



---

*V okruhu několika desítek centimetrů od tohoto písečného štíra se v písku pohybuje brouk. Má smůlu. Štír se k němu okamžitě natočí a uloví ho. Přitom štír nemůže brouka vidět (loví zásadně v noci), ani slyšet. Jak tedy dokáže tak přesně lokalizovat svou kořist?*

---

## 17.1 VLNY A ČÁSTICE

Když se chcete domluvit se svým přítelem ve vzdáleném městě, můžete mu napsat dopis nebo zatelefonovat.

První způsob komunikace (dopis) má povahu „částice“: hmotný objekt se pohybuje z jednoho místa na druhé a přenáší přitom energii a informaci. Ve většině předchozích kapitol jsme studovali individuální částice nebo jejich soustavy.

Druhý způsob (telefonem) má povahu „vlny“; tou se budeme zabývat v této a v příští kapitole. Také vlny přenášejí informaci a energii z místa na místo. Přitom však neputují žádné hmotné objekty. Během telefonování předávají nejprve zvukové vlny vaši zprávu od hlasivek k mikrofonu. Dále přebírají štafetu elektromagnetické vlny a zpráva je jimi přenášena měděným vodičem, optickým vláknem nebo možná i atmosférou přes komunikační družici. Na druhém konci je zpráva opět transformována na zvukové vlny a putuje od sluchátka k uchu vašeho přítele. Zpráva je předána, avšak váš přítel neobdržel nic z toho, čeho jste se dotkli vy. Tuto vlastnost vln pochopil Leonardo da Vinci, když píše o vlnách na vodní hladině: „Často se stává, že vlna uniká z místa svého zrození, zatímco voda nikoliv; podobně jako větrem vytvořené vlny běží přes obilné pole, zatímco jednotlivé klasy zůstávají na místě.“

**Částice a vlna** jsou dva klíčové pojmy klasické fyziky. Tím říkáme, že se jeden nebo druhý z těchto pojmů uplatňuje téměř v každém odvětví klasické fyziky. Přitom jsou to pojmy zásadně odlišné. Slovo *částice* vyvolává představu materiálního objektu, soustředěného v malém objemu a schopného přenášet energii. Slovo *vlna* vzbuzuje představu právě opačnou. Vybavuje se nám široce rozložená energie, vyplňující celý prostor, kterým vlna putuje. Před námi je nyní kus práce, při které se dozvíme o vlnách více. Pojem částice přitom na chvíli odložíme stranou.

## 17.2 DRUHY VLN

Setkáváme se se třemi druhy vln:

1. **Vlny mechanické.** Tyto vlny jsou nejnámější, protože se s nimi téměř neustále setkáváme. Běžné příklady jsou vlny na vodní hladině, zvukové vlny a seizmické vlny. Všechny mechanické vlny mají společné základní rysy: řídí se Newtonovými zákony a mohou existovat pouze v určitém látkovém prostředí (voda, vzduch, hornina).

2. **Vlny elektromagnetické.** Ty jsou již známé o něco méně, avšak používáme je prakticky neustále; běžné příklady jsou viditelné a ultrafialové světlo, rádiové a televizní vlny, rentgenové záření, radarové vlny. Pro svou existenci nevyžadují látkové prostředí. Například světlo hvězd se k nám

šíří vakuem v kosmu. Všechny elektromagnetické vlny se ve vakuu šíří stejnou rychlostí  $c$ :

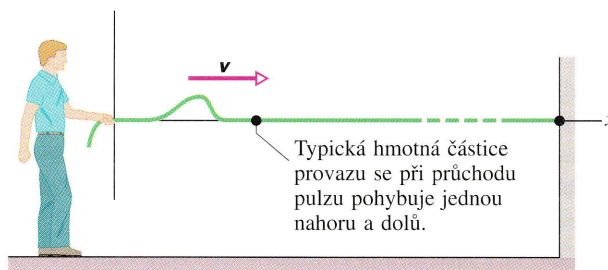
$$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad (\text{rychlost světla}). \quad (17.1)$$

3. **Vlny hmoty (de Broglieho vlny).** I když se tyto vlny běžně vyskytují v moderních zařízeních, není tento druh vln příliš znám. Elektrony, protony, další elementární částice a dokonce atomy a molekuly se projevují jako vlny. Protože běžně předpokládáme, že uvedené objekty jsou stavebními elementy hmoty, nazýváme tyto vlny vlnami hmoty nebo častěji de Broglieho.

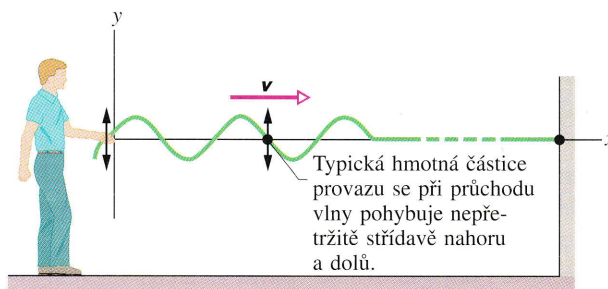
V této kapitole se výklad z velké části týká všech uvedených druhů vln. Nicméně konkrétní jevy budeme vysvětlovat na vlnách mechanických.

## 17.3 VLNY PŘÍČNÉ A PODÉLNÉ

Nejjednodušší mechanická vlna je vlna vyslaná podél natenutého a na jednom konci upevněného provazu (obr. 17.1). Když na druhém konci rychle trhneme provazem jednou nahoru a dolů, začne se podél něj šířit vlna ve formě *pulzu* jako na obr. 17.1a. Pulz se může šířit jen díky tomu, že



(a)



(b)

**Obr. 17.1** (a) Vyslání izolovaného pulzu podél nataženého provazu. (b) Vyslání spojitě sinusové vlny podél provazu. Libovolná hmotná částice provazu (na obrázku znázorněná tečkou) kmitá ve směru kolmém ke směru šíření vlny. Vlna je tedy *příčná* (*transverzální*).

v provazu lze vyvolat napětí. Když totiž přesouváme rukou nahoru první úsek provazu, je díky napětí v provazu tažen nahoru také přilehlý úsek. A když se již začne nahoru pohybovat tento přilehlý úsek, je jím opět tažen nahoru také následující úsek atd. Mezitím však již naše ruka táhne konec provazu směrem dolů. A tak každý úsek, který se pohybuje nahoru, začíná být tažen dolů sousedními úseky, které se již pohybují směrem dolů. Celkový výsledek vzájemného působení jednotlivých úseků pak spočívá v pohybu změny tvaru provazu (v pohybu pulzu) podél provazu určitou rychlostí  $v$ .

Když pohybujeme rukou harmonicky nahoru a dolů, je její pohyb popsán funkcí sinus, a vlna obvykle má (při nepřilíš velkých výchylkách) také v libovolném okamžiku sinusový tvar, jako na obr. 17.1b. To znamená, že tvar vlny odpovídá křivce, představující funkci sinus nebo kosinus.

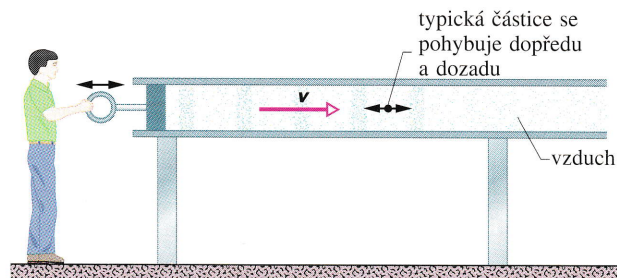
V naší úvaze vystupuje „ideální“ provaz (vlákno, struna), tj. neuvažujeme síly tření, které by šířící se vlnu nakonec utlumily. Navíc předpokládáme, že provaz je dostatečně dlouhý, a nemusíme se tedy zatím zabývat odrazem vlny na vzdáleném, upevněném konci provazu.

Dosud jsme studovali vlny na obr. 17.1 tak, že jsme vlastně sledovali **tvar vlny** při jejím pohybu směrem doprava. Na druhé straně můžeme také sledovat pohyb pevně zvolené částice provazu, tj. sledovat její kmitání nahoru a dolů při průchodu vlny. Jak je vyznačeno na obr. 17.1, výchylka každé částice provazu je *kolmá* ke směru šíření vlny. Pohyb typické částice je **příčný (transverzální)**, samotná vlna se nazývá **vlna příčná (transverzální)**. Zde se zabýváme jen **lineárně polarizovanou vlnou**, jejíž výchylka má stálý směr (neorientovaný). Jiné druhy polarizace zavedeme až v čl. 34.6.

Obr. 17.2 znázorňuje vznik zvukové vlny v dlouhé trubici, která je vyplněna vzduchem a na jednom konci uzavřena pístem. Jestliže rychle postrčíme píst doprava a pak hned doleva, vyšleme do trubice zvukový pulz. Pohyb pístu doprava vyvolá pohyb vzduchu těsně za pístem také směrem doprava. Těsně vpravo za pístem tak vzniká oblast vyššího tlaku vzduchu. Tato oblast vyvíjí tlak směrem doprava a stlačuje vzduch v sousedním objemovém elementu, umístěném směrem doprava podél osy trubice. Mezitím však již vznikl těsně za pístem podtlak, neboť jsme jej posunuli směrem

doleva. Pohyb libovolné částice vzduchu směrem doprava je tak následován pohybem směrem doleva. Posunutí jednotlivých částic a současně změny tlaku tak putují jako pulz směrem doprava podél osy trubice.

Jestliže nyní pohybujeme pístem střídavě doprava a doleva, uskutečňuje píst harmonický pohyb a podél osy trubice se šíří sinusová vlna. Jak je naznačeno na obr. 17.2,

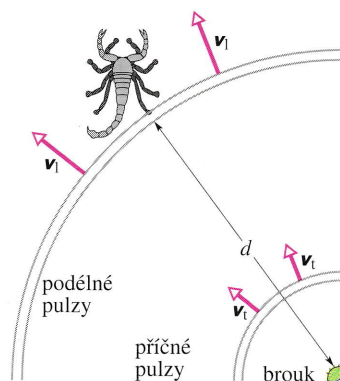


**Obr. 17.2** Pohybem pístu dopředu a dozadu vyšleme do trubice naplněné vzduchem zvukovou vlnu. Částice vzduchu (na obrázku je znázorněna černou tečkou) přitom kmitá rovnoběžně se směrem postupu vlny. Vlna je tedy *podélná (longitudinální)*.

typická částice vzduchu se přitom pohybuje ve směru rovnoběžném s osou trubice, a tedy také se směrem šíření vlny. Tento pohyb označujeme jako **podélný (longitudinální)**, samotnou vlnu nazýváme **vlnou podélnou (longitudinální)**. V této kapitole se zaměříme na příčné vlny a speciálně na vlny, vznikající ve strunách. V kap. 18 se budeme věnovat vlnám podélným a speciálně vlnám zvukovým.

Zatím jsme probírali **vlny postupné**; ty postupují z jednoho místa na druhé. Tak například vlna na obr. 17.1 postupuje od jednoho konce provazu směrem k druhému konci, vlna na obr. 17.2 postupuje od jednoho konce trubice směrem k druhému konci. Všimněme si, že postupuje skutečně pouze vlna a nikoliv látka (to jest částice provazu nebo částice vzduchu), kterou se vlna šíří.

Štír na úvodní fotografii této kapitoly využívá k zaměření své kořisti jak příčné, tak podélné vlny. Brouk totiž při každém svém pohybu nepatrně pohybuje zrnky písku a vysílá tak podél povrchu písku pulzy (obr. 17.3). Jsou to jednak pulzy podélné, šířící se rychlostí  $v_l = 150 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , jednak pulzy příčné, postupující rychlostí  $v_t = 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .



**Obr. 17.3** Pohybem brouka jsou vyvolány podél povrchu písku rychlé podélné pulzy a pomalejší pulzy příčné. Štír tedy nejprve zachytí pulzy podélné. Na obrázku je znázorněno, jak jsou tyto podélné pulzy nejdříve zachyceny pravou nejzadnější (čtvrtou) končetinou.

Osm končetin štíra je při lovu rozloženo zhruba na kružnici o průměru 5 cm. Štír tedy přijímá svými končetinami nejprve rychleji postupující podélné pulzy. Azimut kořisti je určen končetinou, která zachytila pulzy jako první. Poté štír vyhodnotí časový interval  $\Delta t$  mezi zachycením prvního podélného pulzu a prvního pomalejšího, příčného pulzu. Označíme-li vzdálenost kořisti  $d$ , platí

$$\Delta t = \frac{d}{v_t} - \frac{d}{v_l},$$

a to tedy znamená

$$d = (75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \Delta t.$$

Jestliže vezmeme například  $\Delta t = 4,0 \text{ ms}$ , vychází  $d = 30 \text{ cm}$ . Tím je kořist perfektně zaměřena a zbytek je již pro štíra rutinní záležitost.

## 17.4 POSTUPNÉ VLNY

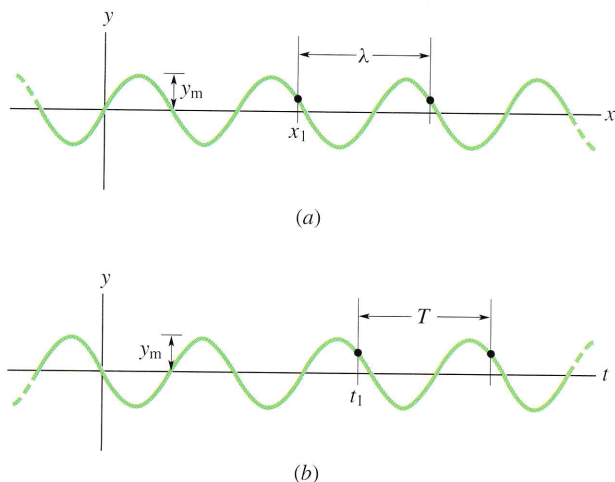
K úplnému popisu vlny ve struně (tj. k popisu pohybu její libovolné částice) potřebujeme znát funkci, která určuje tvar vlny. Formálněji řečeno, potřebujeme znát funkční závislost  $y = y(x, t)$ . Ta určuje příčnou výchylku určité částice struny jako funkci času  $t$  a polohy  $x$  této částice podél struny. Pro vlny sinusového tvaru (nazývané též harmonické), jako jsou vlny na obr. 17.1b, je výchylka  $y$  dána funkcí sinus (nebo kosinus).

Má-li sinusová vlna na obr. 17.1b postupovat stálou rychlostí ve směru osy  $x$ , musí být příčná výchylka  $y$  částice struny o souřadnici  $x$  v čase  $t$  určena vztahem

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t). \quad (17.2)$$

Zde  $y_m$  je **amplituda** vlny; index  $m$  znamená *maximum*. Amplituda vlny udává velikost maximální výchylky libovolné částice struny. (Amplituda  $y_m$  je tedy vždy kladná veličina.) Veličiny  $k$  a  $\omega$  jsou konstanty; jejich význam se právě chystáme diskutovat. Veličina  $kx - \omega t$  se nazývá **fáze** vlny.

Patrně si kladete otázku, proč jsme si k podrobnějšímu studiu vybrali právě vlny sinusové, tj. vlny popsané rov. (17.2), když přece existuje nekonečně mnoho vln různých jiných tvarů. Náš výběr je ale moudrý. Jak uvidíme v čl. 17.8, *všechny* jiné tvary vln — počítaje v to i pulz na obr. 17.1a — lze vytvořit sčítáním sinusových vln. Stačí, když u jednotlivých sčítanců pečlivě vybereme amplitudy a konstanty  $k$ . Klíčem k pochopení vln obecného tvaru je tedy studium vln sinusových.



**Obr. 17.4** (a) Snímek struny, zaznamenaný v okamžiku  $t = 0$ . Na struně postupuje sinusová vlna určená rov. (17.2). Na obrázku je vyznačena vlnová délka: je to podélná vzdálenost mezi dvěma nejbližšími po sobě následujícími částicemi struny (jsou vyznačeny tečkami), v nichž se situace opakuje (stejná příčná výchylka ve stejné části křivky). Na obrázku je vyznačena také amplituda vlny  $y_m$ , tj. největší příčná výchylka jednotlivých částic. (b) Závislost výchylky částice se souřadnicí  $x = 0$  na čase při průběhu sinusové vlny tímto místem. Na obrázku je vyznačena typická perioda  $T$ : je to doba mezi nejdříve po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je stav částice shodný. Tyto časové okamžiky odpovídají dvěma tečkám na obrázku.

Funkce v rov. (17.2) má dvě nezávisle proměnné (souřadnici  $x$  a čas  $t$ ). Úplné znázornění funkční hodnoty  $y$  jedinou křivkou v dvojrozměrném obrázku tedy není možné. Ke zviditelnění pohybu celé vlny v reálném čase bychom potřebovali videokameru. Nicméně hodně se můžeme dozvědět i studiem dvojice křivek na obr. 17.4.

### Vlnová délka a úhlový vlnčet

Na obr. 17.4a vidíme změnu příčné výchylky v jednom daném okamžiku v závislosti na poloze částice  $x$ . Výchylka je určena rov. (17.2). Uvedený okamžik jsme zvolili libovolně, ale pevně; můžeme jej označit  $t = 0$ . Jinak řečeno, uvedená křivka představuje „snímek“ vlny v tomto okamžiku. Jestliže tedy v rov. (17.2) položíme  $t = 0$ , dostaneme

$$y(x, 0) = y_m \sin kx \quad (t = 0). \quad (17.3)$$

Křivka na obr. 17.4a představuje právě tuto funkci; ukazuje tedy okamžitý tvar vlny v čase  $t = 0$ .

**Vlnová délka**  $\lambda$  vlny je nejmenší vzdálenost (měřená ve směru šíření vlny), na které dochází k opakování tvaru vlny. Typická vlnová délka je vyznačena na obr. 17.4a. Podle uvedené definice je příčná výchylka stejná na obou koncích

intervalu délky  $\lambda$ , tedy v místech  $x = x_1$  a  $x = x_1 + \lambda$ . V čase  $t = 0$  je ovšem výchylka v libovolném místě určena rov. (17.3). Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} y_m \sin(kx_1) &= y_m \sin(k(x_1 + \lambda)) = \\ &= y_m \sin(kx_1 + k\lambda). \end{aligned} \quad (17.4)$$

Funkce sinus se začíná opakovat, jestliže zvětšíme její argument (úhel) o  $2\pi$  rad; pro nejkratší vzdálenost  $\lambda$  vyhovující rov. (17.4) tedy platí  $k\lambda = 2\pi$ , tj.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{úhlový vlnčet}). \quad (17.5)$$

Konstantu  $k$  nazýváme **úhlovým vlnčetem** dané vlny; její jednotkou v soustavě SI je radián na metr. (Zdůrazněme, že symbol  $k$  zde nemá význam tuhosti pružiny, jak tomu bylo v předchozích kapitolách.)

### Perioda, úhlová frekvence a frekvence

Na obr. 17.4b vidíme časovou závislost výchylky  $y$  částice se souřadnicí  $x$ . Závislost je vyčíslena podle rov. (17.2) pro polohu  $x = 0$ . Kdybychom mohli nafilmovat pohyb struny, viděli bychom, jak se uvedená částice pohybuje nahoru a dolů. Přesněji: částice uskutečňuje harmonický pohyb. Pohyb částice je tedy popsán rov. (17.2), v níž položíme  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} y(0, t) &= y_m \sin(-\omega t) = \\ &= -y_m \sin \omega t \quad (x = 0). \end{aligned} \quad (17.6)$$

Zde jsme použili vztahu  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ , platného pro libovolný úhel  $\alpha$ . Obr. 17.4b demonstruje právě uvedenou časovou závislost; není tedy zobrazením tvaru vlny.

**Periodu** kmitů vlny definujeme jako dobu mezi nejdříve po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je stav (tj. výchylka i rychlost) určité částice struny stejný (poloha částice  $x$  je přitom libovolná, ale pevná). Typická perioda je vyznačena na obr. 17.4b. Když použijeme rov. (17.6) na oba časové okamžiky, ohraničující uvedený interval, musí se oba výsledky shodovat. Tak dostáváme

$$\begin{aligned} -y_m \sin \omega t_1 &= -y_m \sin \omega(t_1 + T) = \\ &= -y_m \sin(\omega t_1 + \omega T). \end{aligned} \quad (17.7)$$

Pro nejkratší dobu  $T$  vyhovující této rovnici tedy platí  $\omega T = 2\pi$ , tj.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{úhlová frekvence}). \quad (17.8)$$

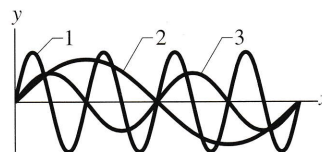
Veličina  $\omega$  se nazývá **úhlová frekvence (úhlový kmitočet)** dané vlny; její jednotka v soustavě SI je radián za sekundu.

**Frekvence** vlny  $f$  je definována jako  $1/T$  a s úhlovou frekvencí  $\omega$  souvisí vztahem

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{frekvence}). \quad (17.9)$$

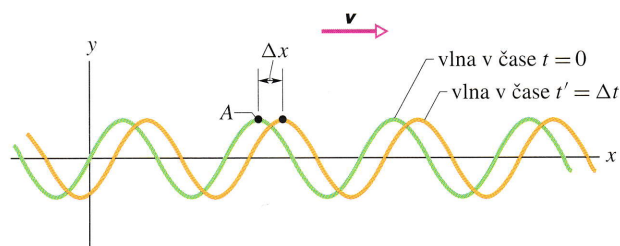
Podobně jako frekvence harmonického pohybu v kap. 16 představuje frekvence  $f$  počet kmitů za jednotku času. V nynější souvislosti kmitá částice struny při průchodu vlny místem, ve kterém je částice umístěna. Stejně jako v kap. 16 vyjadřujeme frekvenci obvykle v hertzech nebo v jejich násobcích.

**KONTROLA 1:** Na obrázku jsou uvedeny snímky tří vln, postupujících podél struny. Fáze těchto vln jsou určeny vztahy (a)  $2x - 4t$ , (b)  $4x - 8t$  a (c)  $8x - 16t$ . Přiřaďte uvedené fáze jednotlivým vlnám na obrázku.



## 17.5 RYCHLOST POSTUPNÉ VLNY

Na obr. 17.5 vidíme dva snímky vlny určené rov. (17.2). Snímky byly vytvořeny v malém časovém odstupu  $\Delta t$ . Vlna postupuje ve směru osy  $x$  (na obr. 17.5 směrem doprava). Celá křivka, znázorňující tvar vlny, se tedy posune v uvedeném směru za dobu  $\Delta t$  o vzdálenost  $\Delta x$ . Zlomek  $\Delta x / \Delta t$  představuje **rychlost vlny** (v limitě infinitezimálních přírůstků přechází zlomek na derivaci  $dx/dt$ ). Jak můžeme tuto rychlost určit?



**Obr. 17.5** Dva snímky postupné vlny popsané v rov. (17.2). První snímek zachycuje vlnu v čase  $t = 0$ , druhý v pozdějším čase  $t' = \Delta t$ . Během časového intervalu  $\Delta t$  se celá křivka posunula o vzdálenost  $\Delta x$  doprava.

Při postupu vlny na obr. 17.5 si zachovává každý bod na křivce (jako například bod A) svou výchylku  $y$ . (Zde

nehovoříme o částicích vlákna, jejichž výchylka se nepochybně mění s časem, ale o bodech na křivce, mající tvar vlny.) Pro každý takový bod musí být argument funkce sinus v rov. (17.2) konstantní:

$$kx - \omega t = \text{konst.} \quad (17.10)$$

Všimněte si, že ačkoliv je tento argument (zvaný fáze) konstantní, veličiny  $x$  a  $t$  se mění. Vzrůstá-li čas  $t$ , musí vzrůstat i poloha  $x$  tak, aby se fáze neměnila. Tím máme potvrzeno, že se bod  $A$  a obecněji i celá vlna pohybují ve směru osy  $x$ .

