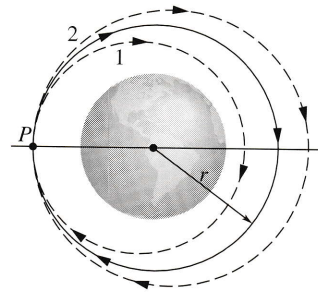
**Obr. 14.18** Čtyři oběžné dráhy kolem centrálního tělesa o hmotnosti  $M$ . Všechny tyto dráhy mají stejně velkou hlavní poloosu  $a$ , a proto jim odpovídá stejná celková energie  $E$ . Excentricity  $e$  jednotlivých drah jsou na obrázku vyznačeny.



**Obr. 14.19** Kinetická energie  $E_k$ , potenciální energie  $E_p$  a celková mechanická energie  $E$  v závislosti na poloměru  $r$  kruhové oběžné dráhy družice. Hodnoty  $E_p$  a  $E$  jsou záporné pro každé  $r$ , hodnoty  $E_k$  jsou naopak pouze kladné a platí  $E = -E_k$ . Blíží-li se  $r$  nekonečnu, klesají hodnoty všech tří energií k nule.

**KONTROLA 6:** Uvažujme situaci na obrázku. Raketoplán se na počátku pohybuje po kruhové dráze o polo-

měru  $r$  kolem Země. V bodě  $P$  vystřelil pilot dopředu pomocnou raketu, a tím zmenšil kinetickou energii  $E_k$  raketoplánu i jeho celkovou mechanickou energii  $E$ . (a) Po které z eliptických drah, vyznačených na obrázku přerušovanou čarou, se bude poté raketoplán pohybovat? (b) Bude nová oběžná doba  $T$  raketoplánu (tj. čas, za který se vrátí zpět do bodu  $P$ ) větší, menší, nebo stejná jako při pohybu po kruhové oběžné dráze?



#### PŘÍKLAD 14.10

Rozverný astronaut vypustil ve výšce  $h = 350$  km nad Zemí velký medicinbal o hmotnosti  $m = 7,20$  kg na kruhovou oběžnou dráhu kolem Země.

(a) Jaká je mechanická energie  $E$  míče na této dráze?

**ŘEŠENÍ:** Poloměr její oběžné dráhy  $r$  je roven

$$r = R + h = (6\,378 \text{ km}) + (350 \text{ km}) = 6,73 \cdot 10^6 \text{ m},$$

kde  $R$  je poloměr Země. Z rov. (14.42) pak snadno určíme mechanickou energii koule

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GMm}{2r} = \\ &= -\frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2})(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(7,20 \text{ kg})}{2(6,73 \cdot 10^6 \text{ m})} = \\ &= -2,134 \cdot 10^8 \text{ J} \approx -213 \text{ MJ}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká byla mechanická energie  $E_0$  medicinbalu na startovací rampě v Mysu Canaveral? Spočítejte přírůstek  $\Delta E$  energie při přemístění z odpalovací rampy na oběžnou dráhu kolem Země.

**ŘEŠENÍ:** Na startovací rampě měl míč, díky rotaci Země, také jistou kinetickou energii, ale její hodnota je oproti výsledné energii natolik malá, že ji můžeme zanedbat. Celková energie  $E_0$  je tedy rovna potenciální energii  $E_{p,0}$ , která je dána vztahem (14.20)

$$\begin{aligned} E_0 = E_{p,0} &= -\frac{GMm}{R} = \\ &= -\frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2})(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(7,20 \text{ kg})}{(6,38 \cdot 10^6 \text{ m})} = \\ &= -4,501 \cdot 10^8 \text{ J} = -450 \text{ MJ}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Mohli byste namítnout, že potenciální energie koule na povrchu Země je nulová. Připomeňme si však, že hladinu nulové potenciální energie jsme zvolili v nekonečnu. Také byste možná chtěli k výpočtu  $E_0$  použít rov. (14.42), ale pozor — tato rovnice platí jen pro družici *obíhající* kolem Země. *Přírůstek* mechanické energie koule od startu až na oběžnou dráhu je roven

$$\begin{aligned}\Delta E &= E - E_0 = (-213 \text{ MJ}) - (-450 \text{ MJ}) = \\ &= 237 \text{ MJ.} \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$

Toto množství energie ve formě elektřiny by vás (bez započtení pravidelných měsíčních poplatků) při domácí sazbě N, tj. 0,91 Kč/(kW·h), stálo ani ne 60 Kč.

## 14.9 EINSTEIN A GRAVITACE

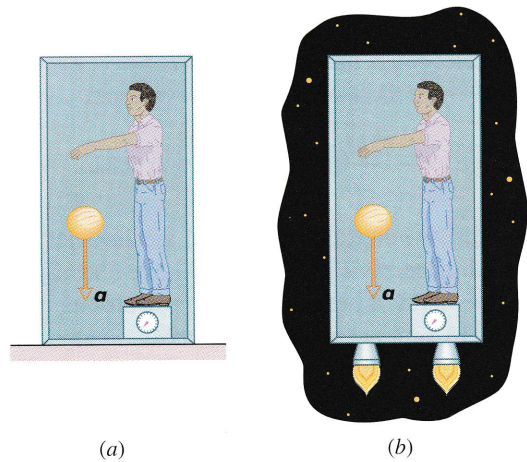
### Princip ekvivalence

Albert Einstein jednou vyprávěl: „Byl jsem... na patentovém úřadě v Bernu a najednou mě napadla myšlenka: »Bude-li osoba padat volným pádem, nebude pociťovat vlastní váhu.« Bylo to překvapení. Tato jednoduchá myšlenka na mě hluboce zapůsobila. A to mě dovedlo až k teorii gravitace.“

Einstein nám zde popsal, jak vlastně začala vznikat jeho známá **obecná teorie relativity**. Základní postulát této teorie, zabývající se gravitací (vzájemným gravitačním působením předmětů), se nazývá **princip ekvivalence** a říká, že gravitace a zrychlení si jsou navzájem ekvivalentní. Bude-li fyzik uzavřen v nějaké skříni jako na obr. 14.20a, nebude schopen určit, je-li skříň v klidu na Zemi (a je vystavena působení gravitační síly Země), nebo se pohybuje v mezihvězdném prostoru se zrychlením  $9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  (a je tedy vystavena působení síly, která toto zrychlení vyvolala) jako na obr. 14.20b. V obou případech se fyzik bude cítit úplně stejně a na váze si bude moci přečíst stejný údaj. Navíc, bude-li vedle něj volně padat nějaký předmět, bude mít vůči němu v obou případech stejné zrychlení.

### Zakřivení prostoru

Doposud jsme vysvětlovali gravitaci jako působení vzájemných přitažlivých sil mezi hmotnými tělesy. Einstein však ukázal, že gravitaci lze také popsat zakřivením prostoru, které je vyvoláno přítomností hmoty. (Jak bude v této knize zmíněno později, prostor a čas jsou spolu provázány, takže zakřivení, o kterém Einstein mluvil, je ve skutečnosti zakřivení **prostorochasu**, čtyřrozměrného útvaru složeného z trojrozměrného prostoru a jednorozměrného času, v němž popisujeme náš vesmír.)

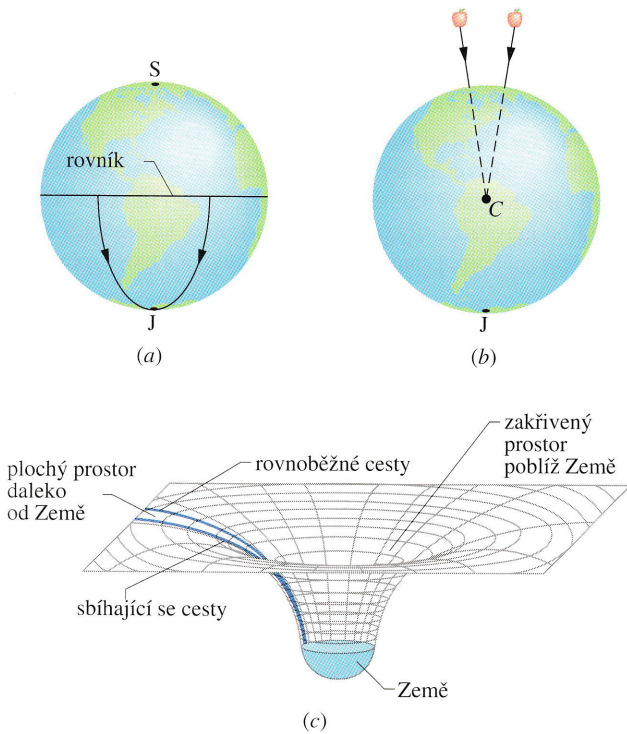


**Obr. 14.20** (a) Fyzik zavřený ve skříni, která stojí v klidu na Zemi, vidí padat meloun se zrychlením  $a = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . (b) Pokud bude skříň i s ním urychlována v hlubinách vesmíru se zrychlením  $9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , bude mít meloun vzhledem k němu stejné zrychlení jako v případě (a). Není tedy možné, aby jen na základě takovýchto experimentů prováděných uvnitř skříňe mohl fyzik říci, v jaké situaci se nachází. Například váha, na které stojí, ukazuje v obou případech stejný údaj.

Znázornění toho, jak může být prostor (stejně jako vakuum) zakřivený, je složité. Analogie nám však může pomoci: Představme si, že se díváme z oběžné dráhy na závod dvou lodí, které startují na rovníku ve vzdálenosti 20 km a míří na jih (obr. 14.21a). Námořníkům na těchto lodích se jejich cesty zdají být přímé\* a rovnoběžné. Přesto však se po čase začnou lodě k sobě přibližovat a těsně u jižního pólu se spolu setkají. Námořníci si to mohou vysvětlit tak, že na lodě působila nějaká síla. My však vidíme, že se lodě spolu setkaly díky zakřivení zemského povrchu. Máme možnost to vidět proto, že jsme závod pozorovali zvenčí, mimo tento povrch.

Obr. 14.21b ukazuje podobné závody: dvě jablka v jisté horizontální vzdálenosti jsou puštěna ze stejné výšky nad Zemí. Ačkoli se může zdát, že se jablka pohybují po rovnoběžných drahách, ve skutečnosti se k sobě přibližují, protože obě padají do středu Země. Jejich pohyb můžeme vysvětlit tak, že na jablka působí Země svou gravitační silou. Také to však můžeme vysvětlit tím, že v blízkosti Země je prostor zakřiven (díky přítomnosti zemské hmoty). Tentokrát nemůžeme toto zakřivení vidět, protože nemáme možnost dostat se „vně“ zakřiveného prostoru jako v předešlém příkladu s loděmi. Můžeme ho však popsat třeba pomocí obr. 14.21c. Tady by se jablka pohybovala po po-

\* „Přímkou“ je na kouli s poloměrem  $R$  každá **hlavní kružnice**, tj. kružnice s poloměrem také rovným  $R$ .

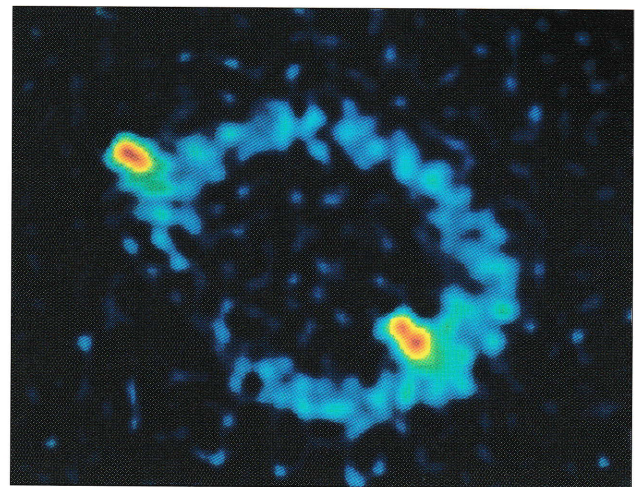
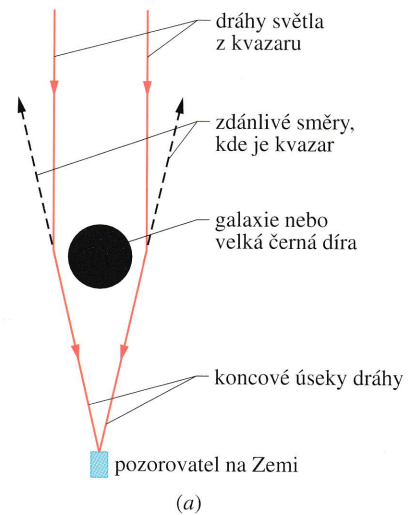


**Obr. 14.21** (a) Dva předměty pohybující se podél poledníků směrem k jižnímu pólu se přibližují, protože zemský povrch je zakřiven. (b) Dva předměty padající volným pádem v blízkosti Země se pohybují po přímých čarách, které se sbíhají ke středu Země, a to díky zakřivení prostoru v okolí Země. (c) Daleko od Země (a jiných hmotných objektů) je prostor plochý a rovnoběžné dráhy zůstávají rovnoběžné a stejně vzdálené od sebe. V blízkosti Země se však rovnoběžné dráhy začínají sbíhat, protože prostor je zde zakřiven hmotou Země.

vrchu, který se směrem k Zemi stále více zakřivuje právě vlivem hmoty Země.

Když kolem nějakého hmotného předmětu prochází světlo, je i dráha světla lehce ohnuta díky zakřivení prostoru v okolí tohoto předmětu. Tento jev se nazývá **gravitační čočka**. Bude-li světlo míjet nějaký hodně hmotný objekt, třeba galaxii nebo černou díru o velké hmotnosti, bude dráha paprsku ohnuta víc. Pokud se tento hmotný objekt nachází mezi námi a kvazarem (kvazar je extrémně jasný a extrémně vzdálený zdroj světla), bude paprsek přicházející z kvazaru ohnut kolem této struktury k nám na Zemi (obr. 14.22a). Jelikož se díky tomuto ohybu zdá, že světlo přichází z trochu jiného směru, vidíme v těchto různých směrech na obloze naprosto stejné kvazary. V některých případech jsou kvazary, které vidíme, ohnuty k sobě a vytvářejí obrovský světelný oblouk, který nazýváme **Einsteinův prstenec** (obr. 14.22b).

Je lepší přisuzovat gravitaci síle působící mezi hmotnými objekty, anebo zakřivení prostoročasu, způsobenému přítomností hmoty? A bylo by ji možno popsat jistým druhem elementárních částic zvaných **gravitony**, jak se uvažuje v některých moderních fyzikálních teoriích? To zatím nevíme.



**Obr. 14.22** (a) Světlo ze vzdáleného kvazaru se kolem galaxie nebo velké černé díry pohybuje po zakřivené dráze, protože hmota této galaxie nebo černé díry zakřivuje okolní prostor. Když světlo dopadá na Zemi, zdá se nám, že se jeho zdroj nachází v prodloužení koncové dráhy světelného paprsku (přerušovaná čára). (b) Einsteinův prstenec, známý jako MG 1 131+0 456, na počítačovém snímku z dalekohledu. Zdroj světla (vlastně rádiových vln, které jsou druhem neviditelného světla) je daleko za velkou, nespátřitelnou galaxií, která vytváří tento prstenec. Část tohoto zdroje vystupuje jako dvě jasné skvrny, které vidíme podél prstence.

## PŘEHLED & SHRNTÍ

### Gravitační zákon

Libovolné dvě částice ve vesmíru se navzájem přitahují gravitační silou o velikosti

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (14.1)$$

kde  $m_1$  a  $m_2$  jsou hmotnosti částic a  $r$  je vzdálenost mezi nimi. Gravitační konstanta  $G$  je univerzální konstantou a její hodnota je  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

### Gravitační chování homogenní kulové slupky

Rov. (14.1) platí pouze pro částice. Gravitační síla mezi rozměrnými tělesy se musí obecně určit ze součtu (integrací) jednotlivých sil působících na všechny částice uvnitř těchto těles. Pokud však každé toto těleso je kulově symetrické (neboli po vrstvách homogenní), lze výslednou gravitační sílu, která působí na vnější předměty, spočítat tak, jako by veškerá hmota každého tělesa byla soustředěna v jeho středu.

### Skládání sil

Gravitační síly se řídí *principem superpozice*, který říká, že výsledná síla  $\mathbf{F}_1$  působící na částici označenou číslem 1 je dána součtem sil, kterými na ni působí ostatní částice:

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{i=2}^n \mathbf{F}_{1i}. \quad (14.4)$$

Jedná se o vektorový součet sil  $\mathbf{F}_{1i}$ , kterými na zvolenou částici 1 působí částice 2, 3, ...,  $n$ . Gravitační síla  $\mathbf{F}_1$ , kterou působí na částici nějaký větší hmotný předmět, se určí tak, že tento předmět rozdělíme na infinitezimální dílky o hmotnosti  $dm$ . Každý z nich působí infinitezimální silou  $d\mathbf{F}$  a po integraci těchto příspěvků dostaneme

$$\mathbf{F}_1 = \int d\mathbf{F}. \quad (14.5)$$

Připomeňme, že příspěvky uvažujeme v tomtéž okamžiku, tedy jako by se gravitace šířila nekonečně rychle. To je v souladu s klasickou fyzikou, nikoli ovšem s teorií relativity. Relativistickou teorií gravitace rozvíjí až obecná teorie relativity.

### Gravitační zrychlení

Gravitační zrychlení  $\mathbf{a}_g$  částice (o hmotnosti  $m$ ) je způsobeno výhradně gravitační silou, která na částici působí. Je-li částice ve vzdálenosti  $r$  od středu homogenního kulového tělesa o hmotnosti  $M$ , pak velikost gravitační síly na ni působící je dána rov. (14.1). Navíc, podle druhého Newtonova zákona platí

$$F = ma_g \quad (14.11)$$

a odtud pro  $a_g$  plyne vztah

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \quad (14.12)$$

### Tíhové zrychlení a tíhová síla

Tíhové zrychlení  $\mathbf{g}$  částice v blízkosti Země se trochu (méně než o  $\frac{1}{2}\%$ ) liší od gravitačního zrychlení  $\mathbf{a}_g$ . Proto i tíhová síla  $m\mathbf{g}$  se liší od gravitační síly (rov. (14.1)) působící na částici. Země totiž není ani homogenní, ani dokonale kulová a navíc rotuje.

### Gravitace uvnitř kulové slupky

Homogenní kulová hmotná slupka nepůsobí žádnou výslednou gravitační silou na částice, které se nacházejí uvnitř. To znamená, že pokud je částice umístěna uvnitř homogenní pevné koule ve vzdálenosti  $r$  od jejího středu, bude výsledná gravitační síla působící na částici vyvolána pouze tou hmotou, která se nachází uvnitř koule o poloměru  $r$ . Její hmotnost je dána vztahem

$$M' = \rho \frac{4\pi r^3}{3}, \quad (14.18)$$

kde  $\rho$  je hustota dané koule.

### Gravitační potenciální energie

Gravitační potenciální energie  $E_p(r)$  soustavy dvou částic o hmotnostech  $M$  a  $m$  vzájemně vzdálených  $r$  je rovna záporně vzaté práci, kterou by vykonala gravitační síla jedné z částic působící na druhou částici při jejím přesunu z nekonečna (z velké vzdálenosti) na vzdálenost  $r$ . Tato energie je rovna

$$E_p = -\frac{GMm}{r}. \quad (14.20)$$

### Potenciální energie systému

Pokud systém obsahuje více než dvě částice, je výsledná gravitační potenciální energie součtem příspěvků od všech dvojic částic. V textu jsme uvažovali systém tří částic o hmotnostech  $m_1, m_2$  a  $m_3$ ; v tom případě je

$$E_p = -\left( \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \right). \quad (14.21)$$

### Úniková rychlost

Předmět může uniknout z gravitačního vlivu vesmírného tělesa o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$ , pokud z povrchu tělesa odlétá alespoň *únikovou rychlostí* o velikosti

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (14.26)$$

### Keplerovy zákony

Gravitační přitažlivost drží pohromadě sluneční soustavu. Díky ní např. také obíhají družice (přírodní i umělé) kolem Země. Jejich pohyby se řídí třemi Keplerovými zákony, které jsou přímým

důsledkem Newtonových pohybových zákonů a Newtonova gravitačního zákona.

**1. Zákon oběžných drah:** Planety se pohybují po elipsách jen málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce. Obecně: Částice se v centrálním gravitačním poli pohybuje po kuželosečce, mající ohnisko v centru pole.

**2. Zákon ploch:** Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou stejně velké. (Toto tvrzení je ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti.)

**3. Zákon oběžných dob:** Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich drah.

Pro kruhovou oběžnou dráhu o poloměru  $r$  dostává tento zákon tvar

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3, \quad (14.31)$$

kde  $M$  je hmotnost centrálního tělesa — ve sluneční soustavě tedy hmotnost Slunce. Tento závěr je platný i pro eliptické oběžné dráhy planet, pokud v tomto vztahu nahradíme poloměr  $r$  hlavní poloosou  $a$ .

**Energie pohybu planet**

Pohybuje-li se planeta nebo družice o hmotnosti  $m$  po kruhové oběžné dráze o poloměru  $r$ , pak její energie potenciální  $E_p$  a kinetická  $E_k$  jsou

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad \text{a} \quad E_k = \frac{GMm}{2r}. \quad (14.20, 14.40)$$

Mechanická energie  $E = E_k + E_p$  se rovná

$$E = -\frac{GMm}{2r}. \quad (14.42)$$

Pro eliptickou dráhu s hlavní poloosou  $a$  platí

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \quad (14.44)$$

**Einsteinův pohled na gravitaci**

Einstein ukázal, že gravitace a zrychlení jsou ekvivalentní. Tento princip ekvivalence jej dovedl k teorii gravitace (k obecné teorii relativity), která vysvětluje gravitační jevy pomocí zakřivení prostoru.

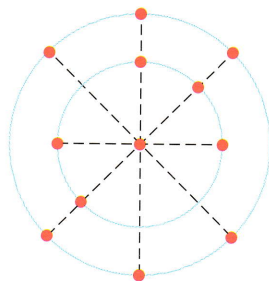
**OTÁZKY**

**1.** Mějme dvě částice o hmotnostech  $m$  a  $2m$  připevněny k ose (obr. 14.23). (a) Kde můžeme na ose umístit třetí částici s hmotností  $3m$  (jinde než v nekonečnu), aby celková gravitační síla, která by na ni od prvních dvou částic působila, byla nulová? Je to vlevo od obou částic, vpravo, anebo mezi nimi — blíže k hmotnější, nebo k lehčí? (b) Změní se odpověď, pokud by třetí částice měla hmotnost  $16m$ ? (c) Existuje pro třetí částici bod mimo osu, ve kterém by celková na ni působící síla byla nulová?



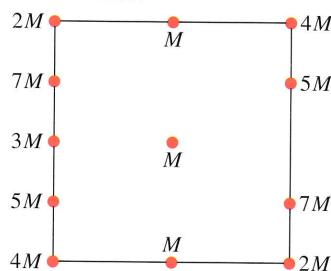
Obr. 14.23 Otázka 1

**2.** Na obr. 14.24 je centrální částice obklopena dvěma kruhovými prstýnkami částic s poloměry  $r$  a  $R$ ,  $R > r$ . Všechny částice mají hmotnost  $m$ . Jaká je velikost a směr výsledné gravitační síly, kterou působí částice v prstýncích na centrální částici?



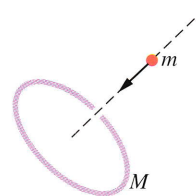
Obr. 14.24 Otázka 2

**3.** Na obr. 14.25 je centrální částice s hmotností  $M$  obklopena čtvercovým uspořádáním jiných částic. Vzdálenosti mezi těmito částicemi jsou buď  $d$ , nebo  $\frac{1}{2}d$  podél obvodu čtverce. Jaká je velikost a směr výsledné gravitační síly působící díky těmto částicím na centrální částici?



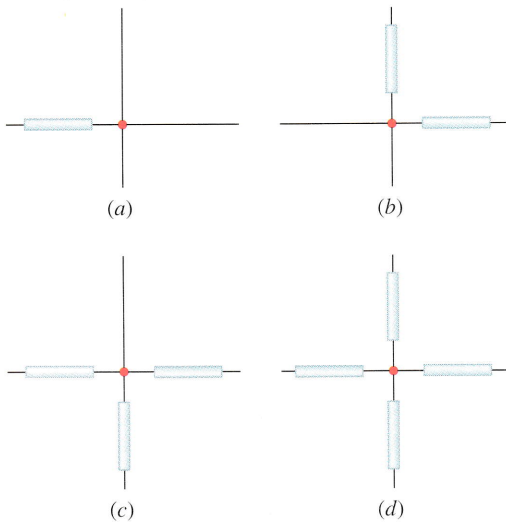
Obr. 14.25 Otázka 3

**4.** Obr. 14.26 ukazuje částici s hmotností  $m$ , která se pohybuje z nekonečna do středu kroužku s hmotností  $M$  podél jeho osy. Jak se během tohoto přenosu mění velikost gravitační síly působící na částici?



Obr. 14.26 Otázka 4

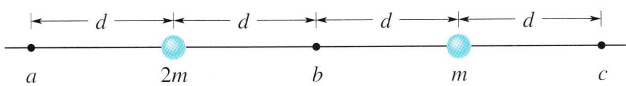
5. Na obr. 14.27 jsou zobrazeny čtyři uspořádání částice s hmotností  $m$  a jedné nebo více homogenních tyčí, každé s hmotností  $M$ , délkou  $L$  a vždy umístěné ve vzdálenosti  $d$  od částice. Seřadte sestupně uspořádání podle velikosti celkové gravitační síly, kterou působí tyče na částici.



Obr. 14.27 Otázka 5

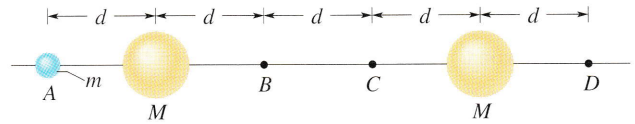
6. Seřadte sestupně čtyři systémy stejně hmotných částic z kontroly 2 podle absolutní hodnoty gravitační potenciální energie.

7. Na obr. 14.28 má být částice s hmotností  $m$  (nezakreslena) přenesena z nekonečna na jedno ze tří míst  $a$ ,  $b$ , nebo  $c$ . Dvě další částice, s hmotnostmi  $m$  a  $2m$ , jsou pevně umístěny. Seřadte sestupně možnosti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  podle celkové práce vykonané gravitačními silami pevných částic.



Obr. 14.28 Otázka 7

8. Na obr. 14.29 je částice s hmotností  $m$  nejprve v místě  $A$  ve vzdálenosti  $d$  od středu jedné homogenní koule a ve vzdálenosti  $4d$  od středu druhé homogenní koule. Obě koule mají hmotnost  $M \gg m$ . Pokud byste částici přenesli do bodu  $D$ , řekněte, zda následující veličiny by byly kladné, záporné, nebo nulové: (a) změna gravitační potenciální energie částice, (b) práce vykonaná celkovou gravitační silou na částici, (c) práce vykonaná vámi. (d) Jaké by byly odpovědi, kdybychom přemístili částici z bodu  $B$  do  $C$ ?

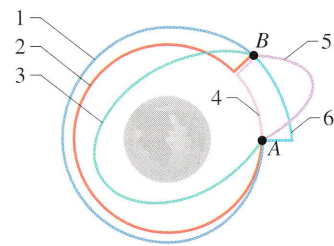


Obr. 14.29 Otázka 8

9. Vyděme ze situace v otázce 8. Byla by práce vámi vykonaná kladná, záporná, nebo nulová, kdybyste přemístili částici (a) z  $A$  do  $B$ , (b) z  $A$  do  $C$ , (c) z  $B$  do  $D$ ? Seřadte sestupně tyto přesuny podle absolutní hodnoty vámi vykonané práce.

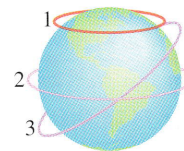
10. Mějme tři planety o následujících hmotnostech a poloměrech: planeta A:  $2M$  a  $R$ ; planeta B:  $3M$  a  $2R$ ; planeta C:  $4M$  a  $2R$ . Seřadte sestupně tyto planety podle velikosti únikové rychlosti z jejich povrchů.

11. Obr. 14.30 nabízí šest drah, po kterých se raketa oblétající Měsíc může pohybovat z bodu  $A$  do bodu  $B$ . Seřadte sestupně dráhy podle (a) příslušné změny gravitační potenciální energie systému raketa + Měsíc a (b) celkové práce vykonané na raketě gravitační silou Měsíce.



Obr. 14.30 Otázka 11

12. Které z oběžných drah (řekněme pro špionážní družici) na obr. 14.31 nevyžadují stálé opravy korekčními motorky? Dráha 1 je na  $60^\circ$  s.š.; dráha 2 leží v rovníkové rovině; dráha 3 je kolem středu Země, mezi  $60^\circ$  s.š. a  $60^\circ$  j.š.



Obr. 14.31 Otázka 12

13. Družice s rychlostí  $v_1$  a hmotností  $m$  je na kruhové oběžné dráze kolem planety s hmotností  $M_1$ . Jiná družice, s rychlostí  $v_2$  a hmotností  $2m$ , obíhá po kruhové dráze o stejném poloměru kolem planety s hmotností  $M_2$ . Je  $M_2$  větší, menší, nebo rovné  $M_1$ , (a) pokud družice mají stejnou oběžnou dobu, (b) pokud  $v_2 > v_1$ ?



## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 14.2 Newtonův gravitační zákon

**1C.** Jaká musí být vzdálenost mezi částicemi o hmotnostech 5,2 kg a 2,4 kg, aby se gravitačně přitahovaly silou  $2,3 \cdot 10^{-12}$  N?

**2C.** Někteří lidé věří, že pozice planet v okamžiku narození ovlivňuje narozeného. Jiní tento názor nesdílejí a tvrdí, že gravitační síla, kterou na dítě působí porodník, je větší než od planet. Abychom posoudili toto tvrzení, spočítejte a porovnejte gravitační sílu působící na 3 kg dítě (a) od 70 kg lékaře, který je 1 m daleko a zhruba aproximovaný hmotným bodem, (b) od Jupiteru ( $m = 2 \cdot 10^{27}$  kg) v okamžiku, kdy je nejbližší Zemi ( $= 6 \cdot 10^{11}$  m) a (c) když je od Země nejdále ( $= 9 \cdot 10^{11}$  m). (d) Je tvrzení skeptiků správné?

**3C.** Slunce i Země gravitačně působí na Měsíc. Jaký je poměr  $F_S/F_Z$  velikostí těchto sil? (Průměrná vzdálenost Slunce – Měsíc je rovna vzdálenosti Slunce – Země).

**4C.** Jeden ze satelitů *Echo* tvořil nafouknutý kulový hliníkový balon s průměrem 30 m a hmotností 20 kg. Předpokládejme, že by ve vzdálenosti 3 m od povrchu satelitu prolétl meteoroid s hmotností 7 kg. Jaká by byla největší gravitační síla, která by působila díky satelitu na meteoroid?

**5Ú.** Objekt s hmotností  $M$  byl rozdělen na dvě části,  $m$  a  $M - m$ , které byly od sebe poté oddáleny na jistou vzdálenost. Jaký by měl být poměr  $m/M$ , aby byla gravitační síla mezi částmi co největší?

### ODST. 14.3 Gravitace a princip superpozice

**6C.** Jak daleko od Země ve směru ke Slunci musíme umístit sondu, aby se právě vyrovnala přitažlivá síla Slunce a Země?

**7C.** Kosmická loď je na přímé dráze mezi Zemí a Měsícem. V jaké vzdálenosti od Země je celková gravitační síla na loď nulová?

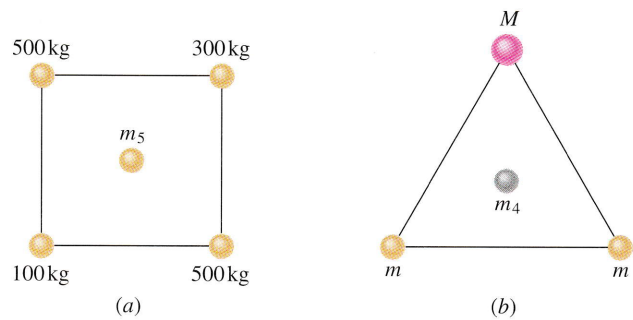
**8Ú.** Jaká je procentuální změna zrychlení Země směrem ke Slunci, když se postavení Země, Slunce a Měsíce změní ze zatmění Slunce (Měsíc je mezi Zemí a Sluncem) na zatmění Měsíce (Země je mezi Měsícem a Sluncem)?

**9Ú.** Čtyři koule s hmotnostmi  $m_1 = 400$  kg,  $m_2 = 350$  kg,  $m_3 = 2000$  kg a  $m_4 = 500$  kg mají souřadnice  $(x, y)$  po řadě  $(0; 50)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(-80; 0)$ ,  $(40; 0)$ , vše v centimetrech. Jaká je celková gravitační síla  $F_2$  působící na  $m_2$ ?

**10Ú.** Na obr. 14.32a leží čtyři koule ve vrcholech čtverce se stranou 2,0 cm. Jaká je velikost a směr celkové gravitační síly, kterou působí na centrální kouli s hmotností  $m_5 = 250$  kg?

**11Ú.** Na obr. 14.32b tvoří dvě koule s hmotnostmi  $m$  a třetí s hmotností  $M$  rovnostranný trojúhelník. Čtvrtá koule s hmotností  $m_4$  je v jeho těžišti. Celková gravitační síla působící na  $m_4$  od ostatních koulí je nulová; čemu je rovno  $M$  vyjádřeno v  $m$ ?

**12Ú.** Dvě koule s hmotnostmi  $m_1 = 800$  kg a  $m_2 = 600$  kg jsou od sebe vzdáleny 0,25 m. Jaká je celková gravitační síla

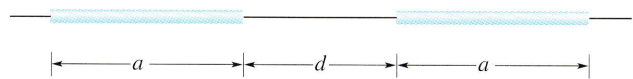


Obr. 14.32 Úlohy 10 a 11

(velikost i směr) působící díky nim na kouli s hmotností 2,0 kg, vzdálenou 0,20 m od  $m_1$  a 0,15 m od  $m_2$ ?

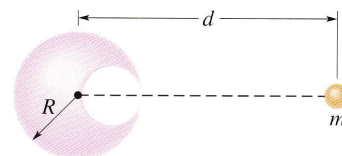
**13Ú.** Tři koule mají tyto hmotnosti a souřadnice: 20 kg,  $x = 0,50$  m,  $y = 1,0$  m; 40 kg,  $x = -1,0$  m,  $y = -1,0$  m; 60 kg,  $x = 0$ ,  $y = -0,5$  m. Jaká gravitační síla vyvolaná těmito koulí působí na kouli s hmotností 20 kg umístěnou v počátku?

**14Ú.** Obr. 14.33 zobrazuje dvě homogenní tyče délky  $a$  a hmotnosti  $M$ , ležící na přímce ve vzdálenosti  $d$  od sebe. S použitím výsledku př. 14.2 napište určitý integrál určující gravitační přitažlivou sílu mezi nimi.



Obr. 14.33 Úloha 14

**15Ú.** Na obr. 14.34 je kulová dutina uvnitř olověné koule s poloměrem  $R$ ; povrch dutiny prochází středem koule a dotýká se pravé strany koule. Hmotnost koule před vytvořením dutiny byla  $M$ . S jakou gravitační silou přitahuje olověná koule s dutinou malou kouli s hmotností  $m$ , která je umístěna ve vzdálenosti  $d$  od středu olověné koule na přímce spojující středy koulí a střed otvoru?



Obr. 14.34 Úloha 15

### ODST. 14.4 Gravitace v blízkosti povrchu Země

**16C.** Vypočítejte gravitační zrychlení na povrchu Měsíce, znáte-li jeho hmotnost a poloměr (dodatek C).

**17C.** V jaké výšce nad zemským povrchem má gravitační zrychlení velikost  $4,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ?

**18C.** Vážíte 120 lb a stojíte na chodníku vedle Světového obchodního centra v New Yorku. Předpokládejte, že se odtud přemístíte na vrchol jedné z jeho budov vysoké 1 350 ft. O kolik

byste tam byli lehčí (díky tomu, že se nacházíte o trochu dále od středu Země)? Rotaci Země zanedbejte.

**19C.** Typická hmotnost neutronové hvězdy je srovnatelná s hmotností Slunce, její poloměr je však pouze 10 km. (a) Jaké gravitační zrychlení je na povrchu takové hvězdy? (b) Jak rychle dopadne předmět, který spadne z výšky 1 m nad povrchem (zanedbejte rotaci hvězdy)?

**20C.** Předmět ležící na rovníku je urychlován (a) do středu Země kvůli její rotaci, (b) směrem ke Slunci, protože Země kolem něho obíhá téměř po kruhové dráze, a (c) směrem ke středu naší Galaxie, protože Slunce obíhá kolem galaktického středu. Perioda oběhu Slunce je  $2,5 \cdot 10^8$  y a jeho poloměr  $2,2 \cdot 10^{20}$  m. Vypočítejte tato tři zrychlení a vyjádřete je v násobcích  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**21C.** (a) Jaká bude tíha předmětu na povrchu Měsíce, je-li na zemském povrchu rovna 100 N? (b) V jaké vzdálenosti od Země se musí předmět nacházet, aby měl stejnou tíhu jako na Měsíci? Vzdálenost vyjádřete v násobcích poloměru Země.

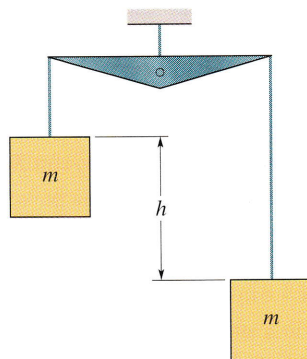
**22Ú.** Určujete  $g$  tak, že pustíte předmět z výšky přesně 10 m. Jaká relativní chyba v měření doby pádu by způsobila výslednou chybu 0,1 % pro  $g$ ?

**23Ú.** Největší možná rychlost rotace planety je ta, pro kterou je gravitační síla na rovníku právě rovna dostředivé síle potřebné k této rotaci. (Proč?) (a) Ukažte, že příslušná nejkratší perioda rotace je

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

kde  $\rho$  hustota homogenní sférické planety. (b) Vypočítejte periodu  $T$  pro hustotu  $3,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ , která odpovídá mnoha planetám, satelitům a asteroidům. U žádného astronomického objektu nebyla zaznamenána kratší perioda rotace, než jsme určili na základě této analýzy.

**24Ú.** Předměty stejné hmotnosti  $m$  jsou zavěšeny na závěsech nad zemským povrchem a jsou v rovnováze (obr. 14.35). Závěsy mají zanedbatelnou hmotnost a rozdíl jejich délek je  $h$ . Předpokládejte, že je Země kulatá a má hustotu  $\rho = 5,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . (a) Ukažte, že rozdíl jejich tíh  $m\Delta g$ , způsobený odlišnou vzdáleností od Země, je roven  $8\pi G\rho mh/3$ . (b) Rozhodněte, jaký musí být rozdíl délek závěsů, aby byl poměr  $\Delta g/g = 1 \cdot 10^{-6}$ .



Obr. 14.35 Úloha 24

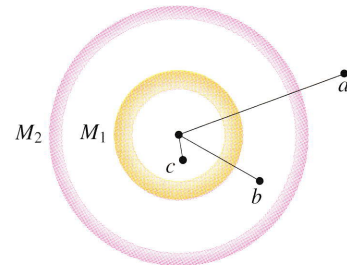
**25Ú.** Těleso je zavěšeno na pružinové váze v lodi jedoucí podél rovníku rychlostí  $v$ . (a) Ukažte, že hodnota odečítaná na stupnici bude blízká hodnotě  $G_0(1 \pm 2\omega v/g)$ , kde  $\omega$  je úhlová rychlost Země a  $G_0$  je údaj váhy, je-li rychlost lodi nulová. (b) Zdůvodněte znaménko  $\pm$ .

**26Ú.** Velice hmotné neutronové hvězdy rotují rychlostí cca 1 ot. za sekundu. Jaká by musela být minimální hmotnost takové hvězdy s poloměrem 20 km, aby se povrchová vrstva hmoty od hvězdy neodtrhla?

**27Ú.** Poloměr černé díry  $R_\xi$  a její hmotnost  $M_\xi$  jsou spojeny vztahem  $R_\xi = 2GM_\xi/c^2$ , kde  $c$  je rychlost světla. Označme  $a_{g0}$  gravitační zrychlení ve vzdálenosti  $r_0 = 1,001R_\xi$  od středu černé díry a předpokládejme, že ho lze určit z rov. (14.12) (platné pro velké černé díry). (a) Vyjádřete  $a_{g0}$  ve vzdálenosti  $r_0$  jen pomocí  $M_\xi$  (a univerzálních konstant). (b) Je  $a_{g0}$  rostoucí, nebo klesající funkcí proměnné  $M_\xi$ ? (c) Čemu se rovná  $a_{g0}$  pro velmi velkou černou díru, jejíž hmotnost je  $1,55 \cdot 10^{12}$  hmotností Slunce? (d) Jaký by byl rozdíl gravitačního zrychlení mezi hlavou a nohama astronauta z př. 14.4, kdyby se nacházel v místě  $r_0$ , nohama směrem k černé díře? (e) Byly by slapové síly natahující astronauta výrazné?

#### ODST. 14.5 Gravitační pole uvnitř Země

**28C.** Dvě soustředné slupky s konstantní hustotou mají hmotnosti  $M_1$  a  $M_2$  (obr. 14.36). Jaká síla působí na bod o hmotnosti  $m$ , ležící-li ve vzdálenosti (a)  $r = a$ , (b)  $r = b$ , (c)  $r = c$ ? Vzdálenost  $r$  měříme od středu slupek.



Obr. 14.36 Cvičení 28

**29C.** S jakou rychlostí by proletěl předmět středem Země, kdyby byl upuštěn u ústí tunelu z př. 14.5?

**30C.** Uvažujte Zemi jako homogenní kouli o poloměru  $R$ . Ukažte, že na dně svislé šachty o hloubce  $D$  bude naměřena hodnota  $a_g$

$$a_g = a_{g0} \left(1 - \frac{D}{R}\right),$$

kde  $a_{g0}$  je hodnota zrychlení na povrchu.

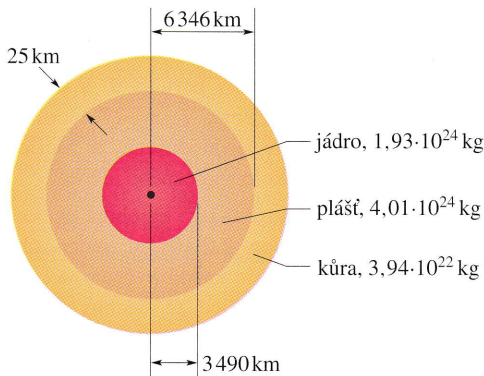
**31Ú.** Pevná homogenní koule má hustotu  $1,0 \cdot 10^4 \text{ kg}$  a poloměr 1,0 m. Jaká gravitační síla působí na bod o hmotnosti  $m$  ve vzdálenosti (a) 1,5 m, (b) 0,5 m od středu koule? (c) Napište obecný vztah pro gravitační sílu působící na bod ve vzdálenosti  $r \leq 1,0$  m od středu koule.

**32Ú.** Homogenní koule s poloměrem  $R$  má na povrchu gravitační zrychlení  $a_g$ . Pro jaké dvě vzdálenosti od středu koule

bude gravitační zrychlení rovno  $a_g/3$ ? (Tip: Vezměte v úvahu vzdálenosti vně i uvnitř koule.)

**33Ú.** Řez Zemí. Země není homogenní a lze ji zhruba rozdělit na tři slupky: kůru, plášť a jádro. Rozměry slupek a jejich hmotnosti jsou uvedeny na obr. 14.37. Celková hmotnost Země je  $5,98 \cdot 10^{24}$  kg a její poloměr bereme 6 371 km. Zanedbejte rotaci a předpokládejte, že Země je kulová.

(a) Určete  $a_g$  na povrchu. (b) Jaké  $a_g$  bude v hloubce 25 km na dně vrtu, který má být v rámci projektu Mohole proveden k rozhraní kůry a pláště? (Moho vrstva, kterou předpověděl geolog Mohorovičić, leží v hloubce 5 km až 70 km.) (c) Předpokládejte, že Země má známou hmotnost i rozměr, ale je to ideální koule s konstantní hustotou. Jaké bude  $a_g$  v hloubce 25 km? (Viz cvič. 30.) (Přesná měření  $a_g$  jsou citlivým indikátorem vnitřního uspořádání Země, mohou být ovšem ovlivněna i místními odchylkami hustoty.)



Obr. 14.37 Úloha 33. Měřítko není zachováno

#### ODST. 14.6 Gravitační potenciální energie

**34C.** (a) Jaká je energie systému v cvič. 1, složeného ze dvou hmotných bodů? (b) Jakou práci vykonají gravitační síly, ztrojnásobíte-li vzdálenost mezi hmotnými body? (c) Jakou práci vykonáte vy?

**35C.** (a) Vyjměte  $m_1$  v úloze 9 a vypočítejte pro zbývající tři hmotné body gravitační potenciální energii. (b) Nyní vraťte  $m_1$  na původní místo. Bude potenciální energie celého systému vyšší, nebo nižší? (c) Konáte kladnou, nebo zápornou práci při vyjmutí  $m_1$  ze systému čtyř hmotných bodů? (d) Jaká práce je nutná pro navrácení  $m_1$ ?