K určení rychlosti vlny  $v$  zderivujeme podle času obě strany rov. (17.10). Tak získáme

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

neboli

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}. \quad (17.11)$$

Když nyní použijeme rov. (17.5) (tj. vztah  $k = 2\pi/\lambda$ ) a rov. (17.8) (tj. vztah  $\omega = 2\pi/T$ ), můžeme rychlost vlny vyjádřit jako

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (\text{rychlost vlny}). \quad (17.12)$$

Rovnice  $v = \lambda/T$  nám říká, že rychlost vlny vyjadřuje posuv o jednu vlnovou délku za periodu: za dobu jedné periody postoupí vlna o jednu vlnovou délku.

Rov. (17.2) popisuje vlnu, která postupuje ve směru osy  $x$ . Jestliže nahradíme v rov. (17.2) proměnnou  $t$  výrazem  $-t$ , získáme rovnici vlny, která postupuje opačným směrem. To odpovídá podmínce

$$kx + \omega t = \text{konst.}, \quad (17.13)$$

kdy naopak (srovnejte s rov. (17.10)) klesá  $x$  s rostoucím  $t$ . Vlna, která postupuje proti směru osy  $x$ , je tedy popsána rovnicí

$$y(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t). \quad (17.14)$$

Kdybychom studovali vlnu určenou rov. (17.14) naprosto stejným postupem, jaký jsme před chvílí použili pro vlnu podle rov. (17.2), dostali bychom pro její rychlost

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}. \quad (17.15)$$

Záporné znaménko (v porovnání se znaménkem plus v rov. (17.11)) zde ukazuje, že vlna nyní skutečně postupuje

proti směru osy  $x$ . Tím jsme zpětně ověřili správnost změny znamení u časové proměnné.

Uvažme nyní vlnu obecného tvaru postupující ve směru osy  $x$  stálou rychlostí  $v$ . (Vlnu postupující proti směru osy  $x$  lze vyjádřit záměnou  $v \rightarrow -v$ .) Takovou vlnu můžeme vždy popsat rovnicí

$$y(x, t) = h(x - vt), \quad (17.16)$$

kde  $h$  je libovolná funkce. Jednou z možností je právě funkce sinus, jako v rov. (17.2) zapsané ve tvaru  $y(x, t) = y_m \sin(k(x - \frac{\omega}{k}t))$ . Z rov. (17.16) je vidět (a dokázali bychom to jako výše), že vlna se beze změny tvaru pohybuje stálou rychlostí  $v$  podél osy  $x$  (pro  $v > 0$ ). A také obráceně, rovnici libovolné postupné vlny s konstantní rychlostí  $v$  lze zapsat ve tvaru (17.6). Tak například rovnice  $y(x, t) = \sqrt{ax + bt}$  popisuje možnou (ačkoliv fyzikálně snad poněkud bizarní) postupnou vlnu. Na druhé straně vztah  $y(x, t) = \sin(ax) \cos(bt)$  není rovnicí postupné vlny.

### PŘÍKLAD 17.1

Uvažme sinusovou vlnu popsanou rovnicí

$$y = 0,00327 \sin(72,1x - 2,72t), \quad (17.17)$$

což je stručný zápis, běžně užívaný namísto přesnějšího, ale méně přehledného zápisu

$$y(x, t) = (0,00327 \text{ m}) \sin(72,1 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1}x - 2,72 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}t).$$

(a) Jakou má vlna amplitudu?

**ŘEŠENÍ:** Při srovnání dané rovnice s rov. (17.2) vidíme, že

$$y_m = 0,00327 \text{ m} = 3,27 \text{ mm}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jakou má vlnovou délku, periodu a frekvenci?

**ŘEŠENÍ:** Vyjdeme z rov. (17.17), ve které jsou zadány hodnoty úhlového vlnočtu a úhlové frekvence. Dále použijeme rov. (17.5):

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \text{ rad}}{(72,1 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1})} = \\ &= 8,71 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Periodu dostaneme z rov. (17.9):

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{(2,72 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})} = \\ &= 2,31 \text{ s}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Frekvence je podle rov. (17.9)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{(2,31 \text{ s})} = 0,433 \text{ Hz}. \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jak rychle tato vlna postupuje?

**ŘEŠENÍ:** Použijeme rov. (17.12), podle které

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{(2,72 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})}{(72,1 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1})} = 0,0377 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 3,77 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

(d) Jaká je příčná výchylka  $y$  na souřadnici  $x = 22,5 \text{ cm}$  v čase  $t = 18,9 \text{ s}$ ?

**ŘEŠENÍ:** Po dosazení za  $k$ ,  $x$ ,  $\omega$  a  $t$  do rov. (17.17) vyjde argument funkce sinus  $-35,1855 \text{ rad}$ . Dále probíhá vyčíslení výchylky takto:

$$\begin{aligned} y &= (0,00327 \text{ m}) \sin(-35,1855 \text{ rad}) = \\ &= (0,00327 \text{ m})(0,588) = \\ &= 0,00192 \text{ m} = 1,92 \text{ mm}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Příčná výchylka je tedy kladná. (Před vyčíslením funkce sinus se přesvědčte, že kalkulačku máte nastavenou do modu obloukové míry.)

### PŘÍKLAD 17.2

V př. 17.1d jsme studovali vlnu určenou rov. (17.17). Vypočetli jsme příčnou výchylku  $y$  částice struny o souřadnici  $x = 0,225 \text{ m}$  v čase  $t = 18,9 \text{ s}$ . Velikost výchylky vyšla  $1,92 \text{ mm}$ .

(a) Jaká je příčná rychlost  $u$  těže částice struny v tomtéž čase a pro tutéž vlnu? (Příčná rychlost je spojena s příčným kmitáním uvedené částice, má tedy stejný směr jako výchylka, tj. směr osy  $y$ . Nezaměňujeme ji s konstantní rychlostí vlny  $v$ , se kterou postupuje tvar vlny ve směru osy  $x$ .)

**ŘEŠENÍ:** Naše vlna je určena rov. (17.17). Je tedy jednou z vln obecně popsaných rov. (17.2):

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t). \quad (17.18)$$

V této rovnici budeme držet proměnnou  $x$  konstantní a budeme sledovat změny výchylky v čase. Pro tuto chvíli je tedy jedinou proměnnou čas  $t$ . Vypočteme derivaci výchylky podle času. Výsledek má tvar\*

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \quad (17.19)$$

Nyní stačí dosadit číselné hodnoty z př. 17.1:

$$\begin{aligned} u &= (-2,72 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})(3,27 \text{ mm}) \cos(-35,1855 \text{ rad}) = \\ &= 7,20 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

V čase  $t = 18,9 \text{ s}$  se tedy částice struny o souřadnici  $x = 22,5 \text{ cm}$  pohybuje ve směru osy  $y$  rychlostí  $7,20 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ .

(b) Jaké je příčné zrychlení částice struny o uvedené souřadnici  $x$  a v uvedeném čase  $t$ ?

\* Jestliže derivujeme funkci více proměnných podle jedné z nich a ostatní proměnné pokládáme za konstantní, používáme termínu **parciální derivace**. Parciální derivaci označujeme symbolem  $\partial/\partial t$ .

**ŘEŠENÍ:** Tentokrát vyjdeme z rov. (17.19) a budeme (v tomto výpočtu) opět pokládat  $x$  za konstantu a  $t$  za proměnnou. Parciální derivací podle času dostaneme

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t).$$

Avšak po srovnání s rov. (17.18) vidíme, že výsledek můžeme zapsat také takto:

$$a_y = -\omega^2 y.$$

Příčné zrychlení kmitající částice struny je tedy úměrné její příčné výchylce, má však opačné znamení. Jinými slovy, uvažovaná částice struny vykonává harmonický pohyb v příčném směru. Po dosazení číselných hodnot dostaneme

$$\begin{aligned} a_y &= -(2,72 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 (1,92 \text{ mm}) = \\ &= -14,2 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

V čase  $t = 18,9 \text{ s}$  je tedy částice struny o souřadnici  $x = 22,5 \text{ cm}$  vysunuta z rovnovážné polohy  $y = 0$  ve směru osy  $y$  o  $1,92 \text{ mm}$  a má zrychlení o velikosti  $14,2 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-2}$  ve směru opačném k ose  $y$ .

**KONTROLA 2:** Uvažte tři vlny, popsané rovnicemi

- (1)  $y(x, t) = 2 \sin(4x - 2t)$ , (2)  $y(x, t) = \sin(3x - 4t)$   
a (3)  $y(x, t) = 2 \sin(3x - 3t)$ . Uspořádejte tyto vlny ve vzestupném smyslu (a) podle rychlosti vlny, (b) podle největší příčné rychlosti kmitajících částic.

### RADY A NÁMĚTY

**Bod 17.1:** *Vyčíslení velkých fází*

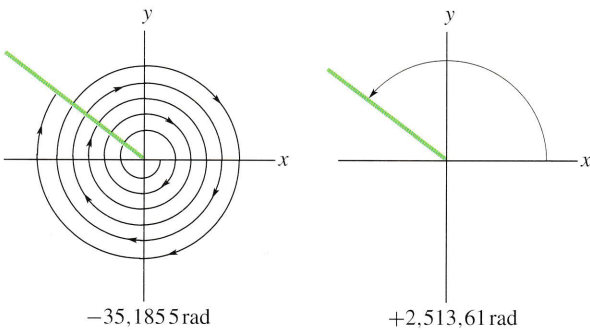
Za určitých okolností, jako třeba v př. 17.1d a 17.2, stojíme před úkolem vyčíslit funkci sinus nebo kosinus pro argument, který je mnohem větší než  $2\pi \text{ rad}$  (mnohem větší než  $360^\circ$ ). Když k argumentu přidáme nebo od něj odečteme celočíselný násobek  $2\pi \text{ rad}$ , nezmění se funkční hodnota goniometrických funkcí. Tak třeba v př. 17.1d vystupuje úhel  $-35,1855 \text{ rad}$ . Když k tomuto úhlu přičteme  $(6)(2\pi \text{ rad})$ , dostaneme

$$-35,1855 \text{ rad} + (6)(2\pi \text{ rad}) = 2,51361 \text{ rad}.$$

Tento úhel je již menší než  $2\pi \text{ rad}$ , přitom je pro něj hodnota goniometrických funkcí stejná jako pro původní úhel  $-35,1855 \text{ rad}$  (obr. 17.6). Například sinus úhlu  $2,51361 \text{ rad}$  i sinus úhlu  $-35,1855 \text{ rad}$  mají stejnou hodnotu  $0,588$ .

Kapesní kalkulátor provádí popsanou redukci velkých úhlů zcela automaticky. Ale pozor: před vyčíslením goniometrických funkcí velké argumenty nezaokrouhluje. Když totiž počítáte sinus velkého úhlu, velkou část argumentu (příslušnou celočíselnému násobku  $2\pi \text{ rad}$ ) odhodíte a pak počítáte sinus toho, co zbývá. Například kdybyste zaokrouhli

–35,1855 rad na –35 rad (to je při normálním zaokrouhlování rozumné, vzniklá změna představuje 0,5 % z původní hodnoty), změnili bychom sinus původního úhlu o 27 %. Stejně tak, když převádíte velký úhel ze stupňů na radiány, použijte přesný převodní faktor (tj. například  $180^\circ = \pi$  rad). Vyhněte se přiblížení typu  $57,3^\circ \doteq 1$  rad.



Obr. 17.6 Tyto dva úhly jsou různé, ale jejich goniometrické funkce se shodují.

## 17.6 RYCHLOST VLNY NA STRUNĚ

Rov. (17.12) udává souvislost rychlosti vlny s vlnovou délkou a s frekvencí. Z fyzikálního hlediska je však rychlost vlny určena vlastnostmi látky, ve které se vlna šíří. Má-li se totiž vlna šířit ve vodě, ve vzduchu, v oceli nebo na napnuté struně, musí se při jejím postupu částice daného prostředí rozkmitat. K tomu musí prostředí vykazovat jak setrvačnost (aby mohlo být nositelem kinetické energie), tak pružnost (aby na sebe mohlo vázat energii potenciální). Tyto dvě vlastnosti nakonec určují, jak rychle bude vlna danou látkou postupovat. Jinými slovy, rychlost vlny by mělo být možné vypočítat na základě znalosti vlastností prostředí, kterým se vlna šíří. Tento výpočet nyní provedeme pro napnutou strunu. Budeme přitom postupovat dvěma způsoby.

### Rozměrová analýza

Při rozměrové analýze pečlivě zkoumáme rozměry fyzikálních veličin, které se mohou v dané situaci uplatnit (resp. jejich jednotky). V našem případě hledáme rychlost vlny  $v$ . Její fyzikální rozměr je tvořen podílem fyzikálních rozměrů délky a času, jednotkou je tedy  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Setrvačná tendence určitého úseku napnuté struny je určena hmotností tohoto úseku. Rozhodujícím parametrem je zde podíl hmotnosti struny  $m$  a její délky  $l$ . Tento podíl nazýváme **délkovou hustotou** struny a označíme jej  $\mu$ . Máme tedy  $\mu = m/l$  a fyzikální rozměr této veličiny je podíl fyzikálních rozměrů hmotnosti a délky, tedy jednotkou je  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Má-li se na struně šířit vlna, nestačí strunu pouze napřít. Musíme ji navíc napnout, tj. vytvořit v ní napětí. Napětí vytváří sílu působící proti příčné výchylce jednotlivých úseků struny. Fyzikální veličinou, která představuje pružný aspekt při kmitání jednotlivých úseků struny, je tedy síla napínající strunu a její jednotkou je  $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  (vzpomeňte na  $F = ma$ ).

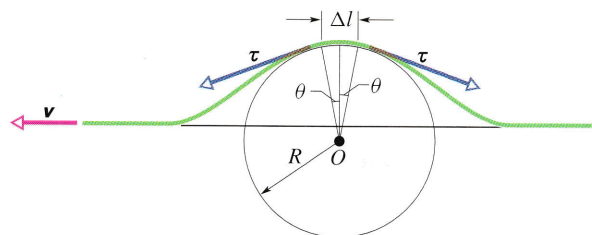
Naším úkolem je nyní zkombinovat  $\mu$  (jednotka  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$ ) a  $\tau$  (jednotka  $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ) takovým způsobem, abychom získali  $v$  (jednotka  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Když trochu probereme možné kombinace, dospějeme nakonec k výrazu

$$v = C \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \quad (17.20)$$

ve kterém je  $C$  bezrozměrová konstanta. Právě zde je slabé místo rozměrové analýzy: v jejím rámci zůstává konkrétní hodnota takovéto bezrozměrové konstanty neurčena. V průběhu druhého odvození vztahu pro rychlost vlny uvidíme, že rov. (17.20) je skutečně správná; navíc získáme  $C = 1$ .

### Odvození z druhého Newtonova zákona

Místo sinusové vlny na obr. 17.1b se nyní zaměříme na jeden symetrický pulz, znázorněný na obr. 17.7. Pro větší pohodlí zvolíme vztažnou soustavu, ve které se tento pulz nepohybuje. Jinak řečeno, poběžíme společně s pulzem, a tak jej budeme mít stále před očima. V naší soustavě budeme vidět strunu ubíhající dozadu, přesněji na obr. 17.7 zprava doleva, rychlostí  $v$ .



Obr. 17.7 Symetrický pulz pozorujeme ve vztažné soustavě, která se pohybuje společně s pulzem. V této soustavě pulz stojí a struna se pohybuje zprava doleva rychlostí  $v$ . Při výpočtu vlnové rychlosti  $v$  vyjdeme z druhého Newtonova zákona. Příslušnou pohybovou rovnici aplikujeme na elementární úsek struny délky  $\Delta l$ , který se právě nachází na temeni pulzu.

Uvažme malý úsek struny délky  $\Delta l$ . V okamžiku zachyceném na obr. 17.7 vytváří tento úsek kruhový oblouk na kružnici o poloměru  $R$ . Na obou koncích úseku působí síla ve směru tečny ke křivce pulzu. Velikosti obou sil jsou rovny velikosti  $\tau$  napětí ve struně. Jejich vodorovné složky se ruší, avšak svislé složky se sčítají. Celkově tak na daný



úsek působí vratná síla  $F$  o velikosti

$$F = 2\tau \sin \theta \approx \tau(2\theta) = \tau \frac{\Delta l}{R} \quad (\text{síla}). \quad (17.21)$$

Použili jsme zde aproximaci  $\sin \theta \approx \theta$ , platnou pro malý úhel  $\theta$  na obr. 17.7. Z obrázku také vidíme, že platí  $2\theta = \Delta l/R$ .

Hmotnost uvažovaného úseku činí

$$\Delta m = \mu \Delta l \quad (\text{hmotnost}). \quad (17.22)$$

V okamžiku, který je zachycen na obr. 17.7, se úsek  $\Delta l$  pohybuje rychlostí  $v$  po obvodu kružnice o poloměru  $R$ . Musí mu tedy být uděleno dostředivé zrychlení. Směr zrychlení souhlasí se směrem vratné síly  $F$ , jeho velikost činí

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (\text{zrychlení}). \quad (17.23)$$

Rov. (17.21), (17.22) a (17.23) popisují veličiny, které jsou vázány druhým Newtonovým zákonem

$$\text{síla} = (\text{hmotnost}) \cdot (\text{zrychlení}).$$

Po dosazení tak získáváme rovnici

$$\tau \frac{\Delta l}{R} = (\mu \Delta l) \left( \frac{v^2}{R} \right).$$

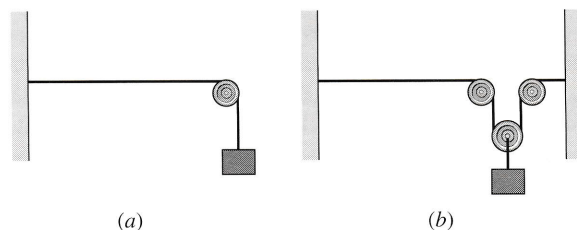
Její řešením pro neznámou rychlost vlny  $v$  nakonec dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (\text{rychlost vlny na struně}), \quad (17.24)$$

což přesně souhlasí s rov. (17.20), pokud je konstanta  $C$  v rov. (17.20) rovna jedné. Rov. (17.24) tedy určuje rychlost pulzu na obr. 17.7, a tím ovšem i rychlost jakékoliv jiné postupné vlny na stejné struně (stejně  $\mu$ ), podrobené stejnému napětí (stejně  $\tau$ ).

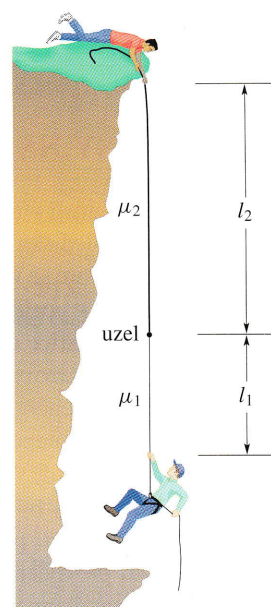
V případě sinusových vln nám rov. (17.24) říká, že rychlost vlny na ideální napnuté struně závisí pouze na parametrech struny, nikoliv na frekvenci vlny. Frekvence vlny je určena výhradně způsobem, kterým vlnu vybudíme (například osobou na obr. 17.1b). Jak vyplývá z rov. (17.12), rychlostí vlny a frekvencí je již pevně nastavena *vlnová délka*:  $\lambda = v/f$ .

**KONTROLA 3:** Na obrázku jsou znázorněna dvě uspořádání, ve kterých je napětí na stejné struně vytvořeno tíhou závaží o hmotnosti 5 kg. V kterém případě bude rychlost vlny, postupující ve struně, větší?



### PŘÍKLAD 17.3

Na obr. 17.8 se poraněný horolezec zavěsil na vyprošťovací lano, spuštěné jeho zachráncem. Lano mezi horolezcem a zachráncem je složeno ze dvou úseků: v prvním úseku délky  $l_1$  má lano délkovou hustotu  $\mu_1$ , v druhém úseku délky  $l_2 = 2l_1$  hustotu  $\mu_2 = 4\mu_1$ . V určitém okamžiku šknubol horolezec za spodní konec lana (chtěl vyslat signál „připraven“). V totéž okamžiku šknubol za horní konec lana zachránce.



**Obr. 17.8** Příklad 17.3. Poraněný horolezec visí na laně, které se skládá ze dvou úseků. Horní konec lana pevně drží jeho zachránce.

(a) Vyjádřete rychlost  $v_1$  vzniklých pulzů v úseku 1 pomocí jejich rychlostí  $v_2$  v úseku 2.

**ŘEŠENÍ:** Předně budeme předpokládat, že součet hmotností obou úseků lana je zanedbatelný v porovnání s hmotností horolezce. Napětí v laně je tedy určeno pouze tíhou horolezce a je shodné v obou úsecích lana. Podle rov. (17.24) jsou vlnové rychlosti v jednotlivých úsecích lana určeny vztahy

$$v_1 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_1}} \quad \text{a} \quad v_2 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_2}}. \quad (17.25)$$

První výraz dělíme druhým a dosadíme  $\mu_2 = 4\mu_1$ . Takto

získáme

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_1}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\tau}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{4\mu_1}{\mu_1}} = 2$$

neboli

$$v_1 = 2v_2. \quad (\text{Odpověď}) \quad (17.26)$$

(b) V jaké vzdálenosti od zachránce se oba pulzy setkají? Vyjádřete hledanou vzdálenost pomocí délky  $l_2$ .

**ŘEŠENÍ:** Pro zjednodušení dalšího výpočtu nejprve rozhodneme, zda místo setkání pulzů leží nad uzlem nebo pod ním. Označme  $t$  dobu od vyslání obou pulzů k jejich setkání. Z rov. (17.26) již víme, že pulz horolezce postupuje prvním úsekem lana rychlostí dvakrát větší, než je rychlost pulzu zachránce při postupu druhým úsekem. Protože platí  $l_2 = 2l_1$ , víme také, že pulz horolezce musí proběhnout k uzlu dvakrát menší dráhu, než pulz zachránce. Celkově tedy pulz horolezce dospěje k uzlu jako první a místo setkání obou pulzů leží nutně nad uzlem. Označme symbolem  $d$  vzdálenost místa setkání obou pulzů od zachránce. K tomuto místu běží oba pulzy po dobu  $t$ .

Pulz zachránce tedy postupuje dolů k místu setkání rychlostí  $v_2$  po dobu  $t$  a proběhne vzdálenost  $d$ . Platí

$$t = \frac{d}{v_2}. \quad (17.27)$$

Pulz horolezce proběhne nahoru nejprve vzdálenost  $l_1$  rychlostí  $v_1$  a potom ještě vzdálenost  $l_2 - d$  rychlostí  $v_2$ . Celková doba jeho pohybu k místu setkání je také  $t$ . Máme tedy

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2 - d}{v_2}. \quad (17.28)$$

Do této rovnice nyní dosadíme dobu  $t$ , vypočtenou v rovnici (17.27):

$$\frac{d}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2 - d}{v_2}.$$

Dále položíme  $l_1 = l_2/2$  a  $v_1 = 2v_2$ :

$$\frac{d}{v_2} = \frac{l_2/2}{2v_2} + \frac{l_2 - d}{v_2}.$$

Po vynásobení obou stran poslední rovnice rychlostí  $v_2$  ji nakonec snadno vyřešíme vzhledem k hledané vzdálenosti  $d$ . Výsledek je

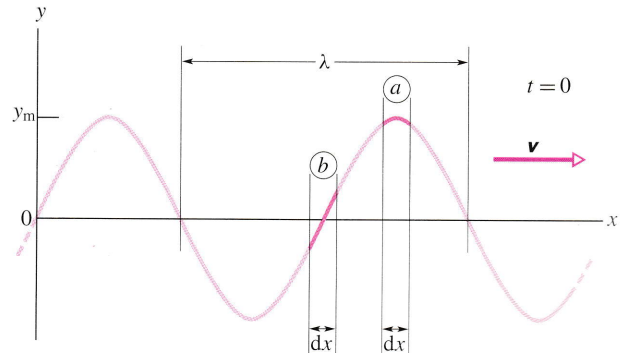
$$d = \frac{5}{8}l_2. \quad (\text{Odpověď})$$

## 17.7 ENERGIE A VÝKON VLNY

K tomu, aby se na napnuté struně vytvořila vlna, je nutno struně dodat určitou energii, spojenou s pohybem struny. Při pohybu odnáší vlna tuto energii dále. Přenáší přitom jak energii kinetickou, tak potenciální energii pružnosti. Zaměříme se odděleně na každou z těchto dvou forem energie.