**36C.** Udává poměr  $m/M$  z úlohy 5 nejmenší možnou gravitační potenciální energii systému?

**37C.** Střední průměry Země a Marsu jsou  $6,9 \cdot 10^3$  km a  $1,3 \cdot 10^4$  km. Hmotnost Marsu je 0,1 násobek hmotnosti Země. (a) Stanovte poměr průměrné hustoty Marsu a Země. (b) Jaká je hodnota  $g$  na Marsu? (c) Jaká je úniková rychlost pro Mars?

**38C.** Vesmírná loď se nachází na okraji naší Galaxie ve vzdálenosti 80 000 světelných let od jejího středu. Stanovte únikovou rychlost z naší Galaxie. Hmotnost Galaxie je  $1,4 \cdot 10^{11}$  Sluncí, pro jednoduchost předpokládejte, že je v ní hmota rozprostřena rovnoměrně.

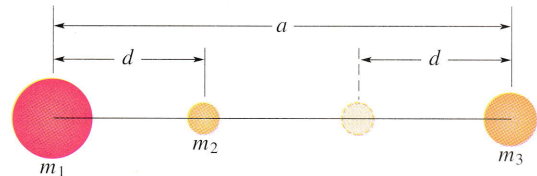
**39C.** Vypočítejte energii potřebnou k úniku od (a) Měsíce a (b) Jupiteru a vyjádřete ji v násobcích únikové energie ze Země.

**40C.** Ukažte, že úniková rychlost  $v_{\text{únik}}$  od Slunce v místě Země je  $\sqrt{2}$ násobkem posuvné oběžné rychlosti  $v_{\text{ob}}$  Země; předpokládejte, že její dráha kolem Slunce je kružnice. (Jde o speciální případ obecně platného vztahu:  $v_{\text{únik}} = \sqrt{2}v_{\text{ob}}$ .)

**41C.** Částice prachu komety o hmotnosti  $m$  se nachází ve vzdálenosti  $R$  od středu Země a ve vzdálenosti  $r$  od středu Měsíce. Jaká je potenciální energie systému částice + Země a jaká systému částice + Měsíc, je-li hmotnost Země  $M_Z$  a Měsíce  $M_M$ ?

**42C.** Velké hvězdy mohou po spálení svého paliva zkolabovat v černou díru působením vlastních gravitačních sil. Jejich poloměr  $R_S$  je pak takový, že k přenesení tělesa o hmotnosti  $m$  z povrchu do nekonečna je třeba veškerá energie tělesa  $mc^2$ . Je-li hmotnost hvězdy  $M_S$ , ukažte pomocí Newtonova gravitačního zákona, že její poloměr je  $R = GM_S/c^2$ . (Správná hodnota  $R_S$  je ve skutečnosti dvojnásobná. K získání správného výsledku je totiž nutno využít Einsteinovy gravitační teorie namísto Newtonovy.)

**43Ú.** Střední tří koulí o hmotnostech  $m_1 = 800$  g,  $m_2 = 100$  g a  $m_3 = 200$  g leží na jedné přímce ve vzdálenostech  $a = 12$  cm a  $d = 4$  cm (obr. 14.38). Nyní přemístíte střední kouli  $m_2$  směrem k  $m_3$  tak, že vzdálenost jejich středů bude  $d = 4$  cm. Jakou práci na  $m_2$  (a) jste vykonali vy a (b) jakou gravitační síly vyvolané  $m_1$  a  $m_3$ ?



Obr. 14.38 Úloha 43

**44Ú.** Raketa je urychlena při povrchu Země na rychlost  $v = 2\sqrt{gR_Z}$  (kde  $R_Z$  je poloměr Země) a pak vzlétne směrem vzhůru. (a) Ukažte, že unikne ze Země. (b) Ukažte, že ve velké vzdálenosti od Země bude mít rychlost  $v = \sqrt{gR_Z}$ .

**45Ú.** (a) Jaká je úniková rychlost z kulového asteroidu, jehož poloměr je 500 km a jehož gravitační zrychlení na povrchu je  $3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ? (b) Jak daleko od povrchu se dostane částice, jestliže opustí povrch asteroidu s radiální rychlostí  $1\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ? (c) Jakou rychlostí dopadne předmět na asteroid, jestliže byl puštěn z výšky 1 000 km nad povrchem?

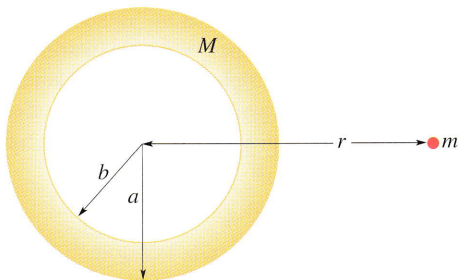
**46Ú.** Hypotetická planeta Deli podobná Marsu má hmotnost  $5,0 \cdot 10^{23}$  kg, poloměr  $3,0 \cdot 10^6$  m a nemá žádnou atmosféru. Vesmírná sonda o hmotnosti 10 kg je vystřelena vertikálně z jejího povrchu. (a) Jaká bude kinetická energie sondy ve vzdálenosti  $4,0 \cdot 10^6$  m od středu Deli, jestliže sonda byla vystřelena s počáteční energií  $5,0 \cdot 10^7$  J? (b) S jakou počáteční kinetickou energií musí být sonda vystřelena z povrchu Deli, jestliže má dosáhnout maximální vzdálenost  $8,0 \cdot 10^6$  m od středu Deli? Předpokládejte, že Deli nerotuje.

**47Ú.** Dvojhvězdu tvoří dvě hvězdy o hmotnosti  $3,0 \cdot 10^{30}$  kg obíhající okolo společného těžiště ve vzdálenosti  $1,0 \cdot 10^{11}$  m. (a) Jakou úhlovou rychlostí obíhají? (b) Jestliže meteor prolétne těžištěm dvojhvězdy kolmo k rovině oběhu hvězd, jakou rychlost musí v tomto těžišti mít, aby unikl z dvojhvězdy „do nekonečna“?

**48Ú.** Dvě neutronové hvězdy jsou od sebe vzdáleny  $1 \cdot 10^{10}$  m. Obě dvě mají hmotnost  $1 \cdot 10^{30}$  kg a poloměr  $1 \cdot 10^5$  m. Na začátku jsou obě hvězdy navzájem v klidu. (a) Jak rychle se budou hvězdy pohybovat, až se jejich vzdálenost zmenší na polovinu původní hodnoty? (b) S jakou rychlostí se srazí?

**49Ú.** Náboj je vystřelen svisle z povrchu Země s počáteční rychlostí 10 km/s. Jak vysoko nad povrch Země dolétne, jestliže zanedbáme odpor vzduchu?

**50Ú.** Koule o hmotnosti  $M$  a poloměru  $a$  má soustřednou dutinu o poloměru  $b$  (obr. 14.39). (a) Vyneste do grafu velikost  $F$  gravitační síly, kterou působí koule na částici o hmotnosti  $m$  ve vzdálenosti  $r$  od středu koule, jako funkci  $r$  v intervalu  $0 \leq r \leq \infty$ . Uvažujte zejména hodnoty  $r$  rovné  $0$ ,  $a$ ,  $b$  a  $\infty$ . (b) Nakreslete odpovídající křivku pro potenciální energii  $E_p(r)$  systému.

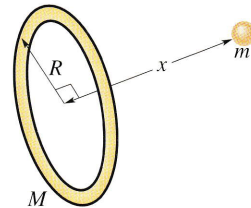


Obr. 14.39 Úloha 50

**51Ú.** Těleso o hmotnosti 20 kg udržujeme v počátku vztažné soustavy. Druhé těleso o hmotnosti 10 kg držíme na začátku pokusu na ose  $x$  ve vzdálenosti  $x = 0,80$  m; poté ho pustíme. (a) Jaká je potenciální energie tohoto systému těsně po uvolnění? (b) Jaká je kinetická energie desetikilogramové hmoty poté, co se posunula o 0,20 m?

**52Ú\*.** Některé planety (Jupiter, Saturn, Uran) jsou obklopeny skoro kruhovými prstenci; ty jsou pravděpodobně tvořeny materiálem, který se nedokázal zformovat do obíhajících měsíců. Dokonce i některé galaxie obsahují takovéto prstencové útvary. Uvažujme homogenní prsteneček o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$ . (a) Jakou gravitační silou působí tento prsteneček na částici o hmotnosti  $m$ , která leží na ose prstence ve vzdálenosti  $x$  od jeho středu (obr. 14.40)? (b) Předpokládejme, že se částice vlivem přitažlivosti prstence začne pohybovat. Najděte výraz pro rychlost, s jakou částice prolétne středem prstence.

**53Ú\*.** Gravitační síla přitahuje k sobě dvě částice o hmotnostech  $M$  a  $m$ , které se zpočátku nalézaly v klidu ve velké vzdálenosti. Ukažte, že v každém okamžiku je rychlost jedné částice vůči druhé rovna  $\sqrt{2G(M+m)/d}$ , kde  $d$  je jejich okamžitá vzdálenost. (Tip: Použijte zákon zachování energie a zákon zachování hybnosti.)



Obr. 14.40 Úloha 52

### ODST. 14.7 Planety a družice: Keplerovy zákony

**54C.** Průměrná vzdálenost Marsu od Slunce je 1,52krát větší než vzdálenost Země od Slunce. Z Keplerova zákona o dobách oběhu planet spočítejte, kolik roků potřebuje Mars k jednomu oběhu kolem Slunce. Porovnejte váš výsledek s hodnotou uvedenou v dodatku C.

**55C.** Planeta Mars má měsíc Phobos, který obíhá po oběžné dráze o poloměru  $9,4 \cdot 10^6$  m s periodou 7 h 39 min. Z těchto informací vypočítejte hmotnost Marsu.

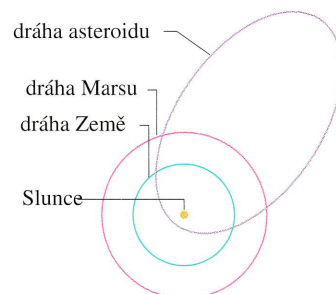
**56C.** Vypočítejte hmotnost Země z periody  $T$  a poloměru  $r$  oběžné dráhy Měsíce kolem Země:  $T = 27,3$  dní a  $r = 3,82 \cdot 10^5$  km. Předpokládejte zjednodušeně, že Měsíc obíhá okolo středu Země (a nikoli okolo společného těžiště).

**57C.** Naše Slunce o hmotnosti  $2,0 \cdot 10^{30}$  kg obíhá okolo středu naší Galaxie, který je vzdálen  $2,2 \cdot 10^{20}$  m, jeden oběh za  $2,5 \cdot 10^8$  roků. Předpokládejme, že každá hvězda naší Galaxie má stejnou hmotnost jako naše Slunce, že všechny hvězdy jsou stejnoměrně rozloženy v kouli okolo středu Galaxie a že naše Slunce se nachází na okraji této koule. Odhadněte počet hvězd v naší Galaxii.

**58C.** Satelit byl umístěn na kruhovou oběžnou dráhu v poloviční vzdálenosti k Měsíci. Jakou má periodu oběhu v lunárních měsících? (Lunární měsíc je perioda otáčení Měsíce.)

**59C.** (a) Jakou posuvnou rychlost musí mít satelit na kruhové oběžné dráze ve výšce 160 km nad Zemí? (b) Jakou má periodu oběhu?

**60C.** Většina asteroidů obíhá okolo Slunce mezi Marsem a Jupiterem. Přesto některé asteroidy typu Apollo, s poloměrem okolo 30 km, obíhají po drahách, které kříží dráhu Země. Oběžná dráha jednoho takového asteroidu je znázorněna v obr. 14.41. Odečtěte hodnoty přímo z obrázku a vypočítejte v rocích dobu oběhu, s jakou asteroid obíhá.



Obr. 14.41 Cvičení 60

**61C.** Satelit, který se pohybuje po eliptické oběžné dráze, je v nejvyšším bodě 360 km nad povrchem Země a 180 km v nejnižším bodě. Vypočítejte (a) hlavní poloosu a (b) excentricitu trajektorie. (*Tip:* Viz př. 14.8.)

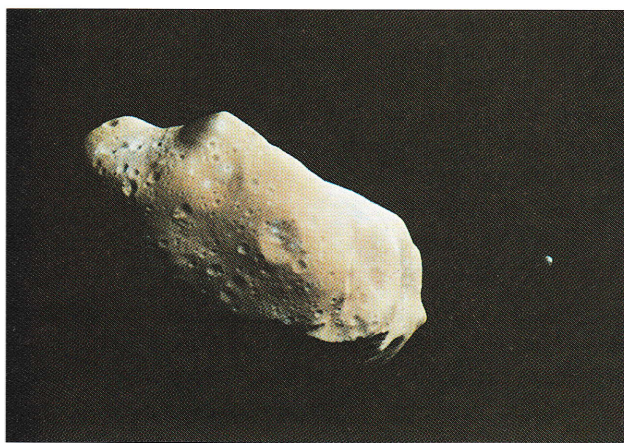
**62C.** Slunce leží zhruba v jednom z ohnisek oběžné dráhy Země. Jak daleko od něj leží druhé ohnisko? Vyjádřete svůj výsledek v násobcích slunečního poloměru  $6,96 \cdot 10^8$  m. Excentricita oběžné dráhy Země je 0,0167 a hlavní poloosu lze vzít rovnu  $1,50 \cdot 10^{11}$  m. Viz obr. 14.14.

**63C.** (a) Použijte třetí Keplerův zákon (rov. (14.31)) k vyjádření gravitační konstanty  $G$  v těchto jednotkách: astronomická jednotka pro délku (AU), hmotnost Slunce ( $M_S$ ) pro hmotnost a rok (y) pro jednotku času. (b) Jaký tvar má třetí Keplerův zákon v těchto jednotkách?

**64C.** Satelit visí nehybně nad jedním místem zemského rovníku. Jaká je výška jeho oběžné dráhy? (Jde o tzv. **geocentrickou oběžnou dráhu**.)

**65C.** Kometa zpozorovaná v dubnu roku 547 čínskými astronomy v den, který nazývali Woo Woo, byla opět spatřena v květnu roku 1994. Předpokládejte, že doba mezi oběma pozorováními je perioda oběhu komety, a předpokládejte její výstřednost rovnu 0,11. Jaká je (a) velikost hlavní poloosy oběžné dráhy komety a (b) její největší vzdálenost od Slunce v násobcích průměrného poloměru  $R_P$  oběžné dráhy Pluta?

**66C.** V roce 1993 nám vesmírná sonda Galileo poslala fotografii (obr. 14.42) asteroidu 243 Ida spolu s jeho malým měsícem. Jedná se o první potvrzený případ systému asteroid + jeho měsíc. Měsíc na fotografii má šířku 1,5 km a je vzdálen 100 km od středu 55 km dlouhého asteroidu. Tvar oběžné dráhy měsíce není přesně znám; předpokládáme, že je kruhová s periodou 27 hodin. (a) Jaká je hmotnost asteroidu? (b) Objem asteroidu, měřený z fotografií Galilea, je  $14\,100 \text{ km}^3$ . Jaká je hustota asteroidu?



**Obr. 14.42** Cvičení 66. Na fotografii z družice *Galileo* je asteroid 243 Ida se svým maličkým měsícem.

**67Ú.** Uvažujme, že satelit z cvič. 64 je na oběžné dráze na brněnském poledníku. Vy jste v budově VUT v Brně (zeměpisná

šířka je  $49,2^\circ$ ) a chcete zachytit signál ze satelitního vysílání. Jakým směrem musíte natočit anténu?

**68Ú.** V roce 1610 objevil Galileo Galilei pomocí svého teleskopu čtyři největší měsíce Jupiteru. Průměrné poloměry  $a$  jejich oběžné dráhy a periody  $T$  oběhu ve dnech jsou uvedeny v tabulce.

JMÉNO	$\frac{a}{10^8 \text{ m}}$	$\frac{T}{\text{d}}$
Io	4,22	1,77
Europa	6,71	3,55
Ganymedes	10,7	7,16
Callisto	18,8	16,7

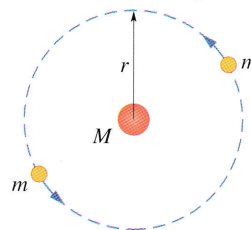
(a) Vyneste do grafu závislost  $\log a$  (osa  $y$ ) na  $\log T$  (osa  $x$ ) a ukažte, že je lineární. (b) Změřte sklon přímky a výsledek porovnejte s hodnotou, kterou lze předpovědět z Keplerova třetího zákona. (c) Z průsečíku přímky s osou  $y$  zjistíte hmotnost Jupiteru.

**69Ú.** Ukažte s pomocí Keplerova třetího zákona (rov. (14.31)), jak mohl Newton odvodit, že síla udržující Měsíc na jeho oběžné dráze (uvažujme kruhovou), je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti od středu Země.

**70Ú.** Jistá dvojhvězda je tvořena hvězdami se stejnými hmotnostmi jako naše Slunce. Hvězdy obíhají okolo společného těžiště. Vzdálenost mezi nimi je stejná, jako je vzdálenost mezi Sluncem a Zemí. Jaká je perioda jejich oběhu?

**71Ú.** Speciální trojhvězda se skládá ze dvou hvězd o hmotnostech  $m$ , které obíhají po stejné kruhové oběžné dráze o poloměru  $r$  okolo centrální hvězdy o hmotnosti  $M$  (obr. 14.43). Obě menší hvězdy jsou vždy na protilehlé straně oběžné dráhy. Odvoďte vztah pro periodu oběhu těchto hvězd.

**72Ú.** (a) Jaká je úniková rychlost ze Sluneční soustavy pro těleso, které je na oběžné dráze Země (dráha s poloměrem  $R$ ), ale je daleko od Země? (b) Jestliže těleso již má rychlost stejnou velkou, jako je rychlost oběhu Země, jakou rychlost je mu ještě třeba dodat, aby mohlo uniknout jako v (a)? (c) Předpokládejme, že těleso je vystřeleno ze Země ve směru oběhu Země okolo Slunce. Jakou počáteční rychlost musí mít, aby poté, co se vzdálí od Země, ale má stále zhruba stejnou vzdálenost od Slunce, se vzdálilo ze sluneční soustavy? (Je to rychlost potřebná pro jakoukoliv pozemskou raketu, aby mohla opustit sluneční soustavu.)



**Obr. 14.43** Úloha 71

**73Ú\*.** Tři identické hvězdy o hmotnostech  $M$  jsou umístěny na vrcholech rovnostranného trojúhelníku se stranou délky  $a$ .

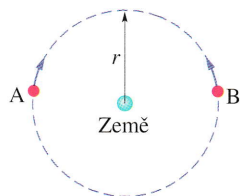
Jakou rychlostí se musejí pohybovat, jestliže všechny obíhají pod vlivem gravitačních sil ostatních hvězd po opsané kružnici a zároveň zachovávají svou vzájemnou polohu?

**74Ú\***. Družice na kruhové oběžné dráze byla navržena tak, aby se vznášela nad určitým místem zemského povrchu. Omylem se stalo, že poloměr obíhání družice byl o 1,0 km větší, než měl být. Jak rychle a v jakém směru se bude pohybovat bod přímo pod satelitem po zemském povrchu?

#### ODST. 14.8 Družice: Oběžné dráhy a energie

**75C.** Asteroid, jehož hmotnost je  $2,0 \cdot 10^{-4}$  násobkem hmotnosti Země, obíhá po kruhové dráze okolo Slunce ve vzdálenosti rovné dvojnásobku vzdálenosti Země–Slunce. (a) Spočítejte periodu obíhání asteroidu v rocích. (b) Jaký je poměr kinetické energie asteroidu a Země?

**76C.** Uvažujte dvě stejné družice A a B o stejných hmotnostech  $m$  pohybující se po stejné kruhové dráze o poloměru  $r$  kolem Země (hmotnost  $M_Z$ ), ale v opačných směrech, tzn. na kolizní dráze (obr. 14.44). (a) Pomocí  $G$ ,  $M_Z$ ,  $m$  a  $r$  vyjádřete celkovou mechanickou energii  $E_A + E_B$  soustavy obou družic + Země před srážkou. (b) Jestliže je srážka dokonale nepružná, tzn. vznikne-li jediná troska o hmotnosti  $2m$ , určete celkovou mechanickou energii bezprostředně po kolizi. (c) Popište další pohyb trosky.



Obr. 14.44 Cvičení 76

**77Ú.** Dvě družice (A a B), každá o hmotnosti  $m$ , jsou vypuštěny na oběžné kruhové dráhy kolem Země. Údaje jsme si přečetli v mílich: družice A obíhá ve výšce 4 000 mi, družice B ve výšce 12 000 mi. Poloměr Země  $R_Z$  je 4 000 mi. (a) Jaký je poměr potenciálních energií družic B a A? (b) Jaký je poměr kinetických energií družic B a A? (c) Která družice má větší celkovou energii, jestliže hmotnost každé z nich je 14,6 kg? O kolik?

**78Ú.** Použitím zákona zachování mechanické energie a rovnice (14.44) ukažte, že pokud těleso obíhá planetu po eliptické dráze, pak je vzdálenost  $r$  od planety a rychlost tělesa  $v$  svázána vztahem

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

**79Ú.** Využijte výsledku úlohy 78 a dat v př. 14.8 k výpočtu (a) rychlosti  $v_p$  Halleyovy komety v perihéliu a (b) její rychlosti  $v_a$  v aféliu. (c) Použitím zákona zachování momentu hybnosti vzhledem ke Slunci najdete poměr vzdáleností komety v perihéliu  $R_p$  a v aféliu  $R_a$ , vyjádřený pomocí  $v_p$  a  $v_a$ .

**80Ú.** Z kvizu v americkém časopise (údaje v mílich): (a) Je potřeba více energie k vynesení družice do výšky 1 000 mi nad

Zemí nebo k urychlení na kruhovou oběžnou dráhu, jakmile se družice v této výšce nachází? (Uvažujte poloměr Země 4 000 mi.) (b) Jaký výsledek dostaneme pro 2 000 mi a (c) pro 3 000 mi?

**81Ú.** Jednou z možností, jak zaútočit na družici obíhající Zemi, je vypustit roj kuliček na stejné dráze jako družice, ale v opačném směru. Uvažujte družici obíhající 500 km nad povrchem Země, která se srazí s kuličkou o hmotnosti 4,0 g. (a) Jaká je kinetická energie kuličky ve vztažné soustavě spojené s družicí? (b) Jaký je poměr této kinetické energie ke kinetické energii čtyřgramového náboje vystřeleného z moderní pušky počáteční rychlostí  $950 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ?

**82Ú.** Uvažujte družici obíhající Zemi po kruhové dráze. Určete, jak závisí následující veličiny na poloměru  $r$  dráhy družice: (a) perioda, (b) kinetická energie, (c) moment hybnosti a (d) rychlost družice.

**83Ú.** Jaká je (a) rychlost a (b) perioda 220 kg družice na téměř kruhové dráze 640 km nad povrchem Země? Předpokládejte dále, že družice ztrácí svoji mechanickou energii s průměrnou rychlostí  $1,4 \cdot 10^5 \text{ J}$  na jeden oběh. Přijmeme-li jako dobrou aproximaci, že výslednou trajektorii je „kružnice s pomalu se zmenšujícím poloměrem“, určete na konci 1 500. oběhu (c) výšku dráhy družice, (d) její rychlost a (e) periodu. (f) Jaká je velikost průměrné brzdě síly? (g) Zachovává se moment hybnosti okolo zemského středu pro družici nebo pro soustavu družice + Země?

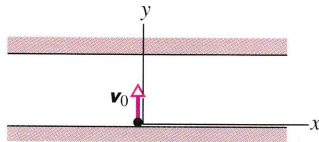
**84Ú.** Oběžná dráha Země kolem Slunce je téměř kruhová: nejmenší vzdálenost je  $1,47 \cdot 10^8 \text{ km}$ , největší  $1,52 \cdot 10^8 \text{ km}$ . Určete odpovídající změny (a) celkové energie, (b) potenciální energie, (c) kinetické energie a (d) oběžnou rychlost. (Tip: Využijte zákonů zachování energie a momentu hybnosti.)

**85Ú.** V raketoplánu o hmotnosti  $m = 2 000 \text{ kg}$  obíhá kapitán Janeway planetu o hmotnosti  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  na dráze o poloměru  $r = 6,80 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Jaká je (a) perioda obíhání a (b) rychlost raketoplánu? Janeway odpálí dopředu mířící pomocnou raketu, takže se rychlost raketoplánu zmenší o 1,00 %. Jaká je bezprostředně poté (c) rychlost, (d) kinetická energie, (e) gravitační potenciální energie a (f) mechanická energie raketoplánu? (g) Jaká je nyní hlavní poloosa oběžné dráhy raketoplánu? (h) Jaký je rozdíl mezi periodou původní a nové, eliptické oběžné dráhy a která z nich je menší?

#### ODST. 14.9 Einstein a gravitace

**86C.** Na obr. 14.20b ukazuje váha, na které stojí šedesátakilový student, hodnotu 220 N. Jak dlouho bude trvat melounu, než dopadne na zem, jestliže mu vyklouzne z výšky 2,1 m nad zemí?

**87Ú.** Na obr. 14.45 jsou znázorněny stěny trubice v kosmické lodi v kosmickém prostoru; loď má zrychlení  $\mathbf{a} = (2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})\mathbf{i}$ . Elektron je vyslán ze znázorněného počátku přes šířku trubice 3,0 cm s počáteční rychlostí  $\mathbf{v}_0 = (0,40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{j}$ . Popište pomocí jednotkových vektorů vzhledem k lodi, jaké je (a) posunutí elektronu na konci jeho letu a (b) jeho rychlost těsně před dopadem na protější zeď.



Obr. 14.45 Úloha 87

**88Ú.** Spočítejte s užitím dodatku C pro každou planetu vzdálenost těžiště soustavy Slunce + planeta od středu Slunce. Srovnajte ji s rozměry Slunce.

Již samotný Jupiter způsobuje, že těžiště sluneční soustavy leží poblíž slunečního okraje; společné působení Jupiteru, Saturnu, Neptunu a Pluta „v zákrytu“ by vzdálilo těžiště sluneční soustavy až na 2,17násobek slunečního poloměru od středu Slunce. Kvůli různě dlouhým oběžným dobám těchto planet koná Slunce kolem těžiště sluneční soustavy „lístkový“ pohyb s periodou cca 178,7 let, sestávající z cca padesátileté části pravidelné (trojlístkové) a z části chaotické. To se projevuje i v našem životě, viz např. I. Charvátová: *Solar-Terrestrial and Climatic Phenomena...*, *Surveys in Geophysics*, 1997, **18**, pp. 131–146.

### PRO POČÍTAČ

**89Ú.** Sonda o hmotnosti 6 000 kg obíhá Slunce na kruhové dráze o poloměru  $108 \cdot 10^6$  km (poloměr oběžné dráhy Venuše). Kosmická agentura chce dostat sondu na dráhu o stejném poloměru

jako Země, tzn. na kružnici o poloměru  $150 \cdot 10^6$  km. Prvním krokem je zvýšení rychlosti sondy tak, aby vzniklá eliptická trajektorie měla vzdálenost v perihéliu rovnou poloměru požadované kruhové dráhy. (a) Spočítejte požadovaný přírůstek rychlosti a energie. Nakreslete eliptickou dráhu (rovnice elipsy v polárních souřadnicích se středem v počátku souřadnic je

$$r^2 = \frac{r_p r_a (r_p + r_a)^2}{(r_p + r_a)^2 \sin^2 \theta + 4 r_p r_a \cos^2 \theta},$$

kde  $r_p$  je vzdálenost perihélia a  $r_a$  vzdálenost afélia). (b) Když je dosaženo afélia, je rychlost sondy opět změněna tak, aby se dostala na výslednou kruhovou dráhu. Jaké změny rychlosti a energie jsou k tomu nutné?

**90Ú.** Sestavte v počítači seznam period  $T$  a hlavních poloos  $a$  pro planety uvedené v tab. 14.3. Vynásobte všechna  $T$  takovým faktorem, aby  $T$  bylo v sekundách. (a) Uložte hodnoty  $T^2$  a  $a^3$  do nových seznamů. Nechte počítač provést lineární regresi  $T^2$  vůči  $a^3$ . Z parametrů regrese a s použitím známé hodnoty  $G$  určete hmotnost Slunce. (b) Vypočítejte hodnoty  $\log T$  a  $\log a$ . Nechte počítač nakreslit závislost  $\log T$  na  $\log a$  a proveďte lineární regresi. Z jejích parametrů a ze známé hodnoty  $G$  určete opět hmotnost Slunce.



---

*Síla, kterou voda působí na tělo potápěče, dosáhne značné hodnoty již při potopení do poměrně malé hloubky na dno bazénu. Přesto William Rhodes po opuštění ponorky, která byla v Mexickém zálivu spuštěna do hloubky 1 000 stop (305 m), doplaval v roce 1975 do rekordní hloubky 1 148 stop (350 m), když užil vybavení sportovního potápěče a speciální směs plynů pro dýchání. Nováček sportovního potápění, který trénuje v bazénu, může však paradoxně být ve větším nebezpečí než Rhodes. Při potápění občas přijdou lidé i o život. Jaké nebezpečí jim vlastně hrozí?*

---



## 15.1 TEKUTINY A SVĚT KOLEM NÁS

*Tekutiny* — pod tento společný název zahrnujeme **kapaliny** a **plyny**, případně i **plazma** (žhavý ionizovaný plyn) — mají základní význam pro náš život. Dýcháme je a pijeme, základní životní tekutina — krev — obíhá v našich tepnách a žilách. Moře i ovzduší je tekuté.

V autě se tekutiny vyskytují v pneumatikách, v pali-  
vové nádrži, v chladiči, ve válcích motoru, ve výfukovém potrubí, v elektrické baterii, v topném a případně chladičím systému, v nádrži ostříkovače, v mazacích systémech, v hydraulickém rozvodu (hydraulický znamená pracující prostřednictvím kapaliny). Až tedy uvidíte obrovské zemní stroje, vzpomeňte si, kolik je v nich hydraulických válců, které umožňují jejich činnost. Velmi mnoho hydraulických zařízení je ve velkých tryskových letadlech.

Energii proudící tekutiny využíváme ve větrných mlýnech a potenciální energii jiné tekutiny ve vodních elektrárnách. V průběhu věků tekutiny vytvarovaly krajinu. Často podnikáme daleké cesty, jen abychom viděli pohybující se tekutiny. Myslím, že nastal čas, abychom si řekli, co o tekutinách vypovídá fyzika.

## 15.2 CO JE TEKUTINA?

Jak již název napovídá, **tekutina** — na rozdíl od pevných těles — může téci. Přizpůsobí se tvaru nádob, do kterých ji umístíme. Je to proto, že tekutiny neudrží dlouhodobě síly rovnoběžné se svým povrchem. (V přesnějším vyjádření čl. 13.6 je ideální tekutina látka, která teče, protože není schopna přenášet smyková napětí. Působí jen silou kolmou ke svému povrchu.) Některým látkám, např. asfaltu, trvá dlouhou dobu, než se jejich tvar přizpůsobí rozměrům nádoby. Nakonec však k přizpůsobení dojde, a proto i takové látky se chovají (z dlouhodobého pohledu) jako tekutiny\*.

Možná se divíte, proč dáváme dohromady kapaliny a plyny a společně je nazýváme tekutinami. Konec konců můžete říci, že voda a pára se liší stejně jako voda a led. Je tu ale principiální rozdíl. Molekuly ledu (stejně jako ostatních krystalických látek) jsou uspořádány do pevných trojrozměrných útvarů — krystalových mřížek — a v nich je „pořádek“ i na vzdálenosti dosti dlouhé oproti vzdálenostem mezimolekulárním. Ve vodě ani v páře žádné takové pravidelné uspořádání na dlouhou vzdálenost neexistuje.

\* Chování takové tekutiny je však velmi vzdálené od chování ideální tekutiny, viskózní síly jsou velké. Podrobněji se takovými tekutinami, které jsou na pomezí tekutin a pevných látek, zabývá obecná nauka o deformačním chování látek zvaná **reologie**.

## 15.3 HUSTOTA A TLAK

Když popisujeme chování tuhých těles, zabýváme se různými předměty, jakými jsou např. dřevěné kvádry, míče nebo kovové tyče. Fyzikální veličiny vhodné pro popis takových útvarů jsou především *hmotnost* a *síla*, které se vyskytují v Newtonových zákonech. Můžeme např. mluvit o dřevěném kvádru, který má hmotnost 3 kg a působí na něj síla 25 N.

Na tekutinách nás více zajímají ty vlastnosti, které se mohou měnit bod od bodu, než vlastnosti nějakých v ní pevně vymezených kousků. Je užitečnější hovořit o **hustotě** a **tlaku** (rozumí se všestranném tlaku — srovnej s čl. 13.6) než o hmotnosti a síle.

### Hustota

Abychom určili hustotu  $\rho$  tekutiny v daném místě, vymezíme kolem tohoto místa malý objem  $\Delta V$ , ve kterém se nachází hmotnost tekutiny  $\Delta m$ . **Hustota** elementu je pak

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (15.1)$$

Hustota v libovolném bodě tekutiny se zavádí jako limita tohoto poměru, když objem elementu obklopujícího zvolený bod se stále zmenšuje. V mechanice tekutin (a i obecněji při popisu spojitých neboli kontinuálních prostředí) ovšem předpokládáme, že zmenšování zastavíme, když se objem elementu přiblíží molekulovým rozměrům. Hustota se tak mezi jednotlivými body tekutiny mění pozvolna a prostředí se popisuje jako spojité a ne jako „rozkouskované“ na molekuly. Máme-li vzorek větších rozměrů, zavádíme jeho průměrnou hustotu jako  $\rho = m/V$ , kde  $m$  je celková hmotnost vzorku a  $V$  jeho objem.

Hustota je skalární veličina. Její jednotkou v SI je kilogram na metr krychlový. V tab. 15.1 jsou uvedeny hustoty některých látek a průměrné hodnoty hustot některých objektů. Všimněte si, že hustoty plynů (v tabulce je uveden vzduch) se výrazně mění s tlakem, ale hustoty kapalin (v tabulce je údaj pro vodu) nikoliv. Plyny jsou snadno *stlačitelné*, kapaliny ne.

### Tlak

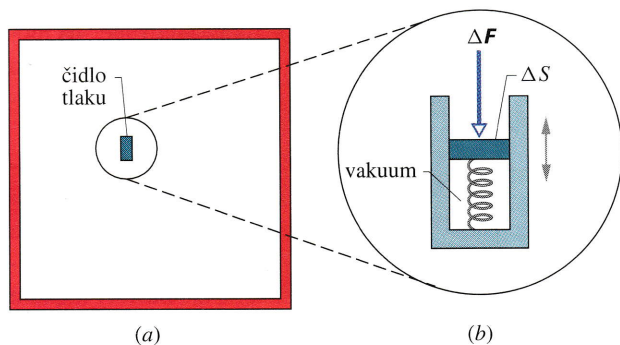
V nádobě naplněné tekutinou je umístěn malý přístroj měřící **tlak**, jak je naznačeno na obr. 15.1a. Přístroj (obr. 15.1b) se skládá z pístu plochy  $\Delta S$ , který je na jedné straně vystaven působení tekutiny a na druhé, kde je vakuum, je opřen o pružinu. Odečteme-li stlačení okalibrované pružiny, zjistíme, jakou silou  $\Delta F$  působí okolní tekutina na píst. Tlak, jakým tekutina působí na píst, vypočteme jako poměr

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (15.2)$$

Tabulka 15.1 Hustoty  $\rho$  některých látek a objektů

LÁTKA NEBO OBJEKT	$\rho$ kg·m <sup>-3</sup>
mezihvězdný prostor	10 <sup>-20</sup>
nejlepší vakuum dosažené v laboratoři	10 <sup>-17</sup>
vzduch: 20 °C, 1 atm <sup>a</sup>	1,21
20 °C, 50 atm <sup>a</sup>	60,5
pěnění polystyren	1·10 <sup>2</sup>
voda: 20 °C, 1 atm <sup>a</sup>	0,998·10 <sup>3</sup>
20 °C, 50 atm <sup>a</sup>	1,000·10 <sup>3</sup>
mořská voda 20 °C, 1 atm <sup>a</sup>	1,024·10 <sup>3</sup>
kev	1,060·10 <sup>3</sup>
led	0,917·10 <sup>3</sup>
železo	7,9·10 <sup>3</sup>
rtuť	13,6·10 <sup>3</sup>
Země: průměrná hodnota	5,5·10 <sup>3</sup>
jádro	9,5·10 <sup>3</sup>
kůra	2,8·10 <sup>3</sup>
Slunce: průměr	1,4·10 <sup>3</sup>
jádro	1,6·10 <sup>5</sup>
bílý trpaslík — hvězda (jádro)	10 <sup>10</sup>
jádro uranu	3,0·10 <sup>17</sup>
neutronová hvězda (jádro)	10 <sup>18</sup>
černá díra (s hmotností našeho Slunce)	10 <sup>19</sup>

<sup>a</sup> atm je fyzikální atmosféra (normální atmosféra), dříve často užívaná jednotka tlaku 1 atm = 101 325 Pa je rovna normálnímu atmosférickému tlaku.



**Obr. 15.1** (a) Nádoba s tekutinou, ve které se nachází malý měřič tlaku — tlakové čidlo, podrobněji ukázané v části (b) obrázku. Čidlo měří tlak podle zasunutí dobře utěsněného pístu opřeného ve vzduchoprázdném prostoru o pružinu.

Tlak v bodě tekutiny zavádíme jako limitu tohoto poměru, když plochu  $\Delta S$  (o obsahu  $\Delta S$ ) kolem bodu zmenšujeme způsobem stejným, jaký byl popsán v minulém odstavci pro hustotu. Když je tlak ve všech bodech určité oblasti stejný, říkáme, že je v této oblasti homogenní, a zjistíme jej dělením síly  $F$  obsahem  $S$  rovinné plošky, na kterou tato síla působí. Rov. (15.2) tak přejde na často užívaný jednoduchý tvar  $p = F/S$ .

Pokusy zjistíme, že v daném bodě tekutiny, která je v klidu, má tlak  $p$  definovaný rov. (15.2) stejnou hodnotu pro všechny orientace měřiče tlaku. Tlak je skalár, jeho hodnota nezávisí na směru. Síla působící na naše měřicí zařízení je sice vektor, ale v rov. (15.2) se uvažuje pouze její velikost, která je skalární veličinou.

V SI je jednotkou tlaku newton na čtverečný metr, N·m<sup>-2</sup>, jednotka se nazývá **pascal** (Pa). U nás i v jiných zemích důsledně užívajících metrickou soustavu jsou i měřiče tlaku v pneumatikách kalibrovány v kilopascálech. (Jediniš krevní tlak se tradičně uvádí v milimetrech rtuťového sloupce neboli v torrech.) Vztah mezi pascalem a jinými dříve běžně užívanými jednotkami nepatřícími do SI je dán vztahy:

$$1 \text{ atm} = 1,013\,25 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 14,7 \text{ lb} \cdot \text{in}^{-2},$$

$$1 \text{ at} = 1 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} = 9,806\,65 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

*Atmosféra*, jak jméno naznačuje, byla jednotka tlaku přibližně rovná atmosférickému (barometrickému) tlaku. Jednotka značená atm a nazývaná *fyzikální* nebo též *normální atmosféra* je rovna *normálnímu atmosférickému tlaku*, který odpovídá průměrnému atmosférickému tlaku při hladině moře při teplotě 0 °C. Je mu definitoricky přisouzena hodnota 101 325 Pa. Jednotka značená at a nazývaná *technická atmosféra* je rovna tlaku, kterým působí síla jednoho kilopondu (kp) na čtverečný centimetr. (Kilopond je starší jednotka síly nespádající do soustavy SI; je roven velikosti tíhové síly působící na těleso hmotnosti 1 kg (resp. váze tohoto tělesa) při standardním tíhovém zrychlení  $g$ ). Fyzikální atmosféra je tedy přibližně o tři procenta větší než technická atmosféra. Jednotka *torr* (pojmenovaná po Evangelistovi Torricelliovi, který v roce 1674 objevil rtuťový barometr) odpovídá tlaku, kterým na podložku působí *milimetr rtuťového sloupce*. Proto bývá *torr* označován též jako mm Hg. Typicky britská jednotka tlaku, libra na čtverečný palec ( $\text{lb} \cdot \text{in}^{-2}$ ), bývá zkráceně označována jako psi (pound per square inch). Hodnoty některých typických tlaků jsou uvedeny v tab. 15.2.

#### PŘÍKLAD 15.1

Pokoj má plochu podlahy 3,5 m × 4,2 m a výšku 2,4 m.

(a) Kolik váží vzduch v místnosti — jakou tíhou působí na podlahu?

**ŘEŠENÍ:** Je-li  $V$  je objem místnosti a  $\rho$  je hustota vzduchu při tlaku 1 atm (tab. 15.1), potom hmotnost  $m$  vzduchu je

$$\begin{aligned} m &= \rho V = \\ &= (1,21 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3})(3,5 \text{ m} \cdot 4,2 \text{ m} \cdot 2,4 \text{ m}) = \\ &= 42,7 \text{ kg} \doteq 43 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tabulka 15.2 Tlaky ve vybraných systémech

SYSTÉM	$\frac{p}{\text{Pa}}$
střed Slunce	$2 \cdot 10^{16}$
střed Země	$4 \cdot 10^{11}$
nejvyšší tlak dosažený v laboratoři	$1,5 \cdot 10^{10}$
tlak v největší hloubce oceánu	$1,1 \cdot 10^8$
tlak jehlového podpatku na taneční parket	$1 \cdot 10^6$
tlak v pneumatice <sup>a</sup>	$2 \cdot 10^5$
atmosférický tlak u hladiny moře	$1,0 \cdot 10^5$
normální krevní tlak <sup>a,b</sup>	$1,6 \cdot 10^4$
nejvyšší vakuum dosažené v laboratoři	$10^{-12}$

<sup>a</sup> Jedná se o přetlak, tj. zvýšení tlaku proti tlaku atmosférickému.

<sup>b</sup> Systolický tlak 120 torr, tj. 120 mm rtuťového sloupce, změřený na lékařském manometru.

Jeho tíha  $G$  je

$$G = mg = (42,7 \text{ kg})(9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) = 419 \text{ N} \approx 420 \text{ N.} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jakou silou působí atmosféra na podlahu místnosti?

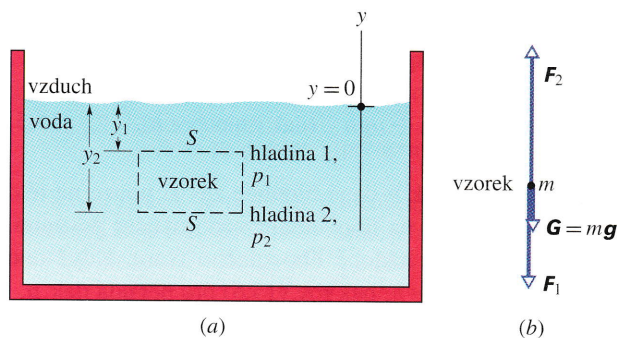
**ŘEŠENÍ:** Síla je rovna

$$F = pS = (1,0 \text{ atm}) \left( \frac{1,01 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}}{1 \text{ atm}} \right) (3,5 \text{ m})(4,2 \text{ m}) = 1,5 \cdot 10^6 \text{ N.} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato síla, která je přibližně rovna síle, kterou je k Zemi přitahováno 150 tun, je tíhou sloupce vzduchu o základně rovné ploše podlahy a výšce rovné výšce atmosféry. Je rovna síle, kterou by na podlahu působila rtuť nalitá do místnosti do výšky přibližně  $\frac{3}{4}$  m. Proč tato obrovská síla nerozboří podlahu?

## 15.4 TEKUTINY V KLIDU — STATIKA

Na obr. 15.2 je otevřená nádoba s vodou (nebo jinou kapalinou). Jak ví každý, kdo se někdy potápěl pod vodu, tlak *stoupá*, když se potápíme hlouběji pod hladinu, tj. pod rozhraní vzduch – voda. Potápěčův měřič hloubky je tlakoměr podobný tomu, který je znázorněn na obr. 15.1b. Obdobně každý horolezec ví, že tlak *klesá*, když stoupáme do výšin. Tlak, se kterým se setkává potápěč i horolezec, se nazývá **hydrostatický tlak**, protože je to tlak, kterým působí tekutiny, jsou-li v klidu, tj. při statických podmínkách. Tlak *plynu* někdy nazýváme **aerostatický tlak**. (Řec. hydór = voda; řec. i lat. aér = vzduch.)



**Obr. 15.2** (a) Nádoba s vodou, ve které si představíme vzorek vody ve válci (na obrázku vyčárkován) se základnou o obsahu  $S$ . (b) Silový diagram pro vzorek vody. Vzorek je ve statické rovnováze, tíhová síla je vyvážena vztlakovou.

Nejprve probereme vzrůst tlaku s hloubkou v kapalině. Zvolíme svislou osu  $y$  s počátkem na hladině kapaliny a s kladnou orientací mířící vzhůru. Uvažujme vzorek vody, který vyplňuje myšlený válec s vodorovnou základnou o obsahu  $S$ , ležící v hloubce  $y_2$ , a vrchní plochou v hloubce  $y_1$ . Vzhledem k naší volbě osy  $y$  jsou obě souřadnice  $y_1$  i  $y_2$  *záporné*.

Na obr. 15.2b je znázorněn silový diagram pro zvolený válcový vzorek vody. Vzorek je v rovnováze, protože tíhová síla  $G$  na něj působící je přesně vyvážena rozdílem síly mířící vzhůru o velikosti  $F_2 = p_2 S$  působící na základnu a síly o velikosti  $F_1 = p_1 S$  mířící dolů, která působí na vrchní plochu válce. Tedy

$$F_2 = F_1 + G. \quad (15.3)$$

Objem  $V$  válce je  $S(y_1 - y_2)$ . Hmotnost vody  $m$  v něm obsažené je tedy  $\rho S(y_1 - y_2)$ , kde  $\rho$  je stálá hustota vody. Tíha  $G$  vzorku vody je potom  $mg = \rho g S(y_1 - y_2)$ . Po dosažení za  $G$ ,  $F_1$  a  $F_2$  dostane rov. (15.3) tvar

$$p_2 S = p_1 S + \rho g S(y_1 - y_2)$$

neboli

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2). \quad (15.4)$$

Tuto rovnici můžeme použít k určení tlaku jak v kapalině, tak i v atmosféře, pokud můžeme mezi výškami  $y_1$  až  $y_2$  předpokládat neproměnnou hustotu  $\rho$  vzduchu.

V kapalině obvykle vyjadřujeme tlak v závislosti na hloubce  $h$  (obr. 15.3). Rov. (15.4) pro toto vyjádření upravíme tak, že hladinu 1 položíme do povrchu kapaliny a tlak v ní označíme  $p_0$ . Potom bude

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = -h.$$

Označíme-li ještě  $p_2$  jako  $p$ , můžeme přepsat rov. (15.4) na tvar, který se pro kapalinu běžně užívá:

$$p = p_0 + \rho gh \quad (\text{tlak v hloubce } h). \quad (15.5)$$

Všimněte si, že tlak v dané hloubce závisí pouze na této hloubce a nezávisí na libovolném vodorovném posunutí. Rov. (15.5) platí v nádobě libovolného tvaru. Když dno nádoby je v hloubce  $h$ , pak rov. (15.5) pro něj udá tlak  $p$ .

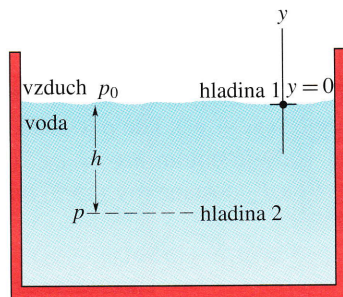
Tlak  $p$  v rov. (15.5) se označuje jako **absolutní tlak** v hladině 2. Abychom pochopili proč, všimněme si na obr. 15.3, že tlak  $p$  se skládá ze dvou příspěvků: (1) z atmosférického tlaku  $p_0$ , který působí již na vrchní hladinu 1, a (2) z tlaku  $\rho gh$ , který vzniká působením kapaliny mezi hladinami 1 a 2. Obecně se rozdíl mezi absolutním a atmosférickým tlakem označuje jako **přetlak**. V našem případě, znázorněném na obr. 15.3, je tedy přetlakem výraz  $\rho gh$ . Rov. (15.4) lze užít též pro vyjádření tlaku v plynu nad hladinou kapaliny pro vzdálenosti, ve kterých můžeme předpokládat, že se hustota plynu podstatně nezmění. Např. pro vyjádření tlaku plynu ve vzdálenosti  $d$  nad vrchní hladinou 1 (obr. 15.3) můžeme po dosažení

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = d, \quad p_2 = p$$

psát

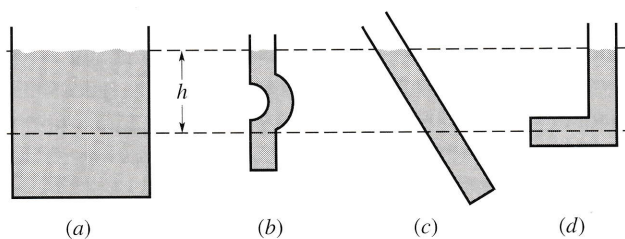
$$p = p_0 - \rho_{\text{vzd}} g d,$$

když hustotu vzduchu označíme  $\rho_{\text{vzd}}$ .



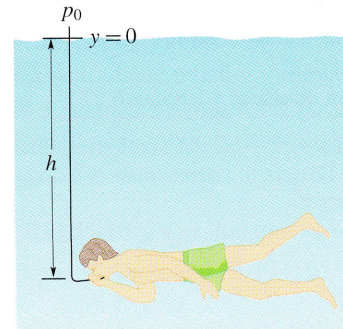
Obr. 15.3 Tlak  $p$  roste s hloubkou  $h$ , jak odpovídá rov. (15.5).

**KONTROLA 1:** Na obrázku jsou čtyři nádoby s olivovým olejem. Seřadte je podle velikosti tlaku v hloubce  $h$ .



### PŘÍKLAD 15.2

(a) Podnikavý potápěč-kutil předpokládá, že když sací trubice dlouhá 20 cm dobře funguje, bude dobře fungovat i trubice dlouhá 6 m. Jaký je rozdíl  $\Delta p$  mezi tlakem, kterým na něj působí okolní voda (obr. 15.4), a tlakem v jeho plicích, když trubicí nerozvážně užije pro potápění do hloubky  $h = 6$  m? Co mu hrozí?



Obr. 15.4 Příklad 15.2. **TOTO NEZKOUŠEJTE** s delší trubicí, než je standardní krátká sací trubice užívaná při sportovním potápění. Takový pokus by vás mohl stát život. Ve větší hloubce může být tlak vody působící na hrudník tak velký, že jej nedokážete rozevřít, abyste skrz sací trubicí nadýchli vzduch, jehož tlak je podstatně menší.

**ŘEŠENÍ:** Nejprve si představte potápěče v hloubce  $h = 6$  m bez sací trubice. Tlak vody, který na něj působí, je podle rov. (15.5) roven

$$p = p_0 + \rho gh.$$

Tělo potápěče se pod působením tohoto vnějšího tlaku mírně smrští tak, aby vnitřní tlaky v těle vyrovnávaly vnější tlak. Jmenovitě jeho krevní tlak a průměrný tlak v plicích se zvýší tak, aby vyrovnaly zvýšený vnější tlak  $p$ .

Jestliže však potápěč nerozvážně použije sací trubicí k dýchání v hloubce 6 m, stlačený vzduch bude z jeho plic vytlačen a tlak v nich rychle klesne na hodnotu atmosférického tlaku  $p_0$ . Předpokládáme-li, že se potápí ve sladké vodě hustoty  $1\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , rozdíl tlaku  $\Delta p$  mezi vyšším tlakem působícím na jeho hrudník a nižším tlakem v jeho plicích bude

$$\begin{aligned} \Delta p &= p - p_0 = \rho gh = \\ &= (1\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3})(9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(6,0\text{ m}) = \\ &= 5,9\cdot 10^4\text{ Pa}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tento tlakový rozdíl, přibližně 0,6 atm, stačí vyvolat selhání plic způsobené tím, že do nich vnikne krev, jejíž tlak má stále ještě hodnotu okolního vyššího tlaku. Jev se nazývá **stlačení plic** (lung squeeze).

(b) Nováček ve sportovním potápění se plně nadýchá ze svého zásobníku, než zásobník odpojil v hloubce  $h$  a plaval k povrchu. Nedbal pokynů, že při výstupu z hloubky se má vydechovat. Při vynoření na povrchu rozdíl tlaku mezi tlakem

v jeho plicích a okolím činil 70 torrů. V jaké hloubce  $h$  začal výstup? Jakému smrtelnému nebezpečí se vystavoval?

**ŘEŠENÍ:** Když plnil plíce v hloubce  $h$ , působil na něj dle rov. (15.5) opět vnější tlak

$$p = p_0 + \rho g h.$$

který se ustavil i v jeho plicích. Jak stoupal, vnější tlak na něj slábl, až na povrchu dosáhl hodnoty atmosférického tlaku  $p_0$ . Jeho krevní tlak také poklesl až na normální hodnotu. Ale protože nevydechoval, tlak v jeho plicích zůstal na hodnotě, kterou měl v hloubce  $h$ . Rozdíl tlaků mezi vyšší hodnotou v jeho plicích a nižší hodnotou působící na jeho hrudník dosáhl po jeho vynoření hodnoty

$$\Delta p = p - p_0 = \rho g h,$$

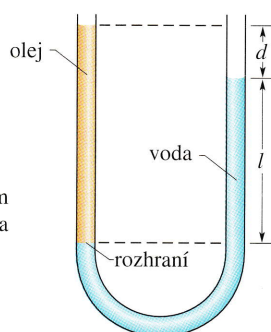
odkud dostaneme

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Delta p}{\rho g} = \\ &= \frac{(70 \text{ torr})}{(1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3})(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})} \left( \frac{1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{760 \text{ torr}} \right) = \\ &= 0,95 \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tlakový rozdíl 70 torr (přibližně 9 % atmosférického tlaku) může stačit k poškození potápěčových plic. Těmi se vzduch dostane do krve, a krví do srdce, kde může způsobit smrt potápěče. Když potápěč poslechne pokyn, že má při výstupu z hloubky postupně vydechnout, umožní tlaku v plicích vyrovnávat se s okolním tlakem a zdravotní nebezpečí pomine.

### PŘÍKLAD 15.3

V U-trubicí znázorněné na obr. 15.5 se nacházejí dvě kapaliny ve statické rovnováze: voda s hustotou  $\rho_v$  se nachází v pravém rameni, olej s neznámou hustotou  $\rho_x$  v levém rameni. Měřením zjistíme, že  $l = 135 \text{ mm}$  a  $d = 12,3 \text{ mm}$ . Jaká je hustota oleje?



**Obr. 15.5** Příklad 15.3. Olej v levém rameni U-trubice stojí výše než voda v pravém rameni, protože olej má menší hustotu než voda. Obě kapaliny vytváří stejný tlak  $p_r$  na svém rozhraní.

**ŘEŠENÍ:** Jestliže v levé trubici je na rozhraní olej – voda tlak  $p_r$ , pak tlak v pravé trubici ve stejné výšce musí být

také  $p_r$ , protože obě místa jsou spojena pouze vodou. Uvažované rozhraní v pravém rameni leží ve vzdálenosti  $l$  pod povrchem (volnou hladinou) vody a dle rov. (15.5) máme

$$p_r = p_0 + \rho_v g l \quad (\text{pravé rameno}).$$

V levém rameni je rozhraní v hloubce  $l + d$  pod volnou hladinou oleje a dle rov. (15.5) máme nyní

$$p_r = p_0 + \rho_x g (l + d) \quad (\text{levé rameno}).$$

Porovnáním těchto dvou rovnic a řešením pro neznámou  $\rho_x$  dostaneme

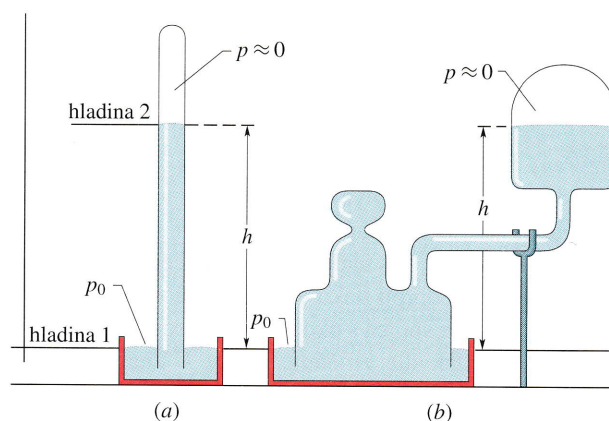
$$\begin{aligned} \rho_x &= \rho_v \frac{l}{l + d} = \\ &= (1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}) \frac{(135 \text{ mm})}{(135 \text{ mm}) + (12,3 \text{ mm})} = \\ &= 916 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněte si, že výsledek nezávisí ani na atmosférickém tlaku  $p_0$ , ani na tíhovém zrychlení  $g$ .

## 15.5 MĚŘENÍ TLAKU

### Rtuťový barometr

Na obr. 15.6a je obyčejný *rtuťový barometr*, přístroj k měření atmosférického (barometrického) tlaku. Je to dlouhá skleněná z jedné strany uzavřená trubice, kterou po naplnění rtutí obrátíme otevřeným koncem do nádoby s rtutí. Tím se mezi hladinou rtuti a uzavřeným koncem trubice vytvoří vakuovaný prostor, ve kterém se nacházejí pouze páry rtuti. Jejich tlak je při běžných teplotách tak malý, že jej můžeme zanedbat.



**Obr. 15.6** (a) Rtuťový barometr. (b) Rtuťový barometr v jiném provedení. Vzdálenost  $h$  je pro oba barometry stejná.

Podle rov. (15.4) nalezneme atmosférický tlak  $p_0$  ze změřené výšky  $h$  rtuťového sloupce. Za hladinu 1 z obr. 15.2 zvolíme rozhraní vzduch-rtuť, tj. volnou hladinu rtuti v nádobce, a za hladinu 2 vršek rtuťového sloupce, jak je naznačeno v obr. 15.6a. Dosadíme tedy do rov. (15.4)

$$y_1 = 0, p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = h, p_2 = 0$$

a pro hledaný atmosférický tlak dostaneme vyjádření

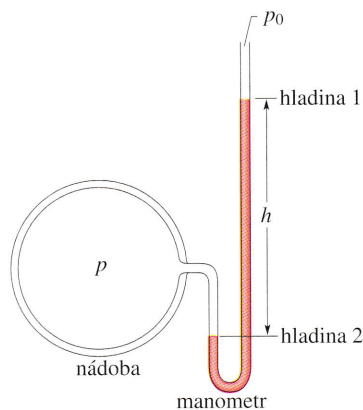
$$p_0 = \rho gh, \quad (15.6)$$

kde  $\rho$  je hustota rtuti.

Pro daný tlak nezávisí výška  $h$  na průřezu trubice se rtutí. Bizarní rtuťový barometr z obr. 15.6b měří stejně jako jednoduchý barometr z obr. 15.6a; záleží pouze na svislé vzdálenosti  $h$  mezi hladinami rtuti.

Dle rov. (15.6) závisí pro daný tlak výška sloupce rtuti na hodnotě tíhového zrychlení  $g$  v místě, kde se nachází barometr, a na hustotě  $\rho$  rtuti, která závisí na teplotě. Výška sloupce v milimetrech je číselně rovna tlaku v torrech *pouze* tehdy, když je barometr v místě, kde má tíhové zrychlení  $g$  svou standardní hodnotu  $9,80665 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a teplota rtuti je  $0^\circ\text{C}$ . Jestliže tyto podmínky nejsou splněny (což je téměř vždy), musíme provést malé korekce, kterými převedeme výšku rtuťového sloupce na údaj o místním tlaku.

**Obr. 15.7** Otevřený manometr, jehož levé rameno je připojeno k nádobě s plynem, jehož přetlak  $p - p_0$  má být měřen. Pravé rameno U-trubice je otevřeno do atmosféry.



### Otevřený kapalinový manometr

Otevřený kapalinový manometr (tlakoměr) znázorněný na obr. 15.7 měří přetlak plynu v nádobě. Je to trubice tvaru písmene U (U-trubice) naplněná kapalinou, jejíž jeden otevřený konec je spojen s nádobou, v níž chceme změřit přetlak (rozdíl tlaku oproti tlaku v okolní atmosféře), a druhý otevřený konec je spojen s okolní atmosférou. Z rov. (15.4) vyjádříme přetlak dle změřené výšky  $h$  znázorněné na obr. 15.7. Zvolíme hladiny 1 a 2 tak, jak je naznačeno na obr. 15.7. Potom dosadíme

$$y_1 = 0, p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = -h, p_2 = p$$

do rov. (15.4) a dostaneme

$$p_p = p - p_0 = \rho gh. \quad (15.7)$$

Přetlak  $p_p$  je přímo úměrný výšce  $h$ .

Přetlak může být kladný, resp. záporný dle toho, zda  $p > p_0$ , resp.  $p < p_0$ . V nahuštěných pneumatikách nebo v lidském krevním oběhu je celkový tlak vyšší než atmosférický tlak, proto má přetlak kladnou hodnotu. Sajete-li šťávu stéblem, máte celkový tlak ve svých plicích nižší než atmosférický; přetlak ve vašich plicích je záporný. V češtině užíváme pro záporný přetlak lépe znějící termín **podtlak**.

#### PŘÍKLAD 15.4

V barometru jsme naměřili výšku  $h = 740,35 \text{ mm}$  sloupce rtuti. Teplota byla  $-5^\circ\text{C}$ ; hustota rtuti při této teplotě je  $1,3608 \cdot 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Tíhové zrychlení v místě měření je  $9,7835 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Jaký byl v místě měření atmosférický tlak? Vyjádřete jej v pascálech i torrech.

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (15.6) plyne

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho gh = \\ &= (1,3608 \cdot 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3})(9,7835 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(0,74035 \text{ m}) = \\ &= 9,8566 \cdot 10^4 \text{ Pa}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Údaje na barometru se někdy uvádějí v jednotkách torr. Tlak 1 torr je tlak, kterým působí 1 mm rtuťového sloupce v místě, kde tíhové zrychlení  $g$  má svou mezinárodně přijatou standardní hodnotu  $9,80665 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a kde teplota je  $0^\circ\text{C}$ . Při této teplotě má rtuť hustotu  $1,35955 \cdot 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Z rov. (15.6) tak pro jeden torr dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned} 1 \text{ torr} &= (1,35955 \cdot 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3})(9,80665 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}) \cdot \\ &\cdot (1 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 133,326 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Použijeme-li tento přepočtový faktor pro vyjádření hodnoty tlaku přečtené na barometru, dostaneme

$$p_0 = 9,8566 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 739,29 \text{ torr}. \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněte si, že tlak vyjádřený v torrech (739,29 torr) je číselně blízký, ale není totožný se změřenou výškou  $h$  rtuťového sloupce barometru udanou v milimetrech (740,35 mm).

## 15.6 PASCALŮV ZÁKON

Když stlačíte jeden konec tuby s pastou na zuby, abyste na druhém konci vytlačili pastu na kartáček, používáte **Pascalův zákon** v praxi. Podobně je na něm založena dobrá rada, jak se zbavit kousku jídla, který vám zaskočil v krku: dát herdu do zad. Tím se prudce zvýší tlak v plicích, který vyhodí zaskočený kousek. Zákon poprvé vyslovil v roce 1652 Blaise Pascal (je po něm nazvána jednotka tlaku) ve tvaru:

Změníme-li tlak v jednom místě tekutiny, objeví se táž změna prakticky ihned v každé části této tekutiny i na stěnách nádoby, ve které je tekutina uzavřena.

### Demonstrace Pascalova zákona

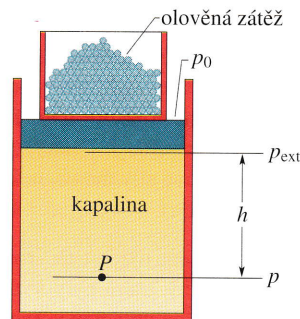
Představme si, že tekutinou je nestlačitelná kapalina ve velkém válci, jak je nakresleno v obr. 15.8. Válec je uzavřen pístem, na kterém spočívá nádoba se zátěží tvořenou olověnými broky. Atmosféra, nádoba a zátěž (spolu s hmotností pístu) vytvářejí na píst a tím i na kapalinu tlak  $p_{\text{ext}}$ . Tlak  $p$  v libovolném bodě  $P$  kapaliny je potom

$$p = p_{\text{ext}} + \rho gh. \quad (15.8)$$

Přidáme nyní trochu broků do nádoby, čímž zvýšíme  $p_{\text{ext}}$  o hodnotu  $\Delta p_{\text{ext}}$ . Hodnoty  $\rho$ ,  $g$  a  $h$  v rov. (15.8) zůstanou nezměněny, takže přidáním zátěže se v každém bodě kapaliny  $P$  tlak zvýší o

$$\Delta p = \Delta p_{\text{ext}}. \quad (15.9)$$

Tato změna tlaku nezávisí na hloubce  $h$ . Je tedy stejná v každém bodě kapaliny, jak odpovídá Pascalovu zákonu.



**Obr. 15.8** Závaží položená na píst vytvoří tlak  $p_{\text{ext}}$  na vrchní hladině uzavřené kapaliny. Když tlak  $p_{\text{ext}}$  zvýšíme přidáním dalších závaží, zvýší se tlak ve všech bodech kapaliny o stejnou hodnotu  $p_{\text{ext}}$ .

### Pascalův zákon a hydraulický převod sil

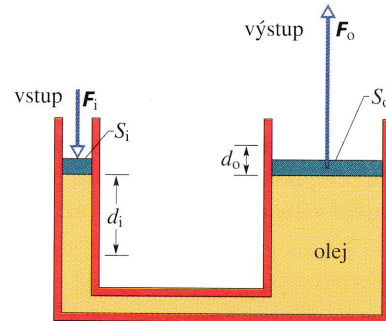
Na obr. 15.9 je znázorněno, jak se Pascalův zákon používá k násobení silového účinku, neboli jak na jeho principu může být zkonstruována jakási hydraulická páka — převodník sil. Nechť na levý (vstupní) píst o obsahu  $S_1$  působí síla velikosti  $F_1$  směrem dolů. Nestlačitelná kapalina potom v zobrazeném převodním zařízení působí na pravý (výstupní) píst o obsahu  $S_0$  silou o velikosti  $F_0$  směrem vzhůru. Aby systém byl v rovnováze, musí na pravý píst působit odshora síla stejné velikosti  $F_0$  (ta není na obrázku znázorněna). Síla  $F_1$  působící na levý píst a síla velikosti  $F_0$  působící odshora na pravý píst zvýší v kapalině tlak o hodnotu

$$\Delta p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_0}{S_0},$$

odkud pro převod velikosti sil dostáváme rovnici

$$F_0 = F_1 \frac{S_0}{S_1}. \quad (15.10)$$

Rov. (15.10) ukazuje, že výstupní síla  $F_0$  je větší než vstupní síla  $F_1$ , když  $S_0 > S_1$ , jak odpovídá případu znázorněnému na obr. 15.9.



**Obr. 15.9** Hydraulické zařízení, které se užívá k převodu síly  $F_1$  na vyšší hodnotu  $F_0$ . Vykonaná práce se však zvětšit nedá a je stejná pro obě síly, vstupní i výstupní.

Jestliže posuneme vstupní píst o vzdálenost  $d_1$ , posune se výstupní píst o vzdálenost  $d_0$ . Přitom se musí v okolí obou pístů přesunout stejný objem  $V$  nestlačitelné kapaliny. Platí tedy rovnice

$$V = S_1 d_1 = S_0 d_0,$$

odkud dále plyne

$$d_0 = d_1 \frac{S_1}{S_0}. \quad (15.11)$$

Poslední rovnice ukazuje, že když  $S_0 > S_1$ , jako je tomu na obr. 15.9, je posunutí výstupního pístu menší než posunutí pístu vstupního.

Užitím rov. (15.10) a (15.11) můžeme pro výstupní práci psát

$$W = F_0 d_0 = \left( F_1 \frac{S_0}{S_1} \right) \left( d_1 \frac{S_1}{S_0} \right) = F_1 d_1, \quad (15.12)$$

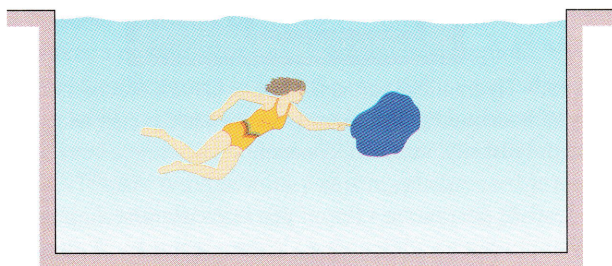
odkud plyne, že práce vykonaná vstupním pístem je stejně velká jako práce vykonaná výstupním pístem.

Z toho vidíme, že **hydraulickým převodem** můžeme převést menší sílu pracující na delší dráze na větší sílu pracující na kratší dráze. Přitom součiny síly a uražené dráhy, a tedy i vykonané práce, jsou v obou případech stejné. Možnost znásobit sílu bývá často velmi výhodná. Např. většina z nás není schopna zvednout automobil, a proto uvítá službu *hydraulického zvedáku*. Při pumpování koncem ramena zvedáku ovšem urazí podstatně větší vzdálenost, než je ta, o kterou se zvedne podložená část auta. Zvedák pracuje na

právě popsaném principu hydraulického převodu. Celková uražená vzdálenost  $d_i$  pístu v užším válci je však pumpováním rozdělena na sérii kratších posuvů. (Při pumpování je při každém dalším posuvu do zařízení přičerpávána ze zásobníku další kapalina — zde olej — a stav dosažený při předcházejícím posuvu je zabezpečen ventilem.)

## 15.7 ARCHIMEDŮV ZÁKON

Na obr. 15.10 je v bazénu zobrazena studentka, která hýbe velmi tenkým pytlíkem z plastické hmoty plným vody. Zjišťuje, že pytlík je ve stavu statické rovnováhy: ani nestoupá, ani neklesá. Ovšem voda v pytlíku má jistou váhu, a proto by měla klesat. Zřejmě tedy na pytlík musí působit směrem vzhůru síla, která váhu pytlíku vody vyváží.

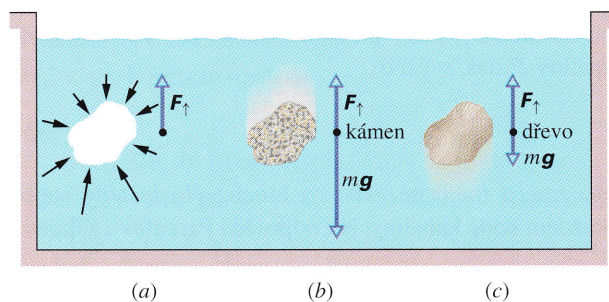


**Obr. 15.10** Tenkostěnný pytlík z plastické hmoty plný vody, který se vznáší v bazénu, je ve statické rovnováze. Váha pytlíku je vyvážena výslednicí sil, kterými na pytlík působí okolní voda.

Tuto vzhůru působící sílu nazýváme **vztlaková síla**, stručně **vztlak**, a označíme ji  $F_{\uparrow}$ . Vztlakovou silou působí

na pytlík okolní voda. Vztlaková síla vzniká jako důsledek toho, že tlak v kapalině roste s hloubkou, jak jsme si již ukázali. Tlak na spodní části pytlíku je větší než na jeho vrchní části a výsledkem je vzhůru působící vztlaková síla. Představme si, že nyní odstraníme pytlík s vodou. Na obr. 15.11a jsou znázorněny síly, které působí na dutinu, která vznikla odstraněním pytlíku. Vzhůru působící vztlaková síla  $F_{\uparrow}$  je vektorovým součtem všech na dutinu působících sil.

Vyplňme nyní dutinu kamenem, který bude mít přesně stejné rozměry jako dutina (obr. 15.11b). *Stejný vztlak, který působil na pytlík s vodou, bude nyní působit na kámen.* Je však příliš malý na to, aby vyvážil váhu kamene, takže kámen klesne ke dnu. Přestože kámen klesá, vztlak vody jej nadlehčuje a usnadní manipulaci s kamenem.



**Obr. 15.11** (a) Voda obklopující dutinu v kapalině na ni působí vztlakovou silou, jejíž velikost ani směr nezávisí na tom, čím je dutina vyplněna. (b) Je-li v dutině kámen, je velikost tíhové síly větší, než je velikost vztlakové síly. (c) Je-li v dutině dřevo, je velikost tíhové síly menší, než je velikost vztlakové síly.

Pozdě večer 21. srpna 1986 byla (pravděpodobně vulkanickým působením) narušena rozpouštěcí rovnováha oxidu uhličitého, kterého kamerunské horské jezero Nyos obsahuje velké množství. Oxid vytvořil bubliny, které byly vytlačeny nad hladinu, protože byly lehčí než obklopující tekutina — v tomto případě voda. Tam vytvořily oblak oxidu uhličitého. Tento oblak, který byl tentokrát těžší než obklopující tekutina — vzduch, začal téci po svazích hor jako řeka, přičemž zadusil 1 700 lidí a velké množství zvířat, z nichž některá vidíme na pravém obrázku.





Když vyplníme dutinu z obr. 15.11a kusem dřeva stejných rozměrů, jak je naznačeno v obr. 15.11c, bude nyní působit na dřevo stejná vztlaková síla jako dříve na kámen. Teď však bude vztlak větší, než je tíha dřeva, takže dřevo vypluje na volnou hladinu. Shrňme naše pozorování a vyslovíme **Archimedův zákon**:

Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou, která je stejně velká jako váha tekutiny tělesem vytlačené.

Právě tento zákon vysvětluje plování těles. Jestliže např. kus dřeva z obr. 15.11c vypluje byť jen částečně nad hladinu, vytlačí méně vody, než když je plně ponořen. Podle Archimedova zákona se úměrně zmenší vztlak, který na něj působí.

Dřevo se vynoří z kapaliny právě tolik, aby vztlak, který na něj působí, přesně vyrovnal jeho tíhu. Dřevo je pak ve statické rovnováze, plove.

Připomeňme si, že tíhovou sílu tělesa umísťujeme do těžiště. Podobně výslednou vztlakovou sílu umísťujeme do jejího působíště, které nazveme **vztlakový střed**. Vztlakový střed se nachází v místě, kde bylo těžiště tekutiny, než byla vytlačena. Jestliže *homogenní* těleso je plně ponořeno, splývá jeho těžiště se vztlakovým středem. Je-li však těleso ponořeno jen částečně (když plove) anebo není-li homogenní, budou oba body různé; vztlak ve vztlakovém středu a tíhová síla v těžišti pak mohou vytvořit nenulový moment silové dvojice. Ten pak rozhoduje o tom, zda je plavba lodi stabilní (moment při náhodném pootočení navrací loď zpátky) nebo ne (v opačném případě).

**KONTROLA 2:** Tučňák plave nejprve v kapalině hustoty  $\rho_0$ , potom v kapalině hustoty  $0,95\rho_0$  a nakonec v kapalině hustoty  $1,1\rho_0$ . (a) Seřadte hustoty kapalin podle velikosti vztlaku, jakým působí na tučňáka. (b) Seřadte je podle množství kapaliny vytlačené tučňákem.

### PŘÍKLAD 15.5

Výraz „špička ledovce“ se v hovorové řeči užívá k označení jevu, jehož malá část je zjevná a zbytek je skryt. Jaká je vynořená část skutečného ledovce?

**ŘEŠENÍ:** Tíhová síla ledovce o celkovém objemu  $V_1$  je

$$G_1 = \rho_1 V_1 g,$$

kde  $\rho_1 = 917 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  je hustota ledovce.

Tíhová síla vytlačené vody, která je rovna velikosti vztlakové síly  $F_{\uparrow}$ , je

$$G_v = F_{\uparrow} = \rho_v V_v g,$$

kde  $\rho_v = 1024 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  je hustota mořské vody a  $V_v$  je objem vody vytlačené ledovcem, tedy i objem ponořené části ledovce. Pro plovoucí ledovec jsou obě tíhové síly stejné:

$$\rho_1 V_1 g = \rho_v V_v g.$$

Z poslední rovnice pro podíl  $d$ , který hledáme, plyne

$$\begin{aligned} d &= \frac{V_1 - V_v}{V_1} = 1 - \frac{V_v}{V_1} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_v} = \\ &= 1 - \frac{(917 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3})}{(1024 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3})} = \\ &= 0,1 \text{ neboli } 10 \%. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

### PŘÍKLAD 15.6

Kulový balon plněný heliem má poloměr  $R = 12 \text{ m}$ . Balon nese lana a koš o hmotnosti  $m = 196 \text{ kg}$ . Jakou největší hmotnost  $M$  užitečného zatížení je balon schopný nést? Hustota helia je  $\rho_{\text{He}} = 0,160 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a hustota vzduchu  $\rho_{\text{vzd}} = 1,25 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ; objem vzduchu vytlačený zátěží balonu zanedbejte.

**ŘEŠENÍ:** Tíhová síla vzduchu vytlačeného balonem, která udává velikost vztlaku, a tíhová síla helia obsaženého v balonu jsou

$$G_{\text{vzd}} = \rho_{\text{vzd}} V g \quad \text{a} \quad G_{\text{He}} = \rho_{\text{He}} V g,$$

kde  $V (= \frac{4}{3}\pi R^3)$  je objem balonu. Při rovnováze z Archimedova zákona plyne

$$G_{\text{vzd}} = G_{\text{He}} + mg + Mg$$

neboli

$$\begin{aligned} M &= \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_{\text{vzd}} - \rho_{\text{He}}) - m = \\ &= \frac{4}{3}\pi (12,0 \text{ m})^3 (1,25 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} - 0,160 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}) - \\ &\quad - (196 \text{ kg}) = 7690 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tíhová síla objektu s touto hmotností je asi 75 400 N.

## 15.8 TEKUTINY V POHYBU — DYNAMIKA

Pohyb *reálných tekutin* je velmi komplikovaný, řada problémů je jen obtížně numericky řešitelných a některé problémy dosud vyřešeny nejsou. Problém si podstatně zjednodušíme. Zavedeme pojem **ideální kapalina** pro modelovou tekutinu, o které předpokládáme, že je dokonale *nestlačitelná* a *neviskózní*. Při popisu jejího proudění se omezíme na případy, kdy proudění je *laminární, ustálené (stacionární)*

a *nevírové*. Tak se nám podaří jednoduchými matematickými prostředky získat velmi užitečné výsledky, které nám umožní pochopit základní rysy chování proudící tekutiny. Objasníme si blíže předpoklady, které jsme učinili:

Ideální kapalina je

1. **nestlačitelná:** Předpoklad je stejný, jaký jsme již učinili pro tekutinu v klidu. Ideální tekutina má konstantní, všude stejnou hustotu.

2. **neviskózní:** Viskozita (vazkost) tekutiny je míra toho, jak se tekutina brání tečení. Např. tlustá vrstva medu se podstatně více brání roztékání než stejně tlustá vrstva vody. Proto říkáme, že med je viskóznější než voda. Asfalt, který jsme zmínili na začátku kapitoly, má velmi vysokou viskozitu. Viskozita tekutin je analogická smykovému tření mezi pevnými tělesy; při viskózním proudění se kinetická energie přeměňuje na teplo podobně jako při vzájemném pohybu těles za působení tření. Vymizí-li tření, kvádr může po vodorovné rovině klouzat stálou rychlostí. Podobně na těleso, které se pohybuje neviskózní tekutinou, nepůsobí žádná *smyková viskózní síla*, tj. brzdicí síla viskózního charakteru. Britský vědec lord Rayleigh poznamenal, že v ideální tekutině lodní šroub nebude pracovat, na druhé straně však loď jednou uvedená do pohybu nebude šroub potřebovat.

Omezujeme se na proudění

3. **laminární:** Při laminárním proudění je rozumně definována rychlost proudění v každém bodě tekutiny; může se od místa k místu měnit, ale ne příliš prudce. Pomalé proudění vody ve středu klidného toku je blízké laminárnímu, v peřejích je laminárnímu rozhodně vzdálené. Na obr. 15.12 je ukázán přechod z laminárního na **turbulentní proudění** pro stoupající cigaretový kouř. Rychlost částic kouře roste, jak stoupají, a při jisté kritické rychlosti přejde laminární proudění v turbulentní.

4. **ustálené (stacionární):** Při *ustáleném* proudění se rychlost proudící tekutiny v kterémkoliv místě nemění s časem ani co do velikosti, ani co do směru. Laminární proudění může, ale nemusí být ustálené. Turbulentní proudění ustálené být nemůže, je vždy **nestacionární**.

5. **nevírové:** Tuto vlastnost proudění si objasníme na chování malého zrnka prachu unášeného tekutinou. Zrnko se může při *nevírovém* proudění pohybovat i po kruhové dráze, ale nikdy nesmí rotovat okolo osy jím procházející. Příklad: ruské kolo na pouti koná jako celek rotační pohyb, ale jeho pasažéři v zavěšených kabinkách konají pouze translační pohyb, okolo vodorovné osy se neotáčejí. I když se problematikou nebudeme dále podrobněji zabývat, vymezíme si, že námi sledované proudění bude *nevírové*. Dále

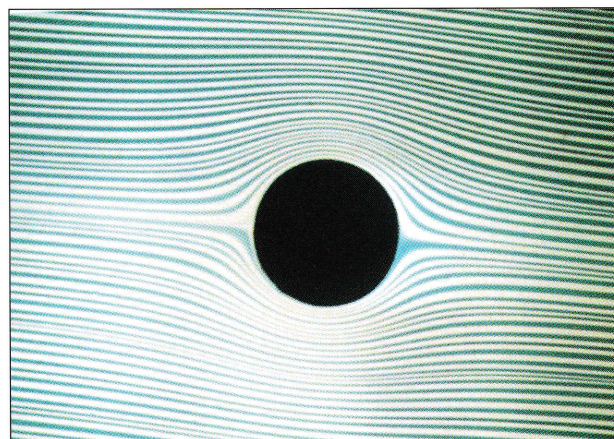


Obr. 15.12 V určitém bodě změní stoupající proud kouře a ohřátého vzduchu charakter proudění z laminárního na turbulentní.

budeme ve výkladové části vždy předpokládat, že ve všech bodech daného průřezu trubice je stejná rychlost. Takové proudění je *nevírové*. V příkladech se však setkáme i s případy, kdy proudění v sousedních vrstvách kapaliny se děje s různou rychlostí. Takové proudění je *vírové*. I ve vírovém proudění však lze odvozené rovnice (rovnici kontinuity a Bernoulliovu rovnici) vhodným způsobem aplikovat.

## 15.9 PROUDNICE A ROVNICE KONTINUITY

Na obr. 15.13 jsou zobrazeny proudnice vzniklé tím, že na řadě nesousedících míst je do proudící tekutiny vpraveno

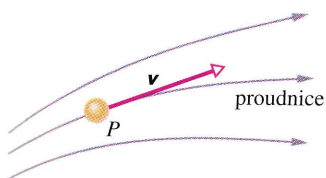


Obr. 15.13 Laminární obtékání válce. Proudnice jsou zviditelněny barevnými částicemi, které zanechávají stopu.

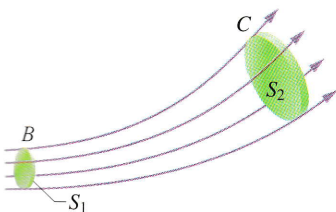
barvivo. Na obr. 15.14 jsou zachyceny proudnice podobně vytvořené kouřem. **Proudnice** je trajektorie, po níž se pohybuje drobný kousek tekutiny, který můžeme nazvat „částicí tekutiny“. Když se částice tekutiny pohybuje, může se měnit směr i velikost její rychlosti. Vektor rychlosti částice je vždy tečný k proudnici (obr. 15.15). Proudnice se nikdy nekříží, protože jinak by částice, která dospěla do bodu křížení, měla současně dvě různé rychlosti, a to je nemožné.\*



**Obr. 15.14** Kouřem zviditelněné proudnice, které obtékají automobil umístěný v aerodynamickém tunelu.



**Obr. 15.15** Stopa pohybu částice tekutiny  $P$  vytváří proudnici. Vektor rychlosti  $\mathbf{v}$  částice má v každém bodě směr tečný k proudnici.



**Obr. 15.16** Proudová trubice je vytvořena proudnicemi, které tvoří její hranici. Stejný objemový tok musí procházet všemi průřezy proudové trubice.

Při tečeních, jaká jsou znázorněna na obr. 15.13 a 15.14, můžeme vymezit **proudové trubice**, jejichž stěny jsou tvořeny proudnicemi. Proudová trubice se chová jako reálná trubice v tom smyslu, že žádná částice tekutiny, která se

\* S výjimkou míst, kde kapalina stojí. Tam je  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  a směr rychlosti není určen.

nachází v trubici, ji nemůže opustit skrz její stěny. Kdyby částice unikla, měli bychom případ křížení proudnic, který jsme již vyloučili. Na obr. 15.16 jsou znázorněny dva příčné průřezy tenké proudové trubice o obsahích  $S_1$  a  $S_2$ . Budeme sledovat tekutinu procházející průřezem u bodu  $B$ . Tekutina jím prochází rychlostí  $v_1$ , za krátký časový interval  $\Delta t$  urazí vzdálenost  $v_1 \Delta t$  a průřezem  $S_1$  projde objem tekutiny

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t.$$

Předpokládáme, že tekutina je nestlačitelná a že nemůže být ani vytvořena ani zničena. Proto za stejný časový interval musí projít stejný objem tekutiny i průřezem  $S_2$  v okolí bodu  $C$  dále po proudu. Jestliže rychlost zde má velikost  $v_2$ , musí platit

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$$

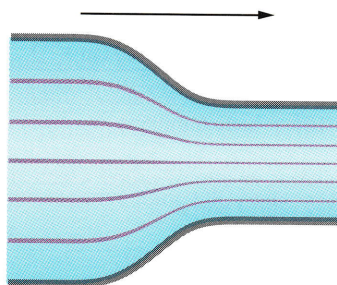
neboli

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Podél proudové trubice tedy platí rovnice

$$R = Sv = \text{konst.}, \quad (15.13)$$

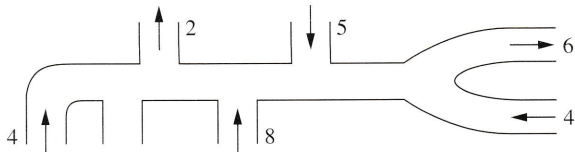
kde veličina  $R$ , jejíž jednotka v SI je  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ , se nazývá **objemový tok**. Rov. (15.13) vyjadřující stálost objemového toku tekutiny proudovou trubicí se nazývá **rovnice kontinuity** proudění. Z rovnice plyne, že tečení je rychlejší v užších částech trubice, kde proudnice jsou blíže u sebe, než v jejich širších částech (obr. 15.17).



**Obr. 15.17** V místě zúžení trubice se proudnice dostanou blíže k sobě a proud se zrychlí. Šipka nad obrázkem ukazuje směr proudění.

Rov. (15.13) vyjadřuje zachování hmotnosti ve tvaru vhodném pro mechaniku tekutin. Násobíme-li  $R$  hustotou tekutiny, o které předpokládáme, že je konstantní, dostaneme výraz  $Sv\rho$ . Ten se nazývá **hmotnostní tok** a jeho jednotkou v SI je  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vyjádříme-li rovnici kontinuity v hmotnostním a nikoliv v objemovém toku, říká nám např. pro případ znázorněný na obr. 15.16, že hmotnost, která protече každou sekundu průřezem trubice v okolí bodu  $B$ , musí být stejná jako hmotnost, která protече každou sekundu průřezem trubice v okolí bodu  $C$ .

**KONTROLA 3:** Na připojeném obrázku je znázorněno rozvětvené potrubí. Šipkami je označen směr toku v jednotlivých větvích a čísla udávají velikost objemového toku ( $v \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ) těmito větvemi. U jedné větve údaj je chybný. Jaký je směr a velikost toku touto větví?



### PŘÍKLAD 15.7

Obsah  $S_0$  průřezu aorty (hlavní cévy vycházející ze srdce) normálního odpočívajícího člověka je  $3 \text{ cm}^2$  a rychlost, jakou jí prochází krev, je  $30 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Typická vlasečnice (nejtenší céva na periferii krevního oběhu) má průměr přibližně  $6 \mu\text{m}$  a obsah průřezu je tedy asi  $S = 3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2$ ; rychlost proudění krve v ní je  $v = 0,05 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Kolik přibližně má člověk vlasečnic?

**ŘEŠENÍ:** Veškerá krev, která za určitou dobu proteče vlasečnicemi, musí za stejnou dobu proteci aortou. Tuto skutečnost vystihuje rov. (15.13), takže

$$S_0 v_0 = n S v,$$

kde  $n$  značí hledaný počet vlasečnic. Vypočteme jej z poslední rovnice:

$$\begin{aligned} n &= \frac{S_0 v_0}{S v} = \frac{(3 \text{ cm}^2)(30 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1})}{(3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2)(0,05 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1})} = \\ &= 6 \cdot 10^9; \quad \text{tedy 6 miliard.} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Můžete lehce ukázat, že úhrnný průřez všech vlasečnic je asi 600krát větší než průřez aorty.

### PŘÍKLAD 15.8

Na obr. 15.18 je zobrazeno, jak se zužuje proud vody vytékající laminárně z vodovodního kohoutku. Obsah průřezu  $S_0 = 1,2 \text{ cm}^2$  a  $S = 0,35 \text{ cm}^2$ . Průřezy jsou vodorovně vzdáleny o  $h = 45 \text{ mm}$ . Jaký je objemový tok  $R$  proudu vytékajícího z kohoutku?

**ŘEŠENÍ:** Z rovnice kontinuity (15.13) plyne

$$S_0 v_0 = S v, \quad (15.14)$$

kde  $v_0$  a  $v$  jsou rychlosti v odpovídajících průřezech. Protože voda mezi oběma průřezy se pohybuje volným pádem se zrychlením  $g$ , můžeme dle rov. (2.23) psát

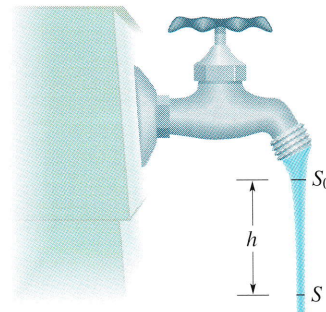
$$v^2 = v_0^2 + 2gh. \quad (15.15)$$

Řešením soustavy posledních dvou rovnic dostaneme pro  $v_0$  vyjádření

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{2ghS^2}{S_0^2 - S^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2(9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})(0,045 \text{ m})(0,35 \text{ cm}^2)^2}{(1,2 \text{ cm}^2)^2 - (0,35 \text{ cm}^2)^2}} = \\ &= 0,286 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 28,6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Hledaný objemový tok  $R$  je tedy

$$\begin{aligned} R &= S_0 v_0 = (1,2 \text{ cm}^2)(28,6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}) = \\ &= 34 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$



**Obr. 15.18** Příklad 15.8. Když proud vody opouští kohoutek, roste jeho rychlost. Protože množství vody proteklé každým průřezem musí být stejné, bude se proud po výtoku z kohoutku zužovat, „zaškrcuje se“.