### Kinetická energie

Obecný elementární úsek struny má hmotnost  $dm$  a při postupu vlny vykonává harmonický pohyb v příčném směru. Má tedy kinetickou energii, spojenou se svou příčnou rychlostí  $u$ . Když tento úsek právě probíhá polohou  $y = 0$  (obr. 17.9), je jeho příčná rychlost — a tedy i jeho kinetická energie — největší. Když se právě nachází v bodech obrátu  $y = \pm y_m$ , je jeho příčná rychlost — a tedy i jeho kinetická energie — nulová.



**Obr. 17.9** Snímek zachycuje postupnou vlnu na struně v čase  $t = 0$ . Elementární úsek struny  $a$  má v tomto okamžiku výchylku  $y = y_m$ , zatímco úsek  $b$  má výchylku  $y = 0$ . Kinetická energie jednotlivých úseků závisí na jejich příčné rychlosti. Potenciální energie úseků závisí na velikosti jejich protažení, nutného k deformaci struny do tvaru vlny.

### Potenciální energie pružnosti

K tomu, abychom mohli na struně vybudit vlnu, je nutno strunu nejen napřítmit, ale poté také napnout. Když potom úsek napnuté struny délky  $dx$  začne kmitat v příčném směru, je to nutně spojeno s periodickými změnami jeho délky. Střídavá prodloužení a zkrácení daného úseku jsou nutná k tomu, aby se struna zformovala do sinusoidy. Podobně jako u pružiny je právě s těmito délkovými změnami spojena potenciální energie pružnosti.

Uvažme úsek struny, který se právě nachází v okrajové poloze  $y = y_m$  (obr. 17.9, úsek  $a$ ). Jeho okamžitá délka je rovna původní délce, jakou měl u napnuté a nekmitající struny. Jeho potenciální energie je tedy nulová. Naopak, úsek  $b$  právě probíhá polohou  $y = 0$  a jeho okamžitá délka je největší. Proto má také největší potenciální energii.

V poloze  $y = 0$  má tedy kmitající úsek největší jak kinetickou, tak potenciální energii. Na obr. 17.9 je uveden snímek struny: oblasti struny s největší výchylkou mají nulovou energii, oblasti s nulovou výchylkou mají energii největší. Postupující vlna přenáší energii z těch úseků struny, kde je jí nadbytek, do oblastí bez energie.

### Přenášený výkon

Kinetická energie  $dE_k$ , spojená s úsekem struny hmotnosti  $dm$ , je určena vztahem

$$dE_k = \frac{1}{2} dm u^2, \quad (17.29)$$

kde  $u$  je příčná rychlost při kmitání uvažovaného úseku. V rov. (17.19) jsme tuto rychlost vyjádřili ve tvaru

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \quad (17.30)$$

Tento výsledek použijeme nyní v rov. (17.29) a současně dosadíme  $dm = \mu dx$ :

$$dE_k = \frac{1}{2} (\mu dx) (-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t). \quad (17.31)$$

Průměrnou kinetickou energii připadající na jednotkovou délku struny vypočteme integrací:

$$\overline{E_k} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dE_k. \quad (17.32)$$

Dosazením (17.31) do (17.32) dostaneme

$$\overline{E_k} = \frac{1}{4} \mu v \omega^2 y_m^2. \quad (17.33)$$

Podél struny ovšem postupuje také potenciální energie pružnosti. Při jejím přenosu má průměrná potenciální energie stejnou velikost jako energie kinetická, tedy velikost určenou v rov. (17.33). Důkaz tohoto tvrzení zde neuvádíme. Avšak měli bychom si vybavit obdobnou situaci u kmitajících systémů, jako je například kyvadlo nebo závaží zavěšené na pružině. U nich jsme skutečně dokázali, že (časově) střední kinetická energie a střední potenciální energie pružnosti jsou si rovny.

**Střední výkon** přenášený vlnou je roven energii přenesené strunou za jednotku času (je to součet kinetické a potenciální energie připadající na takovou délku struny, která je číselně rovna rychlosti vlny  $v$ ):

$$\overline{P} = (\overline{E_k} + \overline{E_p})v = 2\overline{E_k}v. \quad (17.34)$$

Použijeme-li výsledku v rov. (17.33), dostaneme

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \quad (\text{střední výkon}). \quad (17.35)$$

V tomto výsledném vztahu jsou konstanty  $\mu$  a  $v$  určeny látkou, ze které je struna vyrobena, a napětím, které jsme v ní vyvolali. Veličiny  $\omega$  a  $y_m$  jsou naopak určeny procesem, kterým jsme dané vlnění vybudili. Závislost středního výkonu vlny na čtverci její amplitudy a také na čtverci její úhlové frekvence představuje obecný závěr, platný pro všechny druhy vln.

### PŘÍKLAD 17.4

Struna má délkovou hustotu  $\mu = 525 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$  a je v ní vyvoláno napětí  $\tau = 45 \text{ N}$ . Na struně postupuje vlna, jejíž frekvence  $f$  a amplituda  $y_m$  mají postupně hodnoty  $120 \text{ Hz}$  a  $8,5 \text{ mm}$ . Jaký je výkon přenášený vlnou?

**ŘEŠENÍ:** Chceme-li pro nalezení  $\overline{P}$  použít rov. (17.35), musíme nejprve získat úhlovou frekvenci  $\omega$  a rychlost vlny  $v$ . Z rov. (17.9) dostaneme

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(120 \text{ Hz}) = 754 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

V dalším kroku získáme z rov. (17.24)

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{(45 \text{ N})}{(0,525 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1})}} = 9,26 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Nyní již rov. (17.35) dává

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 = \\ &= \frac{1}{2} (0,525 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}) (9,26 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) \cdot \\ &\quad \cdot (754 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 (0,0085 \text{ m})^2 = \\ &= 100 \text{ W}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

## 17.8 PRINCIP SUPERPOZICE

Často postupují určitou oblastí prostoru současně dvě nebo více vln. Když například posloucháme koncert, dopadají na naše ušní bubínky současně zvuky mnoha nástrojů. V anténě rádia nebo v televizní anténě je pohyb elektronů výsledkem působení celé řady signálů různých vysílačů. Na jezeře nebo v kotvišti je voda rozčtěna vlnami, běžícími od mnoha člunů.

Předpokládejme, že v téže struně postupují současně dvě vlny. Označme  $y_1(x, t)$  (resp.  $y_2(x, t)$ ) výchylky částic struny, jestliže v ní postupuje jen první (resp. jen druhá) vlna. Při současném šíření obou vln jsou výchylky částic určeny vztahem

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t), \quad (17.36)$$

ve kterém znamení plus představuje algebraický součet. Sčítání výchylek podél struny znamená:

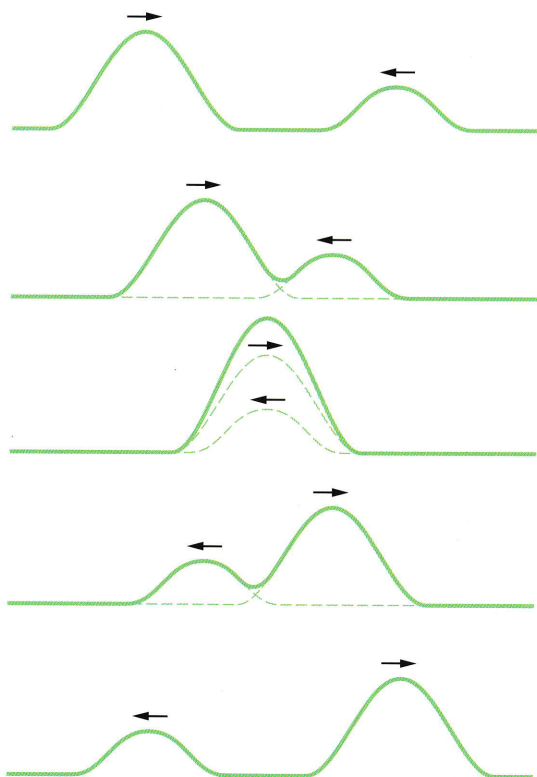
U překrývajících se vln se výchylky algebraicky sčítají a vytvářejí jednu výslednou vlnu.

Máme zde další příklad **principu superpozice**. Uplatňuje se v situacích, kdy současně působí několik vlivů

a tvrdí, že výsledný jev je součtem jevů, vyvolaných individuálně jednotlivými vlivy.\*

Na obr. 17.10 vidíme sérii pěti snímků dvou pulzů, postupujících opačným směrem na napnuté struně v opačném směru. Když se překrývají (když sebou probíhají), je výsledný pulz roven součtu obou pulzů. Navíc, každý z obou výchozích pulzů probíhá druhým, jako by ten druhý vůbec neexistoval:

Překrývající se vlny se při svém postupu navzájem neovlivňují.



**Obr. 17.10** Série pěti snímků dvou pulzů, postupujících na napnuté struně v opačném směru. Pokud sebou pulzy právě probíhají, použijeme princip superpozice.

### Fourierova analýza

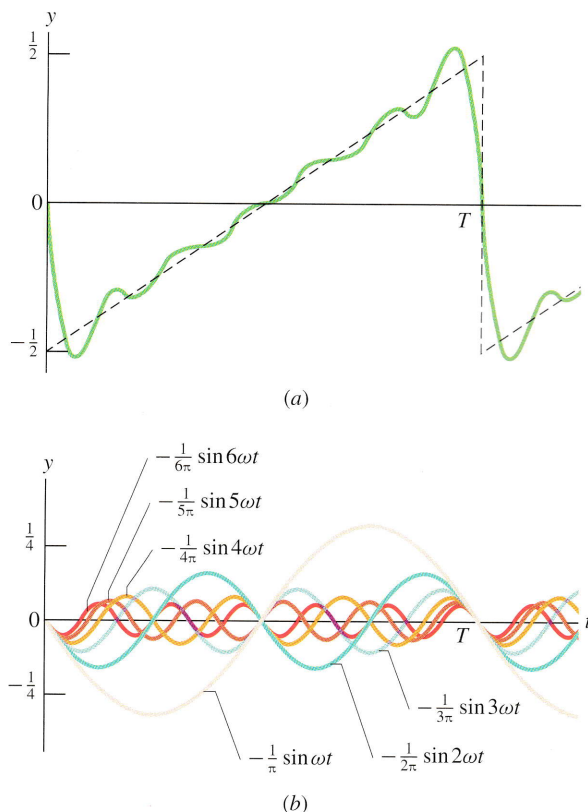
Francouzský matematik Jean Baptiste Fourier (1786–1830) použil princip superpozice ke studiu vln obecného tvaru. Ukázal, že vlnu libovolného tvaru lze vyjádřit ve tvaru součtu velkého počtu sinusových vln. Stačí jen pečlivě zvolit jejich frekvence, amplitudy a fázové konstanty. Dobře to vyjádřil anglický fyzik Sir James Jeans:

(Fourierův) teorém říká, že libovolnou křivku, ať už jsou její vlastnosti jakékoliv nebo ať už byla získána

\* Neplatil by např., kdyby výchylka vlny byla příliš velká, takže bychom překročili mez pružnosti prostředí.

jakýmkoliv způsobem, lze přesně reprodukovat tím, že složíme dostatečný počet jednoduchých harmonických (tj. sinusových) křivek — stručně řečeno, každou křivku lze postavit, když na sebe naskládáme sinusové vlny.

Součty tohoto druhu se nazývají **Fourierovy řady**; na obr. 17.11 vidíte jeden konkrétní příklad. Uvažme po částech lineární křivku na obr. 17.11a (profil pily). Řekněme, že právě tato křivka představuje časovou změnu výchylky  $y(t)$



**Obr. 17.11** (a) Čárkovaná zubatá křivka (profil pily) je aproximována zelenou křivkou, která vznikla součtem prvních šesti členů v rov. (17.37). (Kdybychom sečetli více prvních členů, byla by aproximace přesnější.) (b) Prvních šesti členů na pravé straně v rov. (17.37) je zobrazeno jako šest jednotlivých křivek. Každá z nich je sinusová.

(v poloze  $x = 0$ ) při postupu jisté vlny. Lze ukázat, že Fourierova řada, která reprodukuje tento průběh  $y(t)$ , má tvar

$$y(t) = -\frac{1}{\pi} \sin(\omega t) - \frac{1}{2\pi} \sin(2\omega t) - \frac{1}{3\pi} \sin(3\omega t) - \dots, \quad (17.37)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$  a  $T$  je perioda zubaté křivky. Zelená křivka na obr. 17.11a představuje součet prvních šesti členů na

pravé straně rov. (17.37). Vidíme již docela dobrou shodu s průběhem  $y(t)$ . Obr. 17.11b ukazuje odděleně závislost uvedených šesti členů na čase. Kdybychom vzali více členů, mohli bychom profil pily reprodukovat s libovolnou přesností. Obdobně jako tento časový průběh lze i prostoro-  
vý průběh složit ze sinusových vln.

Teď je pochopitelné, proč jsme věnovali tolik pozornosti právě vlnám sinusovým. Když jim totiž rozumíme, otevře nám Fourierův teorém cestu ke všem ostatním vlnám.

## 17.9 INTERFERENCE VLN

Předpokládejme, že v téže napnuté struně postupují v soulasném směru dvě sinusové vlny a že obě mají stejnou amplitudu a stejnou vlnovou délku. Použijeme princip superpozice. Jaká bude výsledná vlna?

Tvar výsledné vlny závisí na tom, do jaké míry jsou obě výchozí vlny navzájem *ve fázi* (jak dalece jsou sfázovány). Jinak řečeno, citlivým parametrem je vzájemný posuv křivek, které představují jednotlivé výchozí vlny. Nejprve uvažme případ, kdy jsou obě vlny přesně ve fázi. To znamená, že vrcholy (údolí) první vlny se přesně kryjí s vrcholy (údolími) vlny druhé. Mezi oběma křivkami vln není vůbec žádný posuv. Výchylka každé částice struny je tedy dvojnásobná v porovnání s vychylkou při samostatném šíření jen jedné z vln. Dále uvažme opačný případ: obě výchozí vlny mají přesně opačnou fázi. To znamená, že polohy vrcholů (údolí) jedné vlny se přesně kryjí s polohami údolí (vrcholů) vlny druhé. Křivky vln jsou navzájem posunuty o polovinu vlnové délky. Výchylky od obou výchozích vln se navzájem ruší a struna zůstává přímá. Tento jev vzájemného zesilování a zeslabování vln nazýváme **interference**. Říkáme, že výchozí vlny spolu interferují. (Slovo „interference“ zde ovšem neznamená, že by se snad obě vlny navzájem nějak ovlivňovaly; ovlivňují se pouze vychylky částic struny, a to tak, že se sčítají.)

Nechť je pro určitost první vlna, postupující na napnuté struně, určena vztahem

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17.38)$$

zatímco druhá vlna, posunutá vzhledem k první, vztahem

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi). \quad (17.39)$$

Tyto dvě vlny mají stejnou úhlovou frekvenci  $\omega$  (a tedy i stejnou frekvenci  $f$ ), stejný úhlový vlnčet  $k$  (a tedy i stejnou vlnovou délku  $\lambda$ ) a stejnou amplitudu  $y_m$ . Obě postupují stejnou rychlostí, určenou v rov. (17.24), stejným směrem, tj. ve směru osy  $x$ . Liší se pouze konstantním

úhlem  $\varphi$ . Říkáme, že tyto dvě vlny jsou navzájem *fázově posunuty* o úhel  $\varphi$ . Jinými slovy, vlny mají *fázový rozdíl*  $\varphi$ .

Na základě principu superpozice, vyjádřeného v rovnici (17.36), přísluší výsledné vlně vychylka

$$\begin{aligned} y'(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = \\ &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (17.40)$$

V dodatku E je uveden goniometrický vzorec pro součet dvou funkcí sinus dvou libovolných úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ :

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (17.41)$$

Po jeho použití v rov. (17.40) dostaneme

$$y'(x, t) = (2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi) \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\varphi). \quad (17.42)$$

Výsledná vlna je tedy opět vlna sinusová a postupuje ve směru osy  $x$ . Je to ovšem jediná vlna, kterou lze na struně skutečně pozorovat (jednotlivé komponenty, určené v rov. (17.38) a (17.39), již *nevidíme*).

Interferencí dvou sinusových vln o stejné amplitudě a stejné vlnové délce, postupujících v napnuté struně *souhlasným* směrem, vzniká opět vlna sinusová, postupující stejným směrem, jako obě výchozí vlny.

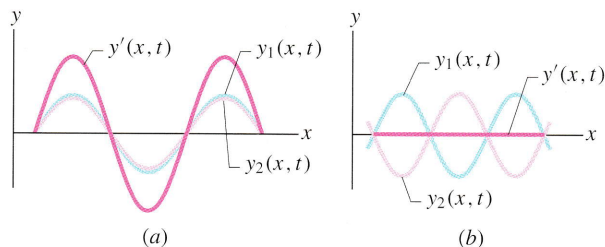
Výsledná vlna se od obou výchozích vln liší ve dvou ohledech: (1) její fáze obsahuje konstantu  $\frac{1}{2}\varphi$  a (2) její amplituda je určena veličinou uvedenou v rov. (17.42) v závorkách:

$$y'_m = 2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi. \quad (17.43)$$

Je-li  $\varphi = 0$  rad (neboli  $0^\circ$ ), jsou obě výchozí vlny přesně ve fázi (jako na obr. 17.12a). V tomto případě se rov. (17.42) redukuje na

$$y'(x, t) = 2y_m \sin(kx - \omega t) \quad (\varphi = 0 \text{ rad}). \quad (17.44)$$

Všimněme si, že amplituda výsledné vlny je dvakrát větší než amplituda každé z výchozích vln. Je to také největší amplituda, kterou může výsledná vlna vůbec mít. Skutečně, člen s funkcí kosinus v rov. (17.42) a (17.43) má největší hodnotu (rovnou jedné) pro  $\varphi = 0$ . Interference, která vytváří největší možnou amplitudu, se nazývá **úplně konstruktivní**.



**Obr. 17.12** Na struně postupují souhlasným směrem dvě identické harmonické vlny  $y_1(x, t)$  a  $y_2(x, t)$ . Jejich interferencí vzniká výsledná vlna  $y'(x, t)$ . (a) Jsou-li výchozí vlny přesně ve fázi, je jejich interference úplně konstruktivní: výsledná vlna má v porovnání s výchozími vlnami dvojnásobnou amplitudu. (b) Jsou-li výchozí vlny přesně v protifázi, je jejich interference úplně destruktivní: struna přestane kmitat.

Je-li  $\varphi = \pi$  rad (nebo  $180^\circ$ ), jsou obě výchozí vlny přesně v protifázi (jako na obr. 17.12b). V tomto případě má  $\cos \frac{1}{2}\varphi$  hodnotu  $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ , tj. amplituda výsledné vlny (rov. (17.43)) je nulová. Pro všechny hodnoty proměnných  $x$  a  $t$  potom dostáváme

$$y'(x, t) = 0 \quad (\varphi = \pi \text{ rad}). \quad (17.45)$$

Ačkoliv jsme tedy na struně vybudili dvě vlny, struna nekmitá, zůstává v klidu. Tento typ interference se nazývá **úplně destruktivní**.

Fázový rozdíl  $\varphi = 2\pi$  rad (neboli  $360^\circ$ ) odpovídá posuvu křivek, znázorňujících obě výchozí vlny, o vzdálenost jedné vlnové délky. Fázový rozdíl můžeme tedy také vyjádřit jako rozdíl dráhový. Přitom je výhodné vyjadřovat dráhový rozdíl ve vlnových délkách. Například vlny na obr. 17.12b mají dráhový rozdíl  $0,50$  vlnových délek. V tab. 17.1 jsou uvedeny některé další příklady fázových rozdílů a jim odpovídající typ interference. Když daná interference není ani úplně konstruktivní, ani úplně destruktivní, nazýváme ji **částečnou**. Amplituda výsledné vlny je v tomto případě větší než nula a menší než  $2y_m$ .

Dvě vlny se stejnou vlnovou délkou jsou ve fázi, je-li jejich dráhový rozdíl nulový nebo je-li roven celočíselnému násobku vlnové délky. Ve výpočtech tedy můžeme

od číselné hodnoty dráhového rozdílu, *vyjádřeného ve vlnových délkách*, odečíst libovolné celé číslo. Například situace s dráhovým rozdílem  $0,40$  vlnových délek je ve všech směrech ekvivalentní situaci s dráhovým rozdílem  $2,40$  vlnových délek. Ve výpočtech tak můžeme použít menšího z obou čísel.

### PŘÍKLAD 17.5

Na struně postupují souhlasným směrem dvě identické harmonické vlny a interferují spolu. Amplitudy  $y_m$  výchozích vln jsou  $9,8$  mm, jejich fázový rozdíl je  $100^\circ$ .

(a) Vypočítejte amplitudu  $y'_m$  výsledné vlny, vznikající interferencí obou výchozích vln. K jakému typu interference zde dochází?

**ŘEŠENÍ:** Pro výpočet amplitudy použijeme rov. (17.43):

$$\begin{aligned} y'_m &= 2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi = \\ &= 2(9,8 \text{ mm}) \cos(100^\circ/2) = \\ &= 13 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Protože fázový rozdíl leží mezi  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , jedná se o částečnou interference.

(b) Pro jaký fázový rozdíl výchozích vln by měla amplituda výsledné vlny velikost  $4,9$  mm? Výsledek vyjádřete v obloukové míře a poté i pomocí dráhového rozdílu ve vlnových délkách.

**ŘEŠENÍ:** Opět vyjdeme z rov. (17.43):

$$y'_m = 2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi$$

neboli

$$4,9 \text{ mm} = 2(9,8 \text{ mm}) \cos \frac{1}{2}\varphi.$$

Pomocí kalkulatoru (přepnutého do módu obloukové míry) vypočteme

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}\varphi &= \frac{(4,9 \text{ mm})}{2(9,8 \text{ mm})} = 0,25, \\ \varphi &= \pm 2,636 \text{ rad} \doteq \pm 2,6 \text{ rad}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

**Tabulka 17.1 Fázové rozdíly a jim odpovídající druh interference<sup>a</sup>**

FÁZOVÝ ROZDÍL VE STUPNÍCH	FÁZOVÝ ROZDÍL V RADIÁNECH	DRÁHOVÝ ROZDÍL VE VLN. DÉLKÁCH	AMPLITUDA VÝSLEDNÉ VLNY	DRUH INTERFERENCE
0	0	0	$2y_m$	úplně konstruktivní
120	$2\pi/3$	0,33	$y_m$	částečná
180	$\pi$	0,50	0	úplně destruktivní
240	$4\pi/3$	0,67	$y_m$	částečná
360	$2\pi$	1,00	$2y_m$	úplně konstruktivní
865	15,1	2,40	$0,60y_m$	částečná

<sup>a</sup> Interferují dvě identické harmonické vlny o amplitudě  $y_m$ , postupující souhlasným směrem.

Máme zde dvě řešení. První vlna může totiž buď *předbíhat* druhou vlnu (postupovat před ní), nebo se za ní *zpoždovat* (běžet za ní). V prvním případě je fázový rozdíl  $+2,6$  rad, v druhém  $-2,6$  rad. Vyjádřeno v dráhovém rozdílu, odstup vln činí

$$\frac{\varphi}{2\pi \text{ rad} \cdot \lambda^{-1}} = \frac{\pm 2,636 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad} \cdot \lambda^{-1}} = \pm 0,42\lambda. \quad (\text{Odpověď})$$

**KONTROLA 4:** Vyjděte ze znění př. 17.5 a uvažte následující čtyři dráhové rozdíly mezi oběma výchozími vlnami:  $0,20\lambda$ ,  $0,45\lambda$ ,  $0,60\lambda$  a  $0,80\lambda$ . Uspořádejte je sestupně podle velikosti amplitudy výsledné vlny.