## 15.10 BERNOULLIOVA ROVNICE

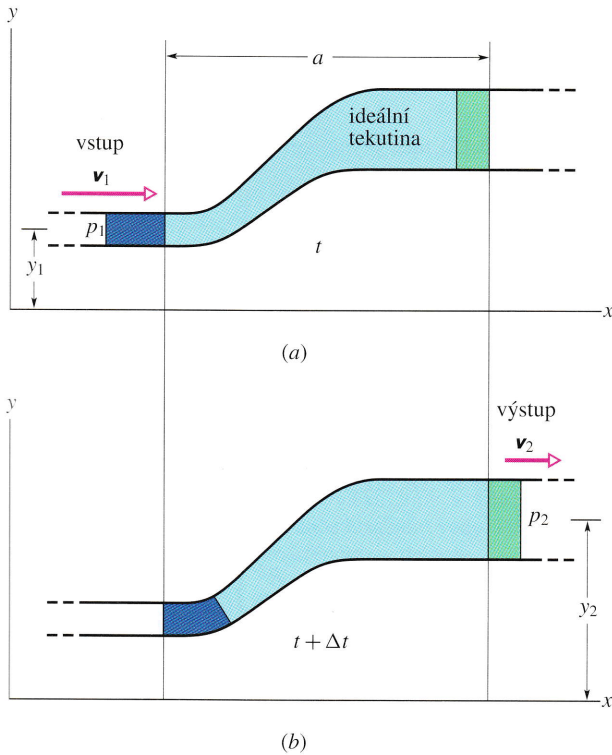
Na obr. 15.19 je znázorněna proudová trubice (může to však být i reálná trubice), kterou stacionárně proudí tekutina. Za časový interval  $\Delta t$  vstoupí do trubice na levé (vstupní) straně objem tekutiny  $\Delta V$ , který je na obr. 15.19 vybarven purpurově, a stejný objem, vybarvený zeleně na obr. 15.19, na pravé (výstupní) straně trubici opouští. Výstupní objem musí být stejný jako vstupní, protože předpokládáme, že tekutina je nestlačitelná, že tedy má konstantní hustotu  $\rho$ .

Nechť  $y_1$ ,  $v_1$  a  $p_1$  jsou výška v tíhovém poli, rychlost a tlak tekutiny v místě, kde vstupuje do trubice a  $y_2$ ,  $v_2$  a  $p_2$  tyto veličiny v místě, kde tekutina trubici opouští. Tyto hodnoty jsou vázány vztahem

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2, \quad (15.16)$$

jak dále dokážeme na základě energetických úvah. Rovnici (15.16) můžeme též zapsat jako

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{konst.}, \quad (15.17)$$



**Obr. 15.19** Tekutina teče stacionárně trubicí mezi vstupním průřezem na levé straně a výstupním průřezem na pravé straně. Průřezy jsou horizontálně vzdáleny o délku  $a$ . V době mezi okamžiky  $t$  (stav znázorněn v části (a) obrázku) a okamžikem  $t + \Delta t$  (stav znázorněn v části (b) obrázku) množství tekutiny vybarvené purpurově projde vstupním průřezem do trubice a stejné množství vybarvené zeleně projde výstupním průřezem.

čímž rozumíme, že výraz má stejnou hodnotu pro libovolný průřez trubice.

Rov. (15.16) a (15.17) jsou ekvivalentní formy **Bernoulliovy rovnice** nazvané po Danielu Bernoulliovi, který studoval proudění tekutin v 18. století.\* Podobně jako rovnice kontinuity (rov. (15.13)), ani Bernoulliova rovnice není úplně novým principem, ale je pouze přeformulováním známých rovnic do tvaru vhodného pro mechaniku tekutin. Abychom si rovnici ověřili, aplikujeme ji na tekutinu v klidu. Položíme tedy v rov. (15.16)  $v_1 = v_2 = 0$  a dostaneme

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2),$$

což je ze statiky tekutin známá rov. (15.4).

\* V nevírovém (potenciálovém) proudění má konstanta v rov. (15.17) stejnou hodnotu ve všech bodech uvažovaného proudícího systému; body 1 a 2 srovnávané při formulaci Bernoulliovy rovnice dané rov. (15.16) mohou být kdekoliv v proudícím systému. Předpoklad, že proudění je nevírové, je však velmi silný a často (např. v řadě dále řešených příkladech) nebývá splněn. I ve vírovém proudění však Bernoulliova rovnice platí, ale pouze podél proudnice.

Základní tvrzení Bernoulliovy rovnice se ukáže, když položíme  $y$  rovno konstantě (např.  $y = 0$ ), tedy když předpokládáme, že tekutina teče vodorovně. Rov. (15.16) pak přejde na tvar

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \quad (15.18)$$

který říká:

Když při proudění po vodorovné proudnici vzrůstá rychlost částic tekutiny, pak klesá tlak tekutiny, a obráceně.

Jinými slovy, když se při proudění dostanou proudnice blízko k sobě (známka toho, že rychlost proudění vzrostla), tlak poklesne, a naopak.

Vztah mezi změnou rychlosti a změnou tlaku se objasní, sledujeme-li chování částice tekutiny. Když se částice přiblíží úzkému místu trubice, zrychlí ji větší tlak za ní, takže má v úžině větší rychlost. Když se přiblíží širšímu místu trubice, zbrzdí ji vyšší tlak před ní a širším místem pak prochází menší rychlostí.

Zatím jsme se zabývali jen ideální tekutinou. Je-li tekutina viskózní, zahřívá se. S touto energetickou ztrátou při následujícím odvození rovnice nepočítáme.

### Odvození Bernoulliovy rovnice

Za systém zvolíme celý objem (ideální) tekutiny barevně vyznačený na obr. 15.19. Aplikujeme energetické úvahy na přechod tohoto systému z výchozí polohy (obr. 15.19a) do polohy koncové (obr. 15.19b). Stav tekutiny mezi dvěma svislými rovinami vzdálenými o  $a$ , znázorněnými na obr. 15.19, se v průběhu děje nemění. Proto se soustředíme pouze na průběh vstupu tekutiny do trubice a výstupu z ní.

Vlastní důkaz provedeme tak, že na systém aplikujeme obecnou větu

$$W = \Delta E_k, \quad (15.19)$$

která říká, že práce  $W$  vykonaná na systém se rovná přírůstkem kinetické energie systému  $\Delta E_k$ . Přírůstek kinetické energie našeho systému mezi dvěma stavy znázorněnými na obr. 15.19 je dán rozdílem rychlosti tekutiny mezi oběma konci uvažované trubice:

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = \\ &= \frac{1}{2}\rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2). \end{aligned} \quad (15.20)$$

V poslední rovnici  $\Delta m (= \rho \Delta V)$  je hmotnost stejných objemů  $\Delta V$  tekutiny, které za krátký časový interval  $\Delta t$  vstoupí do trubice u jejího levého konce a vystoupí z ní u pravého konce.

Práce vykonaná na systému je dvojího druhu. Jednak je to práce  $W_g$  tíhové síly  $\Delta m \mathbf{g}$ , která se musí vynaložit na přemístění hmotnosti  $\Delta m$  ze vstupní hladiny na výstupní hladinu, tedy práce

$$\begin{aligned} W_g &= -\Delta m g(y_2 - y_1) = \\ &= -\rho g \Delta V(y_2 - y_1). \end{aligned} \quad (15.21)$$

Záporné znaménko před pravou stranou rovnice plyne ze skutečnosti, že tíhové zrychlení míří na opačnou stranu než kladná orientace osy  $y$ .

Vedle práce  $W_g$  se však koná i práce  $W_p$  na to, aby se tekutina u levého konce zatlačila do trubice a u pravého konce vystoupila z trubice. Obecně je práce vykonaná silou o velikosti  $F$ , která posune tekutinu v trubici o  $\Delta x$  ve směru svého působení, dána výrazem

$$F \Delta x = (pS)(\Delta x) = p(S \Delta x) = p \Delta V.$$

U vstupu do trubice směřuje síla ve směru pohybu a příspěvek  $p_1 \Delta V$  k práci  $W_p$  je kladný. U výstupu z trubice je posunutí  $\Delta x$  orientováno proti směru působící síly, a proto příspěvek k práci  $W_p$  vykonané na systém je záporný:  $-p_2 \Delta V$ . Sečtením obou příspěvků dostaneme pro práci, vykonanou na našem systému okolním tlakem, vyjádření

$$\begin{aligned} W_p &= -p_2 \Delta V + p_1 \Delta V = \\ &= -(p_2 - p_1) \Delta V. \end{aligned} \quad (15.22)$$

Větu o rovnosti práce vykonané na systém a přírůstku kinetické energie systému (rov. (15.19)) nyní zapíšeme již s našim vyjádřením této práce

$$W = W_g + W_p = \Delta E_k.$$

Když nyní do této rovnice dosadíme z rov. (15.20), (15.21) a (15.22), dostaneme

$$-\rho g \Delta V(y_2 - y_1) - \Delta V(p_2 - p_1) = \frac{1}{2} \rho \Delta V(v_2^2 - v_1^2).$$

Tato rovnice po vykrácení výrazem  $\Delta V$  a jednoduchém přeskupení členů dá již rov. (15.16).

### PŘÍKLAD 15.9

Líh hustoty  $\rho = 791 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  teče laminárně vodorovnou trubicí, která se zužuje (podobně jako na obr. 15.17) z průřezu obsahu  $S_1 = 1,20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  na průřez o obsahu  $S_2 = S_1/2$ . Rozdíl  $\Delta p$  tlaku líhu mezi širokou a úzkou částí trubice je  $4\,120 \text{ Pa}$ . Jaký je objemový tok líhu trubicí?

**ŘEŠENÍ:** Když přeskupíme Bernoulliovu rovnici pro tok vodorovnou trubicí (rov. (15.18)), dostaneme

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2). \quad (15.23)$$

Index 1 se vztahuje k široké a index 2 k úzké části trubice. Podle rovnice kontinuity (rov. (15.13)) tok v úzké části trubice je rychlejší, tedy  $v_2 > v_1$ . Z rov. (15.23) potom plyne, že  $p_1 > p_2$ .

Z rov. (15.13) také plyne, že objemový tok  $R$  trubicí je stejný v široké i úzké části;

$$R = v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Tyto rovnice spolu s rovnicí  $S_2 = S_1/2$  dávají

$$v_1 = \frac{R}{S_1} \quad \text{a} \quad v_2 = \frac{R}{S_2} = \frac{2R}{S_1}.$$

Když tyto poslední výrazy dosadíme do rov. (15.23) a položíme  $p_1 - p_2 = \Delta p$ , dostaneme po drobných algebraických úpravách

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{4R^2}{S_1^2} - \frac{R^2}{S_1^2} \right) = \frac{3\rho R^2}{2S_1^2}.$$

Z poslední rovnice pak vypočteme  $R$ ,

$$\begin{aligned} R &= S_1 \sqrt{\frac{2\Delta p}{3\rho}} = \\ &= (1,20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2) \sqrt{\frac{2(4\,120 \text{ Pa})}{3(791 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3})}} = \\ &= 2,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

### PŘÍKLAD 15.10

Desperát z Divokého západu vpálil kulku do otevřené nádrže s vodou a provrtal v ní otvor v hloubce  $h$  pod volnou hladinou vody (obr. 15.20). Jakou rychlostí  $v$  začne voda vytékat z prostřelené nádrže?

**ŘEŠENÍ:** Případ je v podstatě stejný, jako když voda nejprve teče (dolů) rychlostí  $V$  širokou trubicí (celou nádrží) o obsahu průřezu  $S$  a potom teče (vodorovně) rychlostí  $v$  úzkou trubicí (vystřeleným otvorem) o obsahu průřezu  $s$ . Z rovnice kontinuity (15.13) víme, že

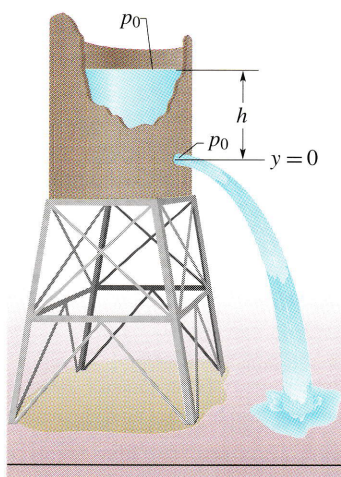
$$R = sv = SV,$$

a tedy

$$V = \frac{s}{S} v.$$

Protože  $s \ll S$ , vidíme, že  $V \ll v$ .

Vztah mezi  $v$  a  $V$  (a tedy i  $h$ ) můžeme nalézt i použitím Bernoulliovu rovnice (15.16). Za nulovou hladinu pro počítání výšky (a tím i potenciální energie v tíhovém poli) zvolíme hladinu procházející prostřeleným otvorem. Když uvážíme,



**Obr. 15.20** Příklad 15.10. Voda vytéká dírou v nádrži, která je v hloubce  $h$  pod povrchem (volnou hladinou) vody. Tlak vody na povrchu a v díře je roven atmosférickému tlaku  $p_0$ .

Že jak tlak na volné hladině nádrže, tak i tlak v místě prostřeleného otvoru jsou rovny atmosférickému tlaku  $p_0$  (obě místa jsou tomuto tlaku volně vystavena), dostaneme z rov. (15.16)

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g \cdot 0. \quad (15.24)$$

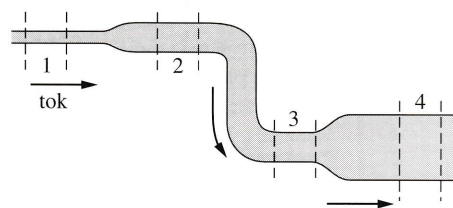
(Podmínkám na volné hladině nádrže je věnována levá strana rovnice, podmínkám v otvoru pravá strana. Nula na konci pravé strany odpovídá tomu, že otvor leží na naší zvolené nulové hladině.) Než budeme řešit rov. (15.24) pro neznámou  $v$ ,

použijeme pro její zjednodušení skutečnost, že  $V \ll v$ . Budeme předpokládat, že  $V^2$  a tedy i člen  $\frac{1}{2}\rho V^2$  z rov. (15.24) je zanedbatelný proti ostatním členům rovnice a vypustíme jej. Řešením zbývající části rovnice pak pro hledanou rychlost dostaneme výraz

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (\text{Odpověď})$$

Je to stejná rychlost, jakou by získalo těleso padající z výšky  $h$ , kdyby bylo vypuštěno nulovou počáteční rychlostí.

**KONTROLA 4:** Voda teče laminárně trubicí znázorněnou na připojeném obrázku. V průběhu tečení klesá. Seřadte sestupně čtyři očíslované úseky trubice: (a) podle objemového toku  $R$ , který jimi prochází, (b) podle rychlosti  $v$ , jakou jimi voda teče, (c) podle tlaku  $p$ , jaký v nich je.



## PŘEHLED & SHRUTÍ

### Hustota

Hustota  $\rho$  látky je definována jako její hmotnost v jednotce objemu:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (15.1)$$

Je-li těleso tvořeno látkou homogenní, můžeme rov. (15.1) přepsat na tvar  $\rho = m/V$ , kde  $m$  je hmotnost tělesa a  $V$  jeho objem.

### Tlak tekutiny

Tekutina je látka, která může téci: kapalina, plyn, event. i plazma. Její tvar je dán tvarem nádoby, ve které se nachází, protože nepřenáší smykové napětí (přesně to platí jen pro ideální tekutinu). Napětí tedy může působit jen silou kolmou k povrchu kapaliny. Tlak  $p$  v tekutině zavádíme takto:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}, \quad (15.2)$$

kde  $\Delta F$  je element síly, který působí na element plochy o obsahu  $\Delta S$ . Když velikost síly působící na rovinnou plochu roste úměrně s velikostí plochy, můžeme rov. (15.2) upravit na tvar  $p = F/S$ , kde  $F$  je síla působící na celou plochu, jejíž obsah

je  $S$ . Tlak tekutiny v daném bodě vytváří stejné silové působení na všechny roviny procházející tímto bodem bez ohledu na jejich orientaci. *Přetlak* (resp. *podtlak*) je rozdíl skutečného tlaku (*absolutního tlaku*) v daném bodě a tlaku v okolí, nejčastěji atmosférického tlaku.

### Změny tlaku s výškou a hloubkou

Tlak tekutiny, která je v klidu, se mění podél svislé souřadnice  $y$ . Když je souřadnice orientována směrem vzhůru, platí pro nestlačitelné tekutiny ( $\rho = \text{konst.}$ )

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2). \quad (15.4)$$

Tlak je stejný pro všechny body ve stejné hloubce. Rov. (15.4) přejde na tvar

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (15.5)$$

když  $h$  označíme *hloubku* v tekutině měřenou od jisté referenční hladiny, v níž má tlak hodnotu  $p_0$ .

### Pascalův zákon

*Pascalův zákon* stanoví, že změna tlaku působící v jedné části tekutiny se přenesou do všech míst vyplněných touto tekutinou a to i na stěny nádoby, která tekutinu vymezuje.

**Archimedův zákon**

Na těleso ponořené do tekutiny působí síly vyvolané tlakem tekutiny. Vektorový součet těchto sil — říká se mu *vztlaková síla* nebo stručně *vztlak* — působí svisle vzhůru. Působíštěm vztlakové síly je těžiště vytlačené tekutiny, které se nazývá *vztlakový střed*. Archimedův zákon stanoví, že vztlaková síla působící na těleso je stejně velká jako tíhová síla tekutiny tělesem vytlačené. Když těleso plove na volné hladině, je jeho tíhová síla co do velikosti rovna vztlakové síle, která na něj působí.

**Proudění ideální tekutiny**

*Ideální kapalina* je nestlačitelná a není viskózní. Předpokládáme navíc, že její proudění je stacionární a nevírové. *Proudnice* je dráha částice tekutiny. Proudová trubice obaluje svazek proudnic. Z principu zachování hmotnosti plyne, že pro proudění v proudové trubici je *hmotnostní tok*  $Sv\rho$  konstantní. Je-li na-

víc kapalina nestlačitelná, tedy je-li hustota  $\rho$  konstantní, platí *rovnice kontinuity*:

$$R = Sv = \text{konst.}, \quad (15.13)$$

kde  $R$  je *objemový tok*,  $S$  obsah příčného průřezu trubice v libovolném bodě a  $v$  rychlost tekutiny v tomto bodě. Předpokládáme, že tato rychlost má stejnou hodnotu v každém bodě plochy  $S$ .

**Bernoulliova rovnice**

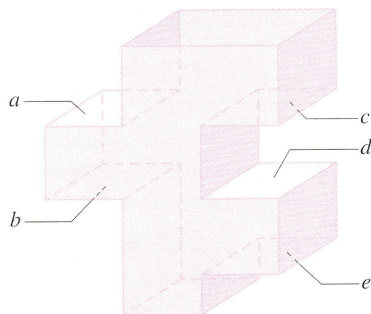
Použijeme-li zákon zachování mechanické energie na proudění ideální kapaliny, získáme *Bernoulliovu rovnici*:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{konst.}, \quad (15.17)$$

kteřá platí podél každé proudnice.

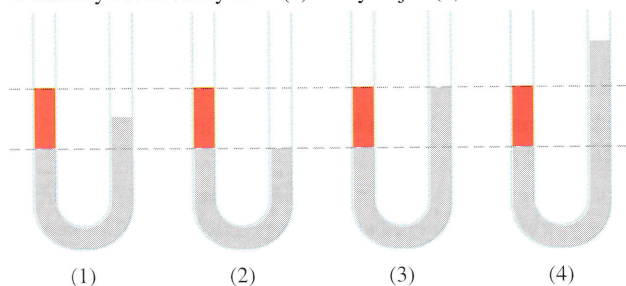
**OTÁZKY**

1. Na obr. 15.21 je zobrazena nádrž zvláštního tvaru zcela zaplněná vodou. Je označeno pět vodorovných spodních nebo vrchních ploch. Obsah všech je stejný a jsou umístěny v hloubkách  $h$ ,  $2h$  a  $3h$  pod hladinou. Seřadte plochy podle velikosti síly, která na ně působí.



Obr. 15.21 Otázka 1

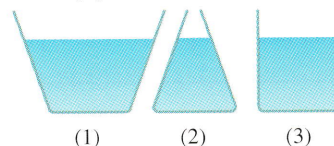
2. Na obr. 15.22 jsou znázorněny čtyři případy, jak červená a šedivá kapalina vyplňují U-trubici. V jednom případě nemůže jít o staticky rovnovážný stav. (a) Který to je? (b) O třech ostatních



Obr. 15.22 Otázka 2

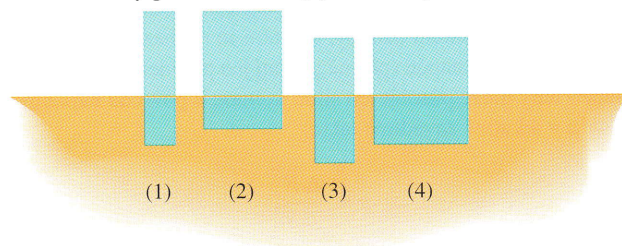
případech předpokládejte, že kapaliny jsou ve statické rovnováze. Je v nich vždy hustota některé z kapalin větší než té druhé?

3. Nádoby z obr. 15.23 mají stejný obsah základny, jsou vyrobeny ze stejného materiálu a výška vody v nich je stejná. (a) Seřadte nádoby s vodou podle jejich vah, nádobu s největší vahou zařadte jako první. (b) Seřadte nádoby podle tlaku, jakým voda působí na jejich dna. (c) Plyne z rov. (15.2), že odpovědi na otázky (a) a (b) jsou v rozporu? Tento zdánlivý rozpor se často nazývá **hydrostatický paradox**.



Obr. 15.23 Otázka 3

4. Kus materiálu o hmotnosti 3 kg zcela ponoříme do kapaliny. Kapalina stejného objemu, jako má vnořený kus, má hmotnost 2 kg. (a) Co udělá uvažovaný kus materiálu, když ho v kapalině volně vypustíme: bude klesat, stoupat, nebo zůstane v klidu? (b) Co udělá stejný kus materiálu, když jej ponoříme do kapaliny o menší hustotě?
5. Obr. 15.24 zobrazuje čtyři pevné bloky plovoucí na melase. Seřadte bloky podle velikosti jejich hustoty.

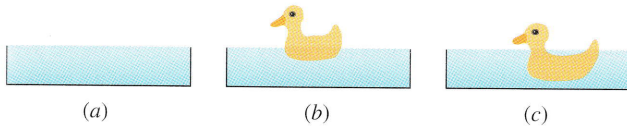


Obr. 15.24 Otázka 5

6. Na obr. 15.25 jsou znázorněny tři stejné otevřené nádoby po



okraj naplněné vodou. Ve dvou z nich plovou kačenky. Nádoby i s kačenkami zvážíme. Seřaďte je podle váhy.

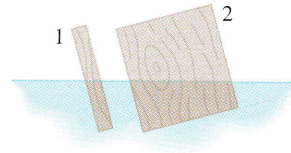


Obr. 15.25 Otázka 6

7. Člun s kotvou na palubě pluje v bazénu, který je jen trochu širší než člun. Zvedne se hladina vody v bazénu, když je kotva (a) vhozena do vody, (b) hozena ven z bazénu? (c) Hladina vody v bazénu se zvedne, klesne, nebo zůstane stejná, když místo kotvy vhodíme do vody kus korku, který jsme měli ve člunu?
8. Tři balonky stejné velikosti jsou zcela ponořeny do vody. Balonek 1 je naplněn vodíkem, balonek 2 heliem a balonek 3 oxidem uhličitým. Seřaďte balonky podle velikosti vztlaku, který na ně působí.
9. Kus dřeva pluje ve vědru vody umístěném ve výtahu. Bude plout více, méně, nebo stejně ponořen, když se výtah pohybuje (a) rovnoměrně vzhůru, (b) rovnoměrně dolů; (c) zrychleně vzhůru, (d) zrychleně dolů, se zrychlením menším, než je tíhové zrychlení  $9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

10. Nádoba s vodou je umístěna na péroových vahách. Bude údaj vah větší, menší, nebo stejný, když do vody (a) ponoříme zavěšený kovový předmět, (b) vložíme korkový předmět, který na ní bude plovat? (Z nádoby nepřeteče žádná voda ven.)

11. Na obr. 15.26 jsou dva pravoúhlé bloky, které jsme rukou vychýlili z rovnovážné polohy a potom pustili. Pro každý blok stanovte, zda (a) vztlaková síla vyvolá jeho otáčení z naznačené polohy ve směru, či proti směru hodinových ručiček, (b) blok se působením této síly ještě více vychýlí, nebo se narovná.



Obr. 15.26 Otázka 11

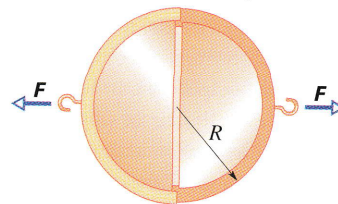
## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 15.3 Hustota a tlak

- 1C. Kolik činí hustota  $1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , vyjádříme-li ji v jednotkách  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ?
- 2C. Tři kapaliny, které se nemísí, byly nality do válcové nádoby. Objemy a hustoty těchto kapalin jsou:  $0,50 \text{ l}$ ,  $2,6 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ;  $0,25 \text{ l}$ ,  $1,0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  a  $0,40 \text{ l}$ ,  $0,80 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . Jakou silou kapaliny působí na dno nádoby? (Jeden litr =  $11 = 1000 \text{ cm}^3$ .)
- 3C. Určete tlak v injekční stříkačce, když sestra zatlačí na kruhový píst o poloměru  $1,1 \text{ cm}$  silou  $42 \text{ N}$ .
- 4C. Angličan řekne, že nafoukl přední pneumatiky svého auta na tlak  $28 \text{ psi}$ . Lékař řekne, že váš krevní tlak je  $120/80$  milimetrů rtuťového sloupce. Udejte v kilopascálech (kPa): (a) tlak, na který byly nafouknuty pneumatiky, (b) svůj systolický a diastolický tlak.
- 5C. Okno má rozměry  $3,4 \text{ m}$  na  $2,1 \text{ m}$ . Při závanu větru poklesl vnější tlak na  $0,96 \text{ atm}$ , zatímco tlak uvnitř místnosti zůstal na hodnotě  $1 \text{ atm}$ . Jaká byla síla, která způsobila, že okno se rozletělo směrem ven?
- 6C. Ryba reguluje hloubku plavání nastavením své průměrné hustoty na hodnotu stejnou, jakou má voda. Provádí to změnou objemu vzduchu v porézních kostech nebo ve vzduchovém měchýři. Předpokládejte, že s vyfouknutým měchýřem má ryba hustotu  $1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . O jakou část svého koncového (nafouknutého) objemu musí ryba zvětšit objem vzduchového měchýře, aby vyrovnala svou hustotu na hustotu vody?

7Ú. Vzduchotěsná nádoba má uzávěr o obsahu  $100 \text{ cm}^2$ . Nádoba je částečně vyčerpána. Jaký je v ní tlak, je-li na její otevření potřeba síla nejméně  $500 \text{ N}$ ? Okolní atmosféra má tlak  $1\cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

8Ú. Magdeburské polokoule. Vynálezce vývěvy Otto von Guericke provedl v roce 1654 před císařem pokus, při kterém se dvě koňská osmispřeží marně snažila od sebe oddělit dvě mosazné polokoule, z jejichž vnitřního prostoru byl vyčerpán vzduch. (a) Ukažte, že síla  $F$  potřebná k odtržení polokoulí je rovna  $F = \pi R^2 \Delta p$ , kde  $\Delta p$  je rozdíl mezi vnějším tlakem a tlakem uvnitř polokoulí. Předpokládejte, že tloušťka mosazi je tak malá, že za poloměr  $R$  můžeme pokládat poloměr vyznačený na obr. 15.27. (b) Vypočítejte sílu, jakou by koně museli táhnout, aby polokoule odtrhli, \*kdyby  $R$  bylo  $30 \text{ cm}$  a vnitřní tlak by byl  $0,1 \text{ atm}$ . (c) Proč byly užity dvě skupiny koní? Stačilo by použít jen jednu skupinu a druhou polokouli přivázat k pevné stěně?



Obr. 15.27 Úloha 8

\* To se také stalo, ale až tehdy, když zapřáhli dvě koňská dvanáctispřeží.

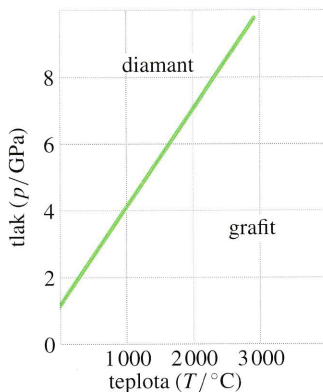
## ODST. 15.4 Tekutiny v klidu — statika

**9C.** Vypočítejte rozdíl hydrostatického tlaku mezi mozkem a chodidlem osoby vysoké 1,83 m. Hustota krve je  $1,06 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**10C.** Najděte absolutní tlak v pascálech v hloubce 150 m pod mořskou hladinou. Hustota mořské vody je  $1,03 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  a atmosférický tlak na hladině  $1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

**11C.** Výpusť splašků domu stojícího na svahu je 8,2 m pod úrovní ulice. Stoka je 2,1 m pod úrovní ulice. Vypočítejte minimální tlakový rozdíl, který musí vyvinout kalové čerpadlo, aby odpad o průměrné hustotě  $900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  přečerpalo do stoky.

**12C.** Obr. 15.28 představuje část **fázového diagramu** uhlíku s křivkou fázové rovnováhy mezi diamantem a grafitem. V jaké minimální hloubce pod povrchem Země se mohou tvořit diamanty, je-li teplota v této hloubce  $1000^\circ\text{C}$  a hustota skalního nadloží je  $3,1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ? Předpokládejte, že i v tomto případě je tlak dán tíhou hornin, které leží nad daným místem, podobně jako v tekutině.



Obr. 15.28 Cvičení 12

**13C.** Lidské plíce vyvinou přetlak nanejvýš dvacetinu atmosféry. Když potápěč užívá sací trubky, jak nejhluběji pod hladinou může plavat?

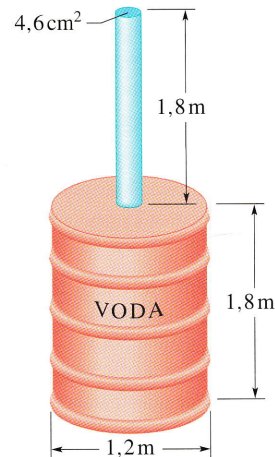
**14C.** Bazén má rozměry  $40 \text{ m} \times 15 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ . (a) Jakou silou působí voda vyplňující bazén na jeho dno, na kratší boční stěny a na delší boční stěny? (b) Musí se uvažovat také atmosférický tlak působící na hladinu, když posuzujeme vliv tlaku na soudržnost betonu tvořícího dno a stěny bazénu? Proč?

**15C.** (a) Najděte celkovou sílu, kterou voda působí na vrchní část atomové ponorky v hloubce 200 m, když předpokládáme, že celková plocha vrchní části trupu ponorky je  $3000 \text{ m}^2$ . (b) Jaký tlak vody by působil na potápěče v této hloubce? Výsledek vyjádřete v atmosférách. Myslíte si, že posádka havarované ponorky z ní může v této hloubce uniknout bez speciálního vybavení? Hustotu mořské vody pokládejte za rovnu  $1,03 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

**16C.** Členové posádky ponorky, která havarovala 100 m pod vodní hladinou, se z ní pokoušejí uniknout. Jakou silou musí tlačit na výstupní poklop, aby ho otevřeli, když jeho rozměry jsou  $1,2 \text{ m} \times 0,60 \text{ m}$ ? Hustotu mořské vody pokládejte nyní za rovnu  $1025 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**17C.** V otevřeném kapalinovém manometru (v U-trubicí) je rtuť. Jak vysoko vystoupí rtuť v levé trubici, když do pravé trubice je nalito 11,2 cm vody?

**18C.** Válcový kovový sud zobrazený na obr. 15.29 má ke své vrchní základně přitavenou tenkou trubku. Rozměry sudu a trubky jsou uvedeny na obrázku. Vzniklá nádoba je až po vršek trubky naplněna vodou. Vypočítejte poměr síly, kterou voda působí na dno sudu, k tíze vody obsažené v sudu. Proč vypočtený poměr není roven jedné?



Obr. 15.29 Cvičení 18

**19Ú.** Dvě stejné válcové nádoby jsou vedle sebe postaveny tak, že jejich dna jsou ve stejné výši. Obě obsahují stejnou kapalinu, jejíž hustota je  $\rho$ . Obě dna mají obsah  $S$ , výšky kapalin jsou však různé: v jedné nádobě  $h_1$ , v druhé  $h_2$ . Jakou práci vykoná tíhová síla, když po propojení obou nádob se v nich výšky kapalin vyrovnají?

**20Ú.** (a) Kapalina v nádobě se pohybuje se zrychlením  $a$  mířícím *svisle vzhůru*. Ukažte, že v tomto případě tlak s hloubkou  $h$  v nádobě stoupá dle zákona

$$p = \rho h(g + a),$$

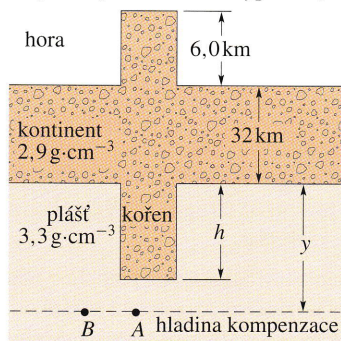
kde  $\rho$  je hustota kapaliny. (b) Ukažte též, že když se nádoba pohybuje se zrychlením  $a$  mířícím *svisle dolů*, je závislost tlaku na hloubce dána výrazem

$$p = \rho h(g - a).$$

(c) Jaký je tlak, když voda s nádobou padají volným pádem?

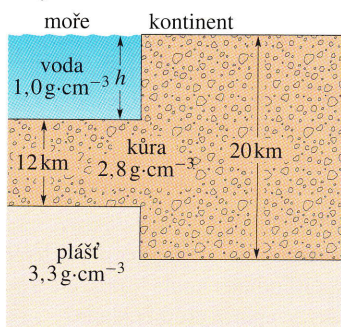
**21Ú.** Při geologickém rozboru Země je často účelné předpokládat, že tlak v určité vodorovné **hladině kompenzace**, která se nachází hluboko pod zemským povrchem, je ve velké oblasti stálý a rovná se tlaku vyvolanému tíhou nadložních vrstev. To znamená, že tlak v této hladině se vypočítá podle hydrostatické rovnice platné pro tekutiny. Pro splnění takového modelu musíme např. předpokládat, že hory mají své *kořeny* (obr. 15.30). Uvažujme horu vysokou 6 km. Kontinentální horniny mají hustotu  $2,9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  a pod nimi je zemský plášť s hustotou  $3,3 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

Vypočítejte hloubku  $h$  kořene hory. (Tip: Požadujte, aby tlak v bodech A a B vyznačených na obrázku byl stejný; neznámá hloubka  $y$  hladiny kompenzace vám vypadne.)



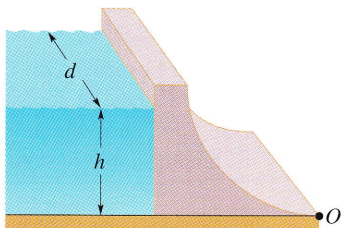
Obr. 15.30 Úloha 21

**22Ú.** Na obr. 15.31 je naznačeno, jak se oceán nasouvá na kontinent. Užití metody hladiny kompenzace vysvětlenou v úloze 21 k výpočtu hloubky  $h$  oceánu.



Obr. 15.31 Úloha 22

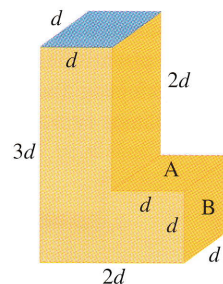
**23Ú.** Přehradou je zadržena masa vody, která v místě přehradní hráze má hloubku  $h$  a šířku  $d$ , jak je znázorněno na obr. 15.32. (a) Vypočítejte výslednou sílu, kterou voda působí na hráz přehrady. (b) Vypočítejte výsledný moment sil vůči ose proložené rovnoběžně se šířkou  $d$  bodem  $O$ , který leží v patě přehrady. (c) Najděte působíště výsledné síly působící na přehradní hráz, a tím i rameno této síly vůči ose procházející bodem  $O$ .



Obr. 15.32 Úloha 23

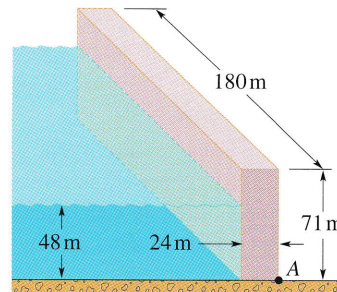
**24Ú.** Nahoře otevřená nádrž tvaru písmene L je naplněna vodou (obr. 15.33). Jaká je (a) síla na stěnu A a (b) síla na stěnu B, když  $d = 5$  m?

**25Ú.** Na obr. 15.34 je znázorněna přehradní hráz a část zachycené vody, která na ni tlačí. Přehradní hráz je z betonu hustoty



Obr. 15.33 Úloha 24

$3,2 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  a má rozměry ukázané na obrázku. (a) Síla, kterou voda tlačí na přehradní hráz, se snaží hráz posunout vodorovným směrem. Proti posunutí působí síla statického smykového tření mezi hrází a podložím. Statický činitel tření je 0,47. Vypočítejte bezpečnostní činitel, jaký má přehrada proti posunutí. Bezpečnostní činitel je poměr uvažovaného havarijního zatížení k nejvyššímu reálně odhadnutému zatížení; v našem případě je to poměr maximální statické třecí síly (tíhy hráze  $\times$  statický činitel tření) k velikosti síly, kterou na hráz působí voda. (b) Voda se též snaží otočit přehradní hráz okolo osy, která prochází bodem A a postupuje podél základny hráze (srovnej s úlohou 23). Proti tomu působí moment tíhy přehrady okolo uvažované osy. Vypočítejte bezpečnostní činitel proti otočení přehrady, tedy poměr velikosti momentu tíhy přehrady k velikosti momentu síly, kterým vůči uvažované ose působí celková síla na přehradní hráz vyvolaná vodou, umístěná ve svém působíšti.



Obr. 15.34 Úloha 25

### ODST. 15.5 Měření tlaku

**26C.** Vypočítejte výšku sloupce vody, na jehož základně bude tlak 1 atm. Tíhové zrychlení  $g = 9,80 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

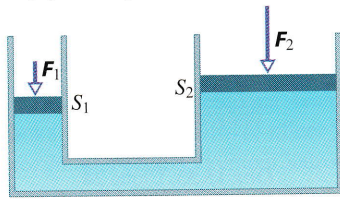
**27C.** Jaký minimální podtlak musíte vytvořit v plicích, abyste brčkem nasáli limonádu o hustotě  $1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  do výšky 4 cm?

**28Ú.** Jaká by byla výška atmosféry, kdybychom předpokládali: (a) že hustota atmosféry se s výškou nemění, (b) že hustota klesá s výškou lineárně, dokud nedosáhne nulové hodnoty. Hustota atmosféry u hladiny moře  $\rho = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

### ODST. 15.6 Pascalův zákon

**29C.** V hydraulickém lisu (obr. 15.35) se pístem o malé ploše s obsahem  $S_1$  působí na kapalinu silou  $F_1$ . Spojovací trubka

vede kapalinu k pístu o podstatně větším obsahu  $S_2$ . (a) Jak velká síla  $F_2$  působí na větší píst? (b) Jak velká síla  $F_1$  působící na malý píst vyváží na velkém pístu tíhu předmětu o hmotnosti 2 tuny, když malý píst má průměr 4 cm a velký 56 cm?



Obr. 15.35 Cvičení 29 a 30

**30C.** Jak velkou dráhu musí urazit velký píst hydraulického lisu ze cvič. 29, aby se jeho malý píst posunul o 1 m?

#### ODST. 15.7 Archimédův zákon

**31C.** Plechovka má celkový objem  $1\,200\text{ cm}^3$  a hmotnost 130 g. Kolik gramů olovených broků může plechovka nést, aniž se ve vodě potopí? Hustota olova je  $11,4\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ .

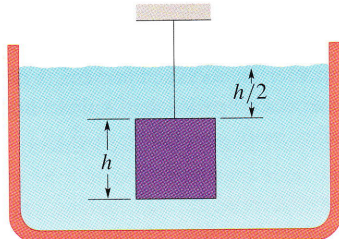
**32C.** Člun plující ve sladké vodě vytlačí 4 000 kg vody. (a) Jaká bude hmotnost vytlačené vody, když člun popluje ve slané vodě hustoty  $1,03\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ? (b) Změní se objem vytlačené vody? Jestliže ano, tak o kolik?

**33C.** Přibližně jedna třetina těla fyzika, který plave v Mrtvém moři, je nad hladinou. Fyzik z tohoto údaje vypočte hustotu vody v Mrtvém moři, když předpokládá, že průměrná hustota lidského těla je  $0,98\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . K jakému výsledku došel? (Proč je hustota o tolik větší než  $1,0\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ?)

**34C.** Železná kotva se jeví ve vodě lehčí o 200 N než ve vzduchu. (a) Jaký je její objem? (b) Kolik kotva váží na vzduchu? Hustota železa je  $7,870\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ .

**35C.** Předmět visí na péroových vahách. Na vzduchu ukazují váhy 30 N. Když předmět plně ponoříme do vody, údaj klesne na 20 N. Když jej plně ponoříme do kapaliny neznámé hustoty, váhy ukazují 24 N. Jaká je hustota této kapaliny?

**36C.** Předmět tvaru krychle o hraně 60 cm působí ve vakuu na závěs silou  $G = 5\,000\text{ N}$  (tíha tělesa). Předmět zavěsíme do otevřené nádrže s kapalinou hustoty  $0,8\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  způsobem naznačeným na obr. 15.36. (a) Vypočítejte celkovou sílu, kterou kapalina a atmosféra působí na vrchní stěnu krychle. (b) Najděte celkovou sílu působící směrem vzhůru na spodní stěnu krychle. (c) Najděte sílu přenášenou závěsem. (d) Vypočítejte z Archimédova zákona vztakovou sílu působící na předmět. Jaké vztahy platí mezi vypočtenými hodnotami?



Obr. 15.36 Cvičení 36

**37C.** Dřevěný předmět plove na vodě, přičemž dvě třetiny jeho objemu jsou ponořeny. V oleji plove předmět tak, že 90 % jeho objemu je ponořeno. Stanovte: (a) hustotu dřeva, (b) hustotu oleje.

**38C.** Bylo navrženo, aby byl zemní plyn ze Severního moře přepravován ve velkých vzducholodích, přičemž plyn sám by sloužil jako nosné medium. Vypočítejte sílu nutnou na stažení takové vzducholodi k zemi, aby ji bylo možno vyložit — získat převážený zemní plyn. Plně naložená vzducholod obsahuje  $1,0\cdot 10^6\text{ m}^3$  zemního plynu hustoty  $0,80\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Váhu konstrukčních částí vzducholodi lze zanedbat.

**39C.** Helium naplněný balon pluje pomalu v nízké výšce. Jeho maximální užitečné zatížení, tj. zatížení posádkou a nákladem, je 1 280 kg. O kolik by se mohlo zvýšit toto užitečné zatížení, kdyby se místo helia pro plnění balonu užil vodík? Objem helia v balonu je  $5\,000\text{ m}^3$ . Hustota helia je  $0,16\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , hustota vodíku  $0,081\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . (Proč se přesto užívá mnohem dražší helium?)

**40C.** Heliový balon se užívá k vyzdvižení užitečného zatížení o hmotnosti 40 kg do výšky 27 km, kde hustota vzduchu je  $0,035\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Konstrukce balonu má hmotnost 15 kg a helium v něm hustotu  $0,005\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Jaký je objem balonu? Objem nákladu zanedbejte.

**41Ú.** Dutá koule o vnitřním poloměru 8,0 cm a vnějším poloměru 9,0 cm plove napůl ponořena v kapalině hustoty  $800\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . (a) Jaká je hmotnost koule? (b) Vypočítejte hustotu materiálu, z kterého je koule zhotovena.

**42Ú.** Dutá kulová železná skořepina plove téměř úplně ponořena ve vodě. Vnější průměr koule je 60,0 cm a hustota železa je  $7,87\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . Jaký je vnitřní průměr koule?

**43Ú.** Železný odlitek, který obsahuje mnoho dutinek, váží 6 000 N na vzduchu a 4 000 N ve vodě. Jaký je celkový objem dutinek v odlitku? Hustota homogenního železa je  $7,87\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ .

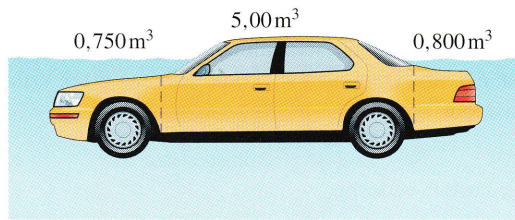
**44Ú.** (a) Jaká je nejmenší plocha ledové desky tlusté 30 cm plující na sladké vodě, která na sobě udrží automobil hmotnosti 1 100 kg? (b) Záleží na tom, kde na desce automobil stojí?