## 17.10 FÁZORY

Vlnu na struně (a obecněji jakoukoliv harmonickou vlnu) můžeme popsat také vektorově, pomocí **fázoru**. Fázor je vektor umístěný do počátku souřadnic. Jeho velikost se rovná amplitudě vlny a úhlová rychlost jeho rotace je rovna úhlové frekvenci  $\omega$  vlny. Tak např. vlnu

$$y_1(x, t) = y_{m1} \sin(kx - \omega t) \quad (17.46)$$

reprezentuje fázor na obr. 17.13a. Velikost fázoru je amplituda vlny  $y_{m1}$ . Jak čas plyne, fázor se otáčí, a to v záporném směru (díky zápornému znaménku u časového členu  $\omega t$ ). Při rotaci fázoru s úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem počátku si všimněme jeho projekce na svislou osu. Ta se mění sinusově od největší hodnoty  $y_{m1}$ , přes nulu, až k nejmenší hodnotě  $-y_{m1}$ . Její průběh odpovídá sinusovému průběhu výchylky  $y_1(x, t)$  libovolné částice struny, když přes ni postupuje vlna. Částice struny má pevnou souřadnici  $x$ . Obdobně lze znázornit průběh vlny v závislosti na  $x$  při daném čase  $t$ .

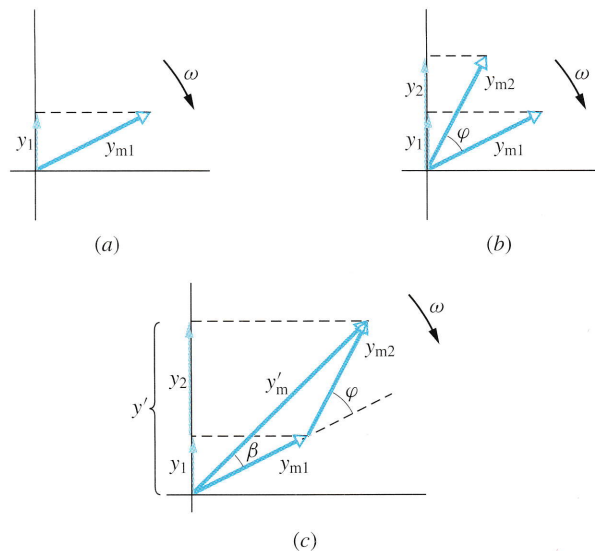
Uvažme obecněji dvě vlny postupující souhlasným směrem v téže struně. Obě tyto výchozí vlny lze společně s vlnou výslednou znázornit pomocí **fázorového diagramu**. Na obr. 17.13b vidíte dva fázory: jeden představuje vlnu v rov. (17.46), druhý odpovídá vlně

$$y_2(x, t) = y_{m2} \sin(kx - \omega t + \varphi). \quad (17.47)$$

Úhel mezi oběma fázory na obr. 17.13b je roven fázové konstantě  $\varphi$  v rov. (17.47). Tento úhel se v čase nemění, protože oba fázory rotují se stejnou úhlovou rychlostí  $\omega$  rovnou úhlové frekvenci obou vln.

Obě uvažované vlny mají stejný úhlový vlnocet  $k$  a stejnou úhlovou frekvenci  $\omega$ . V čl. 17.9 jsme již studovali jejich interferenci. Víme, že výsledná vlna má tvar

$$y'(x, t) = y'_m \sin(kx - \omega t + \beta), \quad (17.48)$$



**Obr. 17.13** (a) Fázor velikosti  $y_{m1}$ , rotující v záporném směru kolem počátku úhlovou rychlostí  $\omega$ , reprezentuje sinusovou vlnu. Jeho projekce  $y_1$  na svislou osu popisuje výchylku částice struny, přes kterou vlna postupuje. (b) Druhý fázor velikosti  $y_{m2}$  se otáčí s konstantním úhlovým odstupem  $\varphi$  za prvním; představuje druhou vlnu s fázovou konstantou  $\varphi$ . (c) Vektorový součet obou fázorů představuje výslednou vlnu, vznikající interferencí obou výchozích vln. Jeho velikost je  $y'_m$ . Projekce  $y'$  součtu na svislou osu odpovídá výchylce kratičkému úseku struny, kterým právě prochází výsledná vlna.

kde  $y'_m$  je amplituda výslednice a  $\beta$  je její fázová konstanta. Kdybychom chtěli vypočítat hodnoty veličin  $y'_m$  a  $\beta$ , museli bychom sečíst funkce v rov. (17.46) s funkcí v rov. (17.47). To jsme však již vlastně učinili při odvození rov. (17.42).

Na druhé straně můžeme výslednou vlnu studovat ve fázorovém diagramu: v libovolném okamžiku během rotace sestrojíme vektorový součet obou fázorů. Postup je znázorněn na obr. 17.13c, kde jsme nejprve posunuli druhý fázor o velikosti  $y_{m2}$ . Velikost vektorového součtu se rovná amplitudě  $y'_m$  v rov. (17.48), úhel mezi ním a fázorem, který popisuje vlnu  $y_1$ , je roven fázové konstantě  $\beta$  v rov. (17.48).

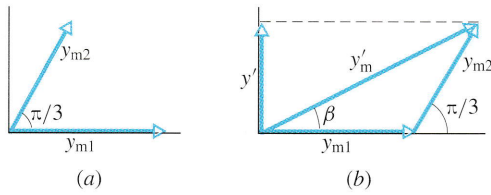
Všimněte si, že na rozdíl od postupu v čl. 17.9 umožňují fázory konstrukci výsledné vlny i v případě, *kdy jsou amplitudy výchozích vln rozdílné*.

### PŘÍKLAD 17.6

Na struně postupují souhlasným směrem dvě vlny  $y_1(x, t)$  a  $y_2(x, t)$ . Obě vlny mají stejnou vlnovou délku, jejich amplitudy jsou  $y_{m1} = 4,0$  mm a  $y_{m2} = 3,0$  mm, jejich fázové konstanty jsou po řadě  $0$  rad a  $\pi/3$  rad. Určete amplitudu  $y'_m$  a fázovou konstantu  $\beta$  výsledné vlny.

**ŘEŠENÍ:** Obě vlny postupují v téže struně. Podle rovnice (17.24) tedy postupují stejnou rychlostí  $v$ . Protože mají

také stejnou vlnovou délku (a tedy i stejný úhlový vlnčet  $k$ ), musí mít podle rov. (17.12) stejnou úhlovou frekvenci  $\omega$ . Odpovídající fázory tedy rotují kolem počátku se stejnou úhlovou rychlostí  $\omega$ , jak je znázorněno na obr. 17.13b. Úhel  $\varphi$  mezi oběma fázory je nyní  $\pi/3$  rad.



**Obr. 17.14** Příklad 17.6. (a) Dva fázory o velikostech  $y_{m1}$  a  $y_{m2}$  svírají úhel  $\pi/3$ . (b) Vektorové sčítání těchto fázorů, provedené v libovolném okamžiku během jejich rotace, poskytuje velikost  $y'_m$  fázoru výsledné vlny.

Máme sestavit vektorový součet obou fázorů, jako na obr. 17.13c. Oba sčítance můžeme nakreslit v libovolném okamžiku během jejich rotace. Pro zjednodušení vektorového sčítání bude tedy výhodné, když je nakreslíme jako na obr. 17.14a. Nyní fázory sečteme způsobem, který je obvyklý pro sčítání libovolných dvou vektorů (obr. 17.14b). Vodorovná složka výsledného fázoru je

$$\begin{aligned} y'_{mv} &= y_{m1} \cos 0 + y_{m2} \cos \pi/3 = \\ &= 4,0 \text{ mm} + (3,0 \text{ mm}) \cos \pi/3 = \\ &= 5,50 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Svislá složka výsledného fázoru je

$$\begin{aligned} y'_{ms} &= y_{m1} \sin 0 + y_{m2} \sin \pi/3 = \\ &= 0 \text{ mm} + (3,0 \text{ mm}) \sin \pi/3 = \\ &= 2,60 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Výsledná vlna má tedy amplitudu

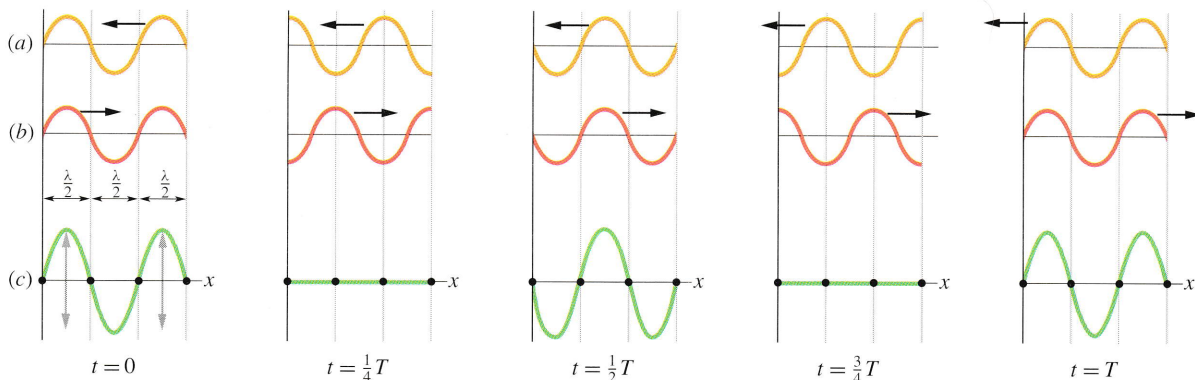
$$\begin{aligned} y'_m &= \sqrt{(5,50 \text{ mm})^2 + (2,60 \text{ mm})^2} = \\ &= 6,1 \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

a její fázová konstanta je

$$\begin{aligned} \text{tg } \beta &= \frac{(2,60 \text{ mm})}{(5,50 \text{ mm})} = 0,473, \\ \beta &= 0,44 \text{ rad}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

## 17.11 STOJATÉ VLNY

V předchozích dvou odstavcích jsme studovali dvě sinusové vlny se stejnou vlnovou délkou a stejnou amplitudou postupující v napnuté struně *souhlasným směrem*. A co když běží proti sobě? Také v tomto případě použijeme k nalezení výsledné vlny princip superpozice. Výchoziskem našich úvah bude obr. 17.15, který znázorňuje danou situaci graficky. Vidíme zde dvě výchozí vlny: ta, která postupuje doleva je na obr. 17.15a. Proti ní, tj. doprava, běží vlna na obr. 17.15b. Na obr. 17.15c vidíme jejich součet, získaný graficky aplikací principu superpozice. Nápadným rysem výsledné vlny je existence určitých míst podél struny, ve kterých je struna neustále v klidu. Těmto místům říkáme **uzly** vlny. Čtyři takové uzly jsou na obr. 17.15c vyznačeny tečkami. Uprostřed mezi sousedními uzly se nacházejí **kmitny**; v nich je naopak amplituda výsledné vlny největší. Vlnu na obr. 17.15c nazýváme **vlnou stojatou**, protože se nepohybuje doprava ani doleva: polohy nulové a maximální výchylky se v čase nemění.



**Obr. 17.15** Vznik stojaté vlny ze dvou vln postupných. Části (a) a (b) ukazují dvě série snímků dvou vln o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou. Vlny běží v opačných směrech a jejich tvary jsou zaznamenány v pěti různých okamžicích v rozmezí jedné periody. (c) Superpozice obou vln v pěti uvedených okamžicích. Všimněte si polohy uzlů a kmiten u výsledné stojaté vlny (c). Uzly jsou označeny černými tečkami. V případě postupných vln (a) a (b) žádné uzly či kmitny neexistují.



Jestliže dvě sinusové vlny o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou postupují v napnuté struně opačným směrem, vzniká jejich interferencí stojatá vlna.

Nyní budeme studovat stojatou vlnu matematicky. Dvě výchozí vlny popíšeme rovnicemi

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17.49)$$

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t). \quad (17.50)$$

Výsledná vlna  $y'$  je určena principem superpozice:

$$\begin{aligned} y'(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = \\ &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t). \end{aligned}$$

Nakonec použijeme identitu (17.41) a dostaneme:

$$y'(x, t) = (2y_m \sin kx) \cos \omega t. \quad (17.51)$$

Výsledek nemá tvar rov. (17.16) a není to tedy postupná vlna. Rov. (17.51) popisuje vlnu stojatou.

Veličina  $2y_m \sin kx$  v první závorce na pravé straně rov. (17.51) vlastně určuje amplitudu kmitů té částice struny, která je umístěna na poloze  $x$ . Avšak amplituda musí být vždy nezáporná a  $\sin kx$  může být i záporný. Amplitudu kmitů částice v místě  $x$  tedy vezmeme jako absolutní hodnotu veličiny  $2y_m \sin kx$ .

V případě postupné sinusové vlny máme pro všechny částice struny jednu a tutéž amplitudu kmitů. Pro stojatou vlnu to neplatí: amplituda kmitů se mění s polohou. Tak například u stojaté vlny, popsané rov. (17.51), je amplituda nulová pro všechny částice struny, jejichž polohy splňují rovnici  $\sin kx = 0$ , a tedy také rovnici

$$kx = n\pi \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.52)$$

Když do této rovnice dosadíme  $k = 2\pi/\lambda$  a provedeme malou úpravu, získáme

$$x = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.53)$$

(poloha uzlů).

To je podmínka pro polohu částic struny s nulovou amplitudou — uzlů — v případě stojaté vlny popsané rov. (17.51). Všimněte si, že sousední uzly jsou vzdáleny o  $\lambda/2$ , tj. o polovinu vlnové délky, a uprostřed mezi nimi leží kmitna.

Největší z možných amplitud stojaté vlny v rov. (17.51) má velikost  $2y_m$ . Vyskytuje se pro ty hodnoty  $kx$ , pro které platí  $|\sin kx| = 1$ . Těmito hodnotami jsou

$$\begin{aligned} kx &= \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots = \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.54) \end{aligned}$$

Do rov. (17.54) dosadíme  $k = 2\pi/\lambda$  a provedeme malou úpravu. Tak získáme podmínku

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.55)$$

(poloha kmiten).

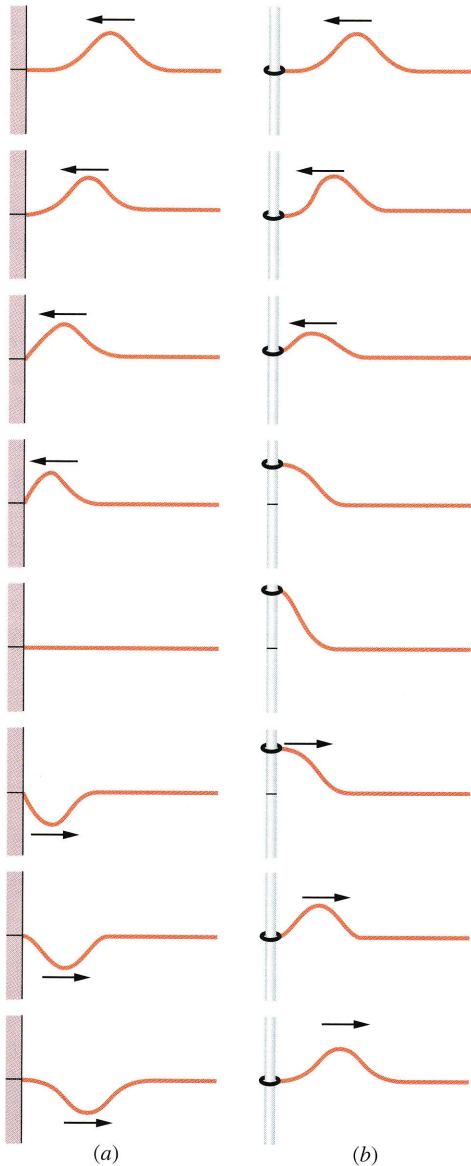
To je podmínka pro polohu částic struny s maximální amplitudou — kmiten — v případě stojaté vlny, popsané rov. (17.51). Sousední kmitny jsou vzdáleny o polovinu vlnové délky a uprostřed mezi nimi leží uzel.

## Odras na hranici

V napnuté struně lze vytvořit stojatou harmonickou vlnu také odrazem postupné vlny na konci struny. Dopadající (původní) vlna a odražená vlna jsou popsány postupně rov. (17.49) a (17.50). Jejich interferencí vzniká stojatá vlna.

Obr. 17.16 ilustruje odraz vlny na příkladu odrazu jednoho postupného pulzu. Na obr. 17.16a je struna na svém levém konci upevněna, a tedy i znehybněna. Pulz, který zprava dospěje k tomuto konci, působí na stěnu určitou silou ve směru nahoru. Podle zákona akce a reakce tedy také stěna působí na okrajovou částici struny stejně velkou, ale opačně orientovanou silou. Tato reakční síla vytváří u stěny nový pulz, který postupuje podél struny od konce zpátky. Při takovém „tvrdém“ odrazu musí mít vlna u stěny uzel, struna je zde totiž znehybněna upevněním ve stěně. Výchytky dopadajícího a odraženého pulzu musí být těsně u stěny opačné, interferencí se zde musí nutně vyrušit. Jde-li o harmonickou vlnu, zjistíme toto: Vlna odražená na pevném konci je v protifázi k přicházející vlně.

Na obr. 17.16b je levý konec struny připevněn k lehkému prstenci, který může volně a bez tření klouzat po přímé tyči. Dopadající pulz vytáhne strunu i s prstencem na tyči směrem nahoru. Struna se přitom na svém konci prodlouží a vznikne v ní napětí, které má naopak tendenci toto prodloužení zmenšit: výsledkem je pohyb prstence směrem dolů a tím následný vznik odraženého pulzu, jehož výchytky jsou souhlasně orientované s výchytkou pulzu dopadajícího. Při takovém „měkkém“ odrazu se tedy dopadající a odražený pulz navzájem zesilují a u konce struny vzniká kmitna; amplituda výchytky prstence je dvojnásobkem amplitudy každého z obou pulzů. Jde-li o harmonickou vlnu, zjistíme toto: Vlna odražená na volném konci je ve fázi s přicházející vlnou.



**Obr. 17.16** (a) Zprava nabíhající pulz je na levém konci struny odražen doprava. Levý konec je pevně zabudován ve stěně. Všimněte si, že výchylky dopadajícího a odraženého pulzu jsou u stěny opačné. (b) Levý konec struny je spojen s prstencem, který může volně a bez tření klouzat nahoru a dolů po přímé tyči. Dopadající a odražený pulz mají nyní stejně orientované výchylky.

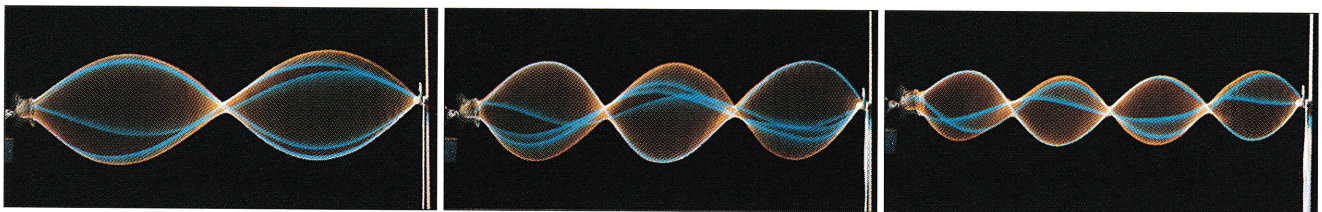
**KONTROLA 5:** Uvažme interferenci dvou vln stejné amplitudy a vlnové délky. Výsledná vlna má rovnici (1)  $y'(x, t) = 4 \sin(5x - 4t)$ , (2)  $y'(x, t) = 4 \sin(5x) \cos(4t)$  a (3)  $y'(x, t) = 4 \sin(5x + 4t)$ . Která z těchto rovnic popisuje výslednou vlnu v situaci, kdy se výchozí vlny šíří (a) obě ve směru osy  $x$ , (b) obě proti směru osy  $x$  a (c) v opačných směrech?

## 17.12 VLASTNÍ KMITY

Nechme jeden konec struny, řekněme levý, sinusově kmitat a druhý upevníme. Na struně bude vlna tedy nejprve postupovat ve směru doprava. Její frekvence se rovná frekvenci kmitů levého konce. Na pevném konci se vlna odrazí a postupuje skrze sebe samu zpět doleva. Vlna běžící doprava a vlna běžící doleva spolu interferují.

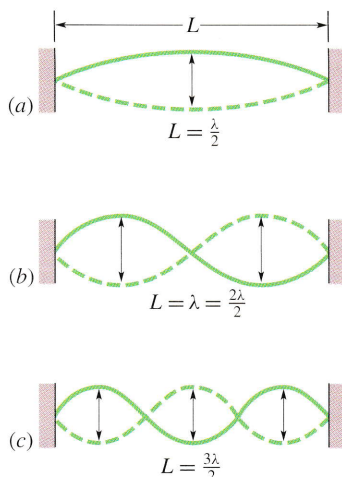
Pro jisté speciální frekvence vznikne díky interferenci stojatá vlna s uzly a s velkými kmitnami, podobná vlnám na obr. 17.17. Říkáme jí **vlastní** neboli **rezonanční kmit struny**. Frekvence, při kterých dochází ke vzniku rezonančních kmitů, nazýváme **vlastní** neboli **rezonanční frekvence struny**. Také říkáme, že při těchto frekvencích struna **rezonuje**. Kdyby se frekvence kmitů levého konce nerovнала některé z vlastních frekvencí, stojatá vlna by nemohla vzniknout. Interference vln postupujících doprava a doleva by v tomto nepříznivém případě vedla pouze ke vzniku malých, prakticky nepostřehnutelných kmitů částic struny.

Uvažme nyní podobnou situaci: určitá struna, například kytarová, je napnutá mezi dvěma pevnými svorkami. Vzdálenost svorek je  $L$ . Ve struně vybudíme kmitání na vlastní frekvenci, takže vznikne rezonanční kmit. Protože oba konce struny jsou upevněny, bude zde mít nutně stojatá vlna uzly. Nejjednodušší obrazec, který vyhovuje této podmínce, je na obr. 17.18a. Na něm vidíme strunu ve dvou extrémních polohách (první poloze odpovídá spojitá čára, druhé čárkovaná čára). Všimněme si, že zde máme pouze jednu kmitnu, umístěnou uprostřed struny. Všimněme si také, že na vzdálenosti  $L$  (délka struny) se rozložila jedna půl-



**Obr. 17.17** Stroboskopické snímky odhalují speciální (nedokonalé) obrazce stojatých vln. Tyto rezonanční kmity jsou vybudeny vibrátorem na levém konci struny. Vznikají pouze při určitých frekvencích vibrátoru.

vlna. Pro tento vlastní kmit tak máme podmínku  $\lambda/2 = L$ . Podrobněji řečeno: má-li interferencí dvou výchozích vln, postupujících doprava a doleva, vzniknout takový rezonanční kmit, musí mít tyto vlny touž vlnovou délku  $\lambda = 2L$ .



**Obr. 17.18** Struna je natažena mezi dvěma svorkami a jsou v ní vybudeny vlastní kmity. Jednotlivé vlastní kmity můžeme znázornit obrázky odpovídajících stojatých vln. Každý obrázek je tvořen soustavou *půlvln*, vznikajících při znázornění dvou krajních poloh struny v průběhu dané stojaté vlny. (a) Nejjednodušší obrázek je tvořen jedinou půlvlnou. Spojitá a přerušovaná čára znázorňují dvě krajní polohy struny. (b) V pořadí složitosti následuje obrázek tvořený dvěma půlvlnami. (c) Následující obrázek má tři půlvlny.