**45Ú.** Tři děti — každé o hmotnosti 40 kg — si udělaly vor svázaný z klád. Každá kláda měla průměr 30 cm a délku 6 m. Kolik klád musely děti použít, aby se s nimi vor nepotopil? Hustotu dřeva pokládejte za rovnu  $940\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

**46Ú.** Předpokládejte, že hustota mosazných závaží je  $8,0\text{ g/cm}^3$  a hustota vzduchu  $0,0012\text{ g/cm}^3$ . Jaké se dopustíme chyby zanedbáním vztaku vzduchu, když na rovnoramenných vahách vážíme předmět, který má hmotnost  $m$  a hustotu  $\rho$ ? Chybu vyjádřete v procentech.

**47Ú.** Automobil má celkovou hmotnost 1 800 kg. Objem vzduchu v prostoru pro cestující je  $5,00\text{ m}^3$ . Objem motoru a předních kol je  $0,750\text{ m}^3$  a objem zadních kol, palivové nádrže a kufru je  $0,800\text{ m}^3$ ; předpokládejme, že do těchto prostorů voda nepronikne. Automobil parkoval na svahu, lanko ruční brzdy se přetrhlo a vůz sjel ze svahu do rybníka (obr. 15.37). (a) Nejprve žádná voda nevnikla do prostoru pro cestující. Jaký je objem potopené části vozu v této fázi děje, která je zachycena na obrázku? (b) Jak

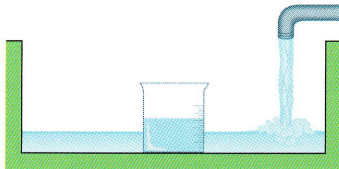
se voda postupně dostává do prostoru pro cestující, automobil klesá. Kolik do něho vnikne vody do okamžiku, kdy automobil zmizí pod hladinou? (Automobil plove vodorovně, protože v kufru má těžký náklad.)



Obr. 15.37 Úloha 47

**48Ú.** Kus dřeva má hmotnost 3,67 kg a hustotu  $600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Přidáme k němu tolik olova, aby 90 % objemu dřeva bylo potopeno. Jaké množství olova je zapotřebí: (a) když olovo je přidáno na vrchní část dřeva (není potopeno), (b) když olovo je přidáno na spodní část dřeva (je potopeno)? Hustota olova je  $1,13 \cdot 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

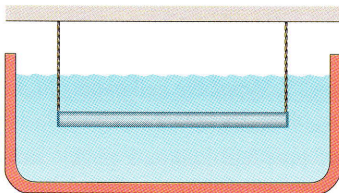
**49Ú.** Kádinku částečně naplněnou vodou postavíme na dno dřezu (obr. 15.38). Vlastní hmotnost kádinky je 390 g a její vnitřní objem  $500 \text{ cm}^3$ . Když plníme dřez vodou a kádinka je naplněna méně než z poloviny, začne plovat. Když je kádinka naplněna více, zůstane stát na dně dřezu, a když připouštěná voda dosáhne jejího okraje, nateče do ní. Jaká je hustota materiálu, z kterého je kádinka vyrobena?



Obr. 15.38 Úloha 49

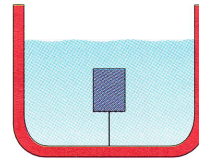
**50Ú.** Jaké je zrychlení stoupajícího balonu na horký vzduch, když poměr hustoty vzduchu vně balonu k hustotě vzduchu uvnitř balonu je 1,39? Hmotnosti konstrukce balonu a obsazeného koše zanedbejte.

**51Ú.** Válcová kovová tyč délky 80 cm a hmotnosti 1,6 kg má průřez o obsahu  $6,0 \text{ cm}^2$ . Těžiště tyče leží 20 cm od jednoho jejího konce, protože hustota tyče není konstantní. Tyč je zavěšena vodorovně na dvou vláknech a ponořena do vody, jak je ukázáno na obr. 15.39. (a) Jaká napěťová síla je přenášena vláknem, které je blíže k těžišti? (b) Jaká napěťová síla je přenášena vzdálenějším vláknem?



Obr. 15.39 Úloha 51

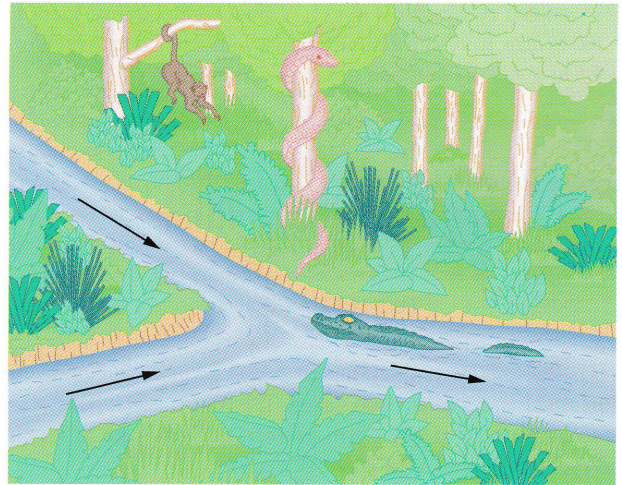
**52Ú\*.** Napětí ve vlákně, které drží pevný předmět pod povrchem kapaliny (kapalina má větší hustotu než předmět) je  $T_0$ , když je nádoba s kapalinou v klidu (obr. 15.40). Ukažte, že když se nádoba začne pohybovat se zrychlením o velikosti  $a$  mířícím svisle vzhůru, napětí  $T$  ve vlákně stoupne na hodnotu  $T_0(1 + a/g)$ .



Obr. 15.40 Úloha 52

### ODST. 15.9 Proudnice a rovnice kontinuity

**53C.** Na obr. 15.41 je znázorněn soutok dvou potoků, které vytvoří řeku. Jeden potok má šířku 8,2 m, hloubku 3,4 m a rychlost jeho proudu je  $2,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Druhý potok je 6,8 m široký, 3,2 m hluboký a rychlost jeho proudu je  $2,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Šířka řeky je 10,5 m, rychlost jejího proudu je  $2,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jaká je hloubka řeky?



Obr. 15.41 Cvičení 53

**54C.** Voda pítéká trubkou, jejíž vnitřní průměr je 2,1 cm, a dále teče třemi trubkami o průměru 1,4 cm. (a) Jaký je objemový tok širší trubkou, když objemové toky užšími trubkami jsou postupně  $0,035 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $0,025 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$  a  $0,015 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ ? (b) Jaký je poměr rychlosti proudění v širší trubici k rychlosti proudění v trubici s objemovým tokem  $0,035 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ ?

**55C.** Zahradní hadice tříčtvrtěcoulka (tj. hadice s vnitřním průměrem 0,75 palce) je připojena k postřikovači trávníku, který se skládá z 24 děr o průměru 0,05 palce. Jakou rychlostí je voda vystřikována z otvorů postřikovače, jestliže v přívodní hadici je její rychlost  $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ?

**56Ú.** Ze zatopeného sklepa je vyčerpávána voda rychlostí 5 m/s hadicí o vnitřním poloměru 1 cm. Hadice je vyvedena okénkem, které se nachází 3 m nad hladinou čerpané vody. Jaký je výkon čerpadla?

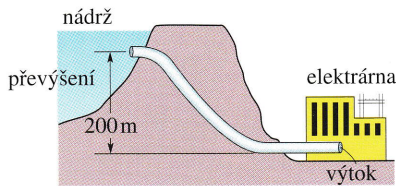
**57Ú.** Řeka široká 20 m a hluboká 4 m odvodňuje území o rozloze 3 000 km<sup>2</sup>. Průměrné roční srážky na tomto území činí 505 mm/m<sup>2</sup>. Čtvrtina srážek se vypaří a zbytek je odvodněn řekou. Jaká je průměrná rychlost proudu vody?

### ODST. 15.10 Bernoulliova rovnice

**58C.** Voda teče rychlostí 5 m·s<sup>-1</sup> trubicí, která má příčný průřez o obsahu 4 cm<sup>2</sup>. Voda postupně klesne o 10 m a obsah průřezu trubice se rozšíří na 8 cm<sup>2</sup>. (a) Jaká je rychlost vody po poklesu? (b) Jaký je tlak po poklesu, když předtím byl 1,5·10<sup>5</sup> Pa?

**59C.** Modely torpéd bývají zkoušeny ve vodorovné trubici s proudící vodou, podobně jako modely letadel v aerodynamickém tunelu. Uvažujme, že do takové trubice o vnitřním průměru 25 cm umístíme souose model torpéda, který má průměr 5 cm. Při zkoušce proudí voda kolem torpéda rychlostí 2,5 m·s<sup>-1</sup>. (a) Jakou rychlostí musí voda proudit v místech, kde její proud není zúžen modelem? (b) Jaký je rozdíl tlaku vody v trubici mezi místem, kde se nachází model, a ostatními částmi trubice?

**60C.** Vstup do potrubí spojujícího nádrž přečerpávací elektrárny s elektrárnou (obr. 15.42) má obsah 0,75 m<sup>3</sup>. Voda do něj vstupuje rychlostí 0,4 m·s<sup>-1</sup>. V budově elektrárny, která je o 200 m níže, je výstup z trubice užší a voda z něj vytéká rychlostí 9,5 m·s<sup>-1</sup>. Jaký je rozdíl tlaku mezi vstupem a výstupem?



Obr. 15.42 Cvičení 60

**61C.** Potrubí o vnitřním průměru 2,5 cm čerpá vodu do přízemí domu rychlostí 1 m·s<sup>-1</sup> pod tlakem 1,7·10<sup>5</sup> Pa. Má-li potrubí ve druhém podlaží ve výšce 8 m průměr 1,25 cm, jaká je v něm (a) rychlost proudu a (b) jaký tlak vody?

**62C.** Jakou práci vykoná okolní tlak na protlačení 1,4 m<sup>3</sup> vody trubici o vnitřním průměru 13 mm, když mezi konci trubice je tlakový rozdíl 1 atm?

**63C.** Vodorovnou trubkou konstantního průřezu teče olej. Pokles tlaku mezi dvěma místy vzdálenými 300 m je 35·10<sup>3</sup> Pa. Jakou energii ztratí 1 cm<sup>3</sup> oleje, když proteče vzdálenost 1 m?

**64C.** Nádrž s velkou plochou hladiny je naplněna vodou do výše 0,3 m. Otvor o obsahu 6 cm<sup>2</sup> ve dnu nádrže způsobí únik vody. (a) Jaký je objemový tok vytékající kapaliny? (b) V jaké hloubce pod dnem nádrže se plocha vytékajícího paprsku zúží na polovinu plochy otvoru?

**65C.** Máme dvě nádrže (1 a 2) s velkou plochou vrchní hladiny, ve kterých jsou dvě různé kapaliny. Ve stejné hloubce  $h$  pod vrchní hladinou jsou v obou nádržích udělány otvory, přičemž otvor v nádrži 1 má poloviční plochu ve srovnání s otvorem v nádrži 2. (a) Jaký je poměr hustot kapalin  $\rho_1/\rho_2$ , když hmotnostní toky oběma otvory jsou stejné? (b) Jaký je poměr objemových

toků z obou nádrží? (c) Jak se musí změnit výška kapaliny nad otvorem v nádrži 2, aby se vyrovnaly objemové toky z obou nádrží?

**66C.** Vzduch obtéká vršek křídla letadla rychlostí  $v_1$  a jeho spodek rychlostí  $v_2$ . Plocha křídla je  $S$ . Ukažte, že v tomto zjednodušeném modelu Bernoulliova rovnice předpovídá pro velikost  $F_{vz}$  síly, která nadnáší křídlo (říkáme jí též vztlaková síla), hodnotu

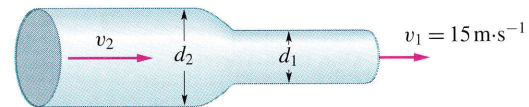
$$F_{vz} = \frac{1}{2} \rho S (v_1^2 - v_2^2),$$

kde  $\rho$  je hustota vzduchu.

**67C.** Je-li rychlost obtékání spodní strany křídla 110 m·s<sup>-1</sup>, jaká rychlost obtékání vrchní strany křídla povede k tlakovému rozdílu 900 Pa mezi oběma stranami? Hustotu vzduchu pokládejte za rovnou 1,3·10<sup>-3</sup> g·cm<sup>-3</sup> a použijte výsledek cvič. 66.

**68C.** Letadlo má plochu každého křídla rovnu 10,0 m<sup>2</sup>. Při jisté rychlosti letadla vzduch obtéká vrchní plochu křídla rychlostí 48,0 m·s<sup>-1</sup> a spodní plochu rychlostí 40,0 m·s<sup>-1</sup>. Jaká je hmotnost letadla? Předpokládejte, že letadlo letí stálou rychlostí, hustota vzduchu je 1,20 kg·m<sup>-3</sup> a vliv obtékání trupu a ocasních ploch na vztlak je zanedbatelný. Diskutujte velikost vztlaku, když letadlo při stejné rychlosti (a) letí vodorovně, (b) stoupá pod úhlem 15°, (c) klesá pod úhlem 15°. (Vyjděte z výsledku cvič. 66.)

**69Ú.** Voda teče vodorovnou trubici a do okolního prostoru (do atmosféry) vytéká rychlostí 15 m·s<sup>-1</sup>, jak je naznačeno na obr. 15.43. Průměr levé části trubice je 5,0 cm a pravé části 3,0 cm. (a) Kolik vody vyteče do okolního prostoru za 10 min? (b) Jaká je rychlost proudění v levé části trubice? (c) Jaký je přetlak nebo podtlak (rozdíl tlaku proti tlaku v okolním prostoru) v levé části trubice?



Obr. 15.43 Úloha 69

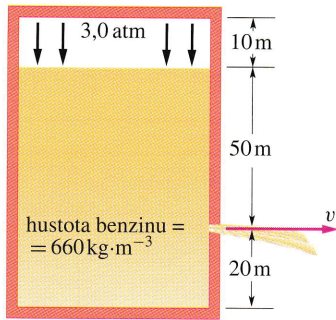
**70Ú.** V uzavřeném soudku je 50 cm pod povrchem nápoje pípa, ze které, když je otevřena, vytéká nápoj průřezem o obsahu 0,25 cm<sup>2</sup>. Hustota nápoje je 1 g·cm<sup>-3</sup>. Jakou rychlostí bude nápoj vytékat otevřenou pípou, když přetlak v soudku v prostoru nad nápojem je (a) nulový, (b) 0,4 atm?

**71Ú.** Vítr při vichřici obtéká střechu domu rychlostí 110 km/h. Hustota vzduchu je 1,2 kg·m<sup>-3</sup>. (a) Jaký je rozdíl tlaků v prostoru nad střechou a pod střechou, který se snaží střechu nadzvednout a odnést? (b) Jaká bude síla nadnášející střechu o obsahu 90 m<sup>2</sup>?

**72Ú.** Okna budovy úřadu mají rozměry 4 m × 5 m. Ve větrném dnu se prohnal okolo oken v nejvyšším patře budovy závan větru rychlostí 30,0 m·s<sup>-1</sup>. Vypočítejte celkovou sílu, která při závanu větru působila na okno. Hustota vzduchu byla 1,23 kg·m<sup>-3</sup>.

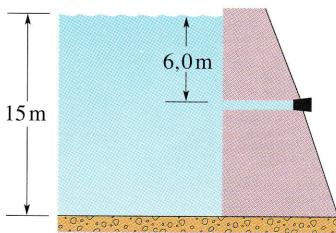
**73Ú.** Ostřelovač prostřelil kulkou z pušky vzduchotěsně uzavřenou benzinovou nádrží 50 m pod povrchem benzínu. Nad benzinem je absolutní tlak 3 atm, jak je naznačeno na obr. 15.44.

Skladovaný benzin má hustotu  $660 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Jakou rychlostí  $v$  začal benzin stříkat prostřeleným místem?



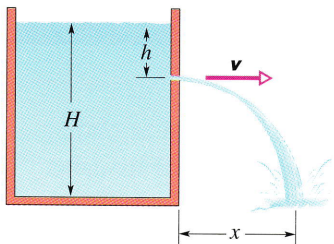
Obr. 15.44 Úloha 73

**74Ú.** Nádrž na pitnou vodu je za přehradní hrází 15 m hluboká. Vodorovná trubka o průměru 4,0 cm prochází hrází v hloubce 6,0 m pod vodní hladinou, jak je ukázáno na obr. 15.45. Trubka je uzavřena zátkou. (a) Najděte nejmenší nutnou velikost síly tření mezi trubkou a zátkou. (b) Zátku odstraníme. Jaký objem vody vyteče trubkou za tři hodiny?



Obr. 15.45 Úloha 74

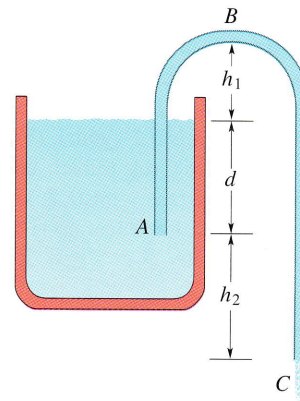
**75Ú.** Nádrž je naplněna vodou do výšky  $H$ . V nádrži byl provrtán otvor v hloubce  $h$  pod vodní hladinou (obr. 15.46). (a) Ukažte, že vzdálenost  $x$  od stěny nádrže do místa, kde vodní proud vytékající z nádoby dopadne na zem, je dána výrazem  $x = 2\sqrt{h(H-h)}$ . (b) Je možné navrtat nádrž v jiné hloubce, ze které by vytékající proud dopadl na zem ve stejné vzdálenosti  $x$ ? Pokud ano, v jaké? (c) V jaké hloubce musí být otvor umístěn, aby vzdálenost  $x$  byla maximální?



Obr. 15.46 Úloha 75

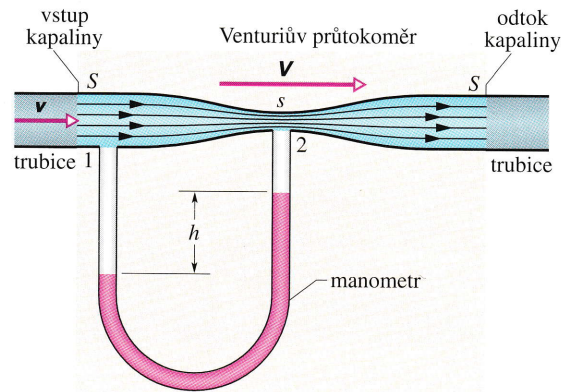
**76Ú.** Násoska je zařízení, které může sloužit k vyčerpání kapaliny z nádrže. Jak pracuje, je znázorněno na obr. 15.47. Trubka ABC musí nejprve být naplněna kapalinou. Jakmile je naplněna, odčerpává kapalinu z nádrže tak dlouho, dokud hladina nádrže neklesne k ústí trubky A. Kapalina má hustotu  $\rho$

a zanedbatelnou viskozitu. (a) Jakou rychlostí vytéká kapalina z trubky v místě C? (b) Jaký tlak je v kapalině v nejvyšším bodě trubky B? (c) Jaká je největší teoretická výška  $h_1$ , přes kterou sifon může čerpat vodu?



Obr. 15.47 Úloha 76

**77Ú.** Venturiův průtokoměr (obr. 15.48) je přístroj, který slouží k měření rychlosti proudění trubcí, a tím i množství kapaliny, které trubcí protéká. Údaje se vypočtou ze změřeného rozdílu tlaků mezi místem, kde trubice má svůj běžný průměr (průměr před vstupem a po výstupu z přístroje), a mezi zúženým místem, tzv. krčkem. V místech, kde trubice má svůj běžný průměr (obsah průřezu  $S$ ), tedy i v místě 1, kde je připojen jeden konec manometrické trubice, má kapalina rychlost  $v$ . V krčku, kde obsah průřezu je  $s$ , je v místě na obrázku označeném 2



Obr. 15.48 Úlohy 77 a 78

připojen druhý konec manometrické trubice. Kapalina zde má vyšší rychlost  $V$ . Z rozdílu rychlostí plyne rozdíl tlaku  $\Delta p$ , který se v U-manometru projeví rozdílem výšek  $h$  kapaliny v jeho ramenech. (a) Užitím Bernoulliovy rovnice a rovnice kontinuity pro srovnání průtokových poměrů v místech 1 a 2 (obr. 15.48) ukažte, že pro stanovení hledané rychlosti  $v$  platí rovnice

$$v = \sqrt{\frac{2s^2 \Delta p}{\rho(S^2 - s^2)}}$$

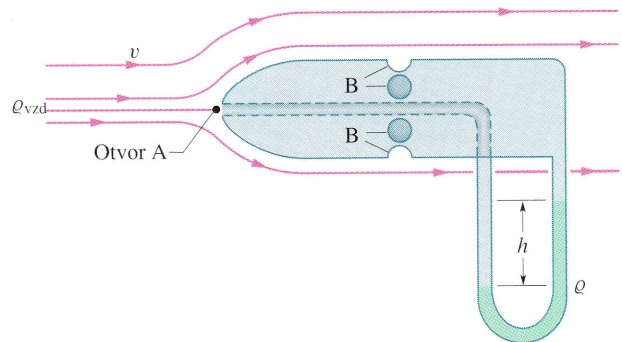
kde  $\rho$  je hustota kapaliny. (b) Předpokládejte, že trubici teče voda, že plochy příčných průřezů mají hodnoty  $S = 60 \text{ cm}^2$ ,  $s = 30 \text{ cm}^2$ , tlak v širší části trubice je  $8 \cdot 10^4 \text{ Pa}$  a v krčku  $6 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ . Jaký je objemový tok vody trubici?

**78Ú.** Uvažujte Venturiův průtokoměr z předcházející úlohy na obr. 15.48 bez připojeného manometru. Nechť  $S = 5s$  a tlak v místě 1, kde se nachází průřez  $S$ , je 2 atm. (a) Vypočítejte rychlosti  $v$  v místě průřezu  $S$  (místo 1) a  $V$  v místě průřezu  $s$  (místo 2), které způsobí, že tlak  $p_2$  v místě 2 vymizí. (b) Vypočítejte, jaký v tom případě bude objemový tok trubici, když průřez  $S$  má průměr 5,0 cm. Jev, který nastane v místě 2, kde tlak klesne na nulovou hodnotu, se nazývá **kavitace**; voda ztratí kontinuitu, vytvoří se v ní drobné bublinky.

**79Ú.** Pitotova trubice znázorněná na obr. 15.49 se užívá ke stanovení rychlosti letadla. Sestává z vnější trubice, na jejímž boku je větší počet malých otvorů B (na obrázku jsou vidět čtyři), která je spojena s jedním koncem manometru (na obrázku je manometrem U-trubice). Druhý konec manometru je spojen s vnitřní trubici přístroje, do které vzduch vstupuje jejím čelním otvorem A. Přístroj se umísťuje na přední část letadla tak, aby vzduch vstupoval kolmo do vnitřní trubice, takže se v ní zastaví. Rychlost  $v_A$  je rovna nule. Otvory B jsou obtékány rychlostí  $v$  velmi blízkou rychlosti letadla. (a) Užitím Bernoulliovy rovnice ukažte, že

$$v = \sqrt{\frac{2\rho gh}{\rho_{\text{vzd}}}}$$

kde  $\rho$  je hustota kapaliny užitá v U-trubici,  $h$  výšková odlehlost hladin v ramenech U-trubice a  $\rho_{\text{vzd}}$  hustota vzduchu, kterým letadlo letí. (b) V U-trubici je líh a ukazuje rozdíl výšek  $h = 26 \text{ cm}$ . Jaká je rychlost letadla vůči okolnímu vzduchu? Hustota vzduchu v dané výšce je  $1,03 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a hustota líhu  $810 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .



Obr. 15.49 Úlohy 79 a 80

**80Ú.** Pitotova trubice (viz úlohu 79) umístěná na letadle letícím ve velké výšce ukazuje tlakový rozdíl 180 Pa. Jaká je rychlost letadla, jestliže hustota vzduchu v této výšce je  $0,031 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ?



# 16

## Kmity



---

Stalo se to v roce 1989, v době, kdy se v okolí San Franciska připravovalo zahájení třetí části Světových her. Oblast byla zasažena seizmickými vlnami ze 100 km vzdáleného ohniska zemětřesení poblíž Loma Prieta. Zemětřesení o síle 7,1 stupňů způsobilo rozsáhlé škody a zabilo 67 lidí. Na fotografii vidíme část 1,4 km dlouhého úseku Nimitzovy dálnice, kde došlo k desítkám smrtelných zranění, když se horní betonová deska zřítily na spodní a zasáhla motoristy. Příčinou zřícení byly nepochybně prudké otřesy, vyvolané seizmickými vlnami. Avšak proč byl právě tento úsek tak vážně poškozen, jestliže ostatní úseky dálnice s téměř totožnou konstrukcí zřícení unikly?

---

## 16.1 KMITÁNÍ

Příklady kmitání, opakujícího se pohybu, nás obklopují ze všech stran. Pozorujeme kývání lustrů, houpání zakotvených člunů, pulzující písky automobilových motorů. Známe chvění kytarových strun, bubnů, zvonů, membrán v telefonních sluchátkách a v reproduktorech, křemenných krystalů v náramkových hodinkách. Méně evidentní je kmitání molekul vzduchu, které přenáší zvukové rozruchy, kmitání atomů v pevné látce, zodpovědné za vjem teploty, a kmitání elektronů v rádiových anténách a televizních vysílačích.

Kmitání není omezeno na hmotné objekty, jako jsou houslové struny a elektrony. Periodický pohyb pozorujeme také u jevů spojených s šířením světla, rádiových vln, rentgenového záření a  $\gamma$ -záření. Tento druh oscilací budeme studovat v následujících kapitolách. Budou nám tam velmi užitečné analogie s kmitáním mechanických systémů, na které se zaměříme v této kapitole.

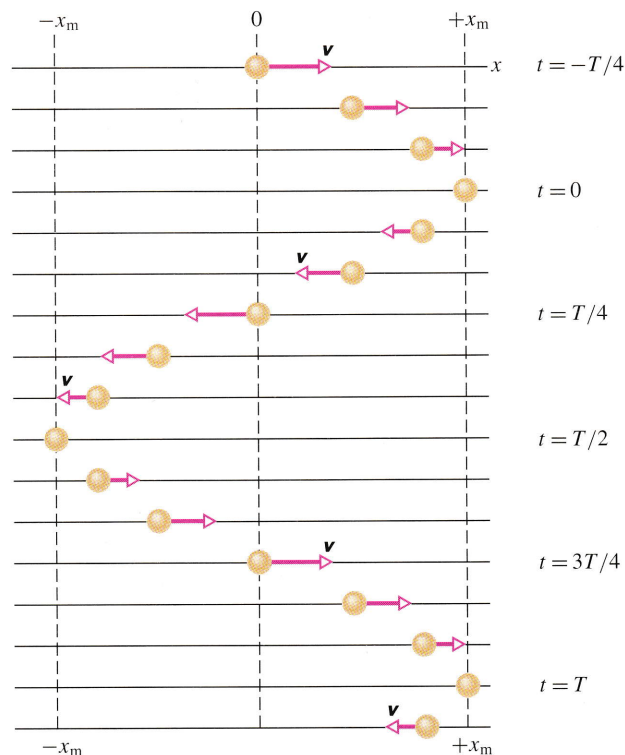
V reálném světě je kmitání obvykle *tlumené*: třecí síly postupně přeměňují mechanickou energii na teplo a pohyb ustává. Takové ztráty mechanické energie nemůžeme nikdy zcela vyloučit, energii však můžeme doplňovat z vhodného zdroje. Například děti na obr. 16.1 dovedou při houpání „pumpovat“, tj. švihnout nohama nebo se skrčit podle okamžitého pohybu houpačky, a tím kmitání udržují nebo i zvětšují. Přeměňují tak vlastně biochemickou energii na mechanickou energii kmitajícího systému.



**Obr. 16.1** Dítě se brzy naučí dodávat houpačce energii a udržovat tím její pohyb.

## 16.2 HARMONICKÝ POHYB

Obr. 16.2 představí sérii „snímků“ kmitajícího systému: částice se opakovaně pohybuje tam a zpět kolem počátku osy  $x$ .



**Obr. 16.2** Série „snímků“ (vytvořených po uplynutí stejných časových intervalů) ukazuje polohu částice, která se pohybuje tam a zpět kolem počátku osy  $x$ . Krajními polohami jsou body  $-x_m$  a  $+x_m$ . Délky šipek na obrázku jsou jednotně škálovány a ukazují rychlost částice v daných bodech. V počátku má částice největší rychlost. V polohách  $\pm x_m$  je její rychlost nulová. Jestliže zvolíme počátek odečítání času v poloze  $+x_m$ , částice se do ní vrátí poprvé v čase  $t = T$ , kde  $T$  je perioda pohybu. Pohyb, ke kterému došlo v průběhu právě uplynulé periody, se pak opakuje.

V tomto odstavci pohyb částice pouze popíšeme. Později budeme studovat, jak lze dané kmitání vyvolat.

Začneme zavedením důležitého parametru kmitání, jeho **frekvence** neboli **kmitočtu**. Frekvence udává počet kmitů, které jsou dokončeny v průběhu každé sekundy. Frekvenci označujeme symbolem  $f$ , její jednotkou v soustavě SI je **hertz** (zkratka Hz). Platí tedy

$$\begin{aligned} 1 \text{ hertz} &= 1 \text{ Hz} = 1 \text{ kmit za sekundu} = \\ &= 1 \text{ s}^{-1}. \end{aligned} \quad (16.1)$$

S frekvencí souvisí **perioda** pohybu  $T$ . Ta udává dobu, za kterou se uskuteční jeden úplný kmit (jeden **cyklus**). To znamená

$$T = \frac{1}{f}. \quad (16.2)$$

Jakýkoliv pohyb, který se v pravidelných intervalech opakuje, nazýváme **pohyb periodický**. My zde budeme studovat zvláštní případ periodického pohybu: opakující se úsek

bude vždy odpovídat situaci na obr. 16.2. Pro tento případ je časová závislost výchylky částice určena funkcí

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{výchylka}), \quad (16.3)$$

kde  $x_m$ ,  $\omega$  a  $\varphi$  jsou dané konstanty. Tento pohyb budeme nazývat **jednoduchý harmonický pohyb** nebo prostě **harmonický pohyb**.

Veličina  $x_m$  v rov. (16.3) je kladná konstanta, jejíž hodnota závisí na počátečních podmínkách. Nazýváme ji **amplituda**; spodní index m znamená *maximum*. **Amplituda výchylky** totiž udává velikost největší možné výchylky částice v obou směrech od počátku. Funkce kosinus v rov. (16.3) se mění mezi krajními hodnotami  $\pm 1$ , takže výchylka  $x(t)$  se mění mezi krajními hodnotami  $\pm x_m$ . Vidíme to i na obr. 16.2.

Časově závislý výraz  $(\omega t + \varphi)$  v rov. (16.3) se nazývá **fáze** pohybu, konstanta  $\varphi$  je **počáteční fáze**. Její hodnota závisí na výchylce a rychlosti částice v čase  $t = 0$ . Pro oba průběhy  $x(t)$  na obr. 16.3a je fázová konstanta nulová (srovnejme tyto průběhy a hodnoty získané z rov. (16.3) pro  $t = 0$ ).

Zbývá vysvětlit konstantu  $\omega$ . Po uplynutí jedné periody  $T$  se musí částice navrátit do svého výchozího stavu. Z toho plyne, že pro libovolné  $t$  se musí také  $x(t)$  rovnat  $x(t + T)$ . Položme pro jednoduchost v rov. (16.3)  $\varphi = 0$ . Z uvedené podmínky potom dostaneme

$$x_m \cos(\omega t) = x_m \cos(\omega(t + T)).$$

Funkce kosinus má periodu  $2\pi$  rad. Předchozí rovnice tedy dává

$$\omega t + 2\pi = \omega(t + T)$$

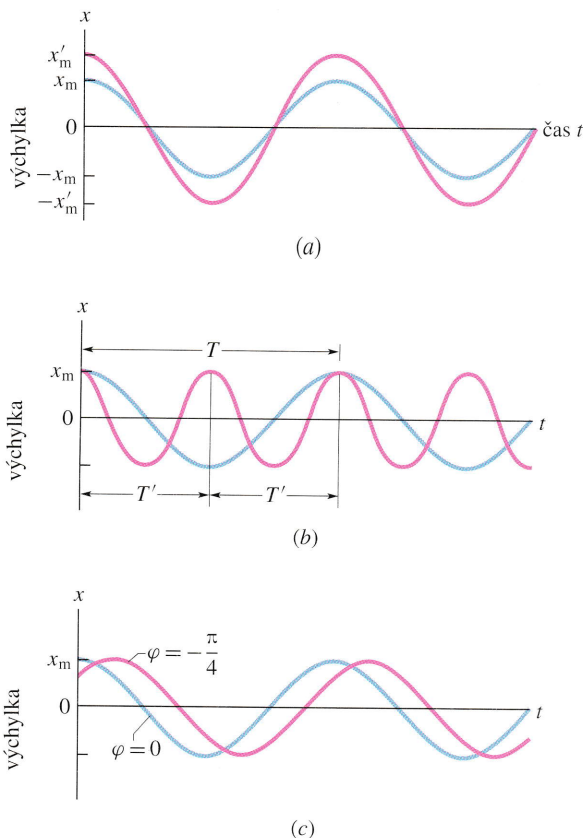
a odtud

$$\omega T = 2\pi.$$

Uvážíme-li ještě rov. (16.2), máme celkově

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (16.4)$$

Veličina  $\omega$  se nazývá **úhlová frekvence** (také **kruhá frekvence** či **úhlový kmitočet**) pohybu; její jednotka v soustavě SI je radián za sekundu. (Máme-li být tedy důslední, musíme vyjadřovat fázi  $\varphi$  v radiánech.) Na obr. 16.3 jsou porovnány dva harmonické pohyby, které se liší buď jen svou amplitudou, nebo jen svou periodou (a tedy frekvencí a úhlovou frekvencí), anebo jen fázovou konstantou.



**Obr. 16.3** Modrá křivka je ve všech třech případech zakreslena podle rov. (16.3) s  $\varphi = 0$ . (a) Červená křivka se liší od modré *pouze* tím, že pro ni je amplituda  $x'_m$  větší. (b) Červená křivka se liší od modré *pouze* tím, že pro ni je perioda  $T' = T/2$ . (c) Červená křivka se liší od modré *pouze* tím, že pro ni je  $\varphi = -\pi/4$  rad a nikoliv nula.

**KONTROLA 1:** Částice vykonává harmonický pohyb s periodou  $T$  (podobně jako na obr. 16.2). V čase  $t = 0$  se nacházela na souřadnici  $-x_m$ . Rozhodněte, zda ji v čase (a)  $t = 2,00T$ , (b)  $t = 3,50T$ , (c)  $t = 5,25T$  nalezneme v bodě o souřadnici  $-x_m$ , o souřadnici  $x_m$ , v počátku souřadnic, mezi  $-x_m$  a  $0$ , mezi  $0$  a  $x_m$ .

### Rychlost harmonického pohybu

Rychlost částice dostaneme jako obvykle — derivací výrazu pro souřadnici. V případě harmonického pohybu jde

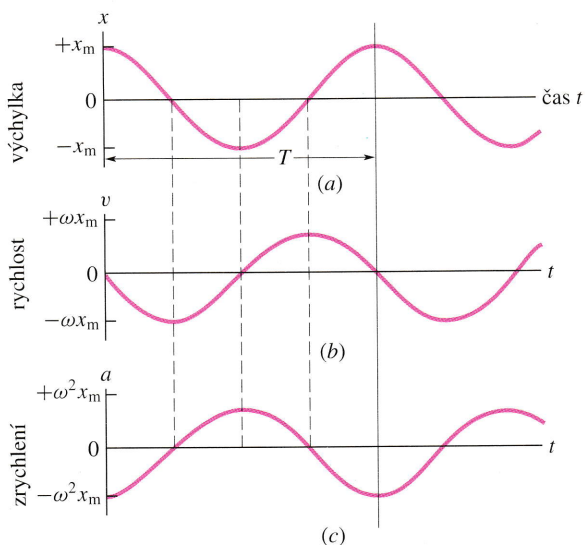
tedy o derivaci rov. (16.3):

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_m \cos(\omega t + \varphi))$$

neboli

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{rychlost}). \quad (16.5)$$

Na obr. 16.4a je graf funkce odpovídající rov. (16.3) s  $\varphi = 0$ . Obr. 16.4b ukazuje rov. (16.5), rovněž pro  $\varphi = 0$ . Podobně jako jsme nazvali  $x_m$  v rov. (16.3) amplitudou, nazveme nyní kladnou veličinu  $\omega x_m$  v rov. (16.5) **amplitudou rychlosti**  $v_m$ . Na obr. 16.4b vidíme, jak se rychlost kmitající částice mění mezi hodnotami  $\pm v_m$  (tj.  $\pm \omega x_m$ ). Na tomto obrázku si také všimněme, že křivka odpovídající  $v(t)$  je *posunuta* o čtvrtinu periody doleva vzhledem ke křivce  $x(t)$ : jestliže je velikost výchylky největší (tj.  $x(t) = x_m$ ), je velikost rychlosti nejmenší (tj.  $v(t) = 0$ ). A v okamžiku, kdy je velikost výchylky nejmenší (tj. nulová), je velikost rychlosti největší (je rovna  $v_m = \omega x_m$ ).



**Obr. 16.4** (a) Výchylka částice  $x(t)$  pro harmonický pohyb s fázovou konstantou  $\varphi$  rovnou nule. Perioda  $T$  ohraničuje jeden úplný kmit. (b) Rychlost částice  $v(t)$  a (c) zrychlení částice  $a(t)$  pro tento pohyb.

### Zrychlení harmonického pohybu

Derivací rychlosti dostaneme zrychlení částice. V případě harmonického pohybu tedy derivujeme rov. (16.5) a dostaneme

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega x_m \sin(\omega t + \varphi))$$

neboli

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{zrychlení}). \quad (16.6)$$

Na obr. 16.4c je graf funkce odpovídající rov. (16.6), opět pro případ  $\varphi = 0$ . Kladná veličina  $\omega^2 x_m$  v rov. (16.6) se nazývá **amplituda zrychlení**  $a_m$ . Zrychlení částice se tedy mění v rozmezí  $\pm a_m$  (tj.  $\pm \omega^2 x_m$ ); vidíme to také na obr. 16.4c. Navíc si všimněme, že křivka  $a(t)$  je posunuta vzhledem ke křivce  $v(t)$  o čtvrtinu periody doleva.

V této chvíli můžeme propojit rov. (16.3) a (16.6); dospějeme ke vztahu

$$a(t) = -\omega^2 x(t). \quad (16.7)$$

Tato rovnice je jakýmsi „puncem“ harmonického pohybu: zrychlení částice je úměrné výchylce a má opačné znaménko, přitom konstantou úměrnosti je druhá mocnina úhlové frekvence. Největší kladná hodnota výchylky tedy odpovídá zápornému zrychlení s největší velikostí a naopak. Je-li výchylka částice nulová, je její zrychlení také nulové. Tato tvrzení ilustruje obr. 16.4.

### RADY A NÁMĚTY

#### Bod 16.1: Fáze

Všimněte si, jakou roli hraje při kreslení  $x(t)$  konstanta  $\varphi$ . Jestliže je  $\varphi = 0$ , graf funkce  $x(t)$  bude vždy podobný křivce na obr. 16.4a, tj. typické křivce pro funkci kosinus. Záporná hodnota  $\varphi$  posune křivku podél časové osy *doprava* (jako na obr. 16.3c), zatímco *kladná* hodnota  $\varphi$  ji posune *doleva*.

Uvažme dva harmonické pohyby, lišící se pouze v této konstantě. Říkáme o nich, že mají *fázový rozdíl*, že jedna vůči druhé má *fázový posuv*, že jsou navzájem *fázově posunuty* neboli že jsou navzájem **rozfázovány**. Například křivky na obr. 16.3c mají fázový rozdíl  $\pi/4$  rad.

Harmonický pohyb se opakuje po uplynutí každé periody  $T$  a funkce kosinus se opakuje po každých  $2\pi$  rad. To znamená, že perioda  $T$  odpovídá fázovému rozdílu  $2\pi$  rad. Na obr. 16.4 je křivka  $x(t)$  posunuta vzhledem ke křivce  $v(t)$  o čtvrtinu periody doprava neboli je vzhledem k ní fázově posunuta o  $-\pi/2$  rad. Současně je tato křivka posunuta vzhledem k  $a(t)$  o polovinu periody doprava neboli je vzhledem k  $a(t)$  posunuta o  $-\pi$  rad. Fázový posuv  $2\pi$  rad způsobí, že se daný harmonický pohyb ztotožní sám se sebou — jinými slovy, vůbec se nezmění.

## 16.3 POHYBOVÁ ROVNICE PRO HARMONICKÝ POHYB

Nyní již víme, jak se zrychlení částice mění s časem. Druhý Newtonův zákon nám odpoví na otázku, jaká síla musí na

částici působit, aby jí bylo udělováno právě toto očekávané zrychlení. Z Newtonova zákona a z rov. (16.6) dostaneme pro harmonický pohyb

$$F = ma = -(m\omega^2)x. \quad (16.8)$$

Síla je tedy přímo úměrná výchylce a opačně orientovaná:

$$F = ma = -kx. \quad (16.9)$$

To odpovídá Hookovu zákonu pro pružinu, jejíž tuhost je v daném případě

$$k = m\omega^2. \quad (16.10)$$

Rov. (16.9) tak vlastně představuje alternativní definici harmonického pohybu. Ta zní:

Částice o hmotnosti  $m$  vykonává harmonický pohyb, jestliže na ni působí síla přímo úměrná výchylce částice z rovnovážné polohy a orientovaná proti výchylce.

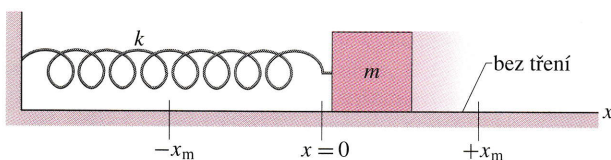
Soustava pružina + těleso na obr. 16.5 se nazývá **harmonický**, někdy též **lineární oscilátor**. Slovo „lineární“ poukazuje na skutečnost, že síla  $F$  je úměrná první (a nikoliv nějaké jiné) mocnině výchylky  $x$ . Jeho úhlová frekvence  $\omega$  souvisí vztahem (16.10) s tuhostí pružiny  $k$  a s hmotností tělesa  $m$ . Dostaneme tedy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{úhlová frekvence}). \quad (16.11)$$

Kombinací rov. (16.4) a (16.11) pak ihned získáme periodu harmonického oscilátoru na obr. 16.5:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{perioda}). \quad (16.12)$$

Rov. (16.11) říká totéž, co rov. (16.12): velkou hodnotu úhlové frekvence (a tedy malou periodu) dostaneme v případě tuhé pružiny (velké  $k$ ) a lehkého tělesa (malé  $m$ ).



**Obr. 16.5** Harmonický oscilátor. Jakmile poněkud vychýlíme těleso na stranu a poté je uvolníme, vznikne podobně jako u částice na obr. 16.2 harmonický pohyb. Výchylka tělesa je určena rov. (16.3).

U jakéhokoliv kmitajícího systému tohoto typu, ať už je to harmonický oscilátor na obr. 16.5, skokanské prkno nebo houslová struna, najdeme vždy jednak jistou „tendenci k návratu“, jednak „setrvačnost“. V případě oscilátoru na obr. 16.5 jsou obě tyto tendence spojeny s odlišnými složkami kmitajícího systému: „tendence k návratu“ je reprezentována výhradně nehmotnou pružinou a „setrvačnost“ je vázána výhradně na hmotné těleso. V případě houslové struny, jak uvidíme v kap. 17, jsou obě zmíněné tendence vázány na samotnou strunu. Jsou ovšem i jiné mechanismy kmitů. Např. při **relaxačních kmitěch** se pro pohybující se předmět vždy v okolí krajní polohy změni „pravidla hry“, podobně u třecích tónů se pravidelně odtrhují víry od překážky v proudění vzduchu. Zde je nebudeme podrobněji rozebírat.

**KONTROLA 2:** Který z následujících vztahů mezi silou  $F$ , působící na částici, a polohou částice  $x$ , popisuje harmonický pohyb: (a)  $F = -5x$ , (b)  $F = -400x^2$ , (c)  $F = 10x$ , (d)  $F = 3x^2$ ?

### PŘÍKLAD 16.1

Těleso o hmotnosti  $m = 680$  g je připojeno k pružině tuhosti  $k = 65 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Těleso, pohybující se na hladké podložce, vychýlíme o  $x = 11$  cm z rovnovážné polohy  $x = 0$ . V nové poloze je těleso v klidu. Poté jej v čase  $t = 0$  uvolníme.

(a) Jakou silou působí v okamžiku uvolnění pružina na těleso?

**ŘEŠENÍ:** Podle Hookova zákona platí

$$\begin{aligned} F &= -kx = -(65 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})(0,11 \text{ m}) = \\ &= -7,2 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Znaménko minus nám připomíná, že síla a výchylka mají opačnou orientaci. Skutečně, pružina působí na těleso silou, která směřuje k rovnovážné poloze, zatímco výchylka směřuje od rovnovážné polohy.

(b) Jaká je úhlová frekvence, frekvence a perioda vzniklého kmitání?

**ŘEŠENÍ:** Podle rov. (16.11) máme

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(65 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})}{(0,68 \text{ kg})}} = \\ &= 9,78 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 9,8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Frekvenci nyní dostaneme z rov. (16.4):

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(9,78 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})}{2\pi} = \\ &= 1,56 \text{ Hz} \doteq 1,6 \text{ Hz}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Perioda je převrácenou hodnotou frekvence:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{(1,56 \text{ Hz})} = 0,64 \text{ s} = 640 \text{ ms.} \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Určete amplitudu výchylky.

**ŘEŠENÍ:** V čl. 8.4 jsme zkoumali mechanickou energii soustavy pružina + těleso, podobné lineárnímu oscilátoru na obr. 16.5. Pokud neuvažujeme tření, mechanická energie se během pohybu zachovává. V našem případě je těleso uvolněno s nulovou počáteční rychlostí v okamžiku, kdy je vzdáleno 11 cm od rovnovážné polohy. Má tedy v tomto okamžiku nulovou kinetickou energii a má ji také nulovou, kdykoliv se později opět nachází 11 cm od rovnovážné polohy. Jeho největší možná vzdálenost od rovnovážné polohy je tedy 11 cm, tj.

$$x_m = 11 \text{ cm.} \quad (\text{Odpověď})$$

(d) Určete maximální rychlost kmitajícího tělesa.

**ŘEŠENÍ:** Amplituda rychlosti je určena rov. (16.5). V našem případě

$$v_m = \omega x_m = (9,78 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})(0,11 \text{ m}) = 1,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Těleso má tuto největší možnou rychlost v okamžiku, kdy právě mívá počátek osy  $x$ . Ukazuje to také srovnání obr. 16.4a a 16.4b; největší rychlost odpovídá  $x = 0$ .

(e) Určete maximální zrychlení tělesa.

**ŘEŠENÍ:** Amplituda zrychlení je určena rov. (16.6). V našem případě

$$a_m = \omega^2 x_m = (9,78 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2(0,11 \text{ m}) = 11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (\text{Odpověď})$$

Těleso má toto (co do velikosti) největší možné zrychlení, kdykoliv se nachází v bodech obrátu. V těchto bodech je také největší síla, kterou na těleso působí pružina. Ukazuje to také srovnání obr. 16.4a a 16.4c; výchylka a zrychlení nabývají svých největších i nejmenších hodnot současně.

(f) Jaká je fázová konstanta pohybu  $\varphi$ ?

**ŘEŠENÍ:** V čase  $t = 0$ , tj. v okamžiku uvolnění tělesa, nabývala jeho výchylka  $x$  své maximální hodnoty  $x_m$ . Rychlost  $v$  tělesa byla nulová. Tyto dvě relace se nazývají **počáteční podmínky**. Jestliže je uplatníme postupně v rov. (16.3) a (16.5), dostaneme

$$1 = \cos \varphi \quad \text{a} \quad 0 = \sin \varphi.$$

Nejmenší úhel, který splňuje obě tyto podmínky, je

$$\varphi = 0. \quad (\text{Odpověď})$$

(Podmínky jsou splněny také pro libovolný celý násobek úhlu  $2\pi$  rad.)

### PŘÍKLAD 16.2

Uvažujme harmonický oscilátor na obr. 16.5. V čase  $t = 0$  je výchylka  $x(0)$  rovna  $-8,5$  cm, rychlost  $v(0)$  je  $-0,920 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a zrychlení  $a(0)$  je  $+47,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

(a) Určete úhlovou frekvenci a frekvenci kmitání.

**ŘEŠENÍ:** V rov. (16.3) položíme  $t = 0$ . Dostaneme

$$x(0) = x_m \cos \varphi. \quad (16.13)$$

Podobně po dosazení  $t = 0$  do rov. (16.5) a (16.6) máme

$$v(0) = -\omega x_m \sin \varphi \quad (16.14)$$

a

$$a(0) = -\omega^2 x_m \cos \varphi. \quad (16.15)$$

Poslední tři rovnice obsahují tři neznámé, jmenovitě  $x_m$ ,  $\varphi$  a  $\omega$ . Postupně je nalezneme všechny, v této části úkolu hledáme pouze úhlovou frekvenci  $\omega$ .

Sestavíme podíl rov. (16.15) a (16.13). Ze vzniklého výrazu vypočteme

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{-\frac{a(0)}{x(0)}} = \sqrt{-\frac{(47,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}{(-0,0850 \text{ m})}} = \\ &= 23,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Frekvence  $f$  je určena vztahem (16.4). V našem případě

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(23,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})}{2\pi} = 3,74 \text{ Hz.} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Určete fázovou konstantu  $\varphi$ .

**ŘEŠENÍ:** Nejprve sestavíme podíl rov. (16.14) a (16.13):

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-\omega x_m \sin \varphi}{x_m \cos \varphi} = -\omega \text{tg } \varphi.$$

Z tohoto vztahu nyní vypočteme  $\text{tg } \varphi$ :

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi &= -\frac{v(0)}{\omega x(0)} = \frac{-(-0,920 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{(23,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})(-0,0850 \text{ m})} = \\ &= -0,461. \end{aligned}$$

Máme tak zatím dvě možná řešení

$$\varphi = -25^\circ \quad \text{a} \quad \varphi = 155^\circ.$$

V následující části úlohy rozhodneme, která z obou fázových konstant je správná.

(c) Určete amplitudu kmitání  $x_m$ .

**ŘEŠENÍ:** Vyjdeme z rov. (16.13) a prozatímne dosadíme  $\varphi = 155^\circ$ :

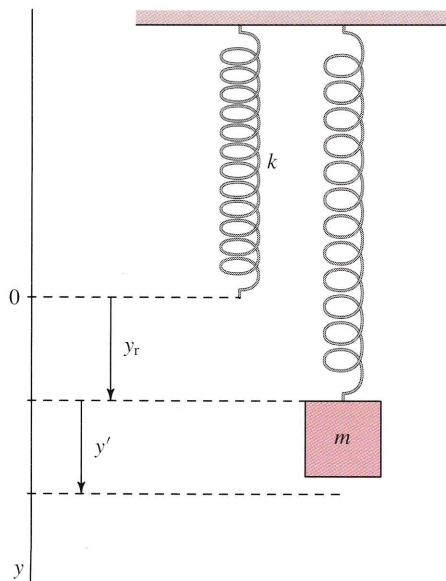
$$x_m = \frac{x(0)}{\cos \varphi} = \frac{(-0,0850 \text{ m})}{\cos 155^\circ} = 0,094 \text{ m} = 9,4 \text{ cm.} \quad (\text{Odpověď})$$

Podobně hodnota  $\varphi = -25^\circ$  by vedla k  $x_m = -9,4 \text{ cm}$ . Avšak amplituda výchylky musí být vždy *kladná* konstanta — úhel  $\varphi = -25^\circ$  musíme vyloučit. Správný výsledek části (b) je tedy

$$\varphi = 155^\circ. \quad (\text{Odpověď})$$

### PŘÍKLAD 16.3

Vliv konstantní síly na harmonický oscilátor. Pružinu z obrázku 16.5 zavěsíme svisle dolů podle obr. 16.6. Osu  $y$  orientujeme podél ní s počátkem v poloze, kde by byl konec *nezatížené* pružiny. Poté pružinu zatížíme tělesem hmotnosti  $m$ .



**Obr. 16.6** Příklad 16.3. Konec nezatížené pružiny je v počátku osy  $y$ . Rovnovážná poloha zatížené pružiny je  $y_r$ . Výchylka z této rovnovážné polohy je  $y'$ .

(a) Jaké je protažení  $y_r$  zatížené pružiny v rovnovážné poloze?

**ŘEŠENÍ:** V rovnovážné poloze je výslednice sil působících na těleso, tj. síly pružnosti  $F$  a síly tíhové  $G$ , rovna nule. Jediné nenulové složky jsou  $y$ -ové a platí pro ně

$$F_y + G_y = -ky_r + mg = 0.$$

Odtud určíme hledanou rovnovážnou polohu

$$y_r = \frac{mg}{k}. \quad (16.16)$$

(b) Těleso svisle vychýlíme a uvolníme. S jakou periodou bude kmitat? Porovnejte tuto situaci s obr. 16.5, kdy pružina není namáhána tíhou tělesa, a s obecným řešením v př. 16.1a, b.

**ŘEŠENÍ:** Při výchylce  $y'$  z rovnovážné polohy  $y_r$  působí pružina na těleso silou

$$F_y = -k(y' + y_r). \quad (16.17)$$

Na těleso působí kromě této síly ještě konstantní tíhová síla  $G$ , takže výsledná síla  $F_v$  působící na těleso je

$$F_v = F + mg. \quad (16.18)$$

Po dosazení rov. (16.16) a (16.17) do rov. (16.18) dostáváme

$$F_{v,y} = -k\left(y' + \frac{mg}{k}\right) + mg = -ky'. \quad (16.19)$$

Odtud však plyne, že výsledná síla je opět přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy, je opačně orientovaná a má stejný koeficient úměrnosti — tuhost  $k$ , jaký měla nezatížená pružina. Proto naše soustava kmitá se stejnou frekvencí, s jakou kmitá soustava na obr. 16.5 řešená v př. 16.1.

### RADY A NÁMĚTY

**Bod 16.2:** *Určení typu kmitání*

V případě libovolného harmonického pohybu jsou zrychlení  $a$  a výchylka  $x$  vázány vztahem tvaru

$$a = -(\text{kladná konstanta}) \cdot x,$$

který říká: zrychlení je úměrné výchylce z rovnovážné polohy, ale je opačně orientované. Jakmile již nalezneme v dané úloze takový vztah, můžeme jej okamžitě srovnat s rov. (16.7), tj. uvedenou kladnou konstantu můžeme identifikovat jako  $\omega^2$ . Tím již vlastně máme úhlovou frekvenci pohybu. Poté nalezneme pomocí rov. (16.4) periodu  $T$  a frekvenci  $f$ .

V př. 16.8 uvidíme, že tentýž postup lze použít k určení harmonických torzních kmitů. V tomto případě jsou úhlové zrychlení  $\varepsilon$  a úhlová výchylka  $\theta$  svázány relací tvaru

$$\varepsilon = -(\text{kladná konstanta}) \cdot \theta,$$

která říká: úhlové zrychlení je úměrné úhlové výchylce z rovnovážné polohy, je však orientované proti této výchylce. Podobně jako v předchozím případě můžeme ztotožnit kladnou konstantu s  $\omega^2$ , a tím najít postupně veličiny  $\omega$ ,  $T$  a  $f$ .

V některých úkolech dospějete nejprve k závislosti síly  $F$  na výchylce  $x$ . V případě harmonického pohybu má tato závislost tvar

$$F_x = -(\text{kladná konstanta}) \cdot x.$$

To znamená, že síla je úměrná výchylce, míří však proti ní. Jakmile již nalezneme takovou závislost, můžeme ji okamžitě srovnat s rov. (16.9), tj. kladnou konstantu můžeme identifikovat jako  $k$ . Jestliže navíc známe hmotnost kmitajícího tělesa, uplatníme postupně rov. (16.11), (16.12) a (16.4) k určení úhlové frekvence  $\omega$ , periody  $T$  a frekvence  $f$ .

Podobně postupujeme pro torzní harmonický pohyb. V tomto případě je vratný moment síly  $M$  vázán s úhlovou výchylkou  $\theta$  vztahem typu

$$M = -(\text{kladná konstanta}) \cdot \theta,$$

který říká: moment síly je úměrný úhlové výchylce z rovnovážné polohy, má však opačný směr.

## 16.4 ENERGIE HARMONICKÉHO OSCILÁTORU

V kap. 8 jsme si již povšimli, jak se energie harmonického oscilátoru přelévá sem a tam mezi energií kinetickou a energií potenciální, zatímco jejich součet — celková mechanická energie oscilátoru  $E$  — zůstává konstantní. Podívejme se nyní na tuto situaci z kvantitativního hlediska.

Potenciální energie harmonického oscilátoru na obrázku 16.5 je spojena výhradně s pružinou. Její velikost závisí na tom, o kolik je pružina stlačena nebo protažena, tedy na výchylce  $x(t)$ . Jestliže použijeme postupně rov. (8.11) a (16.3), dostaneme

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi). \quad (16.20)$$

Všimněme si zde pozorně výrazu  $\cos^2 A$ : jeho význam je  $(\cos A)^2$  a nelze jej zaměňovat s výrazem  $\cos A^2$ , který znamená  $\cos(A^2)$ .

Kinetická energie systému je vázána výhradně na kmitající hmotné těleso. Její velikost závisí na tom, jak rychle se těleso pohybuje, tedy na rychlosti  $v(t)$ . Z rov. (16.5) dostaneme

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (16.21)$$

Podle rov. (16.11) můžeme za  $\omega^2$  dosadit  $k/m$ , takže rov. (16.21) lze přepsat do tvaru

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (16.22)$$

Celková mechanická energie  $E$  je součtem příspěvků získaných v rov. (16.20) a (16.22):

$$\begin{aligned} E &= E_p + E_k = \\ &= \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{1}{2}kx_m^2 (\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)). \end{aligned}$$

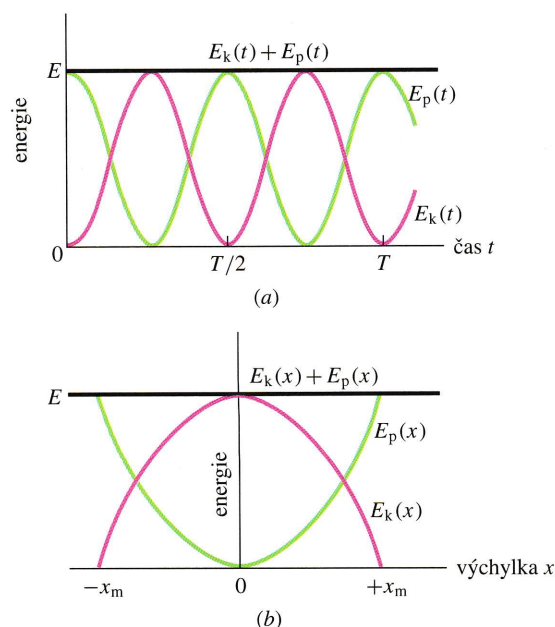
Pro libovolný úhel  $\alpha$  však platí

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Výraz ve velkých závorkách v rovnici pro energii  $E$  je tedy roven jedné a výsledek zní

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kx_m^2. \quad (16.23)$$

Mechanická energie harmonického oscilátoru je tedy skutečně na čase nezávislá, je konstantní. Potenciální energie a kinetická energie lineárního oscilátoru jako funkce času jsou znázorněny na obr. 16.7a a jako funkce výchylky na obr. 16.7b.



**Obr. 16.7** (a) Potenciální energie  $E_p(t)$ , kinetická energie  $E_k(t)$  a celková mechanická energie  $E$  harmonického oscilátoru jako funkce času. Všimněte si, že všechny energie jsou nezáporné a že během jedné periody dojde dvakrát k dosažení maxima jak u kinetické, tak u potenciální energie. (b) Potenciální energie  $E_p(x)$ , kinetická energie  $E_k(x)$  a celková mechanická energie  $E$  harmonického oscilátoru s amplitudou výchylky  $x_m$  jako funkce výchylky  $x$ . Pro  $x = 0$  je veškerá mechanická energie tvořena energií kinetickou, pro  $x = \pm x_m$  naopak energií potenciální.

Nyní je již patrně pochopitelné, proč obvykle zahrnuje kmitající systém jednak jistý element spojený s tendencí návratu do rovnovážné polohy, jednak jistý element setrvačnosti: první z nich na sebe váže potenciální energii a druhý energii kinetickou.



**KONTROLA 3:** Těleso na obr. 16.5 má v jistém okamžiku výchylku  $x = +2,0$  cm. V tomto okamžiku je jeho kinetická energie 3 J a pružina má potenciální energii pružnosti o velikosti 2 J. (a) Jak je velká kinetická energie tělesa při  $x = 0$ ? Jaké jsou hodnoty potenciální energie pružnosti při (b)  $x = -2,0$  cm, a při (c)  $x = -x_m$ ?

#### PŘÍKLAD 16.4

(a) Jaká je mechanická energie oscilátoru z příkladu 16.1?

**ŘEŠENÍ:** Dosadíme údaje z př. 16.1 do rov. (16.23):

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}(65 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})(0,11 \text{ m})^2 = 0,393 \text{ J} \doteq 0,39 \text{ J.} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato hodnota zůstává během pohybu konstantní.

(b) Jaká je potenciální energie tohoto oscilátoru v okamžiku, kdy se těleso nachází na polovině cesty k bodu obratu, tj. jestliže  $x = \pm x_m/2$ ?

**ŘEŠENÍ:** Pro libovolnou výchylku je potenciální energie určena vztahem  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ . V našem případě

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}x_m\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kx_m^2\right) = \frac{1}{4}E = \frac{1}{4}(0,393 \text{ J}) = 0,098 \text{ J.} \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jaká je kinetická energie oscilátoru při  $x = x_m/2$ ?

**ŘEŠENÍ:** Kinetickou energii nalezneme prostým odčítáním:

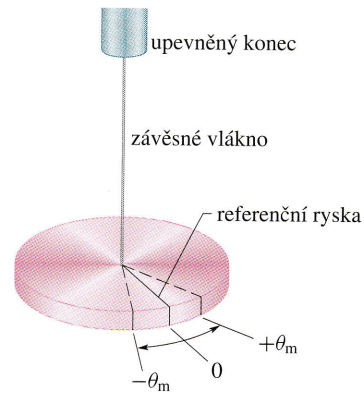
$$E_k = E - E_p = 0,393 \text{ J} - 0,098 \text{ J} \doteq 0,30 \text{ J.} \quad (\text{Odpověď})$$

Jestliže se tedy kdykoliv během kmitání těleso nachází v bodě  $x = x_m/2$ , má 25 % jeho mechanické energie formu energie potenciální a 75 % formu kinetické energie.

## 16.5 TORZNÍ KMITY

Na obr. 16.8 vidíme jinou variantu harmonického oscilátoru. Na rozdíl od předchozích příkladů, kde hybnou silou bylo protažení či stlačení pružiny, zde působí kroucení závěsného vlákna. Uvedené zařízení se nazývá **torzní kyvadlo**, slovo **torze** znamená kroucení.

Jestliže pootočíme disk na obr. 16.8 vzhledem k jeho rovnovážné poloze (v ní ukazuje ryska na značku 0) a pak uvolníme, začne ryska kmitat kolem rovnovážné polohy;



**Obr. 16.8** Torzní kyvadlo je otáčivá varianta lineárního harmonického oscilátoru z obr. 16.5. Disk kmitá ve vodorovné rovině; referenční ryska se vychyluje s úhlovou amplitudou  $\theta_m$ . V průběhu kroucení na sebe závěsné vlákno váže potenciální energii, podobně jako ji dříve vázala pružina. Kroucením se současně vytváří vratný točivý moment.

dojde k **torzním kmitům**. Při úhlové výchylce rysky  $\theta$  v libovolném z obou směrů vzniká vratný silový moment, určený vztahem

$$M = -\kappa\theta. \quad (16.24)$$

Konstanta  $\kappa$  (řecké písmeno *kappa*) se jmenuje **torzní tuhost** neboli **tuhost ve zkrutu**. Její velikost závisí na délce závěsného vlákna, na jeho průměru a na materiálu, z něhož je vlákno vyrobeno.

Při srovnání rov. (16.24) a (16.9) začínáte tušit, že rov. (16.24) je vlastně torzní varianta Hookova zákona. Pokusíme se tedy transformovat rov. (16.12), udávající periodu lineárního oscilátoru, na rovnici pro periodu torzního oscilátoru. V rov. (16.12) předně nahradíme tuhost pružiny  $k$  veličinou, která nyní měří velikost vratné tendence; tou je podle rov. (16.24) torzní tuhost  $\kappa$ . Dále nahradíme v rov. (16.12) hmotnost  $m$  veličinou, která jí nyní odpovídá, tj. která nyní vyjadřuje setrvačnou tendenci při otáčení disku; tou je moment setrvačnosti  $I$  kmitajícího disku. Tyto dvě substituce nás již přivádějí ke vztahu

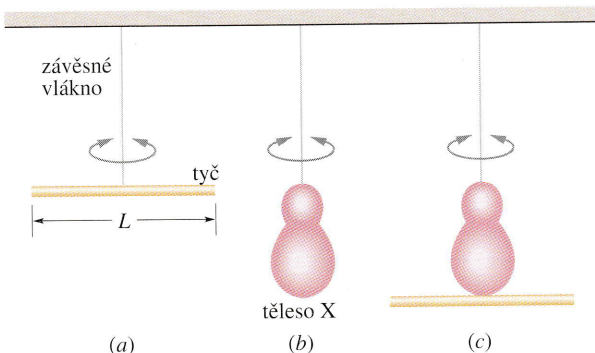
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (\text{torzní kyvadlo}) \quad (16.25)$$

pro periodu torzního oscilátoru neboli torzního kyvadla.

#### PŘÍKLAD 16.5

Na obr. 16.9a vidíme tenkou tyč délky  $L = 12,4$  cm o hmotnosti  $m = 135$  g, zavěšenou uprostřed na dlouhém vlákne. Pro tento torzní oscilátor jsme změřili periodu  $T_a = 2,53$  s. Na obr. 16.9b je znázorněno nepravidelné těleso X, zavěšené

na stejném vlákně. Pro tento torzní oscilátor jsme naměřili periodu  $T_b = 4,76$  s.



**Obr. 16.9** Příklad 16.5. Tři zobrazená torzní kyvadla jsou tvořena závěsným vláknem a (a) tyčí, (b) nepravidelným tělesem a (c) tyčí pevně spojenou s nepravidelným tělesem.

(a) Jaký je moment setrvačnosti tělesa X vzhledem k ose, určené závěsným vláknem?

**ŘEŠENÍ:** Podle tab. 11.2e je moment setrvačnosti tenké tyče vzhledem k ose, procházející středem tyče kolmo na její osu, roven  $\frac{1}{12}mL^2$ . Máme tedy

$$I_a = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}(0,135 \text{ kg})(0,124 \text{ m})^2 = 1,73 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Napišme nyní dvakrát rov. (16.25); jednou pro tyč a podruhé pro těleso X:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}} \quad \text{a} \quad T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}.$$

Spodní indexy zde odpovídají po řadě obr. 16.9a a 16.9b. Torzní konstanta  $\kappa$  vyjadřuje vlastnosti vlákna a to je na obou obrázcích stejné. Liší se pouze momenty setrvačnosti a periody.

Nyní obě uvedené rovnice umocníme a druhou z nich vydělíme rovnicí první. Výsledný vztah představuje rovnici pro  $I_b$ . Jejím řešením dostaneme

$$I_b = I_a \frac{T_b^2}{T_a^2} = (1,73 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \frac{(4,76 \text{ s})^2}{(2,53 \text{ s})^2} = 6,12 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká by byla perioda kmitů torzního oscilátoru na obr. 16.9c, vzniklého spojením obou uvažovaných těles a jejich zavěšením na uvažované vlákno?

**ŘEŠENÍ:** Opět napíšeme dvakrát rov. (16.25), avšak tentokrát jako

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}} \quad \text{a} \quad T_c = 2\pi\sqrt{\frac{I_c}{\kappa}}.$$

Sestavíme opět podíl druhého a prvního výrazu a dosadíme  $I_c = I_a + I_b$ . Dostaneme tak

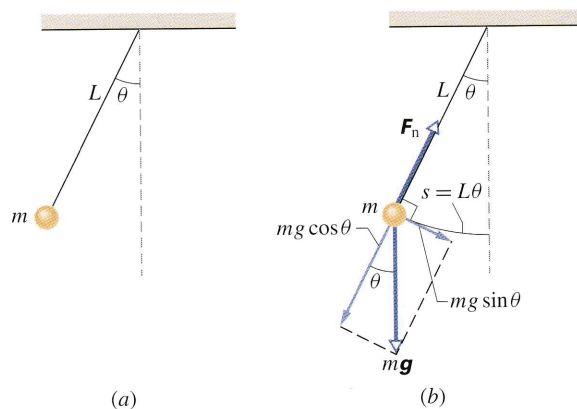
$$\begin{aligned} T_c &= T_a \sqrt{\frac{I_c}{I_a}} = T_a \sqrt{\frac{I_a + I_b}{I_a}} = T_a \sqrt{1 + \frac{I_b}{I_a}} = \\ &= (2,53 \text{ s}) \sqrt{1 + \frac{(6,12 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)}{(1,73 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)}} = \\ &= 5,39 \text{ s}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

## 16.6 KYVADLA

Nyní se zaměříme na jistou třídu harmonických oscilátorů, u nichž je vratný element spojen s gravitační silou, a nikoliv s elastickými vlastnostmi vlákna při jeho kroucení, popřípadě se stlačením a protažením pružiny.

### Matematické kyvadlo

Upevněme dlouhé vlákno na nosník a zavěsme na jeho spodní konec jablko. Když jablko slabě vychýlíme a pak uvolníme, bude jeho další pohyb periodický. Avšak je toto kývání harmonický pohyb? V idealizované situaci budeme uvažovat **matematické kyvadlo**, abstraktní objekt, tvořený bodovou částicí o hmotnosti  $m$  (závaží kyvadla) a nehmotným pevným vláknem délky  $L$ . Vše je znázorněno na obr. 16.10a: závaží se volně houpe tam a zpět v rovině stránky, tj. doleva a doprava od svislé přímky vedené bodem závěsu.



**Obr. 16.10** (a) Matematické kyvadlo. (b) Na závaží působí dvě síly: tíhová síla  $m\mathbf{g}$  a síla vlákna  $\mathbf{F}_n$ . Tečná složka tíhové síly  $m\mathbf{g} \sin \theta$  představuje vratnou sílu; snaží se vrátit závaží do rovnovážné polohy.

Setrvačný element tohoto kyvadla je spojen s částicí hmotnosti  $m$ . Vratný element spočívá v přitažlivém působení mezi částicí a Zemí. Změna potenciální energie je

určena změnou výšky částice nad povrchem Země; na vertikální pohyb závaží můžeme pohlížet jako na změnu délky „gravitační pružiny“.

Na závaží působí dvě síly, obě jsou zobrazeny na obr. 16.10b: tíhová síla  $mg$  a síla vlákna  $F_n$ . Tíhovou sílu rozložíme na radiální složku  $mg \cos \theta$  a na složku  $mg \sin \theta$  tečnou k dráze částice, a ta právě představuje vratnou sílu. Působí totiž vždy proti výchylce částice a snaží se ji vrátit do *rovnovážné polohy* ( $\theta = 0$ ), kde by byla, kdyby nekmitala. Napišme tedy vratnou sílu ve tvaru

$$F = -mg \sin \theta, \quad (16.26)$$

ve kterém záporné znamení upozorňuje, že síla působí proti výchylce.

Předpokládejme nyní, že úhel  $\theta$  na obr. 16.10 je malý. Výraz  $\sin \theta$  je tedy přibližně roven úhlu  $\theta$ , vyjádřenému v radiánech. (Například pro  $\theta = 5,00^\circ$ , tj. pro  $\theta = 0,0873$  rad, dostaneme  $\sin \theta = 0,0872$  — odchylka činí pouze něco kolem 0,1 %.) Dále, výchylku částice  $s$  budeme měřit podél její obloukové trajektorie; je tedy rovna  $L\theta$ . Celkově nabývá rov. (16.26) pro malá  $\theta$  tvar

$$F \approx -mg\theta. \quad (16.27)$$

Letný pohled zpátky na rov. (16.9) nám ukazuje, že zde máme opět tvar podobný Hookovu zákonu. Roli výchylky  $x$  hraje nyní úhlová výchylka  $\theta$ . Jestliže je tedy úhlová výchylka matematického kyvadla malá, můžeme jej pokládat za harmonický oscilátor, podobný soustavě pružina + těleso na obr. 16.5. Jinými slovy, kývání závaží je harmonický pohyb. Amplitudou úhlové výchylky  $\theta$  je nyní **úhlová amplituda**  $\theta_m$ , tj. největší úhel při kývání. Roli tuhosti pružiny  $k$  hraje veličina  $mg/L$ , tuhost „efektivní gravitační pružiny“ kyvadla.

Periodu kmitů matematického kyvadla získáme z rovnice (16.12), jestliže v ní za  $k$  dosadíme  $mg/L$ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}}, \quad (16.28)$$

tedy celkově

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (\text{matematické kyvadlo}). \quad (16.29)$$

Rov. (16.29) platí pouze v případě, že úhlová amplituda kmitání  $\theta_m$  je malá (pokud nebude řečeno jinak, považujeme tuto podmínku v úkolech této kapitoly za splněnou).

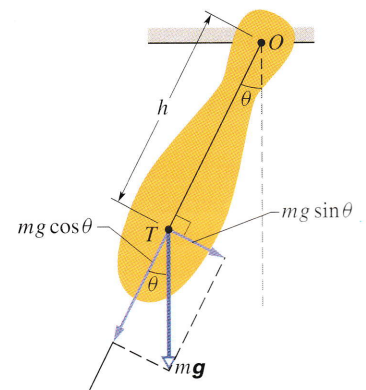
Může se zdát, že v rov. (16.29) chybí element setrvačnosti, protože perioda nám vyšla nezávislá na hmotnosti

částice. Příčina je však patrná z rov. (16.28): vratná tendence, měřená tuhostí „efektivní gravitační pružiny“  $mg/L$ , je sama o sobě úměrná hmotnosti částice. Obě hmotnosti se tedy v rov. (16.28) nakonec zkrátí.

I zde se během každého cyklu mění kinetická energie kyvadla v potenciální a naopak (obr. 8.7).

## Fyzické kyvadlo

Skutečná kyvadla se většinou výrazně odlišují od kyvadla matematického. Na obr. 16.11 vidíme obecné **fyzické kyvadlo**; tak budeme nazývat skutečná kyvadla, kde hmota není soustředěna do jediného bodu. Tíhová síla  $mg$  působí v těžišti  $T$ .



**Obr. 16.11** Fyzické kyvadlo. Vratný silový moment je  $(mg \sin \theta)(h)$ . Při  $\theta = 0$  se těžiště  $T$  nachází přímo pod bodem závěsu  $O$ .

Když vychýlíme kyvadlo na obr. 16.11 z rovnovážné polohy v libovolném směru o úhel  $\theta$ , vznikne vratný silový moment  $M$ . Tento moment působí vzhledem k ose procházející bodem závěsu  $O$  a platí:

$$M = -(mg \sin \theta)(h). \quad (16.30)$$

Zde  $mg \sin \theta$  je tečná složka tíhové síly  $mg$  a  $h$  (délka úsečky  $OT$ ) je rameno síly pro tuto tečnou složku. Znaménko minus vyznačuje, že daný silový moment působí proti výchylce. Jinými slovy, silový moment se vždy snaží zmenšit úhel  $\theta$  na nulu.

Nyní opět omezíme naše úvahy na případ malých výchylek, vezmeme tedy  $\sin \theta \approx \theta$ . Rov. (16.30) tak nabývá tvar

$$M \approx -(mgh)\theta. \quad (16.31)$$

Srovnání s rov. (16.24) ukazuje, že jde o analogický případ. V případě *malé* úhlové amplitudy  $\theta_m$  vykonává fyzické kyvadlo harmonický pohyb. Výraz  $mgh$  v rov. (16.31) hraje nyní roli torzní konstanty  $\kappa$  z rov. (16.24). Jestliže tedy provedeme tuto substituci v rov. (16.25), dostaneme pro

periodu fyzického kyvadla vztah (stále za podmínky malé úhlové amplitudy  $\theta_m$ )

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (\text{fyzické kyvadlo}). \quad (16.32)$$

Zde  $I$  je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose, která prochází bodem závěsu kolmo k rovině kývání, a  $h$  je vzdálenost bodu závěsu od těžiště.

Intuitivně je jasné, že se fyzické kyvadlo nebude kývat, jestliže jej zavěšíme v těžišti; bude se ovšem otáčet. Náš vzorec pro dobu kmitu totiž platí jen pro malou výchylku, tj. malý úhel  $\theta$ . V případě  $h \rightarrow 0$  však i sebemenší podnět způsobí, že tato podmínka nebude splněna a že místo (malých) kyvů dojde prostě k otáčení kolem osy — podobně jako kdybychom do kyvadla s větším  $h$  velmi prudce vrazili. I frekvenci těchto otáček lze ovšem spočítat, ale nikoli podle vzorce (16.32) platného pro *malé* úhlové amplitudy.

Každému fyzickému kyvadlu, které kmitá kolem bodu závěsu  $O$  s periodou  $T$ , odpovídá matematické kyvadlo jisté délky  $L_0$  kmitající se stejnou periodou  $T$ . Tuto tzv. **redukovanou délku**  $L_0$  lze zjistit z rov. (16.29). Pro daný bod závěsu  $O$  fyzického kyvadla můžeme tak vždy určit tzv. **střed kyvu** — bod  $O'$ , ležící na spojnici bodu závěsu  $O$  a těžiště ve vzdálenosti  $L_0$  od bodu závěsu ve směru k těžišti. Necháme-li poté toto kyvadlo kývat kolem středu kyvu  $O'$  (jako tzv. **reverzní kyvadlo**), zjistíme, že se kývá se stejnou periodou  $T$ , jako když bylo zavěšeno v bodě  $O$ . Naopak, experimentálním nalezením bodů  $O$ ,  $O'$  s touto vlastností lze určit  $L_0$  a z něj a z periody  $T$  vypočítat velmi přesně hodnotu tíhového zrychlení  $g$ .

Poznamenejme ještě, že matematické kyvadlo lze pokládat za speciální případ fyzického kyvadla na obr. 16.11. Skutečně, v případě matematického kyvadla je vzdálenost  $h$  na obr. 16.11 jednoduše jeho délka  $L$  a moment setrvačnosti  $I$  je  $mL^2$ . Když tyto dvě veličiny dosadíme do rov. (16.32), vyjde nám

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

což je přesně rov. (16.29), tj. vztah pro periodu matematického kyvadla.

### Měření tíhového zrychlení

Fyzickým kyvadlem lze měřit tíhové zrychlení  $g$  — tisíce takových měření bylo provedeno během geologických průzkumů.

Uvažme pro jednoduchost kyvadlo tvořené homogenní tyčí délky  $L$ , zavěšenou na jednom konci. Pro takové kyvadlo je veličina  $h$  v rov. (16.32), tj. vzdálenost mezi bodem závěsu a těžištěm, rovna  $\frac{1}{2}L$ . Dále potřebujeme znát moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení. Ta je kolmá k ose tyče a prochází jejím koncem; z tab. 11.2f zjistíme  $I = \frac{1}{3}mL^2$ . Nakonec dosadíme  $h = \frac{1}{2}L$  a  $I = \frac{1}{3}mL^2$  do rov. (16.32) a řešíme tuto rovnici vzhledem ke  $g$ . Výsledek je

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}. \quad (16.33)$$

Jestliže tedy změříme délku tyče  $L$  a periodu kmitů  $T$ , můžeme vypočítat hodnotu  $g$ . (Pro zvýšení přesnosti měření se provádí celá řada vylepšení, například kyvadlo se pohybuje ve vakuové komoře).

**KONTROLA 4:** Tři fyzická kyvadla hmotností  $m_0$ ,  $2m_0$ , a  $3m_0$  (z různých materiálů), mají stejný tvar, velikost a bod závěsu. Seřadte je sestupně podle jejich period kmitů.

### PŘÍKLAD 16.6

Metrová tyč na obr. 16.12a, zavěšená na jednom konci, tvoří fyzické kyvadlo.

(a) Jaká je jeho perioda kmitání?

**ŘEŠENÍ:** Z tab. 11.2f zjistíme moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení, která je kolmá k ose tyče a prochází jejím koncem:  $I = \frac{1}{3}mL^2$ . Vzdálenost  $h$  bodu závěsu od těžiště, které je v bodě  $T$  na obr. 16.12a, je  $\frac{1}{2}L$ . Po dosazení těchto dvou veličin do rov. (16.32) dostaneme

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2/3}{mg(L/2)}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2(1,00 \text{ m})}{3(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}} = \\ &= 1,64 \text{ s}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned} \quad (16.34)$$

(b) Uvažme opět metrovou tyč na obr. 16.12a. Jaká je redukovaná délka  $L_0$  mezi bodem závěsu  $O$  a středem kyvu?

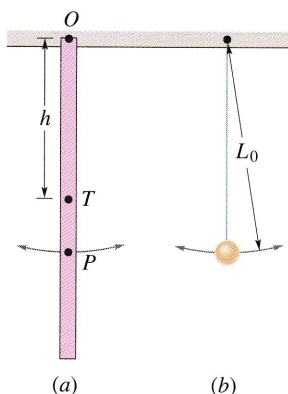
**ŘEŠENÍ:** K určení středu kyvu tyče potřebujeme znát délku  $L_0$  matematického kyvadla (obr. 16.12b), jehož perioda se shoduje s periodou kmitů tyče. Musí se tedy shodovat pravé strany rov. (16.29) a (16.34):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Tato podmínka již dává požadovanou délku

$$L_0 = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}(100 \text{ cm}) = 66,7 \text{ cm}. \quad (\text{Odpověď})$$

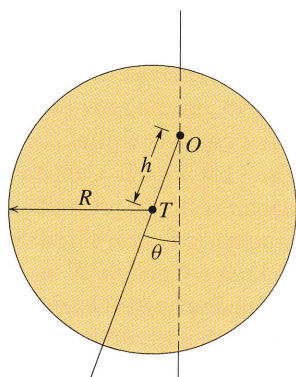
Vypočtená délka je rovna vzdálenosti bodu  $P$  na obr. 16.12a od bodu závěsu  $O$ . Bod  $P$  je tedy středem kyvu daného fyzického kyvadla vzhledem k danému bodu závěsu.



**Obr. 16.12** Příklad 16.6. (a) Metrová tyč, zavěšená na jednom konci, tvoří fyzické kyvadlo. (b) Matematické kyvadlo, jehož délka  $L_0$  je zvolena z podmínky rovnosti period obou kyvadel. Vzdálenost bodu  $P$  původního kyvadla (a) a bodu závěsu je  $L_0$ . Bod  $P$  je tedy střed kyvu původního kyvadla vzhledem k danému bodu závěsu.

### PŘÍKLAD 16.7

Kotouč o poloměru  $R = 12,5$  cm se otáčí kolem bodu  $O$ , umístěného ve vzdálenosti  $h$  od jeho středu  $T$  (obr. 16.13). Při  $h = R/2$  má vzniklé fyzické kyvadlo periodu  $T = 0,871$  s. Jaké gravitační zrychlení  $g$  je v místě, ve kterém se kyvadlo nachází?



**Obr. 16.13** Příklad 16.7. Fyzické kyvadlo je tvořeno homogenním diskem, volně pohyblivým kolem bodu závěsu  $O$ . Vzdálenost bodu závěsu  $O$  od těžiště  $T$  je rovna polovině poloměru disku.

**ŘEŠENÍ:** Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose, procházející jeho těžištěm ve směru kolmém k rovině disku, má hodnotu  $I_T = \frac{1}{2}mR^2$ . Podle Steinerovy věty je moment setrvačnosti vůči ose, procházející bodem  $O$  a rovnoběžné s popsanou těžišťovou osou

$$I = I_T + mh^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{3}{4}mR^2.$$

V rov. (16.32) tedy uplatníme  $I = \frac{3}{4}mR^2$  a  $h = \frac{1}{2}R$ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{3mR^2/4}{mg(R/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}.$$

Nakonec tuto rovnici vyřešíme vzhledem ke  $g$ :

$$g = \frac{6\pi^2 R}{T^2} = \frac{6\pi^2(0,125 \text{ m})}{(0,871 \text{ s})^2} = 9,76 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (\text{Odpověď})$$

### PŘÍKLAD 16.8

Tučňák na obr. 16.14 se určitě vyzná ve vodních sportech. Právě se chystá ke skoku z homogenního skokanského prkna, které se vlevo volně otáčí kolem čepu a vpravo je pevně spojeno s pružinou. Délka prkna je  $L = 2,0$  m, jeho hmotnost  $m = 12$  kg, tuhost pružiny  $k$  činí  $1\,300 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  a její hmotnost je zanedbatelná. Skok tučňáka vyvolá kmitání prkna a pružiny s malou amplitudou. Předpokládejme, že prkno je dostatečně pevné, takže se při kmitání neprohýbá. Nalezněte periodu kmitání  $T$ .

**ŘEŠENÍ:** Pružina působí na prkno proměnným momentem síly  $M$  (vzhledem k ose otáčení prkna). Prkno se proto v čepu otáčí s proměnným úhlovým zrychlením  $\varepsilon$ . Součástí úlohy je pružina a napadne nás, že vzniklé kmitání by mohl být harmonický pohyb. Ponechme však prozatím tuto otázku otevřenou. Místo toho použijeme nejprve rov. (11.30) spolu s rov. (11.35):

$$M = LF \sin 90^\circ = I\varepsilon. \quad (16.35)$$

Zde  $I$  je moment setrvačnosti skokanského prkna při jeho otáčení kolem čepu,  $F$  je síla, kterou působí pružina na pravý konec prkna, a  $90^\circ$  je úhel, který svírá podélná osa prkna se směrem síly  $F$ .

Prkno představuje v podstatě tenkou tyč upevněnou na jednom konci, takže podle tab. 11.2f máme  $I = mL^2/3$ . Pružina vytváří sílu  $F = -kx$ , kde  $x$  je svislá lineární výchylka pravého konce prkna.

Tyto výrazy pro  $F$  a  $I$  dosadíme do druhého a třetího členu v rov. (16.35). Máme tedy

$$-Lkx = \frac{mL^2\varepsilon}{3}. \quad (16.36)$$

Poslední rovnice představuje kombinaci lineární svislé výchylky  $x$  a úhlového zrychlení  $\varepsilon$  při rotaci prkna kolem čepu. Můžeme ji však přepsat do tvaru, který obsahuje pouze úhlové veličiny. Podle rov. (11.15) totiž platí

$$s = \theta r.$$

Zde  $\theta$  je úhlová výchylka prkna při jeho rotaci kolem čepu,  $r = L$  je poloměr této rotace a  $s$  značí délku oblouku, po kterém se pohybuje pravý konec prkna. Pro malé úhlové výchylky  $\theta$  můžeme délku oblouku  $s$  aproximovat svislou výchylkou  $x$ . Napišeme tedy  $x = \theta L$  a dosadíme do rov. (16.36):

$$-Lk\theta L = \frac{mL^2\varepsilon}{3}.$$

Po jednoduché úpravě nakonec máme

$$\varepsilon = -\frac{3k}{m}\theta. \quad (16.37)$$

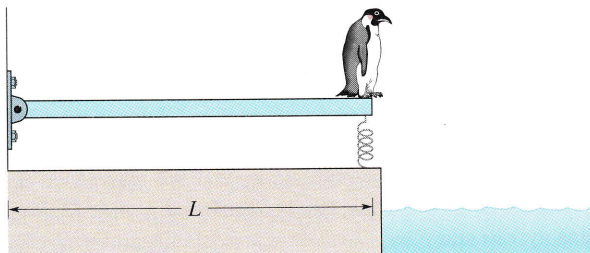
Tato rovnice je úhlová varianta základní rov. (16.7). Říká nám, že prkno skutečně vykonává harmonické kmity s úhlovým zrychlením  $\varepsilon$  a s úhlovou výchylkou  $\theta$ . Srovnání rov. (16.37) a (16.7) navíc poskytuje úhlovou frekvenci pro tento oscilátor:

$$\omega^2 = \frac{3k}{m},$$

to znamená  $\omega = \sqrt{3k/m}$ . Nakonec uplatníme rov. (16.4), podle které  $\omega = 2\pi/T$ , a tedy

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} = 2\pi\sqrt{\frac{(12 \text{ kg})}{3(1300 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})}} = \\ &= 0,35 \text{ s}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

S překvapením zjišťujeme, že výsledná perioda nezávisí na délce prkna  $L$ . Kdybychom uvažovali působení tíhové síly prkna, dostali bychom stejný výsledek, avšak rovnovážná poloha by byla níž (viz příklad 16.3).

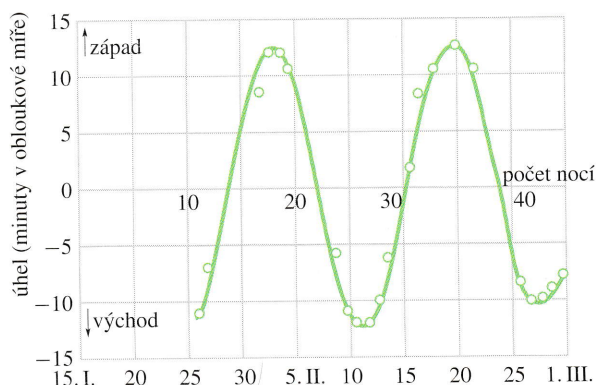


Obr. 16.14 Příklad 16.8. Skok tučňáka vyvolá kmitání pružiny a skokanského prkna. Na levém konci se prkno otáčí kolem čepu.