Druhý nejjednodušší obrázek stojatých vln při upevněných koncích struny je znázorněn na obr. 17.18b. Tento obrázek má tři uzly a dvě kmitny. Má-li interferencí dvou výchozích vln, postupujících doprava a doleva, vzniknout tento vlastní kmit, musí mít obě výchozí vlny vlnové délky  $\lambda = L$ . Třetí obrázek je znázorněn na obr. 17.18c. Odpovídající stojatá vlny má čtyři uzly, tři kmitny a vlnovou délku  $\lambda = \frac{2}{3}L$ . V této posloupnosti bychom mohli pokračovat. Jestliže vyjdeme z daného obrázce, pak následující obrázek stojatých vln má o jednu půlvlnu, o jeden uzel a o jednu kmitnu více. Na délku struny  $L$  musíme navíc vložit jednu půlvlnu  $\lambda/2$ .

V souhrnu můžeme říci, že vlastní kmit v napnuté struně vzniknou, je-li

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.56)$$

Těmto vlnovým délkám pak odpovídají příslušné vlastní frekvence. Dostaneme je z rov. (17.12), do které zahrneme

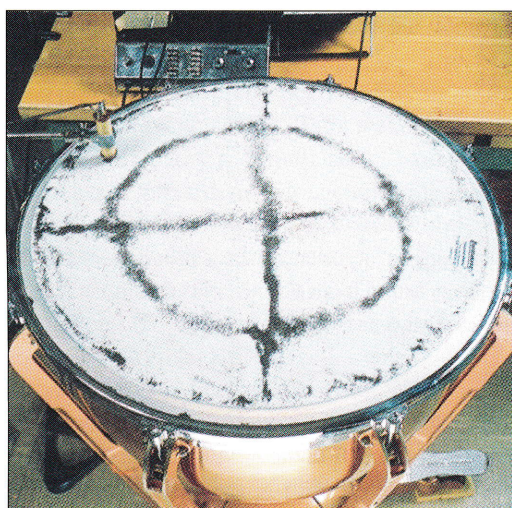
podmínku v rov. (17.56):

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.57)$$

Zde  $v$  je rychlost postupné vlny v dané struně.

Podle rov. (17.57) jsou tedy všechny vlastní frekvence celočíselnými násobky jisté nejnižší vlastní frekvence. Tu získáme, když v rov. (17.57) vezmeme  $n = 1$ :  $f = v/2L$ . Vlastní kmit s touto nejnižší frekvencí nazýváme *základním kmitem* nebo také *prvním harmonickým kmitem* neboli první harmonickou. Kmit odpovídající  $n = 2$  je *druhý harmonický kmit*, pro  $n = 3$  máme *třetí harmonický kmit* atd. Frekvence jednotlivých vlastních kmitů se často označují  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ , kde  $n$  je **číslo harmonického kmitu** neboli **módu**.

Jev rezonance je zcela běžný u všech kmitajících systémů. Pozorujeme jej také u dvojrozměrných a trojrozměrných těles. Například na obr. 17.19 vidíte dvojrozměrný obrazec uzlů, vznikajících na kmitající membráně tympanů (**Chladního obrazce**).



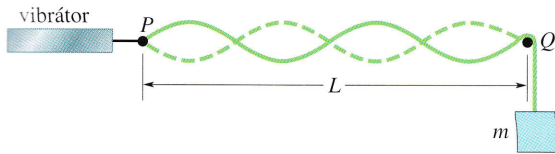
**Obr. 17.19** Jeden z mnoha možných obrazců stojatých vln, vznikajících na membráně tympanů (Chladního obrazce). Obrazec je vytvořen tmavým práškem, původně stejnoměrně rozsypaným na membráně. V levém horním rohu fotografie je vidět mechanický vibrátor, který v membráně vybudí kmitání určité frekvence. Prášek se samovolně sesypává k uzlům vzniklé stojaté vlny. V dvojrozměrném případě však uzly nejsou izolované body, ale vytvářejí na membráně kružnice a úsečky.

#### PŘÍKLAD 17.7

Na obr. 17.20 je zobrazena struna, spojená na jednom konci v bodě  $P$  s generátorem sinusových kmitů a na druhém konci zatížená přes držák  $Q$  závažím o hmotnosti  $m$ . Vzdálenost  $L$  bodů  $P$  a  $Q$  činí 1,2 m, délková hustota struny je  $1,6 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Frekvence vibrátoru byla 120 Hz. Amplituda příčného pohybu bodu  $P$  je dostatečně malá a bod  $P$  lze tedy považovat za uzel. Uzlem je i bod  $Q$ .

(a) Při jaké hmotnosti závaží  $m$  vybudí vibrátor na struně čtvrtý harmonický kmit?



**Obr. 17.20** Příklad 17.7. Zatížená struna je spojena s vibrátorem. Pro pevnou frekvenci vibrátoru se na struně vybudí stojaté vlny jen pro jisté diskrétní hodnoty napětí na struně.

**ŘEŠENÍ:** Rezonanční frekvence jsou určeny v rov. (17.57) jako

$$f = \frac{v}{2L}n \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.58)$$

Napětí ve struně musíme nastavit tak, aby se frekvence vibrátoru rovnala čtvrté harmonické frekvenci, určené právě uvedenou rovnicí.

Rychlost vlny na struně je určena rov. (17.24):

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}, \quad (17.59)$$

kde za napětí ve struně  $\tau$  byla dosazena váha závaží  $mg$ . Dosadíme  $v$  do rov. (17.58) a vyjádříme  $m$ :

$$m = \frac{4L^2 f^2 \mu}{n^2 g}. \quad (17.60)$$

Do tohoto obecného výsledku dosadíme nyní číslo harmonického kmity  $n = 4$ . Po vyčíslení tak dostaneme

$$m = \frac{4(1,2 \text{ m})^2 (120 \text{ Hz})^2 (0,0016 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1})}{(4)^2 (9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})} = 0,846 \text{ kg} \approx 0,85 \text{ kg}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jakou stojatou vlnu lze vybudit, jestliže strunu napneme závažím o hmotnosti  $m = 1,00 \text{ kg}$ ?

**ŘEŠENÍ:** Uvedenou hodnotu  $m$  dosadíme do rov. (17.60) a tuto rovnici vyřešíme vzhledem k proměnné  $n$ . Tímto postupem získáme  $n = 3,7$ . Číslo harmonického kmity však musí být celé. Protože toto získané  $n$  celé není, nebude vibrátorem vybudena vůbec žádná stojatá vlna. Kmitání struny bude malé, prakticky nepostřehnutelné.

**KONTROLA 6:** V následující řadě rezonančních frekvencí jedna z nich (nižší než 400 Hz) schází: 150 Hz, 225 Hz, 300 Hz, 375 Hz. (a) Jaká je chybějící frekvence? (b) Jaká je sedmá harmonická frekvence?

### RADY A NÁMĚTY

**Bod 17.2:** Harmonické kmity ve struně

Když potřebujeme prozkoumat určitý harmonický kmit na napnuté struně dané délky  $L$ , nejprve si tento kmit nakreslíme jako na obr. 17.18. Potřebujeme například pátou harmonickou frekvenci. Nejprve si nakreslíme pět půlvln mezi šesti pevnými pomocnými body. Hned uvidíme, že pět půlvln, každá délky  $\lambda/2$ , má pokrývat délku struny  $L$ . To tedy znamená  $5(\lambda/2) = L$ , a tedy  $\lambda = 2L/5$ . Poté můžeme již použít rov. (17.12) ( $f = v/\lambda$ ) a získáme hledanou pátou harmonickou frekvenci.

V každém případě si uvědomme, že vlnová délka harmonického kmity je určena výhradně délkou struny  $L$ . Na druhé straně harmonická frekvence závisí také na rychlosti vlny  $v$  a ta je podle rov. (17.24) určena napětím struny a její délkovou hustotou.

## PŘEHLED & SHRNU TÍ

### Příčné a podélné vlny

Mechanické vlny mohou existovat pouze v látkovém prostředí a jejich pohyb je určen Newtonovými zákony. V případě příčných (transverzálních) mechanických vln, jakými jsou například vlny na napnuté struně, kmitají částice prostředí kolmo ke směru postupu vlny. Při šíření podélných (longitudinálních) vln kmitají částice prostředí rovnoběžně se směrem postupu vlny.

### Sinusové vlny (harmonické vlny)

Sinusová (harmonická) vlna, postupující ve směru osy  $x$ , je popsána vztahem

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17.2)$$

kde  $y_m$  je amplituda,  $k$  je úhlový vlnčet,  $\omega$  je úhlový kmitočet neboli úhlová frekvence a  $kx - \omega t$  je fáze. Vlnová délka  $\lambda$  souvisí s  $k$  vztahem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (17.5)$$

Perioda  $T$  a frekvence  $f$  vlny jsou s úhlovou frekvencí  $\omega$  vázány vztahy

$$\frac{\omega}{2\pi} = f = \frac{1}{T}. \quad (17.8, 17.9)$$

Rychlost šíření vlny  $v$  je uvedenými parametry určena vztahem

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (17.12)$$

**Rovnice obecné postupné vlny**

Jakákoliv funkce tvaru

$$y(x, t) = h(x - vt) \quad (17.16)$$

popisuje vlnu postupující ve směru osy  $x$  stálou rychlostí  $v$  (pro  $v > 0$ ). Její tvar je určen konkrétním tvarem funkce  $h$ . Vlna postupující proti směru osy  $x$  je popsána funkcí  $h(x + vt)$ .

**Rychlost vlny na napnuté struně**

Rychlost vlny, která postupuje na napnuté struně, je určena napětím struny  $\tau$  a délkovou hustotou struny  $\mu$ . Platí

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \quad (17.24)$$

**Výkon**

Střední výkon vlny je střední rychlost změny energie v daném místě v důsledku jejího přenosu touto vlnou. V případě sinusové vlny v napnuté struně je střední výkon roven

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2. \quad (17.35)$$

**Skládání vln**

Při současném šíření dvou nebo více vln v tomtéž prostředí je výchylka libovolné částice prostředí rovna součtu výchylek, které by této částici individuálně udělily jednotlivé vlny. Toto pravidlo se nazývá *princip superpozice*.

**Fourierova řada**

Libovolnou vlnu můžeme vyjádřit ve tvaru *Fourierovy řady*, tj. ve tvaru součtu vhodně zvolených sinusových vln.

**Interference vln**

Výchylky ve dvou vlnách postupujících na téže struně se sčítají nebo odčítají podle principu superpozice. Říkáme, že spolu interferují neboli že dochází k *interferenci*. Pokud se obě výchozí vlny shodují ve směru šíření, v amplitudě  $y_m$  a ve frekvenci  $f$  (a tedy mají také stejnou vlnovou délku), avšak liší se fázovou

konstantou  $\varphi$ , vzniká interferencí jediná vlna stejné frekvence:

$$y'(x, t) = 2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\varphi). \quad (17.42)$$

Je-li  $\varphi = 0$ , vlny jsou ve fázi a jejich interference je (úplně) konstruktivní. Při  $\varphi = \pi$  rad jsou vlny v protifázi a jejich interference je (úplně) destruktivní.

**Fázory**

Formálně můžeme vlnu  $y(x, t)$  popsat *fázorem*. Je to vektor, jehož velikost je rovna amplitudě vlny  $y_m$  a který se otáčí kolem počátku s úhlovou rychlostí rovnou úhlové frekvenci vlny  $\omega$ . Projekcí rotujícího fázoru na svislou osu získáme výchylku  $y$  jednotlivých částic při šíření vlny.

**Stojaté vlny**

Interferencí dvou identických sinusových vln, postupujících v opačných směrech, vznikají stojaté vlny. V případě struny s upevněnými konci jsou stojaté vlny popsány vztahem

$$y'(x, t) = 2y_m \sin kx \cos \omega t. \quad (17.51)$$

Stojaté vlny mají pevné polohy uzlů a kmiten. *Uzel*, resp. *kmitna* je poloha nulové, resp. maximální příčné výchylky struny.

**Vlastní kmity**

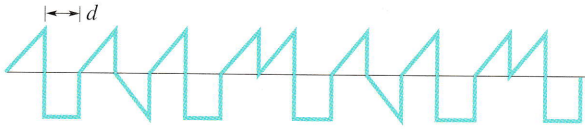
Stojaté vlnění můžeme na struně vytvořit odrazem postupných vln na koncích struny. Na upevněných koncích se vytvářejí uzly vlny. Toto pravidlo omezuje frekvence stojatých vln, které lze na dané struně vybudit. Každou takovou přípustnou frekvenci nazýváme *vlastní* neboli *rezonanční frekvencí* a odpovídající stojatou vlnu nazýváme *vlastním* neboli *rezonančním kmitem* struny. V případě struny délky  $L$  s oběma konci upevněnými jsou vlastní frekvence určeny vztahem

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.57)$$

Kmit příslušný  $n = 1$  nazýváme *základním kmitem* neboli *prvním harmonickým kmitem* (první harmonickou). Kmit odpovídající  $n = 2$  je *druhý harmonický kmit*. Podobně pro vyšší hodnoty  $n$ .

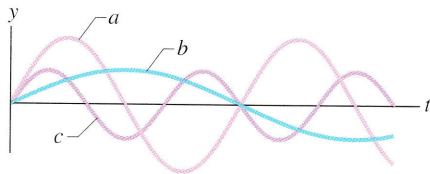
## OTÁZKY

1. Jakou vlnovou délku má (neobvyklá) vlna na obr. 17.21? Délka každého segmentu na obrázku je  $d$ .



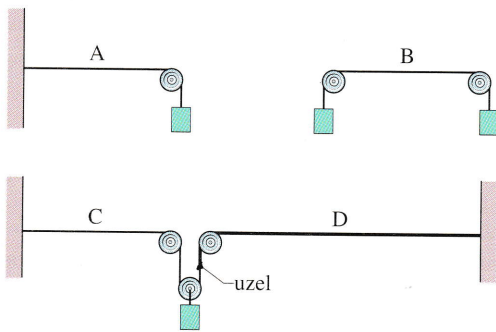
Obr. 17.21 Otázka 1

2. Vlákno napneme a pak podél něj odděleně vyšleme tři různé sinusové vlny. Na obr. 17.22 je znázorněna výchylka pevně zvolené částice vlákna jako funkce času pro každou ze tří uvedených vln. Uspořádejte křivky sestupně podle velikosti vlnové délky odpovídající vlny.



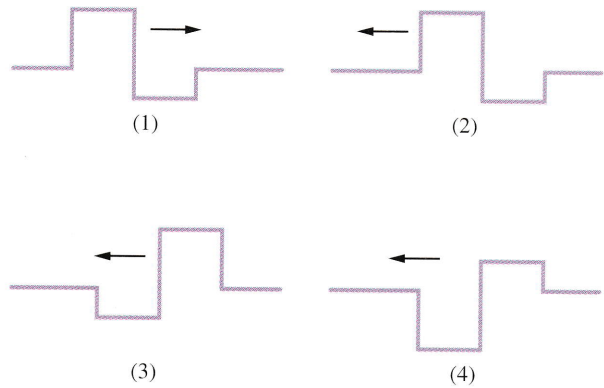
Obr. 17.22 Otázka 2

3. Na obr. 17.23 jsou vyobrazena čtyři vlákna, zatížená jedním nebo dvěma stejnými závažími. Vlákna A, B a C mají stejnou délkovou hustotu; délková hustota vlákna D je ale větší. Uspořádejte vlákna sestupně podle postupné rychlosti vln, které se na nich mohou šířit.



Obr. 17.23 Otázka 3

4. Vlnu 1 na obr. 17.24 tvoří dva pravouhlé pulzy: první má výšku 4 jednotky a šířku  $d$ , druhý má hloubku 2 jednotky a šířku  $d$ . Vlna postupuje doprava podél osy  $x$ . Podobně jsou vytvořeny vlny 2, 3 a 4. Tyto vlny však postupují podél osy  $x$  doleva. Uvažme interferenci vlny 1 jednotlivě s ostatními vlnami. Při které kombinaci vln bude existovat časový okamžik, ve kterém vznikne interferencí (a) nejhlubší pravouhlý pulz, (b) nulový signál na celé ose  $x$  a (c) jeden pravouhlý pulz výšky a šířky  $2d$ ?

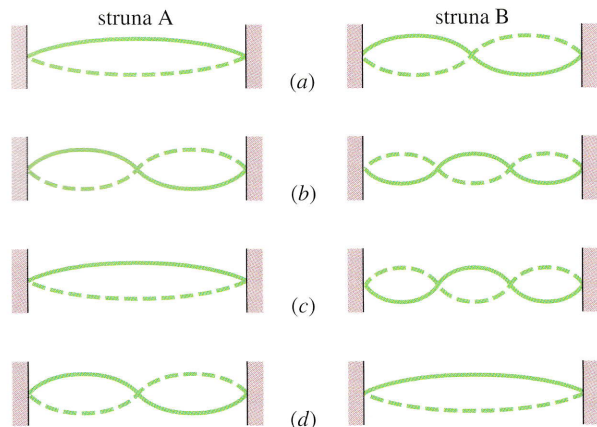


Obr. 17.24 Otázka 4

5. Na struně postupují dvě vlny ve fázi. U jedné z nich změníme určitým způsobem fázi; v důsledku toho se vlna posune o  $5,4$  vlnové délky. Jaký druh interference se nyní objeví na struně?
6. Vyjdeme ze znění př. 17.5 a uvažme následující čtyři fázové rozdíly mezi oběma vlnami:  $\pi/4$ ,  $7\pi/4$ ,  $-\pi/4$  a  $-7\pi/4$ . (a) Uspořádejte sestupně tyto čtyři fázové rozdíly podle velikosti amplitudy výsledné vlny. Řešte bez provádění detailního výpočtu. (b) Pro každý ze čtyř uvedených fázových rozdílů popište typ vzniklé interference.
7. Uvažujme postupně čtyři dvojice harmonických vln stejné vlnové délky postupující týmž směrem podél struny. Pro každou dvojici známe amplitudy obou vln a jejich fázový rozdíl: (a) 2 mm, 6 mm,  $\pi$  rad; (b) 3 mm, 5 mm,  $\pi$  rad; (c) 7 mm, 9 mm,  $\pi$  rad; (d) 2 mm, 2 mm, 0 rad. Obě vlny spolu interferují. Uspořádejte sestupně uvedené čtyři dvojice podle velikosti amplitudy výsledné vlny. Řešte bez provádění detailního výpočtu. (Tip: Sestrojte fázorové diagramy.)
8. (a) Na struně postupují souhlasným směrem tři vlny stejné amplitudy a stejné vlnové délky. Řekněme, že jedna z nich má fázovou konstantu  $0^\circ$ . Jaké jsou fázové konstanty zbylých dvou vln, jestliže je interference všech tří vln úplně destruktivní? (Tip: Sestrojte fázorové diagramy.) (b) Uvažte čtyři výchozí vlny popsaných vlastností, jedna z nich má opět fázovou konstantu  $0^\circ$ . Jaké jsou fázové konstanty zbylých tří vln, jestliže je interference všech čtyř vln úplně destruktivní? Nyní existují dvě různé odpovědi.
9. Na struně vybudíme sedmý harmonický kmit. (a) Kolik vznikne uzlů? (b) Nachází se uprostřed struny uzel, kmitna, nebo něco jiného? (c) Je vlnová délka šestého harmonického kmity delší, nebo kratší v porovnání se sedmým harmonickým kmitem? (d) Je šestá harmonická frekvence vyšší, nebo nižší než sedmá?
10. (a) Uvažme situaci popsanou v př. 17.7 a znázorněnou na obr. 17.20. Jestliže při pevné frekvenci vibrátoru postupně zvyšujeme hmotnost závaží, objevují se nové harmonické kmity.

Jsou pořadová čísla těchto harmonických kmitů větší, nebo menší než číslo harmonického kmitu v textu př. 17.7? (b) Následují nové harmonické kmity spojitě za sebou (při určité zátěži je jeden nahrazen druhým), nebo nejprve daný harmonický kmit zanikne a teprve po určitém zvýšení zátěže se objeví nový?

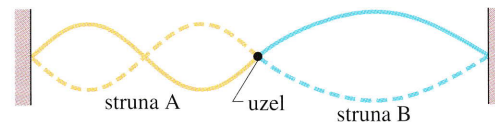
**11.** Mezi dvěma pevnými držáky, umístěnými ve vzdálenosti  $L$ , je natažena struna. (a) Pro která pořadová čísla harmonických kmitů existuje ve vzdálenosti  $L/3$  od jednoho z držáků uzel? (b) Na struně vybudíme pátý harmonický kmit a zaměříme se na bod vzdálený o  $2L/5$  od jednoho z držáků. Je v něm uzel, kmitna, nebo nic z toho? (c) Stejná otázka jako v bodě (b) pro desátý harmonický kmit.



Obr. 17.25 Otázka 12

**12.** Struny A a B mají stejnou délku a stejnou délkovou hustotu. Napětí ve struně B je však větší než napětí ve struně A. Na obr. 17.25 vidíte čtyři dvojice situací, označené (a) až (d), kdy na strunách byly vybudeny stojaté vlny. U které dvojice kmitají obě struny se stejnou frekvencí?

**13.** Dvě struny stejné délky, ale různé délkové hustoty, jsou na koncích pevně spojeny a vzniklá struna je natažena mezi dvěma držáky. Určitá frekvence vybudí na vzniklé struně stojatou vlnu. Jeden její uzel je v místě spojení obou původních strun. Situace je znázorněna na obr. 17.26. Která struna má větší délkovou hustotu?



Obr. 17.26 Otázka 13

**14.** Uvažte postupně vlnovou délku a rezonanční frekvenci pro druhý harmonický kmit jisté struny, napnuté mezi dvěma držáky. Zvětší se tyto veličiny, zmenší se, nebo zůstanou stejné, jestliže (a) zvětšíme vzdálenost držáků beze změny napětí ve struně, (b) zvýšíme napětí ve struně beze změny vzdálenosti držáků a (c) použijeme strunu s větší délkovou hustotou?

**15.** Hráči na klasickou kytaru vědí, že před představením musí kytaru rozehrát a poté znovu naladit. Během prvních několika minut hry se totiž struny zahřejí a tím i nepatrně uvolní. Má toto uvolnění za následek snížení, nebo zvýšení rezonanční frekvence jednotlivých strun?

## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 17.5 Rychlost postupné vlny

**1C.** Daná vlna má rychlost  $240 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a vlnovou délku  $3,2 \text{ m}$ . Jaká je (a) frekvence vlny a (b) perioda vlny?

**2C.** Daná vlna má úhlovou frekvenci  $110 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  a vlnovou délku  $1,80 \text{ m}$ . Vypočítejte (a) úhlový vlnčet a (b) rychlost vlny.

**3C.** Rychlost elektromagnetické vlny ve vakuu je  $3,0\cdot 10^8 \text{ m/s}$ . (a) Vlnové délky viditelného světla vyplňují interval zhruba od  $400 \text{ nm}$  (pro fialové světlo) do  $700 \text{ nm}$  (pro červené světlo). Určete obor frekvencí světelných vln. (b) Vlny v oboru frekvencí od  $1,5 \text{ MHz}$  do  $300 \text{ MHz}$  jsou označovány jako krátkovlnné rádiové vlny (patří sem například frekvence rozhlasových FM stanic nebo frekvence televizního signálu VHF). Určete odpovídající obor vlnových délek. (c) Také rentgenové paprsky jsou elektromagnetickými vlnami. Jejich vlnové délky leží v intervalu od  $1,0\cdot 10^{-2} \text{ nm}$  do  $5,0 \text{ nm}$ . Jaký je odpovídající frekvenční obor?

**4C.** Na struně postupuje sinusová vlna. Příčná výchylka částice struny klesá z maximální hodnoty na nulu za dobu  $0,170 \text{ s}$ . Určete (a) periodu vlny a (b) frekvenci vlny. (c) Vlnová délka dané vlny je  $1,40 \text{ m}$ . Jaká je rychlost vlny?

**5C.** Napište rovnici postupné vlny, která se šíří proti směru

osy  $x$ , má amplitudu  $0,010 \text{ m}$ , frekvenci  $550 \text{ Hz}$  a rychlost  $330 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**6C.** Na struně se šíří postupná vlna popsaná vztahem

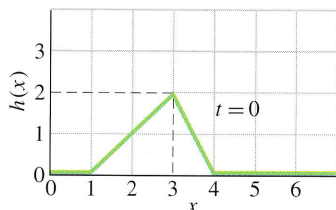
$$y = 2,0 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{0,40} + \frac{x}{80} \right) \right],$$

kde souřadnice  $x$  a  $y$  jsou vyjádřeny v centimetrech a čas  $t$  v sekundách. (a) Vezměte  $t = 0$  a graficky znázorněte  $y$  jako funkci  $x$  pro  $0 \leq x \leq 160 \text{ cm}$ . (b) Opakujte část (a) pro  $t = 0,05 \text{ s}$  a pro  $t = 0,10 \text{ s}$ . (c) Z grafů určete rychlost a směr šíření vlny ( $+x$ , nebo  $-x$ ).

**7C.** Ukažte, že vlnu  $y = y_m \sin(kx - \omega t)$  lze zapsat v následujících ekvivalentních tvarech:

$$\begin{aligned} y &= y_m \sin [k(x - vt)], \\ y &= y_m \sin \left[ \omega \left( \frac{x}{v} - t \right) \right], \\ y &= y_m \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - ft \right) \right], \\ y &= y_m \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]. \end{aligned}$$

- 8C.** Na obr. 17.27 je znázorněn izolovaný pulz v čase  $t = 0$ . Tvar pulzu je určen funkcí  $h(x - 5t)$ , kde  $x$  je v centimetrech a  $t$  v sekundách. Jaká je (a) rychlost a (b) směr postupu pulzu? (c) Nakreslete  $h(x - 5t)$  jako funkci proměnné  $x$  pro  $t = 2$  s. (d) Nakreslete  $h(x - 5t)$  jako funkci proměnné  $t$  pro  $x = 10$  cm.



Obr. 17.27 Cvičení 8

- 9C.** Ukažte, že při šíření příčné postupné harmonické vlny na struně je (a) maximální příčná rychlost částic struny určena vztahem  $u_{\max} = \omega y_m = 2\pi f y_m$  a (b) maximální příčné zrychlení částic struny určeno vztahem  $a_{y,\max} = \omega^2 y_m = 4\pi^2 f^2 y_m$ .

- 10C.** Příčná postupná vlna na struně je určena rovnicí

$$y = (2,00 \text{ mm}) \sin[(20 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1})x - (600 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})t].$$

- (a) Určete pro tuto vlnu amplitudu, frekvenci, rychlost a vlnovou délku. (b) Určete největší příčnou rychlost částic struny při šíření uvedené vlny.

- 11C.** (a) Napište rovnici příčné postupné sinusové vlny, která se šíří na vlákně ve směru osy  $y$  s úhlovým vlnočtem  $60 \text{ cm}^{-1}$ , s periodou  $0,20$  s a s amplitudou  $3,0$  mm. (b) Předpokládejte, že při šíření této vlny kmitají jednotlivé částice vlákna ve směru osy  $z$ . Jaká je největší příčná rychlost částic vlákna?

- 12Ú.** Příčná postupná vlna, šířící se na velmi dlouhé struně, je popsána rovnicí

$$y = 6,0 \sin(0,020\pi x + 4,0\pi t),$$

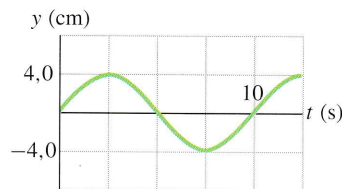
kde souřadnice  $x$  a  $y$  jsou vyjádřeny v centimetrech a čas  $t$  v sekundách. Pro tuto vlnu určete (a) amplitudu, (b) vlnovou délku, (c) frekvenci, (d) rychlost, (e) směr šíření a (f) největší příčnou rychlost částic struny. (g) Jaká je příčná výchylka struny v místě  $x = 3,5$  cm a v čase  $t = 0,26$  s?

- 13Ú.** (a) Napište rovnici příčné postupné sinusové vlny, šířící se na vlákně ve směru  $+x$ , má-li tato vlna vlnovou délku  $10$  cm, frekvenci  $400$  Hz a amplitudu  $2,0$  cm. (b) Jaká je největší příčná rychlost částic vlákna? (c) Jaká je rychlost vlny?

- 14Ú.** Uvažte příčnou postupnou sinusovou vlnu v napnuté struně. Ukažte, že v libovolném čase a v libovolném bodě struny je sklon tečny ke tvaru vlny roven poměru příčné rychlosti částic struny v daném bodě a rychlosti vlny.

- 15Ú.** Na struně se ve směru osy  $x$  šíří příčná sinusová vlna vlnové délky  $20$  cm. Obr. 17.28 znázorňuje časovou závislost příčné výchylky částice struny o souřadnici  $x = 0$ . (a) Načrtněte tvar vlny na úseku jedné vlnové délky (mezi  $x = 0$  a  $x = 20$  cm) v čase  $t = 0$ . (b) Jaká je rychlost šíření vlny? (c) Napište rovnici

vlny a explicitně v ní uveďte všechny konstanty. (d) Jaká je příčná rychlost částice struny o souřadnici  $x = 0$  v čase  $t = 5,0$  s?



Obr. 17.28 Úloha 15

- 16Ú.** Sinusová vlna o frekvenci  $500$  Hz běží ve struně rychlostí  $350 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . (a) Jaká je vzdálenost dvou částic struny, které mají při kmitání fázový rozdíl  $\pi/3$  rad? (b) Jaký je fázový rozdíl mezi dvěma výchylkami téže částice struny, jestliže výchylky po sobě následují s časovým odstupem  $1,00$  ms?

### ODST. 17.6 Rychlost vlny na struně

- 17C.** Jaká je rychlost příčné postupné vlny na vlákně hmotnosti  $60,0$  g a délky  $2,00$  m, jestliže napětí ve vlákně činí  $500$  N?

- 18C.** Nejtěžší, resp. nejlehčí struna jistých houslí má délkovou hustotu  $3,0 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ , resp.  $0,29 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ . Jaký je poměr průměru těžší struny k průměru struny lehčí? Předpokládejte, že obě struny jsou vyrobeny z téhož materiálu.

- 19C.** Při napětí  $120$  N činí rychlost příčné vlny na struně  $170 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Na jakou hodnotu musíme změnit napětí, chceme-li zvýšit rychlost vlny na  $180 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ?

- 20C.** U ocelového drátu, který je na obou koncích upevněn ve svorkách, jsme zdvojnásobili napětí, aniž se přitom ztelně změnila jeho délka. Jaký je poměr nové rychlosti šíření příčné vlny k původní rychlosti vlny?

- 21C.** Uvažme drát vyrobený z materiálu o objemové hustotě  $\rho$ . V drátu vyvoláme tah  $\sigma$  (sílu na jednotku plochy příčného průřezu). Ukažte, že rychlost příčné vlny  $v$  je určena vztahem

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}.$$

- 22C.** Příčná vlna na struně je popsána rovnicí

$$y = (2,00 \text{ mm}) \sin[(20 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1})x - (600 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})t].$$

Napětí ve struně je  $15$  N. (a) Určete rychlost vlny. (b) Vypočítejte délkovou hustotu struny v gramech na metr.

- 23C.** Délková hustota struny je  $1,6\cdot 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ . Na struně se šíří příčná vlna, popsána vztahem

$$y = (0,021 \text{ m}) \sin[(2,0 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1})x + (30 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})t].$$

- (a) Určete rychlost vlny. (b) Vypočítejte napětí ve struně.

- 24C.** Určete největší dosažitelnou rychlost příčné vlny v ocelovém drátu. Při započtení přiměřeného bezpečnostního faktoru lze

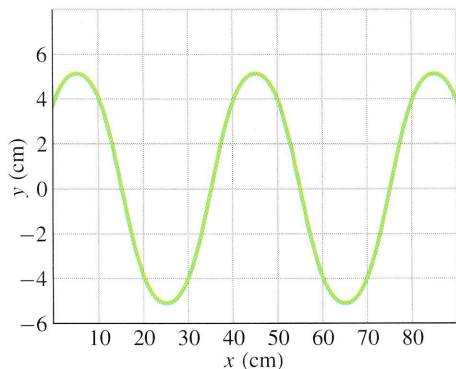


v ocelovém drátu vyvolat maximální tah (sílu na jednotku plochy příčného průřezu)  $7,0 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Objemová hustota oceli je  $7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Dokažte, že výsledek nezávisí na průměru drátu.

**25Ú.** Struna má délkovou hustotu  $5,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1}$  a je napínána silou  $10 \text{ N}$ . Šíří se v ní příčná sinusová vlna o amplitudě  $0,12 \text{ mm}$  a frekvenci  $100 \text{ Hz}$ . Vlna postupuje proti směru osy  $x$ . Napište její rovnici.

**26Ú.** Uvažte sinusovou příčnou vlnu v napnutém vlákně. Naleznete poměr největší příčné rychlosti částic vlákna k rychlosti vlny. Dále předpokládejte, že znáte frekvenci a amplitudu vlny. Závisej uvedení poměr rychlostí na materiálu, z něhož je vlákno vyrobeno (například vlákno nylonové, ocelové apod.)?

**27Ú.** V napnuté struně se šíří ve směru osy  $x$  příčná postupná vlna. Na obr. 17.29 vidíme závislost výchylky částic struny v ča-



Obr. 17.29 Úloha 27

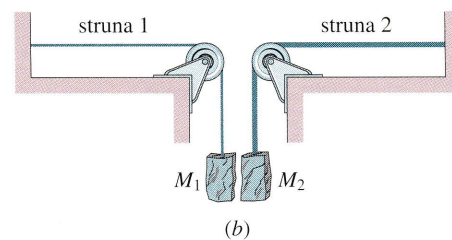
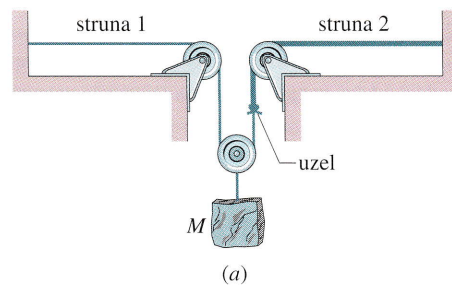
se  $t = 0$  na jejich poloze podél struny. Ve struně je napětí  $3,6 \text{ N}$ , její délková hustota činí  $25 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ . Naleznete (a) amplitudu, (b) vlnovou délku, (c) rychlost vlny a (d) periodu vlny. (e) Jaká je největší příčná rychlost částic struny? (f) Napište rovnici vlny.

**28Ú.** Na struně se šíří rychlostí  $40 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  příčná sinusová vlna. Časová závislost výchylky částice struny o souřadnici  $x = 10 \text{ cm}$  je popsána rovnicí

$$y = (5,0 \text{ cm}) \sin [1,0 \text{ rad} - (4,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})t].$$

Délková hustota struny činí  $4,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1}$ . Vypočítejte (a) frekvenci vlny a (b) vlnovou délku. (c) Naleznete obecnou rovnici vlny, udávající závislost příčné výchylky částic struny na čase a na jejich souřadnici. (d) Vypočítejte napětí ve struně.

**29Ú.** Struna 1 na obr. 17.30a má délkovou hustotu  $3,00 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ , struna 2 má délkovou hustotu  $5,00 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ . Napětí ve strunách je vyvoláno závažím o hmotnosti  $M = 500 \text{ g}$ . (a) Vypočítejte rychlost vlny na každé z obou strun. (b) Závaží rozdělíme na dvě části (přitom platí  $M = M_1 + M_2$ ) a napínání strun uzpůsobíme podle obr. 17.30b. Jaké mají být hmotnosti  $M_1$  a  $M_2$ , aby na obou strunách byla stejná rychlost vlny?



Obr. 17.30 Úloha 29

**30Ú.** Drát délky  $10,0 \text{ m}$  a hmotnosti  $100 \text{ g}$  je napnut silou  $250 \text{ N}$ . Na každém konci drátu byl s časovým odstupem  $30,0 \text{ ms}$  vytvořen pulz. Kde se oba pulzy poprvé setkají?

**31Ú.** Uvnitř některých typů baseballových a golfových míčků se používá gumová páska, splňující v širokém rozsahu prodloužení Hookův zákon. Uvažme určitý úsek této pásky hmotnosti  $m$  a nezatížené délky  $l$ . Působením síly  $F$  se daný úsek prodlouží o délku  $\Delta l$ . (a) Určete rychlost vlny pro příčné vlnění v napnuté páске; vyjádřete ji pomocí hmotnosti  $m$ , prodloužení  $\Delta l$  a tuhosti  $k$ . (b) S využitím výsledku části (a) dokažte, že doba postupu příčného pulzu od jednoho konce napnuté pásky k druhému konci je pro  $\Delta l \ll l$  úměrná  $1/\sqrt{\Delta l}$  a pro  $\Delta l \gg l$  je konstantní.

**32Ú\*.** Ze stropu visí stejnorodé lano délky  $l$  a hmotnosti  $m$ . V laně se šíří příčná vlna. (a) Ukažte, že rychlost vlny je závislá na vzdálenosti  $y$  od spodního konce lana a je určena vztahem  $v = \sqrt{gy}$ . (b) Ukažte, že doba postupu vlny od jednoho konce lana k druhému činí  $t = 2\sqrt{l/g}$ .

### ODST. 17.7 Energie a výkon vlny

**33C.** Jestliže je daná struna napnutá silou  $\tau_1$ , přenáší se na frekvenci  $f_1$  střední výkon  $P_1$ . (a) Ve struně zvýšíme čtyřikrát napětí, takže  $\tau_2 = 4\tau_1$ . Vyjádřete nový střední přenášený výkon  $P_2$  pomocí původní hodnoty  $P_1$ . (b) Ve struně s původním napětím postupuje vlna s dvakrát nižší frekvencí, takže  $f_2 = f_1/2$ . Vyjádřete střední výkon, přenášený na frekvenci  $f_2$ , pomocí původní hodnoty  $P_1$ .

**34C.** Struna délky  $2,7 \text{ m}$  a hmotnosti  $260 \text{ g}$  je napnutá silou  $36,0 \text{ N}$ . Ve struně postupuje příčná vlna s amplitudou  $7,70 \text{ mm}$ . Jaká musí být její frekvence, jestliže je přenášen střední výkon  $85,0 \text{ W}$ ?

**35Ú.** Na jednom konci dlouhé vodorovné struny je upevněno vahadlo. Struna má délkovou hustotu  $120 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$  a je napínána

silou 90,0 N. Vahadlo vykonává 120krát za sekundu spojitý pohyb nahoru a dolů o 1,00 cm. Pohybem vahadla se na struně vytváří příčná sinusová vlna. Nalezněte pro libovolnou částici struny (a) největší velikost příčné rychlosti  $u$  a (b) největší hodnotu příčné složky napětí. (c) Ukažte, že obě uvedené maximální hodnoty se objevují se stejnou fází. Jaká je při této fázi příčná výchylka  $y$  částice struny? (d) Jaký největší výkon je přenášen danou částicí struny? (e) Jaká je příčná výchylka  $y$  částice struny v okamžiku, kdy je jí právě přenášen největší výkon? (f) Jaký nejmenší výkon je přenášen danou částicí struny? (g) Jaká je příčná výchylka  $y$  částice struny v okamžiku, kdy je jí právě přenášen nejmenší výkon?

### ODST. 17.9 Interference vln

**36C.** Dvě stejné vlny, postupující souhlasným směrem, mají fázový rozdíl  $\pi/2$  rad. Vyjádřete amplitudu výsledné vlny pomocí společné amplitudy  $y_m$  obou výchozích vln.

**37C.** Na napnuté struně postupují souhlasným směrem dvě stejné vlny. Jaký je mezi nimi fázový rozdíl, jestliže amplituda výsledné vlny je 1,5krát větší než společná amplituda obou výchozích vln? Výsledek vyjádřete ve stupních, v radiánech a ve vlnových délkách.

**38Ú.** Na struně se šíří souhlasným směrem dvě stejné sinusové vlny a interferují. Výsledná vlna má rovnici

$$y'(x, t) = (3,0 \text{ mm}) \sin(20 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}x - 4,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}t + 0,820 \text{ rad}).$$

(a) Jaká je společná vlnová délka  $\lambda$  obou výchozích vln? (b) Jaký je mezi nimi fázový rozdíl? (c) Jaká je jejich společná amplituda  $y_m$ ?

### ODST. 17.10 Fázory

**39C.** Dvě sinusové vlny mají stejnou frekvenci a šíří se stejným směrem. Jejich amplitudy jsou 3,0 cm a 4,0 cm, fázové konstanty mají hodnotu 0 a  $\pi/2$  rad. Určete amplitudu výsledné vlny.

**40C.** Amplitudy dvou sinusových vln, které se současně šíří stejným směrem v napnuté struně, jsou 3,0 mm a 5,0 mm. Jejich fázové konstanty jsou  $0^\circ$  a  $70^\circ$ . Obě vlny mají stejnou vlnovou délku. Jaká je (a) amplituda a (b) fázová konstanta výsledné vlny?

**41C.** Dvě sinusové vlny o stejné vlnové délce postupují současně souhlasným směrem v napnuté struně. Jejich amplitudy jsou 4,0 mm a 7,0 mm, fázové konstanty mají hodnotu 0 a  $0,8\pi$  rad. Jaká je (a) amplituda a (b) fázová konstanta výsledné vlny?

**42Ú.** Dvě sinusové vlny o stejné periodě se současně šíří stejným směrem v napnuté struně. Jejich amplitudy jsou 5,0 mm a 7,0 mm. Interferencí vzniká výsledná vlna, jejíž amplituda činí 9,0 mm. Fázová konstanta vlny s amplitudou 5,0 mm je 0. Určete fázovou konstantu vlny s amplitudou 7,0 mm.

**43Ú.** Tři sinusové vlny o stejné frekvenci postupují v napnuté struně v kladném směru osy  $x$ . Jejich amplitudy jsou postupně

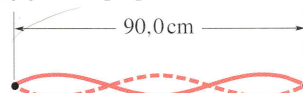
$y_1$ ,  $y_1/2$  a  $y_1/3$ . Fázové konstanty činí postupně 0,  $\pi/2$  a  $\pi$ . Jaká je (a) amplituda a (b) fázová konstanta výsledné vlny? (c) Nakreslete tvar výsledné vlny v čase  $t = 0$  a diskutujte jeho závislost na čase.

**44Ú.** Čtyři sinusové vlny postupují současně v téže napnuté struně v kladném směru osy  $x$ . Jejich frekvence jsou v poměru 1 : 2 : 3 : 4, poměr jejich amplitud je postupně  $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ . V čase  $t = 0$  a na souřadnici  $x = 0$  je první a třetí vlna fázově posunuta o  $180^\circ$  vzhledem k druhé a čtvrté vlně. Nakreslete tvar výsledné vlny v čase  $t = 0$  a diskutujte jeho změny při vzrůstajícím  $t$ .

### ODST. 17.12 Vlastní kmity

**45C.** Ve struně vyvoláme jisté napětí  $\tau_a$  a vybudíme v ní třetí harmonický kmit. Jemu odpovídá vlastní frekvence  $f_3$  a vlnová délka  $\lambda_3$ . Poté zvýšíme napětí ve struně na hodnotu  $\tau_b = 4\tau_a$  a opět v ní vyvoláme třetí harmonický kmit. (a) Vyjádřete novou hodnotu třetí vlastní frekvence pomocí původní hodnoty  $f_3$ . (b) Vyjádřete novou vlnovou délku odpovídající stojaté vlny pomocí původní vlnové délky  $\lambda_3$ .

**46C.** Nylonová kytarová struna délkové hustoty  $7,2 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$  je napnutá silou 150 N a natažena přes dva pražce vzdálené 90 cm. Na struně vyvoláme stojatou vlnu znázorněnou na obr. 17.31. Vypočítejte (a) rychlost vlny, (b) vlnovou délku a (c) frekvenci postupných vln, jejichž superpozicí vzniká uvedená stojatá vlna.



Obr. 17.31 Cvičení 46

**47Ú.** V napnuté struně postupují rychlostí  $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  v opačných směrech dvě sinusové vlny se stejnou vlnovou délkou a stejnou amplitudou. Doba mezi dvěma po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je struna zcela rovná, činí 0,50 s. Jaká je společná vlnová délka obou výchozích vln?

**48C.** Nejnižší vlastní frekvence jisté houslové struny byla rovna 440 Hz (komorní  $a^1$ ). Určete pro tuto strunu druhou a třetí harmonickou frekvenci.

**49C.** Struna délky 8,40 m a hmotnosti 0,120 kg je napnutá silou 96,0 N a na obou koncích upevněna. Poté jsou v ní vybudeny vlastní kmity. (a) Určete pro danou strunu rychlost vlny. (b) Jaká je nejdelší možná vlnová délka stojaté vlny? (c) Vypočítejte její frekvenci.

**50C.** Rovnice postupné příčné vlny v jisté struně má tvar

$$y = 0,15 \sin(0,79x - 13t),$$

kde veličiny  $x$  a  $y$  jsou vyjádřeny v metrech a čas  $t$  v sekundách. (a) Jaká je výchylka struny  $y$  na souřadnici  $x = 2,3 \text{ m}$  v čase  $t = 0,16 \text{ s}$ ? (b) Napište rovnici vlny, která vytvoří při interferenci s výše uvedenou vlnou stojaté vlnění. (c) Jaká je výchylka výsledné stojaté vlny na souřadnici  $x = 2,3 \text{ m}$  a v čase  $t = 0,16 \text{ s}$ ?

**51C.** Struna délky 120 cm je napnuta mezi dvěma pevnými svorkami. Určete tři nejdelší možné vlnové délky postupných vln, které mohou v upevněné struně vytvořit vlnu stojatou. Nakreslete obrazce odpovídajících stojatých vln.

**52C.** Struna délky 125 cm a hmotnosti 2,00 g je napnuta silou 7,00 N a upevněna mezi dvěma svorkami. (a) Jakou rychlostí se po struně šíří vlny? (b) Jakou má struna nejnižší vlastní frekvenci?

**53C.** Jaké jsou tři nejnižší vlastní frekvence pro stojaté vlny na struně délky 10,0 m a hmotnosti 100 g, jestliže je struna napnuta silou 250 N a upevněna mezi dvěma svorkami?

**54C.** Struna délky 1,50 m a hmotnosti 8,70 g je napínána silou 120 N. Oba její konce jsou upevněny a struna je rozkmitána. (a) Vypočítejte rychlost vln na struně. (b) Určete vlnovou délku postupné vlny, která vytvoří stojatou vlnu, tvořenou jedinou půlvlnou. Totéž pro stojatou vlnu s dvěma půlvlnami. (c) Určete frekvence stojatých vln v části (b).

**55C.** Struna A je napnuta mezi dvěma pevnými svorkami. Vzdálenost svorek je  $l$ . Struna B má stejnou délkovou hustotu jako struna A a je napnuta stejnou silou mezi dvěma svorkami, vzdálenými  $4l$ . Uvažte prvních osm vlastních frekvencí pro strunu B. Vystupuje v této sérii nějaká vlastní frekvence struny A?

**56Ú.** Struna je napnuta mezi dvěma pevnými svorkami, vzdálenými 75,0 cm. Vykazuje vlastní frekvence 420 Hz a 315 Hz; mezi nimi již žádná další vlastní frekvence neleží. (a) Jakou má tato struna nejnižší vlastní frekvenci? (b) Jakou rychlostí se po ní šíří vlny?

**57Ú.** Na velmi dlouhé napnuté struně postupují proti sobě dvě vlny. Vibrátor na jednom konci struny generuje vlnu, popsanou rovnicí

$$y = (6,0 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{2} [(2,0 \text{ m}^{-1})x + (8,0 \text{ s}^{-1})t].$$

Vibrátor na opačném konci generuje vlnu

$$y = (6,0 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{2} [(2,0 \text{ m}^{-1})x - (8,0 \text{ s}^{-1})t].$$

(a) Vypočítejte pro každou z uvedených dvou vln frekvenci, vlnovou délku a rychlost vlny. (b) Nalezněte pro vznikající stojatou vlnu polohu uzlů. (c) Nalezněte polohu kmiten.

**58Ú.** Kmitání struny je popsáno rovnicí

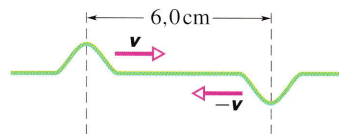
$$y' = (0,50 \text{ cm}) \sin \left[ \left( \frac{\pi}{3} \text{ cm}^{-1} \right) x \right] \cos [(40\pi \text{ s}^{-1})t].$$

(a) Uvedené kmitání vzniklo superpozicí dvou stejných vln (až na směr šíření). Jaká byla jejich amplituda a rychlost? (b) Jaká je vzdálenost mezi sousedními uzly stojaté vlny? (c) Jak velkou příčnou rychlost má částice struny o souřadnici  $x = 1,5 \text{ cm}$  v čase  $t = \frac{9}{8} \text{ s}$ ?

**59Ú.** Na struně postupují proti sobě dvě příčné sinusové vlny. Obě mají amplitudu 0,30 cm a vlnovou délku 6,0 cm. Rychlost příčných vln v dané struně činí  $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Nakreslete tvar

vzniklé stojaté vlny v čase  $t = 0$  (libovolný počátek odečítání času),  $t = 5,0 \text{ ms}$ ,  $t = 10 \text{ ms}$ ,  $t = 15 \text{ ms}$  a  $t = 20 \text{ ms}$ .

**60Ú.** Na obr. 17.32 jsou znázorněny dva pulzy, které postupují v napnuté struně proti sobě. Rychlost  $v$  příčných vln v dané struně činí  $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . V čase  $t = 0$  jsou pulzy vzdáleny 6,0 cm. (a) Načrtněte tvar struny v čase  $t = 5,0 \text{ ms}$ ,  $t = 10 \text{ ms}$ ,  $t = 15 \text{ ms}$ ,  $t = 20 \text{ ms}$  a  $t = 25 \text{ ms}$ . (b) Jak je rozložena původní energie pulzů v čase  $t = 15 \text{ ms}$ ?



Obr. 17.32 Úloha 60

**61Ú.** V napnuté struně postupují dvě příčné vlny, popsané rovnicemi

$$y_1 = (0,10 \text{ m}) \sin 2\pi [(0,50 \text{ m}^{-1})x + (20 \text{ s}^{-1})t],$$

$$y_2 = (0,20 \text{ m}) \sin 2\pi [(0,50 \text{ m}^{-1})x - (20 \text{ s}^{-1})t].$$

Nakreslete, jak se s časem pohybuje částice struny o souřadnici  $x = 3,0 \text{ m}$ .

**62Ú.** Na struně délky 3,0 m je vybudena stojatá vlna, jejíž amplituda činí 1,0 cm. Je tvořena třemi půlvlnami. Po struně se šíří vlny rychlostí  $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . (a) Jaká je frekvence stojaté vlny? (b) Napište rovnice dvou výchozích vln, jejichž superpozicí vzniká uvažovaná stojatá vlnění.

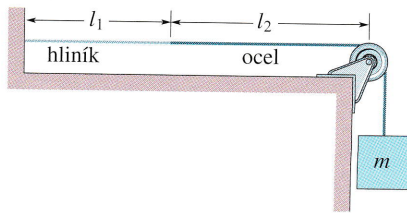
**63Ú.** Struna, po níž se šíří vlny rychlostí  $400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , je na obou koncích uchycena v pevných svorkách. Strunu rozkmitáme ladičkou o frekvenci 600 Hz. Vznikající stojatá vlna má amplitudu 2,0 mm a je tvořena čtyřmi půlvlnami. (a) Jaká je vzdálenost mezi svorkami? (b) Určete výchylku jednotlivých částic struny jako funkci polohy částic a času.

**64Ú.** V průběhu pokusu, demonstrujícího vlastnosti stojatých vln, byla struna délky 90 cm a hmotnosti 0,044 kg na jednom konci připevněna ke hrotu elektricky buzené ladičky. Hrot kmitá s frekvencí 60 Hz ve směru kolmém ke struně. Jakou silou je struna napínána (závaží je umístěno na opačném konci struny), jestliže stojatá vlna je tvořena čtyřmi půlvlnami?

**65Ú.** Uvažte stojatou vlnu, vznikající ze dvou postupných vln stejné amplitudy. Ukažte, že největší kinetická energie částic struny, které jsou rozloženy v rozsahu jedné půlvlny, je určena výrazem  $2\pi^2 \mu y_m^2 f v$ .

**66Ú.** Hliníkový drát délky  $l_1 = 60,0 \text{ cm}$ , příčného průřezu  $1,00 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2$  a hustoty  $2,60 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  je na jednom konci vetknut do stěny. Na druhém konci jej spojíme s ocelovým drátem stejného příčného průřezu a hustoty  $7,80 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Soustava obou drátů je přes kladku zatížena závažím o hmotnosti  $m = 10,0 \text{ kg}$ . Vzdálenost  $l_2$  místa spojení obou drátů od kladky je 86,6 cm. Popsané uspořádání je znázorněno na obr. 17.33. Pomocí vnějšího zdroje s proměnnou frekvencí lze v soustavě

generovat příčné vlnění; přitom je na kladce vždy uzel. (a) Určete nejnižší frekvenci vnějšího zdroje, při které se v soustavě vybudí rezonanční kmity a současně se v místě spojení obou drátů vytvoří uzel. (b) Kolik uzlů je při této frekvenci rozloženo podél celé kmitající soustavy?



Obr. 17.33 Úloha 66

### PRO POČÍTAČ

67Ú. V napnutém vlákně postupují dvě vlny:

$$y_1(x, t) = (2,50 \text{ mm}) \sin(kx - \omega t),$$

$$y_2(x, t) = (1,50 \text{ mm}) \sin(kx + \omega t),$$

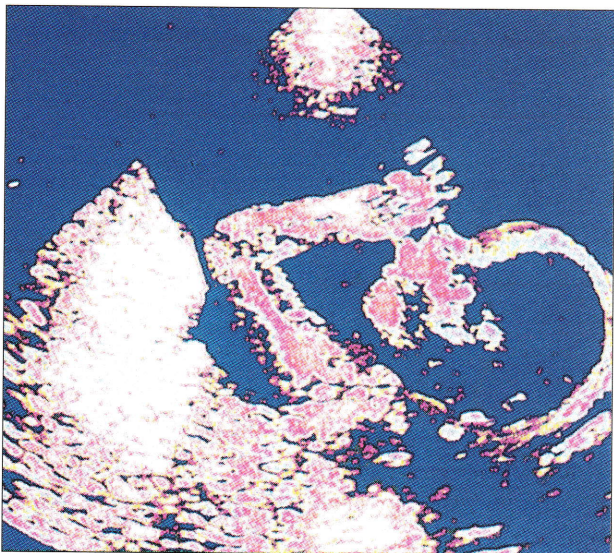
kde  $k = 25,1 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1}$  je úhlový vlnččet a  $\omega = 440 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  je úhlová frekvence. (a) Nakreslete funkci  $y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$  jako funkci času  $t$  pro  $x = 0, \lambda/8, \lambda/4, 3\lambda/8$  a  $\lambda/2$ , kde  $\lambda$  je vlnová délka. Grafické znázornění by mělo zahrnovat časový interval od  $t = 0$  až do doby o málo větší než jedna perioda. (b) Výsledek lze popsat jako superpozici jedné stojaté vlny a jedné postupné vlny. Jaký je směr šíření této postupné vlny? Jak by bylo nutno změnit obě výchozí vlny, aby jejich součet vyjadřoval opět superpozici jedné stojaté vlny a jedné postupné vlny, které by nyní měly stejné amplitudy jako dříve, avšak směr šíření postupné vlny by byl opačný? (c) Na základě grafického znázornění funkce  $y'$  určete polohu míst, ve kterých je amplituda výsledného kmitání největší a nejmenší. (d) Jak souvisí tato maximální a minimální amplituda s původními amplitudami 2,50 mm a 1,50 mm dvou výchozích postupných vln?



---

*Netopýr v úplné tmě nejen „vidí“ letící hmyz, ale navíc pozná, jak rychle se vůči němu pohybuje. To mu umožňuje hmyz lovit. Na jakém principu funguje jeho detekční systém? Jakým způsobem se může hmyz bránit?*

---



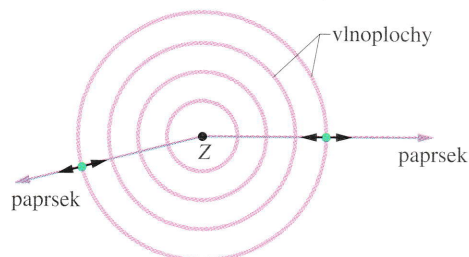
Obr. 18.1 Snímek pořízený ultrazvukem: plod se snaží nalézt svůj palec.

### 18.1 ZVUKOVÉ VLNĚNÍ

V kap. 17 jsme viděli, že pro vznik mechanického vlnění je potřeba nosné médium, hmotné prostředí. Existují dva typy mechanického vlnění: v **příčném** jsou kmity kolmé ke směru šíření vlny, zatímco v **podélném** jsou se směrem šíření rovnoběžné. Zvuk se vždy může šířit jako podélné vlnění; v pevných látkách pak navíc i jako příčné. Zvukové vlny se používají při hledání ropy v zemské kůře. Lodě jsou vybaveny sonarem, aby se vyhnuly překážkám skrytým pod hladinou. Ponorky využívají zvukových vln ke zjištění nepřátelských ponorek: pátrají po charakteristických zvucích, které vydává jejich pohon. Na počítačovém snímku hlavy dítěte (obr. 18.1) vidíme, jak lze zvukové vlny použít k výzkumu tkání v lidském těle. V této kapitole budeme zkoumat, jak se zvuk šíří vzduchem.

Obr. 18.2 ilustruje některé základní pojmy, které budeme používat. Bod  $Z$  představuje zdroj zvuku zanedbatelných rozměrů, tzv. *bodový zdroj*. Vlnění se od něj šíří rovnoměrně do všech směrů; bodový zdroj je tedy **izotropní**. Směr šíření a rozložení zvukových vln jsou znázorněny pomocí *vlnoploch* a *paprsků*. **Vlnoplocha** je plocha, na níž mají všechny částice vzduchu stejně velkou výchylku i rychlost (stejnou fázi); tyto plochy znázorňujeme na dvojrozměrném obrázku pomocí kružnic a oblouků. **Paprsky** jsou čáry kolmé k vlnoplochám a určují směr postupu vlnoploch. Fakt, že kmity podélného vlnění jsou rovnoběžné s paprsky, je vyznačen na obr. 18.2 krátkou oboustrannou šipkou. V blízkosti bodového zdroje jsou vlnoplochy kulové a šíří se do celého prostoru; pak mluvíme o kulové

vlně. Se zvětšující se vzdáleností od zdroje se poloměr postupujících vlnoploch zvětšuje a jejich křivost se zmenšuje. Velmi daleko od zdroje lze vlnoplochy dobře aproximovat rovinami; pak mluvíme o rovinných vlnách.



Obr. 18.2 Zvukové vlny se šíří trojrozměrným prostředím od zdroje  $Z$ . Vlnoplochy vytvářejí koule se středem v bodě  $Z$ . Paprsky mají radiální směr od  $Z$ . Krátká oboustranná šipka naznačuje směr kmitů částic prostředí; je rovnoběžný s paprsky.

### 18.2 RYCHLOST ZVUKU

Rychlost libovolného mechanického vlnění (příčného i podélného) závisí jednak na setrvačných vlastnostech prostředí (souvisejí s kinetickou energií částic prostředí), jednak na jeho vlastnostech elastických (souvisejí s potenciální energií). Rov. (17.24), která udává rychlost šíření příčného vlnění na struně, můžeme zobecnit:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\text{pružnost}}{\text{setrvačnost}}}, \quad (18.1)$$

kde (pro příčné výchylky) je  $\tau$  napětí ve struně a  $\mu$  její délková hustota. Je-li nosným prostředím vzduch, lze ze srovnání odvodit, že setrvačnosti vyjádřené  $\mu$  odpovídá hustota vzduchu  $\rho$ . Čím je třeba nahradit  $\tau$  související s pružností?

Potenciální energie je u napjaté struny spojena s vychýlením jednotlivých částic struny. Při průchodu vlny strunou se výchylka každé částice periodicky mění. Při průchodu zvukové vlny vzduchem se periodicky mění v malých oblastech tlak. Veličinou, která udává, jak částice prostředí mění svůj objem se změnou tlaku (síly na jednotku plochy), je modul objemové pružnosti; je definován (porovnejte s rov. (13.36))

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (\text{definice } K), \quad (18.2)$$

kde  $\Delta V/V$  je poměrná změna objemu vyvolaná změnou tlaku  $\Delta p$ . Jednotkou tlaku v SI je newton na metr čtverečný (viz čl. 15.3), tj. *pascal* (Pa). Vidíme, že jednotka  $K$  z rov. (18.2) je také pascal. Znaménko  $\Delta p$  je vždy

Tabulka 18.1 Rychlost zvuku

PROSTŘEDÍ	$\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$	PROSTŘEDÍ	$\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$	PROSTŘEDÍ	$\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$
<i>Plyny<sup>a</sup></i>		<i>Pevné látky<sup>a</sup></i>		<i>Kapaliny<sup>a</sup></i>	
Vzduch (0 °C)	331	Hliník	6 420	Voda (0 °C)	1 402
Vzduch (20 °C)	343	Ocel	5 941	Voda (20 °C)	1 482
Helium	965	Žula	6 000	Mořská voda <sup>b</sup>	1 522
Vodík	1 284				

<sup>a</sup> 0 °C a tlak 1 atm, pokud neuvedeno jinak.

<sup>b</sup> Při 20 °C a salinitě 3,5 %.

opačné než znaménko  $\Delta V$ ; se zvyšujícím se tlakem ( $\Delta p$  je kladné) se objem elementu zmenšuje ( $\Delta V$  je záporné) a naopak. V rov. (18.2) vystupuje proto záporné znaménko, aby  $K$  bylo vždy kladné. Záměnou  $K$  za  $\tau$  a  $\varrho$  za  $\mu$  dostaneme vztah

$$v = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} \quad (\text{rychlost zvuku}) \quad (18.3)$$

pro prostředí s modulem objemové pružnosti  $K$  a hustotou  $\varrho$ . V tabulce 18.1 jsou uvedeny rychlosti zvuku v různých prostředích.

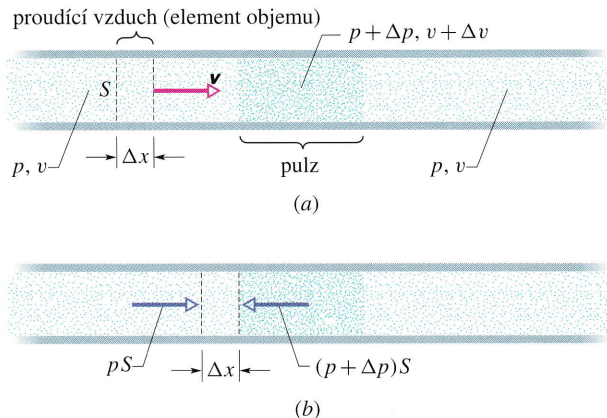
Hustota vody je téměř tisíckrát větší než hustota vzduchu. Kdyby o rychlosti zvuku rozhodovala pouze hustota, dalo by se očekávat vzhledem k rov. (18.3), že se ve vodě bude zvuk šířit asi třicetkrát pomaleji než ve vzduchu. Z tabulky 18.1 ale vyplývá, že je ve vodě zvuk naopak čtyřikrát rychlejší než ve vzduchu. Proto by měl být modul pružnosti vody více než desetitisíckrát větší než u vzduchu. Tak tomu skutečně je, protože voda je v porovnání se vzduchem mnohem hůř stlačitelná.

### Odvození rov. (18.3)

Rov. (18.3) můžeme také odvodit přímo z druhého Newtonova zákona. Předpokládejme, že samostatný pulz vyššího tlaku se šíří zprava doleva rychlostí o velikosti  $v$  vzduchem v trubici. Zvolíme nyní soustavu spojenou s pulzem; v ní má tedy pulz nulovou rychlost. Tuto situaci zachycuje obr. 18.3a. Pulz stojí na místě a vzduch se pohybuje zleva doprava rychlostí o velikosti  $v$ .

Tlak vzduchu v okolí pulzu označíme  $p$  a tlak vzduchu uvnitř pulzu bude  $p + \Delta p$ , kde  $\Delta p$  je kladné, protože vzduch v pulzu je stlačen. Uvažujme nyní tenkou vrstvu vzduchu o šířce  $\Delta x$  a ploše  $S$ , která se pohybuje směrem k pulzu rychlostí  $v$ . Dostane-li se tato vrstva do oblasti pulzu, změní se díky odlišnému tlaku její rychlost na  $v + \Delta v$ , kde  $\Delta v$  má záporné znaménko. Ke zpomalení celé vrstvy dojde za dobu

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}. \quad (18.4)$$



**Obr. 18.3** Pulz stlačeného vzduchu se šíří dlouhou trubicí. Vztažná soustava obrázku je zvolena tak, že pulz zůstává na místě, zatímco vzduch se pohybuje zleva doprava. (a) Tenká vrstva vzduchu šířky  $\Delta x$  se pohybuje směrem k pulzu rychlostí  $v$ . (b) Přední stěna vrstvy vstupuje do pulzu. Jsou znázorněny síly vyvolané tlakem vzduchu, působící na přední a zadní stěnu vrstvy.

Nyní použijeme na vrstvu vzduchu druhý Newtonův zákon. Během doby  $\Delta t$  působí na zadní stěnu vrstvy směrem doprava síla  $pS$  a na přední stěnu síla  $(p + \Delta p)S$  doleva (obr. 18.3b). Výsledné silové působení na vrstvu během doby  $\Delta t$  je tedy

$$F = pS - (p + \Delta p)S = -\Delta pS \quad (\text{výsledná síla}). \quad (18.5)$$

Záporné znaménko znamená, že výslednice sil míří na obr. 18.3b doleva. Objem vrstvy je  $S\Delta x$ , a proto vzhledem k rov. (18.4) platí pro její hmotnost

$$\Delta m = \varrho S\Delta x = \varrho S v \Delta t \quad (\text{hmotnost}). \quad (18.6)$$

Zrychlení vrstvy během doby  $\Delta t$  je

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{zrychlení}). \quad (18.7)$$

Z druhého Newtonova zákona ( $F = ma$ ) a z rovnic (18.5), (18.6) a (18.7) dostáváme

$$-\Delta pS = (\varrho S v \Delta t) \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

což můžeme zapsat také jako

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v}. \quad (18.8)$$

Vzduch, který zabírá vně pulzu objem  $V = Sv\Delta t$ , je stlačen o  $\Delta V = S\Delta v\Delta t$  uvnitř pulzu, a tedy

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S\Delta v\Delta t}{Sv\Delta t} = \frac{\Delta v}{v}. \quad (18.9)$$

Dosažením rov. (18.9) a (18.2) do rov. (18.8) dostaneme

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = K.$$

Z této rovnice dostaneme výraz pro  $v$  shodný s rov. (18.3) pro vzduch pohybující se směrem doprava na obr. 18.3, neboli pro rychlost pulzu doleva v klidném vzduchu.

### PŘÍKLAD 18.1

K určení směru, z něhož k nám přichází zvuk, využívá náš mozek časový rozdíl  $\Delta t$ , s nímž zvuk dorazí k bližšímu a vzdálenějšímu uchu.\* Vzdálenost mezi ušima označme  $l_0$ . Předpokládejme, že zdroj zvuku je dostatečně vzdálený, takže přicházející vlnoplochy jsou přibližně rovinné. V této situaci:

(a) Nalezneme vztah pro  $\Delta t$  vyjádřený pomocí vzdálenosti  $l_0$  a úhlu  $\theta$  mezi spojnicí uší a čelem vlnoplochy.

**ŘEŠENÍ:** Sledujme obr. 18.4. Vlnění se šíří od zdroje k pozorovateli. Časový rozdíl je způsoben vzdáleností  $d$ , kterou musí každá vlnoplocha urazit, aby po dosažení pravého ucha (P) ještě dospěla k levému (L). Z obr. 18.4 vyplývá

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{l_0 \sin \theta}{v}, \quad (\text{Odpověď}) \quad (18.10)$$

kde  $v$  je rychlost zvuku ve vzduchu. Náš mozek koreluje zaznamenanou dobu zdržení  $\Delta t$  s hodnotou úhlu  $\theta$  směru ke zdroji na základě zkušenosti.

(b) Předpokládejte, že jste ponořeni ve vodě o teplotě  $20^\circ\text{C}$  a zprava k vám přicházejí zvukové vlny. V jakém směru budete vnímat zdroj zvuku na základě  $\Delta t$ ?

**ŘEŠENÍ:** Pomocí rov. (18.10) dostaneme časový rozdíl  $\Delta t_v$  pro tuto situaci, tj. pro  $\theta = 90^\circ$ , místo rychlosti zvuku ve vzduchu  $v$  dosadíme jeho rychlost ve vodě  $v_v$ :

$$\Delta t_v = \frac{l_0 \sin 90^\circ}{v_v} = \frac{l_0}{v_v}. \quad (18.11)$$

Vzhledem k tomu, že  $v_v$  je asi čtyřikrát větší než  $v$ , bude  $\Delta t_v$  čtyřikrát menší než maximum časového rozdílu ve vzduchu.

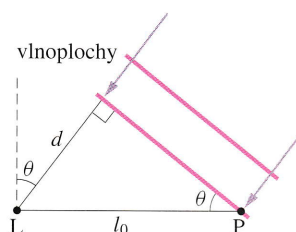
\* Uvedený mechanismus lokalizace není ovšem jediný, uplatňují se např. i nepatrné mimovolné pohyby hlavou.

Náš mozek však odhaduje směr na základě zkušenosti získané ve vzduchu. Proto se nám bude zdát, že zvuk přichází pod úhlem  $\theta$  menším než  $90^\circ$ . Abychom ho vyjádřili, dosadíme za  $\Delta t$  do rov. (18.10) časový rozdíl  $l_0/v_v$  z rov. (18.11):

$$\frac{l_0}{v_v} = \frac{l_0 \sin \theta}{v}. \quad (18.12)$$

Dosažením hodnot  $v = 343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a  $v_v = 1482 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  z tabulky 18.1 do rov. (18.12) dostáváme

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{v}{v_v} = \frac{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{(1482 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})} = 0,231, \\ \theta &= 13^\circ. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$



Obr. 18.4 Příklad 18.1. K levému uchu musí vlna urazit vzdálenost o  $d = l_0 \sin \theta$  delší než k pravému.

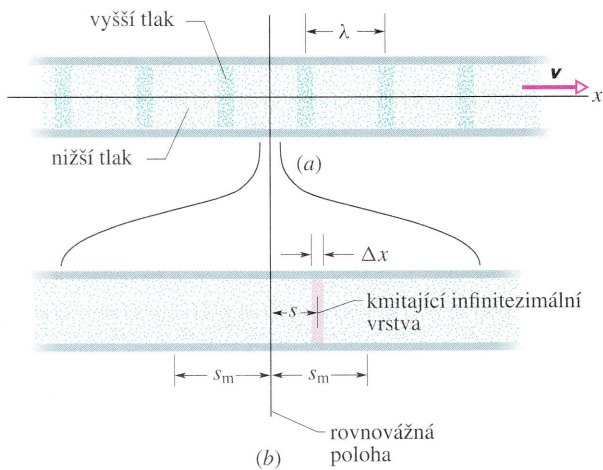
## 18.3 ŠÍŘENÍ ZVUKOVÝCH VLN

V této kapitole budeme zkoumat polohové a tlakové výchylky částic vzduchu při sinusovém průběhu zvukových vln. Na obr. 18.5 je zobrazena vlna postupující doprava trubcí se vzduchem. Takovou vlnu můžeme vyrobit třeba periodickým pohybem pístu na levém konci trubice (podobně jako na obr. 17.2). Pohyb pístu doprava posune a stlačí nejbližší infinitezimální vrstvičku vzduchu; obdobně pohyb pístu doleva způsobí pokles tlaku v této vrstvě. Vzruch, tj. změna tlaku a pohyb vzduchu, vyvolaný pístem, se šíří z vrstvy na vrstvu — a tak vzniká vlnění.

Uvažujme nyní v trubici tenkou vrstvu vzduchu tloušťky  $\Delta x$  o souřadnici  $x$ . Při průchodu vlny tato vrstva harmonicky kmitá okolo své rovnovážné polohy (obr. 18.5b). Podobně jako kmitají částice struny (příčně), kmitají i infinitezimální vrstvy vzduchu při průchodu vlny, s tím rozdílem, že se u vzduchu jedná o podélné kmity. K popisu polohové výchylky  $s(x, t)$  vrstvy vzduchu z jeho rovnovážné polohy můžeme použít buď funkci sinus nebo kosinus. V této kapitole použijeme kosinus:

$$s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t). \quad (18.13)$$





**Obr. 18.5** (a) Zvuková vlna se šíří rychlostí  $v$  trubici se vzduchem. Skládá se z pohybujících se a periodicky se opakujících oblastí s nízkým a vysokým tlakem. Na obrázku je vlna zobrazena v jednom časovém okamžiku. (b) Zvětšený výřez malé části trubice. Elementární vrstva vzduchu tloušťky  $\Delta x$  harmonicky kmitá při průchodu vlny okolo rovnovážné polohy. V daném okamžiku je vrstva vychýlena o vzdálenost  $s$  doprava z rovnovážné polohy. Největší výchylka (doleva i doprava) je  $s_m$ .

Symbol  $s_m$  označuje **amplitudu výchylky**, tj. maximální výchylku infinitesimální vrstvy vzduchu z rovnovážné polohy (obr. 18.5b).<sup>\*</sup> Úhlový vlnčet  $k$ , úhlová frekvence  $\omega$ , frekvence  $f$ , vlnová délka  $\lambda$ , rychlost  $v$  a perioda  $T$  jsou pro zvukové, a tedy podélné vlnění definovány stejně jako pro vlnění příčné a platí mezi nimi stejné vztahy. Výjimkou je  $\lambda$ , která nyní označuje nejmenší vzdálenost, na níž se začínají oblasti vyššího a nižšího tlaku opakovat (obr. 18.5a). (Předpokládáme, že  $s_m$  je mnohem menší než  $\lambda$ .)

Tlak v kterémkoli místě  $x$  se mění při postupu vlny harmonicky, jak dále ukážeme. Tato změna probíhá podle vztahu

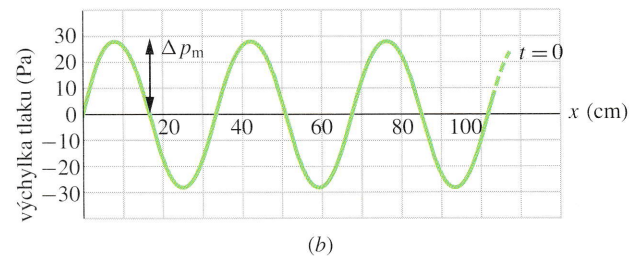
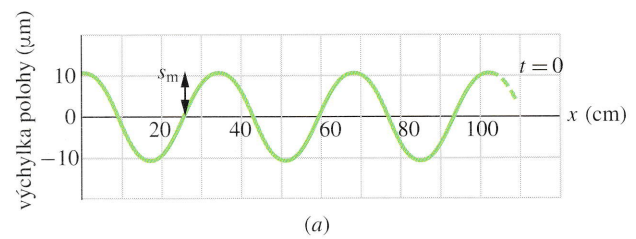
$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \sin(kx - \omega t). \quad (18.14)$$

Záporná hodnota  $\Delta p$  v rov. (18.14) odpovídá roztažení, kladná hodnota stlačení vzduchové vrstvy. Symbol  $\Delta p_m$  označuje **amplitudu tlaku**, která odpovídá největšímu nárůstu nebo poklesu tlaku způsobeného vlnou; běžně je  $\Delta p_m$  mnohem menší než tlak  $p$ , který odpovídá tlaku v případě, že není přítomna vlna. Ukážeme, že amplituda tlaku  $\Delta p_m$  je svázána s amplitudou výchylky  $s_m$  z rov. (18.13) vztahem

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m. \quad (18.15)$$

<sup>\*</sup> Pro příčnou výchylku elementu napjaté struny jsme užívali označení  $y(x, t)$ . Zde píšeme  $s(x, t)$ , abychom se vyhnuli zápisu  $x(x, t)$  pro podélnou výchylku vzdušného elementu.

Na obr. 18.6 jsou grafy rov. (18.13) a (18.14) v čase  $t = 0$ . V průběhu času se obě křivky pohybují doprava podél osy  $x$ . Povšimněte si, že polohová a tlaková výchylka jsou vzájemně posunuty o fázi  $\pi/2$  rad (neboli  $90^\circ$ ). Výchylka tlaku je tedy nulová, právě když je výchylka polohy největší.



**Obr. 18.6** (a) Graf polohové výchylky (rov. (18.13)) v čase  $t = 0$ . (b) Obdobný graf pro výchylku tlaku (rov. (18.14)). Oba grafy odpovídají zvukové vlně o frekvenci 1 000 Hz, jejíž amplituda je na úrovni prahu bolesti. Viz př. 18.2.

**KONTROLA 1:** Co se děje s tlakem v případě, že se infinitesimální vzduchová vrstva z obr. 18.5b pohybuje doprava bodem, v němž je polohová výchylka nulová? Je tlak v rovnovážné poloze, nebo právě začíná růst, či klesat?

### Odvození vztahů (18.14) a (18.15)

Mějme kmitající infinitesimální vrstvu vzduchu o ploše  $S$  a tloušťce  $\Delta x$ , jejíž střed je z rovnovážné polohy vychýlen o vzdálenost  $s$  (obr. 18.5b). Podle rov. (18.2) platí pro výchylku tlaku ve vrstvičce vzduchu

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}. \quad (18.16)$$

Velikost  $V$  v rov. (18.16) je velikost objemu, daná vztahem

$$V = S\Delta x. \quad (18.17)$$

Přitom  $\Delta V$  v rov. (18.16) označuje změnu (výchylku) objemu související s polohovou výchylkou vrstvy. Změna objemu je způsobena tím, že posunutí obou stěn vrstvy nejsou zcela shodná, liší se o vzdálenost  $\Delta s$ . Platí tedy

$$\Delta V = S\Delta s. \quad (18.18)$$

Dosažením rov. (18.17) a (18.18) do vztahu (18.16) dostaneme po provedení limitního přechodu

$$\Delta p = -K \frac{\Delta s}{\Delta x} = -K \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (18.19)$$

Symbol  $\partial$  v rov. (18.19) znamená, že se jedná o parciální derivaci, která říká, jak se mění  $s$  se změnou  $x$  v pevném časovém okamžiku. Z rov. (18.13) tak dostáváme ( $s$   $t$  se zachází jako s konstantou)

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (s_m \cos(kx - \omega t)) = -ks_m \sin(kx - \omega t).$$

Po dosažení tohoto výsledku do rov. (18.19) vyjde

$$\Delta p = Kks_m \sin(kx - \omega t),$$

čimž jsme vztah (18.14) skutečně dokázali; zřejmě je  $\Delta p_m = Kks_m$ .

S použitím rov. (18.3) můžeme nyní psát

$$\Delta p_m = (Kk)s_m = (v^2 \rho k)s_m.$$

Odtud po dosažení  $v = \omega/k$  (rov. (17.12)) okamžitě plyne rov. (18.15), kterou jsme chtěli dokázat.

### PŘÍKLAD 18.2

Maximální amplituda tlaku  $\Delta p_m$  hlasitého zvuku, kterou lidské ucho snese, je asi 28 Pa (což je mnohem méně než běžný tlak vzduchu  $10^5$  Pa). Jaké je posunutí  $s_m$  vzduchové částice u takového zvuku s frekvencí 1 000 Hz? Vzduch má hustotu  $\rho = 1,21 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (18.15) dostaneme odpověď

$$\begin{aligned} s_m &= \frac{\Delta p_m}{v \rho \omega} = \frac{\Delta p_m}{v \rho (2\pi f)} = \\ &= \frac{(28 \text{ Pa})}{(343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})(1,21 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3})(2\pi)(1\,000 \text{ Hz})} = \\ &= 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 11 \text{ } \mu\text{m}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Výchylka, kterou lidské ucho snese, je i pro nejhlasitější zvuk zjevně velice malá: okolo jedné sedminy tloušťky listu papíru.

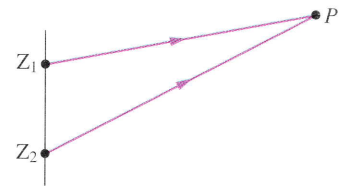
Amplituda tlaku  $\Delta p_m$  pro nejslabší slyšitelný zvuk o frekvenci 1 000 Hz je okolo  $2,8 \cdot 10^{-5}$  Pa. Uvedeným postupem dostaneme odpovídající amplitudu  $s_m = 1,1 \cdot 10^{-11}$  m neboli 11 pm. To je asi jedna desetina typického atomového poloměru. Vidíme, že ucho je velice citlivý detektor zvukových vln. Ucho může zaznamenat zvukové pulzy, jejichž celková energie je na úrovni několika elektronvoltů, což odpovídá energii potřebné k vytržení jednoho elektronu z atomu.

## 18.4 INTERFERENCE

Na obr. 18.7 jsou dva bodové zdroje  $Z_1$  a  $Z_2$  zvukového vlnění o vlnové délce  $\lambda$ . Zdroje jsou ve fázi, což znamená, že vznikající vlny dosahují maximální výchylky současně. Předpokládejme, že zvukové vlny šířící se zhruba stejným směrem z obou zdrojů procházejí bodem  $P$ . Je-li v  $P$  uražená dráha obou vln stejná, budou i v tomto bodě ve fázi. Pokud se ovšem dráhy vzájemně liší jako na obr. 18.7, pak ve fázi nebudou. Jejich fázový rozdíl v bodě  $P$  závisí na jejich *dráhovém rozdílu*  $\Delta L$ .

Šířeli se dvě vlny po odlišných drahách, může se jejich fázový rozdíl díky dráhovému rozdílu  $\Delta L$  změnit.

**Obr. 18.7** Ze dvou bodových zdrojů  $Z_1$  a  $Z_2$  vycházejí kulové zvukové vlny ve fázi. Paprsky ukazují, že bodem  $P$  procházejí vlny s fázovým rozdílem.



Fázový rozdíl  $2\pi$  rad odpovídá jedné vlnové délce (viz čl. 17.4). Proto pro obecný fázový rozdíl  $\varphi$  mezi dvěma vlnami platí

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda}, \quad (18.20)$$

odkud plyne

$$\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi. \quad (18.21)$$

Zvukové vlnění vykazuje, podobně jako příčné vlnění, dva mezní případy interference: **konstruktivní** a **destruktivní**. Konstruktivní interference nastává v případě, že jsou vlny **ve fázi**, takže fázový rozdíl  $\varphi$  je nulový nebo je celočíselným násobkem  $2\pi$ , tj.

$$\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.22)$$

(konstruktivní interference).

Je-li  $\varphi$  lichým násobkem  $\pi$ , tj.

$$\varphi = 2\pi(m + \frac{1}{2}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.23)$$

(destruktivní interference),

jsou vlny **v protifázi** a nastává destruktivní interference. Podle rov. (18.21) je zřejmé, že uvedené podmínky lze přepsat na tvar

$$\Delta L = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.24)$$

(konstruktivní interference),

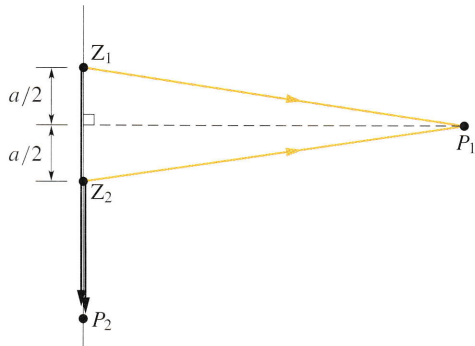
resp.

$$\Delta L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.25)$$

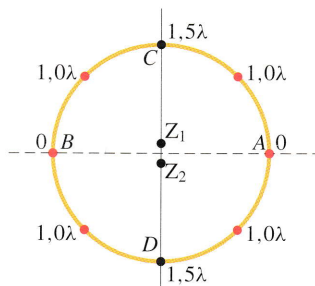
(destruktivní interference).

**PŘÍKLAD 18.3**

Jsou dány dva bodové zdroje  $Z_1$  a  $Z_2$  zvukových vln o vlnové délce  $\lambda$ . Zdroje jsou ve fázi a jejich vzájemná vzdálenost je  $a = 1,5\lambda$  (obr. 18.8).



(a)



(b)

**Obr. 18.8** Příklad 18.3. (a) Dva bodové zdroje  $Z_1$  a  $Z_2$  zvukových vln jsou ve vzdálenosti  $a$ . Zdroje jsou ve fázi. Dráha, kterou vlnění urazí k bodu  $P_1$ , je od obou zdrojů stejná. Bod  $P_2$  leží na polopřímce procházející zdroji  $Z_1$  a  $Z_2$ . (b) Fázový rozdíl (v násobcích vlnové délky) vln ze zdrojů  $Z_1$  a  $Z_2$  v osmi bodech na kružnici kolem zdrojů.

(a) Zjistěte, jaký je v bodě  $P_1$  fázový rozdíl vln ze zdrojů  $Z_1$  a  $Z_2$ . Bod  $P_1$  leží na kolmici, která dělí vzdálenost  $a$  na dvě stejné části; vzdálenost bodu  $P_1$  od zdrojů je mnohem větší než  $a$  (obr. 18.8a). Který z typů interferencí nastává v  $P_1$ ?

**ŘEŠENÍ:** Vlny ze zdrojů  $Z_1$  a  $Z_2$  sice nedocházejí k bodu  $P_1$  ze stejných směrů, ale i tak můžeme pro velké vzdálenosti od bodů oba paprsky prohlásit za prakticky rovnoběžné. Vzdálenost bodu  $P_1$  je od obou zdrojů stejná, a proto je dráhový rozdíl vln  $\Delta L$  nulový. Z rov. (18.21) dostáváme

$$\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi = 0.$$

Hodnota  $\varphi = 0$  splňuje podmínku rov. (18.22) pro  $m = 0$ , nastává tedy případ konstruktivní interference. Z podmínky rov. (18.24) dostáváme přirozeně stejný výsledek: dráhový rozdíl  $\Delta L = 0$  splňuje pro  $m = 0$  tuto podmínku také.

(b) Jaká je fáze a typ interference pro bod  $P_2$  (obr. 18.8a)?

**ŘEŠENÍ:** Bod  $P_2$  leží na polopřímce procházející zdroji  $Z_1$  a  $Z_2$ . Dráhový rozdíl vln  $\Delta L$  ze zdrojů bude tedy v  $P_2$  roven vzdálenosti  $a$ . Z rov. (18.21) dostáváme pro  $\Delta L = a = 1,5\lambda$

$$\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi = \frac{1,5\lambda}{\lambda} 2\pi = 3\pi \text{ rad.} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato hodnota  $\varphi$  splňuje podmínku rov. (18.23) s  $m = 1$ , což odpovídá destruktivní interferenci. Obdobně je tomu s rov. (18.25), která je pro  $\Delta L = 1,5\lambda$  splněna také s  $m = 1$ . Všimněte si, že vzdálenost bodu  $P_2$  od zdroje  $Z_2$  nemá vliv na výsledek.

(c) Na obr. 18.8b je kružnice s poloměrem mnohem větším než  $a$ , jejíž střed leží mezi zdroji  $Z_1$  a  $Z_2$ . V kolika bodech ( $N$ ) na kružnici nastává konstruktivní interference?

**ŘEŠENÍ:** Již víme z (a), že v bodech  $A$  a  $B$ , v nichž rovina symetrie je kolmá na spojnici od zdrojů a protíná kružnici (obr. 18.8b), je dráhový rozdíl  $\Delta L = 0$ . Z (b) víme, že dráhový rozdíl činí  $\Delta L = 1,5\lambda$  v bodech  $C$  a  $D$ , kde kružnice protíná přímku procházející oběma zdroji. Odtud vyplývá, že na kružnici musí existovat mezilehlé body, v nichž je  $\Delta L = 1,0\lambda$ . V těchto bodech nastane konstruktivní interference. I když neurčíme polohy těchto bodů přesně, můžeme je alespoň přibližně na obr. 18.8b odhadnout. Spočítáme-li konstruktivní interferenční body na kružnici, dostaneme odpověď

$$N = 6.$$

(Odpověď)

**KONTROLA 2:** Kdyby byla vzdálenost  $a$  mezi zdroji  $Z_1$  a  $Z_2$  z př. 18.3 rovna  $4\lambda$ , jaký typ interference by nastal (a) v bodě  $P_1$ , (b) v bodě v  $P_2$ ? Zjistěte odpovídající hodnotu  $m$ .

## 18.5 INTENZITA ZVUKU A JEJÍ HLADINA

Zkusili jste někdy spát při hlasité hudbě? Určitě jste si všimli, že existuje ještě další vlastnost zvuku kromě vlnové délky, frekvence a rychlosti. Touto vlastností je **intenzita**. Intenzita zvuku  $I$  je dána průměrnou energií vlnění, která projde za jednotku času jednotkovou plochou kolmou ke směru šíření. Platí tedy

$$I = \frac{P}{S}, \quad (18.26)$$

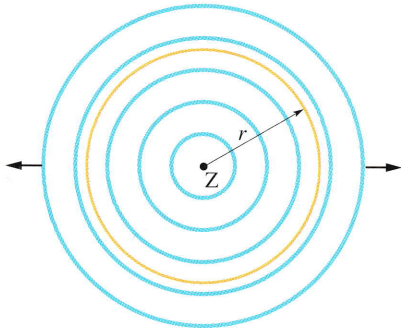
kde  $P$  je výkon zvukové vlny dopadající na plochu  $S$ . Intenzita  $I$  je s amplitudou polohové výchylky  $s_m$  svázána vztahem

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_m^2. \quad (18.27)$$

Tento vztah brzy odvodíme.

### Změna intenzity se vzdáleností

U skutečného zvuku je změna intenzity se vzdáleností velmi složitou záležitostí. Některé zdroje (např. reproduktory) mohou vysílat zvuk jen do určitého směru, skutečné prostředí zase umožňuje odraz zvukových vln a tedy vznik ozvěn. V některých případech však můžeme zanedbat vliv ozvěn a předpokládat, že vlnění se od zdroje šíří *izotropně*, tj. se stejnou intenzitou do všech směrů. Na obr. 18.9 jsou v jednom časovém okamžiku vlnoplochy z izotropního bodového zdroje  $Z$ .



**Obr. 18.9** Od bodového zdroje  $Z$  vycházejí zvukové vlny rovnoměrně do všech směrů. Vlny procházejí myšlenou koulí se středem v  $Z$  a poloměrem  $r$ .

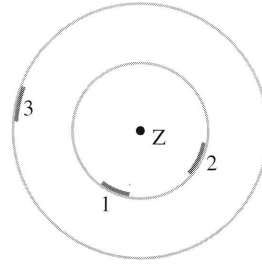
Předpokládejme nyní, že se celková mechanická energie vln při šíření od zdroje zachovává. Do bodu  $Z$  položme střed myšlené koule o poloměru  $r$  (obr. 18.9). Veškerá energie ze zdroje musí procházet povrchem této koule, a proto bude výkon vln procházející povrchem koule roven výkonu  $P_Z$  zdroje. Z rov. (18.26) tedy plyne, že intenzita  $I$  je v každém bodu na povrchu koule rovna

$$I = \frac{P_Z}{4\pi r^2}, \quad (18.28)$$

kde  $4\pi r^2$  je velikost povrchu koule. Vztah (18.28) znamená, že intenzita zvuku izotropního bodového zdroje klesá se čtvercem vzdálenosti  $r$  od zdroje.

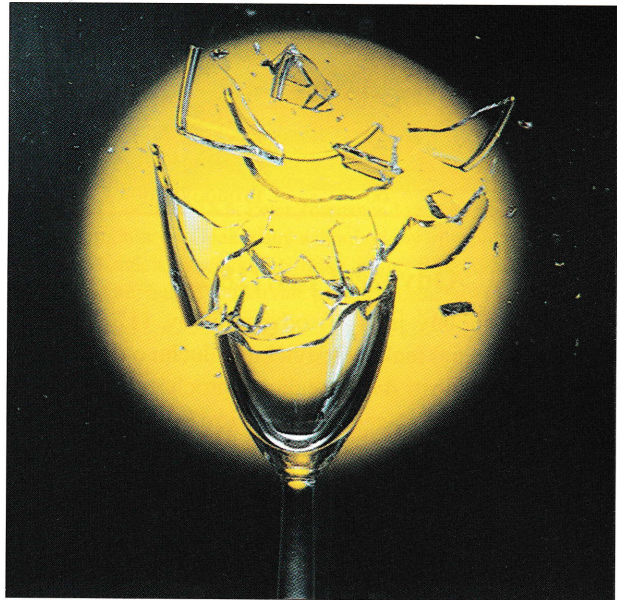
**KONTROLA 3:** Na obrázku jsou tři malé plošky 1, 2 a 3 ležící na povrchu myšlených koulí, jejichž společný

střed leží v bodovém izotropním zdroji  $Z$ . Výkon procházející všemi ploškami je stejný. Seřadte sestupně plošky (a) podle intenzity zvuku a (b) podle jejich plochy.



### Stupnice v decibelech

V př. 18.2 jsme viděli, že amplituda polohové výchylky, kterou může lidské ucho zaznamenat, leží v intervalu hodnot od  $10^{-5}$  m (u nejhlasitějšího snesitelného zvuku) do  $10^{-11}$  m (u nejslabšího slyšitelného zvuku). Poměr těchto hodnot je  $10^6$ . Z rov. (18.27) vidíme, že intenzita zvuku závisí na *kvadrátu* amplitudy vlny. Poměr intenzit odpovídajících hranicím uchem slyšitelných zvuků tedy bude  $10^{12}$ . Lidské ucho slyší zvuky skutečně v ohromném rozpětí intenzit.



Zvuk může rozkmitat stěnu sklenice. Pokud vlivem zvuku vznikne stojaté vlnění a intenzita zvuku je dostatečná, sklenice praskne.

Abychom mohli zacházet s tak velkou oblastí hodnot, použijeme funkci logaritmus. Uvažujme vztahy

$$x = 10^y \quad \text{neboli} \quad y = \log x,$$

kde  $x$  a  $y$  jsou proměnné. Logaritmus má tu vlastnost, že když vynásobíme  $x$  číslem 10, zvýší se hodnota  $y$  o 1. Pišme pro lepší představu

$$y_1 = \log 10x = \log 10 + \log x = 1 + y.$$

Podobně, vynásobíme-li  $x$  číslem  $1 \cdot 10^{12}$ , zvýší se  $y$  pouze o 12. Je tedy daleko výhodnější namísto intenzity zvuku  $I$  mluvit o **hladině intenzity zvuku**  $\beta$  definované jako

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}, \quad (18.29)$$

kde dB je zkratka pro **decibel**, jednotku hladiny intenzity zvuku, pojmenovanou na počest Alexandra Grahama Bella. Hodnota  $I_0$  v rov. (18.29) je standardní referenční intenzita ( $10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ), vybraná jako zhruba nejnižší lidským uchem slyšitelná úroveň zvuku. Pro  $I = I_0$  dává rov. (18.29)  $