## 16.7 KMITÁNÍ A ROVNOMĚRNÝ KRUHOVÝ POHYB

V roce 1610 objevil Galileo s použitím svého nově sestrojeného dalekohledu čtyři hlavní měsíce planety Jupiter. Při pozorování, prováděném v průběhu několika týdnů, se každý z měsíců pohyboval tam a zpět v okolí planety. Dnes

bychom asi řekli, že pohyb každého měsíce se jevil jako harmonický pohyb kolem disku Jupitera coby rovnovážné polohy. Záznamy těchto pozorování, psané Galileovou vlastní rukou, jsou dodnes poučné. A. P. French, pracovník MIT, sestrojil na základě Galileových záznamů časovou závislost zdánlivé polohy měsíce Callisto vzhledem k Jupiteru. Výslednou křivku vidíme na obr. 16.15: malé kroužky znázorňují přímo Galileovy hodnoty a samotná křivka předsta-



Obr. 16.15 Úhel mezi Jupiterem a jeho měsícem Callisto, měřený při pozorování ze Země. Malé kroužky odpovídají Galileově pozorování z roku 1610. Proložená křivka silně připomíná časovou závislost výchylky pro harmonický pohyb. Ze známé střední vzdálenosti Jupitera od Země spočteme, že 10 úhlových minut odpovídá oblouku délky zhruba  $2 \cdot 10^6$  km. (Převzato z knihy A. P. French, *Newtonian Mechanics*, W. W. Norton & Comp., New York, 1971, p. 288.)

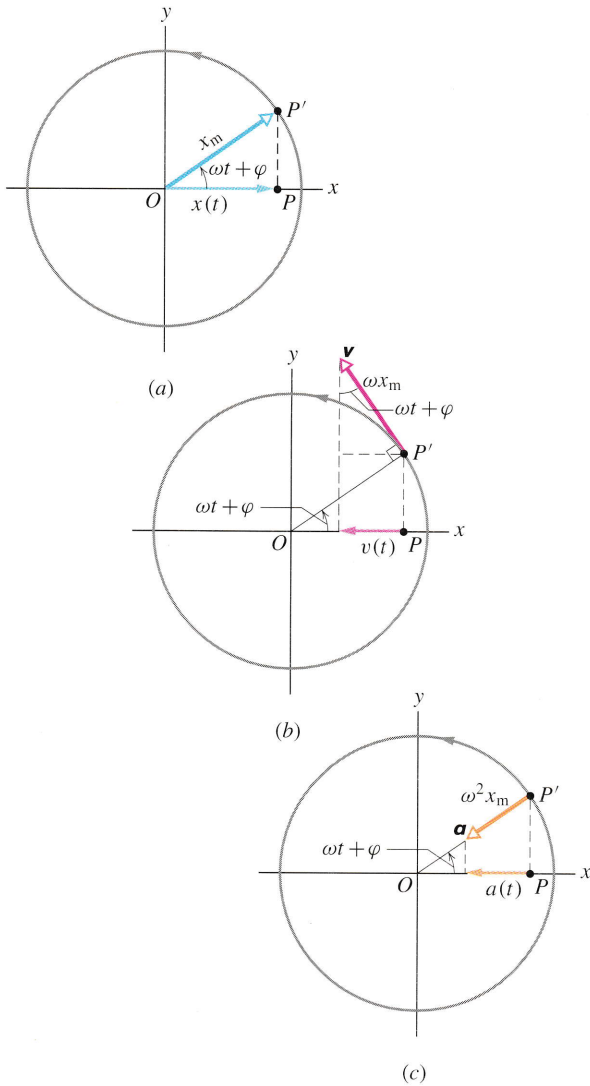
vuje nejlepší aproximaci těchto hodnot, získanou vhodnými numerickými metodami. Křivka silně připomíná výchylku pro harmonický pohyb, určenou rov. (16.3). Perioda pohybu, odečtená přímo z grafu, činí přibližně 16,8 dnů.

Ve skutečnosti však krouží Callisto kolem Jupitera s prakticky konstantní rychlostí po prakticky kruhové dráze. Jeho skutečný pohyb tedy není ani zdaleka harmonický; je to rovnoměrný kruhový pohyb. A to, co Galileo viděl, byla projekce rovnoměrného kruhového pohybu na přímku, ležící v rovině pohybu. Pozoruhodná Galileova měření nás tak přivádějí k závěru, že rovnoměrný kruhový pohyb, pozorovaný ze strany, dává harmonický pohyb. Řečeno formálněji:

Projekcí rovnoměrného kruhového pohybu na průměr kružnice, po níž kruhový pohyb probíhá, vzniká harmonický pohyb.

Na obr. 16.16a vidíme příklad takové projekce. Referenční částice  $P'$  vykonává rovnoměrný kruhový pohyb; pohybuje se (konstantní) úhlovou rychlostí  $\omega$  po referenční

kružnici. Poloměr kružnice  $x_m$  udává současně velikost polohového vektoru částice. Úhel, který svírá průvodič částice s osou  $x$  v čase  $t$ , je roven  $\omega t + \varphi$ , kde  $\varphi$  je velikost tohoto úhlu v čase  $t = 0$ .



**Obr. 16.16** (a) Referenční částice  $P'$  se rovnoměrně pohybuje po referenční kružnici o poloměru  $x_m$ . Polohu částice  $P$  získáme projekcí polohy  $P'$  na osu  $x$ . Částice  $P$  vykonává harmonický pohyb. (b) Projekcí vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$  referenční částice dostaneme rychlost harmonického pohybu. (c) Projekcí vektoru zrychlení  $\mathbf{a}$  referenční částice dostaneme zrychlení harmonického pohybu.

Projekcí polohy částice  $P'$  na osu  $x$  dostaneme novou polohu. Řekněme, že se v ní nachází jiná částice, částice  $P$ . Jinými slovy, projekcí polohy částice  $P'$  na osu  $x$  dostaneme polohu  $x(t)$  částice  $P$ . Snadno vidíme, že platí

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi).$$

To je přesně rov. (16.3). Náš závěr je tedy správný: jestliže referenční částice  $P'$  vykonává rovnoměrný kruhový pohyb, vykonává projektovaná částice  $P$  harmonický pohyb.

Tento vztah vrhá nové světlo na úhlovou frekvenci  $\omega$  harmonického pohybu. Ukazuje nám, odkud se vzalo adjektivum „úhlová“. Veličina  $\omega$  je jednoduše konstantní úhlová rychlost pohybu referenční částice  $P'$  po referenční kružnici; fázová konstanta  $\varphi$  je určena polohou referenční částice  $P'$  na referenční kružnici v čase  $t = 0$ .

Na obr. 16.16b vidíme rychlost referenční částice  $P'$ . Velikost vektoru rychlosti je  $\omega x_m$ , jeho projekcí na osu  $x$  dostaneme

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi),$$

což je přesně rov. (16.5). Rychlost částice  $P$  na obr. 16.16b míří doleva, ve směru klesající výchylky  $x$ . Tomu odpovídá záporné znaménko v uvedeném vzorci pro rychlost.

Obr. 16.16c ukazuje zrychlení referenční částice  $P'$ . Velikost vektoru zrychlení  $\omega^2 x_m$  a jeho projekce na osu  $x$  má tvar

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi),$$

tedy přesně tvar rov. (16.6). Ať už tedy zkoumáme výchylku, rychlost nebo zrychlení, projekcí rovnoměrného kruhového pohybu dostaneme vskutku harmonický pohyb.

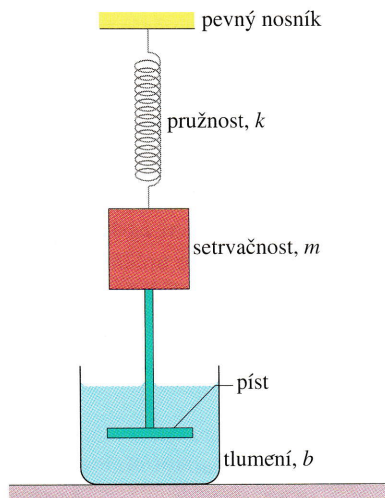
## 16.8 TLUMENÝ OSCILÁTOR

Kyvadlo ponořené do vody se patrně vůbec kývat nebude; bude se třít o vodu natolik, že se jeho pohyb rychle utlumí. Lepší je to u kyvadla ve vzduchu, ale i zde se pohyb po čase zastaví, protože vzduch opět působí na kyvadlo třecí silou, a tím mu odebírá mechanickou energii. Tření působí také v bodě závěsu kyvadla.

Jestliže vnější síla tlumí pohyb oscilátoru, hovoříme o **tlumeném** oscilátoru, popřípadě o **tlumeném** kmitání. Idealizovaný příklad tlumeného oscilátoru vidíme na obr. 16.17: těleso o hmotnosti  $m$  kmitá na pružině tuhosti  $k$ . Těleso je spojeno tyčí s pístem, ponořeným v kapalině (hmotu tyče i pístu zanedbáme). Při pohybu pístu nahoru a dolů působí na něj (a tedy na celý kmitající systém) kapalina brzdou třecí silou. V průběhu času se mechanická energie soustavy pružina + těleso zmenšuje, její část se spotřebuje na zahřátí kapaliny a pístu.

Předpokládejme, že **brzdná síla**  $F_b$ , kterou působí kapalina na píst, je úměrná rychlosti  $\mathbf{v}$  pístu a tělesa (tento předpoklad splněn, pokud se píst pohybuje pomalu). Je tedy

$$F_b = -bv, \quad (16.38)$$



**Obr. 16.17** Idealizovaný příklad tlumeného harmonického oscilátoru. Píst ponořený do kapaliny působí na kmitající těleso tlumící silou.

kde  $b$  je **součinitel útlumu**. Tato konstanta závisí na vlastnostech pístu a kapaliny. Její jednotka v soustavě SI je  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . Záporné znaménko ukazuje, že třecí síla působí vždy proti rychlosti. Na hmotné těleso tak působí výsledná síla

$$F_v = -kx - bv$$

neboli, jestliže položíme  $v = dx/dt$ ,

$$F_v = -kx - b \frac{dx}{dt}. \quad (16.39)$$

Tuto celkovou sílu dosadíme do druhého Newtonova zákona. Výsledkem je diferenciální rovnice

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

jejímž řešením je funkce

$$x(t) = x_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (16.40)$$

kde úhlová frekvence  $\omega'$  tlumeného oscilátoru je dána výrazem

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (16.41)$$

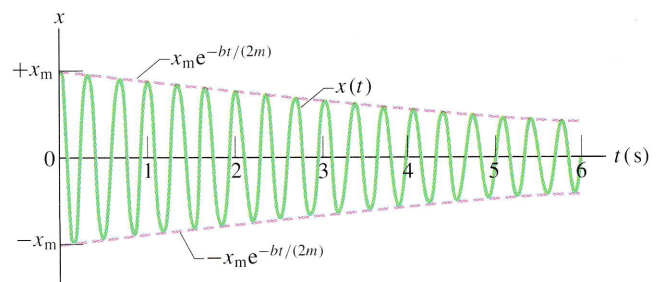
Jestliže tlumení úplně chybí, tj. jestliže  $b = 0$ , redukuje se rov. (16.41) na rov. (16.11) a dostáváme známý výraz  $\omega = \sqrt{k/m}$  pro úhlovou frekvenci netlumeného oscilátoru. Podobně se v tomto případě rov. (16.40) redukuje na

rov. (16.3) pro výchylku netlumeného oscilátoru. Jestliže je tlumení slabé, přesněji jestliže  $b \ll \sqrt{km}$ , platí  $\omega' \doteq \omega$ . Jestliže je naopak tlumení silné, bude při jisté kritické hodnotě součinitele útlumu  $b_c = 2\sqrt{km}$  výraz pod odmocninou v rov. (16.41) nulový a při ještě větším tlumení dokonce záporný. Řešení diferenciální rovnice se pak kvalitativně mění. Rozborem tohoto **aperiodického pohybu** se nebudeme dále zabývat.

Funkce v rov. (16.40) se chová jako oscilující funkce s postupně klesající amplitudou  $x_m e^{-bt/(2m)}$ . Tento závěr je také naznačen na obr. 16.18. Jak jsme viděli dříve, v případě netlumeného oscilátoru je mechanická energie konstantní a je dána rov. (16.23):  $E = \frac{1}{2} k x_m^2$ . U tlumeného oscilátoru mechanická energie s časem klesá. Pro slabé tlumení můžeme amplitudu  $x_m$  v rov. (16.23) nahradit výrazem  $x_m e^{-bt/(2m)}$ . Získáme tak závislost

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}, \quad (16.42)$$

která nám říká, že mechanická energie tlumeného oscilátoru klesá exponenciálně s časem.



**Obr. 16.18** Časová závislost výchylky tlumeného oscilátoru na obr. 16.17. Použité parametry odpovídají hodnotám v př. 16.9. Amplituda kmitání, určená výrazem  $x_m e^{-bt/(2m)}$ , klesá exponenciálně s časem.

### PŘÍKLAD 16.9

Tlumený oscilátor na obr. 16.17 je popsán parametry  $m = 250 \text{ g}$ ,  $k = 85 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  a  $b = 70 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$ .

(a) Určete periodu kmitání.

**ŘEŠENÍ:** Protože platí  $b \ll \sqrt{km} = 4,6 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , perioda je přibližně určena výrazem pro netlumený oscilátor. Z rov. (16.12) dostaneme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{(0,25 \text{ kg})}{(85 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1})}} = 0,34 \text{ s}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Za jak dlouho se zmenší amplituda kmitání na polovinu své počáteční velikosti?



**ŘEŠENÍ:** Závislost amplitudy na čase  $t$  je určena rovnicí (16.40). Amplituda klesá podle vztahu  $x_m e^{-bt/(2m)}$ . Její počáteční velikost v čase  $t = 0$  je  $x_m$ . Hledáme tedy takový čas  $t$ , který splňuje rovnici

$$x_m e^{-bt/(2m)} = \frac{1}{2} x_m.$$

Obě strany rovnice dělíme  $x_m$  a srovnáme přirozený logaritmus obou stran nové rovnice:

$$\ln \frac{1}{2} = \ln(e^{-bt/(2m)}) = -\frac{bt}{2m}$$

neboli

$$t = \frac{-2m \ln(1/2)}{b} = \frac{-2(0,25 \text{ kg})(\ln(1/2))}{(0,070 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1})} = 5,0 \text{ s.} \quad (\text{Odpověď})$$

Na základě výsledku části (a) můžeme také říci, že za vypočtenou dobu proběhne přibližně 15 kmitů.

(c) Za jak dlouho se zmenší mechanická energie oscilátoru na polovinu své počáteční velikosti?

**ŘEŠENÍ:** Vyjdeme z rov. (16.42); mechanická energie v čase  $t$  je rovna  $\frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}$ , její velikost v čase  $t = 0$  byla  $\frac{1}{2} k x_m^2$ . Hledáme tedy takový čas  $t$ , který splňuje rovnici

$$\frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} k x_m^2 \right).$$

Obě strany rovnice dělíme  $\frac{1}{2} k x_m^2$  a novou rovnici řešíme vzhledem k neznámé  $t$ , podobně jako v části (b). Nakonec dostaneme

$$t = \frac{-m \ln(1/2)}{b} = \frac{-(0,25 \text{ kg})(\ln(1/2))}{(0,070 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1})} = 2,5 \text{ s.} \quad (\text{Odpověď})$$

Výsledkem je tedy přesně polovina doby, vypočtené v části (b) úlohy, tj. přibližně 7,5 period. Nakonec poznamenejme, že číselné hodnoty parametrů z této vzorové úlohy byly použity na obr. 16.18.

**KONTROLA 5:** Uvažme tři tlumené oscilátory podle obr. 16.17. Jejich parametry jsou zadány v následující tabulce. Ve druhém sloupci tabulky je tuhost pružiny, ve třetím konstanta útlumu a ve čtvrtém hmotnost tělesa.

oscilátor 1	$2k_0$	$b_0$	$m_0$
oscilátor 2	$k_0$	$6b_0$	$4m_0$
oscilátor 3	$3k_0$	$3b_0$	$m_0$

Uspořádejte oscilátory sestupně podle doby, za kterou klesne jejich mechanická energie na jednu čtvrtinu své počáteční hodnoty.

## 16.9 NUCENÉ KMITY A REZONANCE

Když se někdo pasivně houpe na houpačce, je to příklad *volného kmitání*. Jestliže nějaká další osoba houpačku navíc periodicky tahá nebo tlačí, jako na obr. 16.19, probíhá *nucené kmitání*. V tomto případě se musíme zabývat *dvěma* úhlovými frekvencemi. (1) *Vlastní* úhlová frekvence  $\omega$  je úhlová frekvence systému náhle vyvedeného z rovnováhy a pak ponechaného volně kmitat. (2) Úhlová frekvence  $\omega_b$  vnější budicí síly.



**Obr. 16.19** Z fyzikálního hlediska jsou na obraze Nikolase Lancreta naznačeny dvě frekvence: (1) vlastní frekvence, tj. frekvence, s jakou by se slečna houkala, kdyby byla ponechána sama o sobě, a (2) frekvence, s jakou tahá její přítel za provaz. Rezonance nastane, jsou-li tyto frekvence shodné.

K představě nuceného kmitání harmonického oscilátoru použijeme opět obr. 16.17. Musíme ovšem předpokládat, že se „pevný nosník“ nyní pohybuje harmonicky nahoru a dolů s námi určenou úhlovou frekvencí  $\omega_b$ . U takového oscilátoru se nakonec ustaví nucené kmity s úhlovou frekvencí  $\omega_b$  budicí síly a s výchylkou

$$x(t) = x_m \cos(\omega_b t + \varphi), \quad (16.43)$$

kde  $x_m$  je amplituda nucených kmitů.

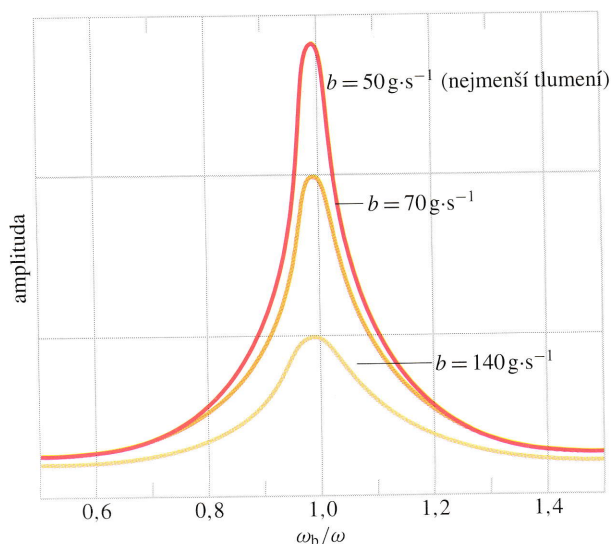
Velikost amplitudy výchylky  $x_m$  je dána poměrně komplikovanou funkcí proměnných  $\omega$  a  $\omega_b$ . Jednodušší je popsat amplitudu rychlosti nucených kmitů  $v_m$ : amplituda rychlosti je největší, jestliže splníme podmínku

$$\omega_b = \omega \quad (\text{rezonance}). \quad (16.44)$$

Tato podmínka **rezonance** je současně *přibližnou* podmínkou pro největší amplitudu nucených kmitů  $x_m$ . Jestliže strkáme houpačku s frekvencí rovnou její vlastní frekvenci, dosáhneme velké amplitudy výchylky i amplitudy rychlosti. Děti k tomu dospějí velmi rychle metodou zkoušek

a omylů. Jestliže strkáme s jinou frekvencí, buď vyšší, nebo nižší, amplitudy výchylky a rychlosti nucených kmitů budou malé.

Na obr. 16.20 je zobrazena závislost amplitudy výchylky nucených kmitů na úhlové frekvenci budící síly pro tři hodnoty konstanty útlumu  $b$ . Všimněte si, že ve všech třech případech je amplituda nucených kmitů největší přibližně pro  $\omega_b/\omega = 1$ , to znamená přibližně při splnění rezonanční podmínky rov. (16.44). Z křivek na obr. 16.20 je patrna i následující závislost: čím je tlumení slabší, tím je *rezonanční vrchol* vyšší a užší.

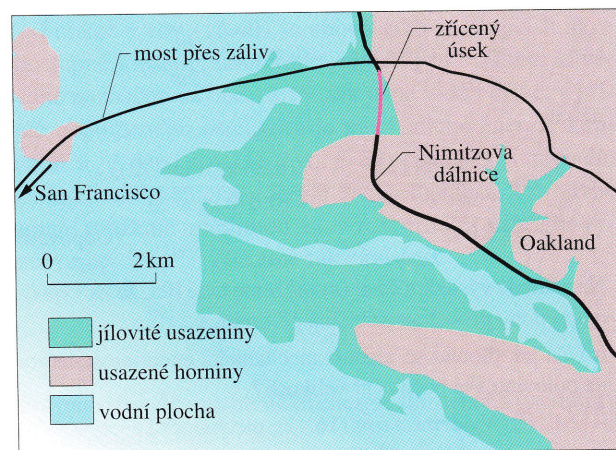


**Obr. 16.20** Amplituda výchylky nucených kmitů  $x_m$  se mění v závislosti na úhlové frekvenci  $\omega_b$  budící síly. Amplituda je největší přibližně při  $\omega_b/\omega = 1$ , tj. přibližně při splnění rezonanční podmínky. Křivky na obrázku odpovídají třem různým hodnotám konstanty útlumu  $b$ .

Všechny mechanické soustavy vykazují jednu nebo více vlastních frekvencí. Když na ně působí velká vnější budící síla s frekvencí, která je v blízkosti jedné z vlastních frekvencí soustavy, mohou vznikající nucené kmity způsobit mechanické porušení. Například letečtí konstruktéři musí zajistit, aby se vlastní frekvence křidel lišila od frekvence pístů při letových otáčkách motoru. Bylo by pochopitelně nebezpečné, kdyby se při určitých otáčkách motoru začalo křídlo divoce třepat.

Příkladem destruktivního působení rezonance je i zřícení 1,4 km dlouhého úseku Nimitzovy dálnice, které jsme viděli na úvodní fotografii této kapitoly. Při průchodu seizmických vln danou oblastí došlo ke kmitání podloží s největší amplitudou rychlosti na úhlové frekvenci okolo  $9 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Tato frekvence odpovídá téměř přesně vlastní

úhlové frekvenci horizontálních konstrukčních dílů dálnice. Příčina toho, že ke zřícení došlo právě jen v uvedeném úseku, je patrna na obr. 16.21: dálnice zde byla postavena na volně členěném jílovitém podloží, které během otřesů vykazovalo *přinejmenším pětkrát větší* amplitudu rychlosti, než tomu bylo u skalnatého podloží v ostatních úsecích dálnice.



**Obr. 16.21** Geologická struktura části Oaklandu v okolí zálivu San Francisco s vyznačením zříceného úseku Nimitzovy dálnice. (Převzato z článku „Sediment-Induced Amplification and the Collapse of the Nimitz Freeway“ autorů S. E. Hougha a ostatních, uveřejněného v časopise *Nature* 26. dubna 1990).

### Parametrická rezonance

Slečna z obr. 16.19, ale houpající se sama bez pomoci přítelky, stejně jako samostatně se houpající děti na obr. 16.1 jsou příkladem nového jevu — není to výše popsaná rezonance při působení vnější budící síly, ale tzv. **parametrická rezonance**. Při ní se soustava udržuje v kmitání tím, že se pravidelně mění její vhodný *vnitřní parametr*. V tomto případě se kýváním nohama vsedě anebo pokrčováním nohou vestoje mění moment setrvačnosti houpačky s pasažérem vůči ose rotace. Oproti obyčejné rezonanci jsou zde některé pozoruhodné rozdíly. Jeden úplný kmit houpačky je, řekněme, od levé krajní polohy přes nejnižší polohu, pravou krajní polohu, opět nejnižší polohu a zpět do výchozí levé krajní polohy. Během něj se ale dítě skrčí dvakrát — jde do kolen vždy, když jde houpačka dolů do nejnižší polohy! Rezanční frekvence  $\omega_p$  tohoto mechanismu houpání je tedy zřejmě dvojnásobná oproti vlastní frekvenci  $\omega$  houpačky; platí  $\omega_p = 2\omega$ . Další zvláštní odchylkou od nucených kmitů je to, že parametrickou rezonancí lze sice zesílit už existující kmit, ale nelze se s ní rozhoupat z naprostého klidu. Matematické vyšetřování takových kmitů je však i v nejjednodušším případě mnohem náročnější.

## PŘEHLED & SHRNU TÍ

### Frekvence

Libovolný periodický pohyb (libovolné kmitání) má svou *frekvenci*  $f$ , určující počet kmitů za jednu sekundu. V systému SI je jednotkou frekvence hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ kmit za sekundu} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (16.1)$$

### Perioda

*Perioda*  $T$  je čas potřebný k provedení jednoho úplného kmitu (jednoho úplného cyklu pohybu). Perioda souvisí s frekvencí vztahem

$$T = \frac{1}{f}. \quad (16.2)$$

### Harmonický pohyb

V případě *harmonického pohybu* je výchylka částice z rovnovážné polohy popsána vztahem

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{výchylka}), \quad (16.3)$$

ve kterém  $x_m$  je *amplituda* výchylky, veličina  $(\omega t + \varphi)$  je *fáze* pohybu a  $\varphi$  je *fázová konstanta*. *Úhlová frekvence*  $\omega$  souvisí s periodou a s frekvencí pohybu vztahy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{úhlová frekvence}). \quad (16.4)$$

První a druhá derivace rov. (16.3) určují časovou závislost rychlosti a zrychlení částice během harmonického pohybu:

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{rychlost}), \quad (16.5)$$

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{zrychlení}). \quad (16.6)$$

Kladná veličina  $\omega x_m$  v rov. (16.5) se nazývá *amplituda rychlosti* pohybu  $v_m$ . Kladná veličina  $\omega^2 x_m$  v rov. (16.6) se nazývá *amplituda zrychlení* pohybu  $a_m$ .

### Harmonický oscilátor

Jestliže částici o hmotnosti  $m$  vrací do rovnovážné polohy síla úměrná výchylce, tj.  $F = -kx$ , dojde k harmonickému kmitání s parametry  $\omega$  a  $T$ , kde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{úhlová frekvence}) \quad (16.11)$$

a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{perioda}). \quad (16.12)$$

Takový systém se nazývá harmonický oscilátor.

### Energie

Částice, která vykonává harmonický pohyb, má v libovolném čase kinetickou energii  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  a polohovou energii  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ . Jestliže neuvažujeme tření, zůstává celková mechanická energie  $E = E_k + E_p$  během pohybu konstantní, zatímco  $E_k$  a  $E_p$  se mění.

### Kyvadla

Harmonický pohyb vykazují například torzní kyvadlo na obrázku 16.8, matematické kyvadlo na obr. 16.10 a fyzické kyvadlo na obr. 16.11. V případě malých výchylek je pro tyto systémy perioda určena po řadě vztahy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (\text{torzní kyvadlo}), \quad (16.25)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (\text{matematické kyvadlo}) \quad (16.29)$$

a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (\text{fyzické kyvadlo}). \quad (16.32)$$

Ve všech případech se ve výrazu pro periodu objevuje podíl „setrvačného“ členu a „vratného“ členu. Vratný člen vyjadřuje velikost tendence k návratu do rovnovážné polohy.

### Kmitání a rovnoměrný kruhový pohyb

Harmonický pohyb vzniká také projekcí rovnoměrného kruhového pohybu na průměr kružnice, po níž kruhový pohyb probíhá. Obr. 16.16 ukazuje, jak všechny parametry rovnoměrného kruhového pohybu (poloha, rychlost a zrychlení) přecházejí uvedenou projekcí na odpovídající hodnoty pro harmonický pohyb.

### Tlumený oscilátor

U reálných kmitajících systémů se mechanická energie  $E$  během pohybu postupně zmenšuje, protože působí brzdící síly, které převádějí mechanickou energii na teplo. Říkáme, že pohyb reálného oscilátoru je tlumený. V případě, kdy je brzdící síla určena vztahem  $F_b = -bv$ , kde  $v$  je rychlost oscilátoru a  $b$  je *konstanta útlumu*, má časová závislost výchylky oscilátoru tvar

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (16.40)$$

kde  $\omega'$  je úhlová frekvence tlumeného oscilátoru, určená vztahem

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (16.41)$$

Pro malou hodnotu konstanty útlumu ( $b \ll \sqrt{km}$ ) tedy máme  $\omega' \doteq \omega$ , kde  $\omega$  je úhlová frekvence netlumeného oscilátoru. Pro

malá  $b$  ubývá mechanická energie oscilátoru podle vztahu

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}. \quad (16.42)$$

### Nucené kmity a rezonance

Jestliže na systém s vlastní úhlovou frekvencí  $\omega$  působí vnější budící síla s úhlovou frekvencí  $\omega_b$ , systém se rozkmitá s úhlovou

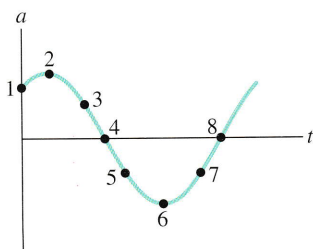
frekvencí  $\omega_b$ . Amplituda rychlosti nucených kmitů je přitom největší při splnění podmínky rezonance

$$\omega_b = \omega. \quad (16.44)$$

Při malém tlumení je za této podmínky největší amplituda výchylky  $x_m$ .

## OTÁZKY

- Který z následujících vztahů mezi zrychlením  $a$  a polohou částice  $x$  implikuje harmonický pohyb: (a)  $a = 0,5x$ , (b)  $a = 400x^2$ , (c)  $a = -20x$  a (d)  $a = -3x^2$ ?
- Na obr. 16.22 je vynesena časová závislost zrychlení  $a(t)$  pro částici, která vykonává harmonický pohyb. (a) Kterému z číslovaných bodů odpovídá poloha  $-x_m$ ? (b) Je rychlost částice v bodě 4 kladná, záporná, nebo nulová? (c) Odpovídá bodu 5 poloha částice  $-x_m$ ,  $+x_m$ , 0, mezi  $-x_m$  a 0, nebo mezi 0 a  $+x_m$ ?



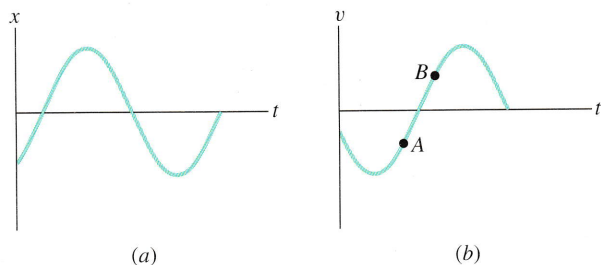
Obr. 16.22 Otázka 2

- Výchylka kmitající částice je popsána vztahem

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Určete, zda se částice v čase  $t = 0$  nachází v  $-x_m$ , v  $+x_m$ , v počátku, mezi  $-x_m$  a 0, nebo mezi 0 a  $+x_m$ , jestliže je  $\varphi$  rovno (a)  $\pi/2$ , (b)  $-\pi/3$ , (c)  $-3\pi/4$  a (d)  $3\pi/4$ .

- Která z následujících relací popisuje fázovou konstantu  $\varphi$  pro harmonický pohyb na obr. 16.23a: (a)  $-\pi < \varphi < -\pi/2$ , (b)  $\pi < \varphi < 3\pi/2$ , nebo (c)  $-3\pi/2 < \varphi < -\pi$ ?

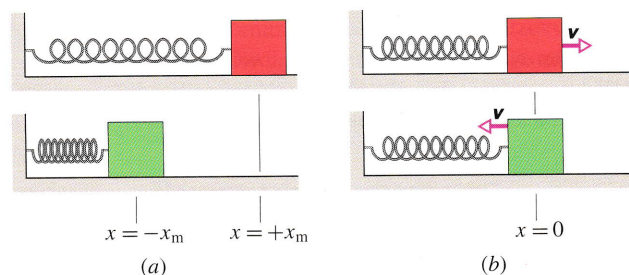


Obr. 16.23 Otázky 4 a 5

- Na obr. 16.23b vidíme rychlost částice, která vykonává harmonický pohyb. Určete, zda částice s rychlostí odpovídající

(a) bodu A na grafu a (b) bodu B na grafu je v klidu, pohybuje se směrem k bodu  $-x_m$ , nebo se pohybuje směrem k bodu  $x_m$ . Dále určete, zda se částice s rychlostí odpovídající (c) bodu A na grafu a (d) bodu B na grafu nachází v bodě  $-x_m$ , v bodě  $x_m$ , v bodě 0, mezi  $-x_m$  a 0, nebo mezi 0 a  $x_m$ . Nakonec rozhodněte, zda se rychlost odpovídající (e) bodu A na grafu a (f) bodu B zvětšuje, nebo zmenšuje.

- Na obr. 16.24 vidíme čtyři oscilátory s vesměs stejně tuhými pružinami a stejně hmotnými tělesy. Jaký je fázový rozdíl dvou oscilátorů (a) na obr. 16.24a a (b) na obr. 16.24b? (c) Jaký je fázový rozdíl červeného oscilátoru na obr. 16.24a a zeleného oscilátoru na obr. 16.24b?



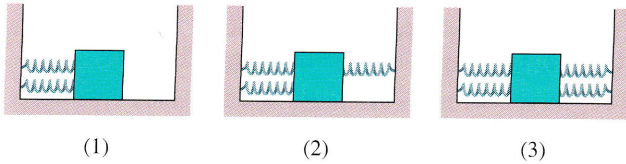
Obr. 16.24 Otázka 6

7. Pružina a těleso tvoří harmonický oscilátor umístěný (1) na vodorovné hladké podložce jako na obr. 16.5, (2) na nakloněné hladké podložce, svírající  $45^\circ$  s vodorovnou rovinou (těleso je připevněno ke spodnímu konci pružiny), a (3) svisle s pružinou upevněnou na stropě a tělesem zavěšeným na pružině. Uspořádejte oscilátory v sestupném smyslu podle (a) protažení pružiny v rovnovážné poloze oscilátoru, (b) frekvence kmitání.

8. Tři pružiny jsou upevněny na stropě a na jejich spodní konce jsou zavěšena tři tělesa. Hmotnosti těles jsou  $m_1 > m_2 > m_3$ . V klidovém stavu jsou protažení pružin vesměs stejná. U každé soustavy vyvoláme harmonický pohyb ve svislém směru. Uspořádejte soustavy v sestupném smyslu podle periody kmitů.

9. Na obr. 16.25 vidíme tři zařízení složená z tělesa a identických pružin. Centrální poloha tělesa odpovídá nezátíženému délce pružin. Seřadte zařízení sestupně podle frekvence kmitů.

10. Těleso hmotnosti  $m$  je zavěšeno na pružině tuhosti  $k$ . U soustavy vyvoláme harmonický pohyb ve svislém směru. Poté pružinu rozpůlíme a na jednu její polovinu zavěšíme totéž těleso.



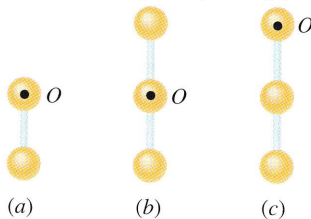
Obr. 16.25 Otázka 9

Opět vyvoláme kmitání. Vykazuje vyšší frekvenci oscilátor s původní, nebo se zkrácenou pružinou?

**11.** Jestliže zatížíme svisle visící pružinu A tělesem hmotnosti  $m_1$  a svisle visící pružinu B tělesem menší hmotnosti  $m_2$ , bude protažení obou pružin stejné. Nyní vyvoláme u obou soustav (pružina + těleso) harmonický pohyb se stejnou amplitudou výchylky. Který z obou oscilátorů má větší mechanickou energii?

**12.** Amplituda výchylky jistého harmonického oscilátoru byla zdvojnásobena. Určete, zda se následující veličiny zvětší, zmenší, nebo zůstanou stejné: (a) perioda, (b) tuhost pružiny, (c) celková mechanická energie, (d) maximální rychlost a (e) maximální zrychlení.

**13.** Na obr. 16.26 vidíme tři fyzická kyvadla tvořená identickými homogenními koulemi vesměs téže hmotnosti, pevně spojenými stejně dlouhými tyčemi zanedbatelné hmotnosti. Každé kyvadlo se otáčí kolem vyznačeného bodu závěsu  $O$ . Seřadte kyvadla v sestupném smyslu podle period jejich kmitů.

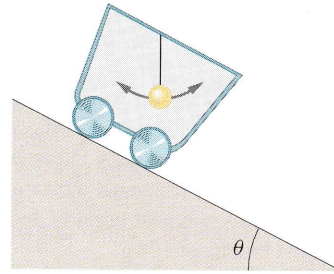


Obr. 16.26 Otázka 13

**14.** Na stropě kabiny stojícího výtahu je zavěšeno kyvadlo. Perioda jeho kmitů je  $T$ . Určete, zda se perioda zvětší, zmenší, nebo zůstane stejná, jestliže se kabina výtahu pohybuje (a) konstantní rychlostí směrem nahoru, (b) konstantní rychlostí směrem dolů, (c) dolů s konstantním zrychlením ve směru nahoru, (d) nahoru s konstantním zrychlením ve směru nahoru, (e) nahoru se zrychlením  $a = g$  ve směru dolů a (f) dolů se zrychlením  $a = g$  ve směru dolů.

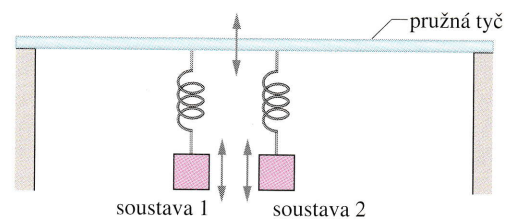
**15.** Ve vozíku, stojícím na vodorovné ploše, je upevněno kyvadlo. Perioda jeho kmitů je  $T$ . Určete, zda se perioda zvětší, zmenší, nebo zůstane stejná, jestliže vozík umístíme na nakloněné rovině, skloněné o úhel  $\theta$  vzhledem k rovině vodorovné

(obr. 16.27) a jestliže se vozík (a) nepohybuje, (b) pohybuje s konstantní rychlostí po nakloněné rovině směrem dolů, (c) pohybuje s konstantní rychlostí po nakloněné rovině směrem nahoru, (d) pohybuje po nakloněné rovině směrem nahoru s konstantním zrychlením, orientovaným podél nakloněné roviny směrem nahoru, (e) pohybuje po nakloněné rovině směrem dolů s konstantním zrychlením, orientovaným podél nakloněné roviny směrem nahoru, (f) pohybuje po nakloněné rovině směrem dolů s konstantním zrychlením  $a = g \sin \theta$ , orientovaným podél nakloněné roviny směrem dolů, a (g) pohybuje po nakloněné rovině směrem nahoru s konstantním zrychlením  $a = g \sin \theta$ , orientovaným podél nakloněné roviny směrem dolů.



Obr. 16.27 Otázka 15

**16.** Máme sestavit přístroj pro přenos kmitání na obr. 16.28. Přístroj je složen ze dvou soustav pružina + těleso. Obě pružiny jsou upevněny na pružné tyči. Jestliže protáhneme pružinu první soustavy a pak ji uvolníme, vznikne harmonický pohyb s frekvencí  $f_1$ . Kmitání se přenáší na tyč a ta působí budící silou na druhou soustavu. Vynucující síla tedy osciluje s frekvencí  $f_1$ . Při konstrukci přístroje si máme vybrat ze čtyř pružin a čtyř hmotných těles: tuhosti pružin  $k$  jsou  $1\,600\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $1\,500\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $1\,400\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  a  $1\,200\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ , hmotnosti těles  $m$  jsou  $800\text{ kg}$ ,  $500\text{ kg}$ ,  $400\text{ kg}$  a  $200\text{ kg}$ . Naším cílem je dosáhnout maximální amplitudy kmitů u druhé soustavy. Kterou pružinu a které těleso vyberete pro jednotlivé soustavy? Řešte bez provádění detailního výpočtu.



Obr. 16.28 Otázka 16

## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 16.3 Pohybová rovnice pro harmonický pohyb

**1C.** Uvažujme harmonicky kmitající těleso. Doba mezi dvěma po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je rychlost tělesa nulová, činí  $0,25\text{ s}$ . Prostorová vzdálenost poloh tělesa v těchto

dvou okamžicích je  $36\text{ cm}$ . Vypočtete (a) periodu, (b) frekvenci, a (c) amplitudu pohybu.

**2C.** Pohyb závaží kmitajícího na pružině se od jistého časového okamžiku začíná po  $0,75\text{ s}$  opakovat. Nalezněte (a) periodu po-

hybu, (b) frekvenci v hertzích a (c) úhlovou frekvenci v radiánech za sekundu.

**3C.** Závaží o hmotnosti 4,00 kg je zavěšeno na pružinu. Pružina se tím prodlouží o 16,0 cm vzhledem ke své nezátížené délce. (a) Jaká je tuhost pružiny? (b) Dané závaží odstraníme a na tutéž pružinu zavěšíme závaží o hmotnosti 0,500 kg. Poté pružinu ještě poněkud protáhneme a uvolníme. Jaká bude perioda vzniklých kmitů?

**4C.** Oscilátor je tvořen závažím o hmotnosti 0,500 kg zavěšeným na pružině. Jestliže ho rozkmitáme s amplitudou 35,0 cm, pohyb se po každých 0,500 s opakuje. Nalezněte (a) periodu kmitání, (b) jeho frekvenci, (c) úhlovou frekvenci, (d) tuhost pružiny, (e) největší rychlost závaží a (f) největší sílu působící na závaží.

**5C.** Atomy v pevných látkách kmitají za pokojové teploty s frekvencemi řádu  $10^{13}$  Hz. Vyjděme z představy atomů propojených pružinami. Předpokládejme, že v tělese ze stříbra kmitá jeden atom stříbra s uvedenou frekvencí a ostatní atomy se nepohybují. Vypočítejte efektivní tuhost pružiny. Jeden mol stříbra ( $6,02 \cdot 10^{23}$  atomů) má hmotnost 108 g.

**6C.** Jaké je největší zrychlení plošiny, která kmitá s amplitudou 2,20 cm a s frekvencí 6,60 Hz?

**7C.** V reproduktoru se vytváří zvuk pomocí kmitající membrány. Předpokládejme, že u daného reproduktoru činí maximální možná amplituda kmitů  $1,0 \cdot 10^{-3}$  mm. Určete obor frekvencí, při kterých převyšuje zrychlení membrány hodnotu  $g$  (tíhové zrychlení).

**8C.** Pružinová váha je na měřítku délky 4,00 in cejchována od 0 do 32,0 lb. Balík, který je zavěšen na váze, kmitá ve svislém směru s frekvencí 2,00 Hz. (a) Určete tuhost pružiny. (b) Jaká je váha balíku?

**9C.** Závaží 20 N zavěšíme na konec svislé pružiny; pružina se tím prodlouží o 20 cm. (a) Jaká je tuhost pružiny? (b) Pružinu nyní umístíme vodorovně na hladkou podložku. Jeden její konec upevníme ke stěně, druhý konec spojíme se závažím 5,0 N. Poté závaží poněkud posuneme (pružina se natáhne) a uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Jaká je perioda vzniklých kmitů?

**10C.** Závaží o hmotnosti 50,0 g zavěšíme na konec svislé pružiny a rozkmitáme. Největší rychlost závaží činí  $15,0 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , perioda kmitání je 0,500 s. Určete (a) tuhost pružiny, (b) amplitudu kmitání a (c) frekvenci kmitů.

**11C.** Částice hmotnosti  $1,00 \cdot 10^{-20}$  kg harmonicky kmitá s periodou  $1,00 \cdot 10^{-5}$  s a s maximální rychlostí  $1,00 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vypočítejte (a) úhlovou frekvenci kmitání a (b) největší výchylku částice.

**12C.** Malé těleso o hmotnosti 0,12 kg harmonicky kmitá s amplitudou 8,5 cm a s periodou 0,20 s. (a) Jaká největší síla působí na částici? (b) Předpokládejme, že kmitání je vyvoláno pružinou. Jaká je tuhost pružiny?

**13C.** Břit elektrického holícího strojku se přesouvá sem a tam na vzdálenosti 2,00 mm. Jeho pohyb lze považovat za harmo-

nické kmitání s frekvencí 120 Hz. Určete (a) amplitudu kmitů, (b) největší rychlost břitu a (c) největší zrychlení břitu.

**14C.** Membrána reproduktoru harmonicky kmitá s frekvencí 440 Hz a amplitudou 0,75 mm. Určete (a) úhlovou frekvenci kmitů, (b) největší rychlost membrány a (c) největší zrychlení membrány.

**15C.** Uvažme kmitání automobilu ve svislém směru. Lze uvažovat, jako by vozidlo bylo umístěno na čtyřech stejných pružinách. U jistého vozidla nastavíme tuhost těchto pružin tak, aby frekvence kmitání činila 3,00 Hz. (a) Jaká je tuhost pružin, předpokládáme-li hmotnost vozidla 1 450 kg a rovnoměrné rozložení váhy? (b) Ve vozidle jede pět osob. Jejich průměrná hmotnost je 73 kg a váha je opět rozložena rovnoměrně. Jaká je frekvence kmitání každé pružiny?

**16C.** Poloha harmonicky kmitajícího tělesa je popsána vztahem

$$x = (6,0 \text{ m}) \cos \left[ (3\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})t + \frac{1}{3}\pi \text{ rad} \right].$$

V čase  $t = 2,0$  s stanovte (a) výchylku tělesa, (b) rychlost tělesa, (c) zrychlení tělesa a (d) fázi pohybu. Dále určete (e) frekvenci a (f) periodu kmitů.

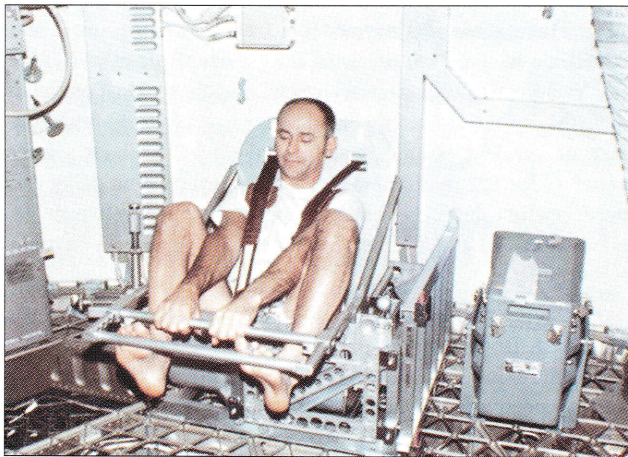
**17C.** Daná částice harmonicky kmitá s frekvencí 0,25 Hz kolem rovnovážné polohy  $x = 0$ . V čase  $t = 0$  měla výchylku  $x = 0,37$  cm a nulovou rychlost. Určete pro její kmitání (a) periodu, (b) úhlovou frekvenci, (c) amplitudu, (d) výchylku jako funkci času, (e) rychlost jako funkci času, (f) maximální rychlost, (g) maximální zrychlení, (h) výchylku v čase  $t = 3,0$  s, a (i) rychlost v čase  $t = 3,0$  s.

**18C.** Píst ve válcové hlavě parní lokomotivy má záběr (dvojnásobek amplitudy) 0,76 m. Pohyb pístu lze pokládat za harmonické kmitání s úhlovou frekvencí  $180 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ . Jaká je maximální rychlost pístu?

**19Ú.** Obr. 16.29 ukazuje astronauta sedícího na přístroji k měření tělesné hmotnosti v beztlákovém stavu. Přístroj byl vyvinut pro použití na vesmírných stanicích, udržovaných na oběžné dráze kolem Země. Je tvořen pohyblivou sedačkou spojenou pružinami s rámem: astronaut se usadí na sedačku a měří periodu vyvolaných kmitů. Jeho hmotnost se poté určuje ze vztahu pro periodu kmitající soustavy pružina + hmotný blok. (a) Předpokládejme, že hmotnost astronauta je  $M$  a efektivní hmotnost kmitající sedačky činí  $m$ . Ukažte, že platí

$$M = \frac{k}{4\pi^2} T^2 - m,$$

kde  $T$  je perioda kmitů a  $k$  tuhost pružiny. (b) Přístroj, který byl umístěn na vesmírné stanici SKYLAB TWO, měl tuhost pružiny  $k = 605,6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  a perioda kmitů prázdné sedačky byla 0,901 49 s. Vypočítejte efektivní hmotnost sedačky. (c) Perioda kmitů sedačky s astronautem činila 2,088 32 s. Vypočítejte hmotnost astronauta.



Obr. 16.29 Úloha 19

**20Ú.** Na pružině visí závaží o hmotnosti 2,0 kg. Přivažek hmotnosti 300 g způsobí dodatečné protažení pružiny o 2,00 cm. (a) Jak velká je tuhost pružiny? (b) Rychlé uvolnění přivažku vyvolá harmonické kmity závaží. Určete periodu pohybu.

**21Ú.** Na pružině harmonicky kmitá závaží o hmotnosti  $m$ . Perioda pohybu činí 2,0 s. Jestliže zvýšíme hmotnost závaží o 2,0 kg, perioda se zvýší na 3,0 s. Určete hmotnost  $m$ .

**22Ú.** Koncový bod jednoho ze dvou ramen ladičky harmonicky kmitá s frekvencí 1 000 Hz a amplitudou 0,40 mm. Určete pro tento bod (a) maximální zrychlení a (b) maximální rychlost. Dále nalezněte (c) zrychlení a (d) rychlost uvažovaného bodu v okamžiku, kdy jeho výchylka činí 0,20 mm.

**23Ú.** Těleso o hmotnosti 0,10 kg osciluje tam a zpět v přímém směru. Jeho výchylka, měřená od počátku souřadnic, je popsána vztahem

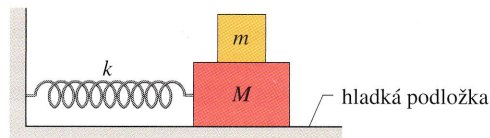
$$x = (10 \text{ cm}) \cos \left[ (10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})t + \frac{1}{2} \pi \text{ rad} \right].$$

(a) Jaká je frekvence kmitů? (b) Jakou maximální rychlostí se těleso pohybuje? Při jaké hodnotě výchylky má těleso tuto maximální rychlost? (c) Jaké je největší zrychlení tělesa? Při jaké hodnotě výchylky je zrychlení největší? (d) Určete časovou závislost síly, která působí na těleso a vyvolává uvedené kmitání.

**24Ú.** Příliv a odliv vyvolává v přístavu změny výšky hladiny moře. Maximální rozdíl výšek hladiny je  $d$ . Pohyb hladiny je přitom možno považovat za harmonický s periodou 12,5 h. Za jak dlouho dojde k poklesu hladiny o vzdálenost  $d/4$  od její nejvyšší úrovně?

**25Ú.** Dvě tělesa s hmotnostmi  $m = 1,0 \text{ kg}$ ,  $M = 10 \text{ kg}$  a pružina jsou uspořádány podle obr. 16.30 na vodorovné hladké podložce. Statický činitel smykového tření mezi oběma tělesy činí 0,40. Jaká může být největší amplituda harmonických kmitů soustavy, má-li se zabránit smýkání mezi oběma tělesy?

**26Ú.** Hmotný blok je umístěn na vodorovný povrch (povrch vibračního stolu). Povrch harmonicky kmitá ve vodorovném směru s frekvencí 2,0 Hz. Statický činitel smykového tření mezi



Obr. 16.30 Úloha 25

blokem a povrchem stolu má velikost 0,50. Jak velká může ještě být amplituda kmitů, má-li se vyloučit možnost klouzání bloku?

**27Ú.** Na píst, který harmonicky kmitá ve vswilém směru, položíme závaží. (a) Je-li perioda kmitů pístu 1,0 s, při jaké amplitudě se závaží oddělí od pístu? (b) Je-li amplituda kmitů pístu 5,0 cm, jaká může být největší frekvence, pro kterou zůstává závaží nepřetržitě v kontaktu s pístem?

**28Ú.** Oscilátor je tvořen hmotným blokem, spojeným s pružinou ( $k = 400 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ). V jistém čase  $t$  byly zaznamenány následující hodnoty polohy (měřené od rovnovážné polohy soustavy), rychlosti a zrychlení hmotného bloku:  $x = 0,100 \text{ m}$ ,  $v = -13,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a  $a = -123 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Vypočítejte (a) frekvenci kmitů, (b) hmotnost bloku a (c) amplitudu pohybu.

**29Ú.** Harmonický oscilátor je tvořen kvádrem o hmotnosti 2,00 kg spojeným s pružinou tuhosti  $100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . V čase  $t = 1,00 \text{ s}$  se kvádr nachází v poloze  $x = 0,129 \text{ m}$  a jeho rychlost činí  $v = 3,415 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . (a) Jaká je amplituda oscilací? Jaká byla (b) poloha kvádrů a (c) rychlost kvádrů v čase  $t = 0$ ?

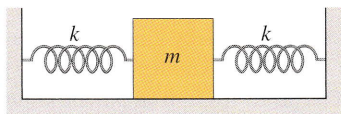
**30Ú.** Nehmotná pružina je zavěšena na stropě místnosti a na její spodní konec připevníme malé závaží. Závaží nejprve udržujeme v klidu v poloze o souřadnici  $y_p$ ; v této poloze má pružina svoji nezatíženou délku. Poté závaží uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. V průběhu vzniklého kmitání klesá závaží nejnižší 10 cm pod souřadnici  $y_p$ . (a) Jaká je frekvence kmitů? (b) Jaká je rychlost závaží v okamžiku, kdy se právě nachází 8 cm pod počáteční polohou  $y_p$ ? (c) K závaží připevníme přivažek hmotnosti 300 g. Frekvence takto upraveného oscilátoru je rovna polovině původní frekvence. Jaká je hmotnost prvního závaží? (d) Určete rovnovážnou polohu nového oscilátoru vzhledem k výchozí souřadnici  $y_p$ .

**31Ú.** Dvě částice harmonicky kmitají podél přímého segmentu délky  $a$  (pohybují se na opačných stranách přímé a tenké lišty a jejich dráha pokrývá na liště úsečku délky  $a$ ). Oba harmonické pohyby mají tutéž periodou 1,5 s, avšak jsou navzájem fázově posunuty o  $\pi/6 \text{ rad}$ . (a) Jaká je vzdálenost obou částic v okamžiku, kdy se opožděná částice právě nachází v bodě obratu? Výsledek vyjádřete pomocí délky  $a$ . (b) Uvažme malý časový interval bezprostředně následující po okamžiku, popsaném v části (a). Pohybují se obě částice během tohoto intervalu ve stejném směru, v opačném směru od sebe, nebo v opačném směru k sobě?

**32Ú.** Dvě částice harmonicky kmitají kolem stejné rovnovážné polohy se stejnou amplitudou a stejnou frekvencí. Oba pohyby probíhají podél téhož směru. Částice se míjejí vždy tehdy, když se výchylka každé z nich rovná polovině amplitudy. Jaký je fázový rozdíl mezi oběma harmonickými pohyby?

**33Ú.** Dvě stejné pružiny jsou jedněmi konci připevněny ke dvěma protilehlým stěnám kvádru hmotnosti  $m$  a druhými konci vetknuty do protilehlých stěn. Kvádr je umístěn na hladké podložce. Soustava je znázorněna na obr. 16.31. Ukažte, že kvádr harmonicky kmitá s frekvencí

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$



Obr. 16.31 Úlohy 33 a 34

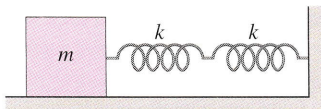
**34Ú.** Vyjdeme ze znění úlohy 33, avšak nyní předpokládáme, že dvě pružiny na obr. 16.31 mají obecně různé tuhosti  $k_1$  a  $k_2$ . Ukažte, že frekvence kmitající soustavy je nyní určena vztahem

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2},$$

kde  $f_1$ , popř.  $f_2$ , jsou frekvence oscilátorů, tvořených kvádrem a pouze pružinou 1, popř. kvádrem a pouze pružinou 2.

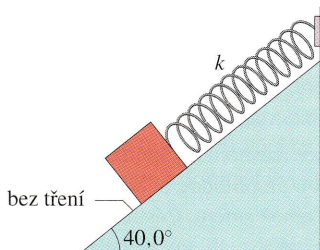
**35Ú.** Soustava dvou stejných, sériově propojených pružin tuhosti  $k$  je jedním svým koncem spojena s kvádrem hmotnosti  $m$  a druhým koncem připevněna ke stěně. Kvádr se pohybuje na hladké podložce. Soustava je znázorněna na obr. 16.32. Ukažte, že soustava harmonicky kmitá s frekvencí

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$



Obr. 16.32 Úloha 35

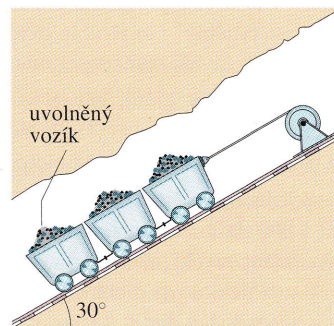
**36Ú.** Kvádr o váze 14,0 N klouže bez tření po nakloněné rovině se sklonem  $40,0^\circ$ . Ke kvádru je připojena nehmotná pružina nezatížená délkou 0,450 m a tuhosti  $120 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Druhý konec pružiny je upevněn na vrcholu klínu; celá soustava je znázorněna na obr. 16.33. (a) Určete vzdálenost rovnovážné polohy kvádru od vrcholu klínu. (b) Kvádr poněkud vysuneme z rovnovážné polohy podél nakloněné roviny směrem dolů a poté jej uvolníme. Jaká je perioda vzniklého harmonického pohybu?



Obr. 16.33 Úloha 36

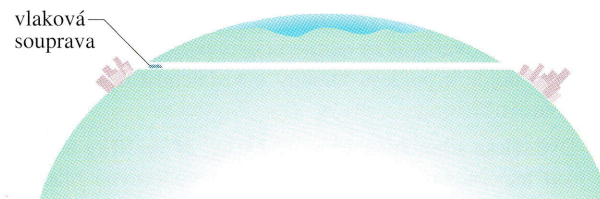
**37Ú.** Homogenní pružina má délku  $L$  a tuhost  $k$ . Pružinu řezem rozdělíme na dvě části délek  $L_1$  a  $L_2$  a označíme  $n = L_1/L_2$ . (a) Vyjádřete tuhosti  $k_1$  a  $k_2$  obou nových pružin pomocí  $k$  a  $n$ . (b) Pokud byl určitý kvádr spojen s původní pružinou, jako na obr. 16.5, kmital vzniklý harmonický oscilátor s frekvencí  $f$ . Jestliže nyní připevníme ke kvádru pružinu délky  $L_1$ , popř. pružinu délky  $L_2$ , bude mít nový oscilátor frekvenci  $f_1$ , popř. frekvenci  $f_2$ . Vyjádřete frekvence  $f_1$  a  $f_2$  pomocí původní frekvence  $f$ .

**38Ú.** Tři navzájem propojené důlní vagony, každý o hmotnosti 10 000 kg, jsou umístěny na nakloněné dráze důlní železnice. Dráha má sklon  $30^\circ$ . Vagony jsou udržovány v klidu závěsným lanem, vedeným rovnoběžně s nakloněným směrem důlní dráhy (obr. 16.34). Váhou vagonů je závěsné lano prodlouženo o 15 cm vzhledem ke své nezatížené délce. V jistém okamžiku se uvolnil spodní vagon; poté zbylé dva vagony harmonicky kmitají. Předpokládejte, že závěsné lano splňuje Hookův zákon a určete (a) frekvenci, (b) amplitudu harmonického pohybu.



Obr. 16.34 Úloha 38

**39Ú.** Ke zmírnění dopravních problémů při cestování mezi dvěma velkými městy (například mezi Bostonem a Washingtonem) navrhuje dopravní konstruktéři následující řešení. Obě města budou propojena podél tětiny Země přímým vlakovým tunelem (obr. 16.35). Vlaková souprava, uvolněná ve výchozí stanici, bude samovolně klesat první polovinou tunelu a stoupat druhou polovinou až ke stanici cílové. Předpokládáme, že Země je homogenní koule. Odpor vzduchu a tření zanedbáme. (a) Ukažte, že cesta mezi městy představuje polovinu úplného harmonického kmitu. (b) Vypočítejte dobu jízdy mezi městy.



Obr. 16.35 Úloha 39

#### ODST. 16.4 Energie harmonického pohybu

**40C.** Určete mechanickou energii soustavy pružina + těleso,



jestliže pružina má tuhost  $1,3 \text{ N}\cdot\text{cm}^{-1}$  a amplituda kmitů činí  $2,4 \text{ cm}$ .

**41C.** Kmitající soustava pružina + těleso má mechanickou energii  $1,00 \text{ J}$ . Kmitání probíhá s amplitudou  $10,0 \text{ cm}$  a maximální rychlost tělesa je  $1,20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Určete (a) tuhost pružiny, (b) hmotnost tělesa a (c) frekvenci kmitání.

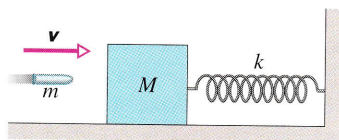
**42C.** Blok o hmotnosti  $5,00 \text{ kg}$  je umístěn na hladké vodorovné podložce a je spojen s pružinou tuhosti  $1\,000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Blok vychýlíme vodorovně z rovnovážné polohy o  $50,0 \text{ cm}$  a udělíme mu počáteční rychlost o velikosti  $10,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ve směru zpět k rovnovážné poloze. (a) Jaká je frekvence vzniklých kmitů? (b) Jaká je počáteční hodnota potenciální energie pružnosti pro soustavu pružina + hmotný blok? (c) Jaká je počáteční hodnota kinetické energie? (d) Jaká je amplituda kmitů?

**43C.** Jestliže zavěšíme na danou svislou pružinu závaží o hmotnosti  $1,3 \text{ kg}$ , pružina se protáhne o  $9,6 \text{ cm}$ . (a) Vypočítejte tuhost pružiny. Závaží přesuneme tahem o dalších  $5,0 \text{ cm}$  směrem dolů a uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Určete (b) periodu, (c) frekvenci a (d) amplitudu vzniklého kmitání. (e) Jaká je při kmitání maximální rychlost závaží?

**44C.** Gigantický (a hypotetický) prak má vystřelit kámen o hmotnosti  $130 \text{ g}$  tak, aby unikl ze sféry přitažlivosti Země (kámen musí být tedy vystřelen druhou kosmickou rychlostí  $11,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Pružný mechanismus praku splňuje Hookův zákon. Je natažen o  $1,5 \text{ m}$  a uvolněn. Veškerá potenciální energie pružnosti se poté transformuje na energii kinetickou. (a) Určete tuhost odpalovacího přístroje. (b) Řekněme, že průměrný muž vyvine sílu  $220 \text{ N}$ . Kolik mužů musí spojit své síly k natažení praku?

**45C.** Výchylka harmonicky kmitající částice je v jistém okamžiku rovna jedné polovině amplitudy. Jaká část celkové mechanické energie má v tomto okamžiku formu energie (a) kinetické a (b) potenciální? (c) Při jaké výchylce má jedna polovina celkové mechanické energie formu energie kinetické? Vyjádřete hledanou výchylku pomocí amplitudy.

**46C.** Těleso o hmotnosti  $M$  je umístěno na vodorovné hladké podložce a spojeno s pružinou, která je na druhém konci upevněna ke stěně. Soustava je v rovnováze. V určitém okamžiku vnikne do tělesa rychlostí  $v$  projektil o hmotnosti  $m$ . Projektil zůstane zachycen v tělese. Situace je znázorněna na obr. 16.36. (a) Určete rychlost tělesa bezprostředně po zásahu. (b) Vypočítejte amplitudu vzniklého harmonického pohybu.



Obr. 16.36 Cvičení 46

**47Ú.** Těleso hmotnosti  $3,0 \text{ kg}$  harmonicky kmitá. Jeho výchylka z rovnovážné polohy je popsána vztahem

$$x(t) = (5,0 \text{ m}) \cos \left[ \left( \frac{1}{3} \pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \right) t - \frac{1}{4} \pi \text{ rad} \right].$$

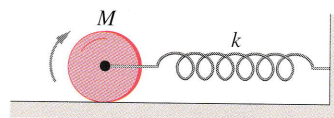
(a) Při jaké výchylce je potenciální energie částice rovna polovině celkové mechanické energie? (b) Jak dlouho trvá pohyb částice z rovnovážné polohy do polohy, kterou jste určili v části (a)?

**48Ú.** Částice o hmotnosti  $10 \text{ g}$  harmonicky kmitá s amplitudou  $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Maximální zrychlení částice činí  $8,0 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , fázová konstanta je  $-\pi/3 \text{ rad}$ . (a) Popište sílu, která na částici působí. Napište vztah, určující časovou závislost této síly. (b) Určete periodu pohybu. (c) Stanovte největší rychlost částice. (d) Vypočítejte celkovou mechanickou energii kmitající částice.

**49Ú.** Nehmotná pružina tuhosti  $19 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  je jedním koncem zavěšena na nosník. Na její volný konec umístíme těleso o hmotnosti  $0,20 \text{ kg}$ . Těleso uvolníme v okamžiku, kdy pružina ještě nebyla protažena. (a) O jakou největší vzdálenost vzhledem ke své počáteční poloze těleso klesne? Určete (b) frekvenci a (c) amplitudu výsledného harmonického pohybu.

**50Ú.** Na pružině tuhosti  $500 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  visí těleso o hmotnosti  $4,0 \text{ kg}$ . Přímo zespodu je do tělesa vstřelena kulka hmotnosti  $50 \text{ g}$ . Kulka vnikne do tělesa rychlostí  $150 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a uvízne v něm. (a) Určete amplitudu takto vyvolaného harmonického pohybu. (b) Jakou část mechanické energie kmitajícího systému představuje původní kinetická energie kulky?

**51Ú\*** Pevný válec, otáčivý kolem vodorovné osy, je umístěn na vodorovné ploše. K ose válce je připevněna pružina tuhosti  $k = 3,0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Válec uvolníme s nulovou počáteční rychlostí v poloze, ve které je pružina protažena o  $0,25 \text{ m}$  vzhledem k její rovnovážné délce. Poté se válec valí po ploše bez prokluzování (obr. 16.37). Určete kinetickou energii (a) translačního a (b) ro-



Obr. 16.37 Úloha 51

tačního pohybu válce v okamžiku, kdy válec právě prochází rovnovážnou polohou. (c) Ukažte, že při splnění uvedených předpokladů uskutečňuje těžiště válce harmonický pohyb s periodou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{2k}},$$

kde  $M$  je hmotnost válce. (Tip: Vypočítejte časovou derivaci celkové mechanické energie.)

### ODST. 16.5 Torzní kmity

**52C.** Plochý homogenní kruhový disk má hmotnost  $3,00 \text{ kg}$  a poloměr  $70,0 \text{ cm}$ . Disk je ve svém středu zavěšen na svislý drát, takže spočívá ve vodorovné rovině. Chceme-li disk vytočit o  $2,50 \text{ rad}$  vzhledem k jeho rovnovážné poloze a poté jej v této nové poloze udržet, musíme na něj působit silovým momentem  $0,0600 \text{ N}\cdot\text{m}$ . (a) Vypočítejte moment setrvačnosti disku při jeho otáčení kolem osy určené drátem. (b) Určete torzní konstantu. (c) Jaká je úhlová frekvence popsaného torzního oscilátoru?

**53Ú.** Homogenní masivní koule hmotnosti 95 kg má poloměr 15 cm. Koule visí na drátě, který je připevněn ke stropu místnosti. Silový moment velikosti 0,20 N·m uděluje kouli úhlovou výchylku 0,85 rad. Po uvolnění z uvedené polohy pozorujeme torzní kmity. Jaká je jejich perioda?

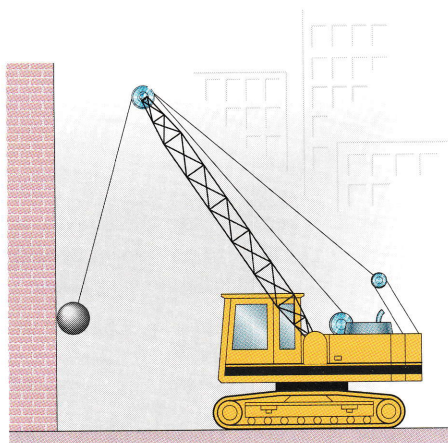
**54Ú.** Technik zkoumá nepravidelné těleso hmotnosti 10 kg. Má za úkol zjistit moment setrvačnosti tělesa vzhledem k jisté ose procházející těžištěm. Technik zavěsí těleso na drát takovým způsobem, aby byla předepsaná osa totožná se směrem drátu. Vzniklé torzní kyvadlo vykoná 20 úplných kmitů za dobu 50 s. Navíc je známo, že použitý drát má torzní konstantu  $\kappa = 0,50 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Jaký je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k předepsané ose?

**55Ú.** Nepokoj hodinek torzně kmitá s úhlovou amplitudou  $\pi$  rad a s periodou 0,500 s. Určete (a) maximální úhlovou rychlost nepokoje, (b) jeho úhlovou rychlost při úhlové výchylce  $\frac{1}{2}\pi$  rad a (c) úhlové zrychlení nepokoje při úhlové výchylce  $\frac{1}{4}\pi$  rad.

### ODST. 16.6 Kyvadla

**56C.** Matematické kyvadlo se nachází v místě, kde tíhové zrychlení  $g$  činí  $32,2 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-2}$ . Perioda jeho kmitů je 1,00 s. Jaká je jeho délka?

**57C.** Demoliční koule o hmotnosti 2 500 kg kývá na závěsném laně vedeném přes rameno jeřábu (obr. 16.38). Délka lana od vrcholu ramena ke kouli je 17 m. (a) Určete periodu pohybu za předpokladu, že soustavu lze pokládat za matematické kyvadlo. (b) Závisejí perioda na hmotnosti koule?



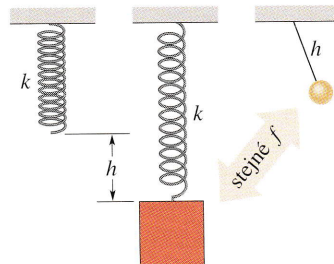
Obr. 16.38 Cvičení 57

**58C.** Matematické kyvadlo odpočítává sekundy: uskuteční každé dvě sekundy úplný kmit z jedné krajní polohy do druhé a zpět. Jaká je jeho délka?

**59C.** Matematické kyvadlo délky 1,50 m uskutečnilo 72,0 úplných kmitů za dobu 180 s. Jak velké je tíhové zrychlení v místě, kde byly uvedené hodnoty naměřeny?

**60C.** V této kapitole jsme studovali dvě kmitající soustavy: závaží zavěšené na pružině a matematické kyvadlo. Mezi nimi

existuje zajímavý vztah. Předpokládejme, že na konec pružiny zavěšíme závaží a pokud je závaží v klidu, jako na obr. 16.39, pružina se prodlouží o délku  $h$  vzhledem ke své nezatížené délce. Na druhé straně uvažme matematické kyvadlo délky  $h$ . Dokažte, že obě soustavy kmitají se stejnou frekvencí.



Obr. 16.39 Cvičení 60

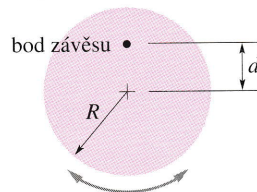
**61C.** Artista sedí na visuté hrazdě a houpá se tam a zpět s periodou 8,85 s. Pokud je hrazda v rovnovážné poloze a artista se na ní postaví, zvýší se těžiště soustavy o 35,0 cm. Považujte soustavu artista + visutá hrazda za matematické kyvadlo. Vypočítejte jeho periodu, jestliže artista při houpání na hrazdě stojí.

**62C.** Matematické kyvadlo délky  $L$  volně kmitá s malou úhlovou amplitudou. V okamžiku, kdy právě prochází rovnovážnou polohou, znehybníme vlákno kyvadla v polovině délky. Vyjádřete periodu kratšího kyvadla pomocí původní periody  $T$ .

**63C.** Fyzické kyvadlo je tvořeno tyčovým metrem. Ve vzdálenosti  $x$  od rýsky, která označuje 50 cm, je vyvrtán malý otvor. Tímto otvorem prochází osa rotace. Kyvadlo má periodu 2,5 s. Určete vzdálenost  $x$ .

**64C.** Tenká tyč délky  $L$  má hmotnost  $m$ . Tyč je zavěšena nad středem tyče: vzdálenost bodu závěsu od středu tyče je  $d$ . (a) U tohoto fyzického kyvadla vyvoláme kmitání s malou úhlovou amplitudou. Vyjádřete periodu pohybu pomocí veličin  $d$ ,  $L$ ,  $m$  a  $g$  (tíhové zrychlení). Jak se změní perioda, jestliže (b) zmenšíme vzdálenost  $d$ , (c) zvětšíme délku tyče  $L$  a (d) zvětšíme hmotnost tyče?

**65C.** Fyzické kyvadlo je tvořeno pevným homogenním diskem (poloměru  $R$  a hmotnosti  $M$ ), otáčivým ve svislé rovině kolem bodu závěsu, který je umístěn ve vzdálenosti  $d$  od středu disku (obr. 16.40). Disk vychýlíme o malý úhel z rovnovážné polohy a uvolníme. Určete periodu výsledného harmonického pohybu.

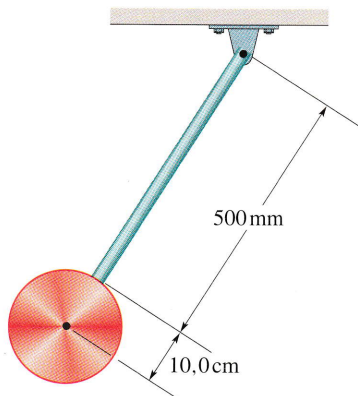


Obr. 16.40 Cvičení 65

**66C.** Homogenní kruhový disk poloměru  $R = 12,5 \text{ cm}$  je zavěšen v bodě, který se nachází na okraji disku. (a) Určete periodu tohoto fyzického kyvadla. (b) Disk nyní zavěšíme v jiném bodě,

jehož vzdálenost od středu disku činí  $r < R$ . Vzniká opět fyzické kyvadlo. Jaká musí být vzdálenost  $r$ , má-li se perioda nového kyvadla rovnat periodě v části (a)?

**67C.** Kyvadlo je tvořeno homogenním diskem o poloměru 10,0 cm a hmotnosti 500 g, spojeným s homogenní tyčí délky 500 mm a hmotnosti 270 g (obr. 16.41). (a) Vypočítejte moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k vodorovné ose procházející bodem závěsu. (b) Jaká je vzdálenost mezi bodem závěsu a těžištěm kyvadla? (c) Vypočítejte periodu kmitů.



Obr. 16.41 Cvičení 67

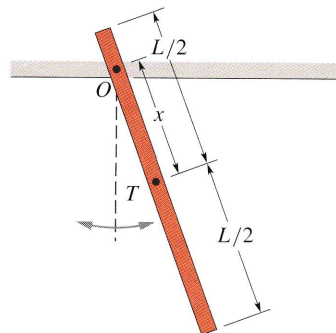
**68C.** (a) Fyzické kyvadlo v př. 16.6 obrátíme a zavěsíme v bodě  $P$ . Jaká bude nyní perioda pohybu? (b) Je tato nová perioda v porovnání s periodou původního kyvadla v př. 16.6 větší, menší, nebo stejná?

**69C.** V př. 16.6 jsme ukázali, že fyzické kyvadlo má střed kyvu  $P$  ve vzdálenosti  $2L/3$  od bodu závěsu  $O$ . Dokažte tvrzení: Pro jakékoli fyzické kyvadlo je vzdálenost středu kyvu od bodu závěsu rovna  $I/(mh)$ , kde veličiny  $I$  a  $h$  mají stejný význam jako v rov. (16.32) a  $m$  je hmotnost kyvadla.

**70C.** Tyčový metr se otáčí kolem osy umístěné na jeho jednom konci. Jak se změní frekvence tohoto fyzického kyvadla, jestliže tyčový metr zkrátíme na polovinu? Vyjádřete novou frekvenci pomocí původní frekvence  $f_0$ .

**71Ú.** Fyzické kyvadlo na obr. 16.42 je tvořeno tyčí délky  $L$ , zavěšenou v bodě  $O$ . (a) Vyjádřete periodu kyvadla pomocí délky tyče  $L$  a vzdálenosti  $x$  těžiště od bodu závěsu. (b) Pro kterou hodnotu podílu  $x/L$  je perioda pohybu nejkratší? (c) Ukažte, že pro  $L = 1,00$  m a  $g = 9,80$  m·s<sup>-2</sup> je nejkratší perioda v části (b) rovna 1,53 s.

**72Ú.** Střed kyvu fyzického kyvadla má následující zajímavou vlastnost. Uvažme fyzické kyvadlo, které kývá v jisté svislé rovině kolem určitého bodu závěsu  $O$ . Předpokládejme, že právě v okamžiku průchodu kyvadla rovnovážnou polohou na něj zapůsobí krátký impulz síly. Vektorová přímka síly je vodorovná a leží v rovině kývů. Jestliže síla navíc působí v úrovni středu kyvu  $P$ , nevyvolá její impulz v bodě závěsu  $O$  žádnou reakci. O této vlastnosti dobře vědí hráči baseballu (a rovněž hráči mnoha jiných sportů). Skutečně, když pálkař navede pálku tak, že ke styku s míčkem dojde mimo střed kyvu  $P$ , ucítí v důsledku



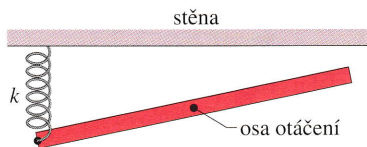
Obr. 16.42 Úloha 71

nárazu bolestivé „škubnutí“ v ruku. Proto také nazývají sportovci střed kyvu „jemný bod“ pálky. Při studiu popsané situace budeme předpokládat, že tyč na obr. 16.12a představuje baseballovou pálku. Nechť na tyč působí v bodě  $P$  vodorovně zprava síla  $F$ , představující úder míčku. Pálkař drží pálku v bodě, který odpovídá bodu závěsu  $O$  na obr. 16.12a. (a) Jak velké zrychlení uděluje bodu  $O$  síla  $F$ ? (b) Jak velké úhlové zrychlení vytváří síla  $F$ , jestliže uvažujeme rotaci kolem osy, procházející těžištěm tyče? (c) Jak velké lineární zrychlení získá bod  $O$  v důsledku úhlového zrychlení, uvažovaného v části (b)? (d) Na základě vyhodnocení velikostí a směrů zrychlení, uvažovaných v částech (a) a (c), se přesvědčte, že střed kyvu  $P$  je skutečně „jemný bod“.

**73Ú.** Přesně vzato, na různých místech povrchu Země má tíhové zrychlení  $g$  poněkud odlišnou hodnotu. Tato skutečnost byla objevena Jeanem Richerem, který v roce 1672 na svých cestách převezl kyvadlové hodiny z Paříže do města Cayenne ve francouzské Guyaně a zjistil, že hodiny se za den zpožďují o 2,5 minuty. Jestliže tíhové zrychlení v Paříži činí  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup>, jaká je jeho velikost v Cayenne?

**74Ú.** Vědci prováděli přesná měření tíhového zrychlení v určitém místě v Indickém oceánu. Místo bylo zvoleno na rovníku. Při měření se zjišťovala perioda kmitů precizně konstruovaného fyzického kyvadla. K zajištění přesně definovaných podmínek se měření uskutečnilo na palubě ponořené ponorky. Označme  $g_p$  přesnou hodnotu tíhového zrychlení v daném místě. Po vyhodnocení výsledků bylo zjištěno, že změřená hodnota  $g_m$  závisí na tom, zda se ponorka v průběhu měření pohybovala východním, nebo západním směrem. Velikost její rychlosti přitom v obou případech činila 16 km·h<sup>-1</sup>. Objasněte pozorovanou diferenci a vypočítejte relativní chybu  $(g_m - g_p)/g_p$  pro oba směry plavby ponorky.

**75Ú.** Dlouhá homogenní tyč délky  $L$  a hmotnosti  $m$  se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené geometrickým středem tyče. Na jednom konci tyče je k ní upevněna vodorovná pružina, druhý konec pružiny je připevněn k pevné stěně. Celá soustava je znázorněna na obr. 16.43 z nadhledu. V rovnovážné poloze je tyč rovnoběžná se stěnou. Po malém vychýlení z rovnovážné polohy tyč uvolníme. Jaká je perioda vzniklého harmonického pohybu?



Obr. 16.43 Úloha 75

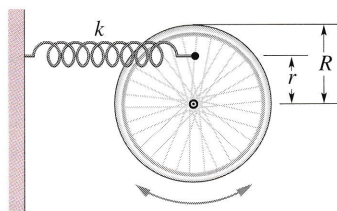
**76Ú.** Určete frekvenci matematického kyvadla délky 2,0 m (a) zavěšeného na stropě místnosti, (b) zavěšeného na stropě výtahu, který se pohybuje vzhůru se zrychlením  $2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , a (c) zavěšeného na stropě výtahu, který padá volným pádem.

**77Ú.** Matematické kyvadlo délky  $L$  a hmotnosti  $m$  je zavěšeno v automobilu, který se pohybuje rychlostí stálé velikosti  $v$  po kruhové dráze poloměru  $R$ . Kyvadlo se pohybuje v radiálním směru (kmitá ve svislé rovině, procházející bodem závěsu a středem kruhové dráhy). Určete frekvenci jeho pohybu.

**78Ú.** Nalezněte úhlovou amplitudu matematického kyvadla  $\theta_m$ , pro kterou činí odchylka skutečné velikosti vratného silového momentu a silového momentu, který je předpokládán při harmonickém pohybu kyvadla, 1,0%. (Při řešení můžete použít „Rozvoje goniometrických funkcí“ v dodatku E.)

**79Ú.** Hmotný bod matematického kyvadla se pohybuje po oblouku kružnice o poloměru  $R$ . (a) V okamžiku, kdy hmotný bod právě prochází rovnovážnou polohou, udílí mu vlákně dostředivé zrychlení ( $mv^2/R$ ), kde  $v$  je okamžitá rychlost hmotného bodu. Ukažte, že v tomto okamžiku činí napětí ve vlákně  $mg(1 + \theta_m^2)$ , kde  $\theta_m$  je úhlová amplituda pohybu. (Viz „Rozvoje goniometrických funkcí“ v dodatku E.) (b) Je při jiných úhlových výchylkách matematického kyvadla napětí ve vlákně větší, menší, nebo stejné jako v části (a)?

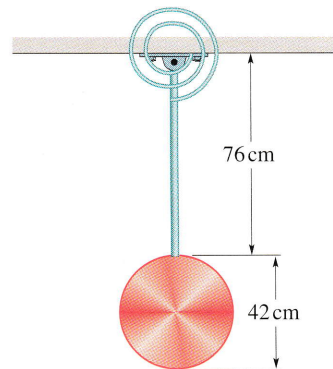
**80Ú.** Kolo bicyklu se otáčí kolem pevné osy. K jednomu z jeho drátů je připevněna ve vzdálenosti  $r$  od osy kola pružina tuhosti  $k$ . Druhý konec pružiny je uchycen v pevné stěně; uspořádání je znázorněno na obr. 16.44. (a) Předpokládejte, že kolo lze považovat za tenkou obruč poloměru  $R$  a hmotnosti  $m$ . Vyjádřete úhlovou frekvenci malých kmitů soustavy pomocí veličin  $m$ ,  $R$ ,  $r$  a tuhosti  $k$ . Jak se změní úhlová frekvence, jestliže (b)  $r = R$  a (c)  $r = 0$ ?



Obr. 16.44 Úloha 80

**81Ú.** Kruhový disk hmotnosti 2,5 kg a průměru 42 cm je pevně spojen s nehmotnou tyčí délky 76 cm. Jak je znázorněno na obr. 16.45, soustava je zavěšena na konci tyče. (a) Nehmotná torzní pružina na obrázku je nejprve odpojena. Jaká je perioda kmitů kyvadla? (b) Nyní připojíme ke kyvadlu torzní pružinu.

V rovnovážné poloze nové soustavy je tyč opět svislá. Jaká musí být torzní konstanta pružiny, aby nová perioda kmitů byla o 0,50 s kratší než perioda původní?

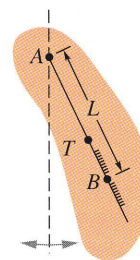


Obr. 16.45 Úloha 81

**82Ú.** Jisté fyzické kyvadlo má dva možné body závěsu:  $A$  a  $B$ . Bod  $A$  je umístěn pevně, poloha bodu  $B$  podél délky kyvadla je nastavitelná. Kyvadlo je znázorněno na obr. 16.46. Nejprve zavěsíme kyvadlo v bodě  $A$ ; perioda pohybu činí  $T$ . Poté kyvadlo obrátíme a zavěsíme jej v bodě  $B$ . Jeho poloha je však nastavena tak, aby kyvadlo mělo nyní opět periodu  $T$ . Vzdálenost takto definované polohy bodu  $B$  od bodu  $A$  činí  $L$ . Dokažte, že pomocí veličin  $L$  a  $T$  lze vyjádřit tíhové zrychlení jako

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}.$$

(Všimněte si, že tímto způsobem můžeme měřit tíhové zrychlení  $g$  i v případě, že neznáme moment setrvačnosti kyvadla ani jeho rozměry, kromě vzdálenosti  $L$ .)



Obr. 16.46 Úloha 82

**83Ú\*.** Homogenní tyč délky  $L$  je v jistém bodě zavěšena, takže vytváří fyzické kyvadlo. Pro jakou vzdálenost bodu závěsu od těžiště je perioda kyvadla nejmenší? Vyjádřete hledanou vzdálenost pomocí délky  $L$ .

#### ODST. 16.8 Tlumený oscilátor

**84C.** Během každého pohybového cyklu klesla amplituda slabě tlumeného oscilátoru o 3%. Kolikrát se zmenší celková mechanická energie tohoto oscilátoru během každého úplného kmitu?

**85C.** Vyjděte ze zadání př. 16.9 a určete, kolikrát se zmenší amplituda tlumených kmitů po provedení 20 úplných kmitů?

**86C.** V uspořádání na obr. 16.17 mějme těleso o hmotnosti 1,50 kg a pružinu tuhosti  $8,00 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Třecí síla je určena výrazem  $-b(dx/dt)$ , kde  $b = 230 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$ . Předpokládejme, že těleso je nejprve vysunuto ze své rovnovážné polohy směrem dolů o 12,0 cm a poté uvolněno. (a) Vypočítejte, za jakou dobu se amplituda kmitání zmenší na jednu třetinu své počáteční hodnoty. (b) Kolik úplných pohybových cyklů uskuteční kmitající těleso během této doby?

**87Ú.** Těleso o hmotnosti  $m = 2,00 \text{ kg}$  kmitá na pružině tuhosti  $k = 10,0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Těleso je navíc vystaveno působení třecí síly  $F = -bv$ . Počáteční amplituda kmitů byla 25,0 cm; v důsledku tlumení se však po provedení čtyř úplných kmitů zmenšila na tři čtvrtiny své původní hodnoty. (a) Určete součinitel útlumu  $b$ . (b) Jak velká mechanická energie se „ztratila“ během uvedených čtyř kmitů?

**88Ú.** (a) V rov. (16.39) vystupuje třecí síla  $-b(dx/dt)$  a síla pružnosti  $-kx$ . Vyjděte z údajů, uvedených v zadání př. 16.9, a určete v průběhu prvního úplného kmitu poměr největší hodnoty třecí síly k největší hodnotě síly pružnosti. (b) Dochází k citelné změně uvedeného poměru, jestliže jej vypočteme pro některý z následujících kmitů?

**89Ú.** Představte si, že provádíte zkoušku tlumičů u automobilu. Automobil má hmotnost 2 000 kg. Při současném zatížení tlumičů všech čtyř kol celkovou tíhou automobilu se každý z nich zkrátí o 10 cm vzhledem ke své nezatížené délce. Jestliže vyvoláte kmitání karosérie, zmenší se po vykonání jednoho kmitu amplituda o 50 % své původní hodnoty. Odhadněte hodnoty konstant  $k$  a  $b$  pro tlumící soustavu jednoho kola. Přitom předpokládejte rovnoměrné rozložení tíhy automobilu na jednotlivá kola.

### ODST. 16.9 Nucené kmitý a rezonance

**90C.** Amplituda nucených kmitů  $x_m$  v rovnici (16.43) je určena vztahem

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega_0^2}},$$

kde  $F_m$  je (konstantní) amplituda oscilující vnější síly, kterou působí pevný nosník na obr. 16.17 na pružinu. Jaká je (a) amplituda výchylky a (b) amplituda rychlosti v případě rezonance?

**91Ú.** Ve vozidle o hmotnosti 2 200 lb se nacházejí čtyři osoby, každá o hmotnosti 180 lb. Při jízdě po nerovné silnici překonává vozidlo přibližně rovnoměrně rozmístěné nerovnosti; vzdálenost sousedních nerovností je 13 ft. Vlivem nerovností dochází ke kmitání karosérie vozidla vzhledem k podvozku. Při rychlosti vozidla 10 mi/h má houpání největší amplitudu. O kolik se zvedne karosérie auta, jestliže z něj po zastavení všechny osoby vystoupí?

### PRO POČÍTAČ

**92Ú.** Uvažme kmitající soustavu dvou vozíků spojených pružinou. Vozíky se pohybují bez tření na vodorovné koleji. Tuhost pružiny známe:  $k = 50,0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Použijte druhý Newtonův zákon a dokažte, že perioda kmitání je pro oba vozíky stejná. Závislost periody na hmotnosti vozíků je určena vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

Detektorem polohy byly určeny závislosti poloh vozíků na čase. Lze je vyjádřit vztahy  $x_1(t) = 2,70(1 - \cos(18,0t))$  a  $x_2(t) = 10,70 + 1,29 \cos(18,0t)$ , kde souřadnice jsou vyjádřeny v centimetrech a čas v sekundách. (a) Použijte zákon zachování hybnosti a nalezněte hmotnosti jednotlivých vozíků. (b) Vytvořte tabulku hodnot  $x_1$  a  $x_2$  v závislosti na čase. Čas zvětšujte od  $t = 0$  do  $t = 35 \text{ s}$  s krokem 0,01 s. Pro každý časový okamžik tabelujte také polohu těžiště, celkovou hybnost soustavy dvou vozíků a sílu, kterou působí pružina na jednotlivé vozíky. Ověřte, že těžiště soustavy se nepohybuje, že celková hybnost se zachovává a že obě síly, působící na jednotlivé vozíky, jsou stejně velké a opačně orientované. (c) Použijte údaje v tabulce a nalezněte klidovou (rovnovážnou) délku pružiny.

**93Ú.** Na těleso o hmotnosti 2,0 kg, připevněné na konec pružiny tuhosti  $350 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ , působí vnější budící síla  $F = (15 \text{ N}) \sin(\omega t)$ , kde  $\omega = 35 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Konstanta tlumení  $b$  má velikost  $15 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . V čase  $t = 0$  je těleso v klidu a pružina má svou klidovou délku. (a) Použijte numerické integrace a nakreslete graf závislosti výchylky tělesa na čase během první sekundy pohybu. Použijte získaný průběh výchylky ke konci tohoto intervalu a odhadněte amplitudu, periodu a úhlovou frekvenci. Výpočet opakujte pro (b)  $\omega = \sqrt{k/m}$  a (c)  $\omega = 20 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .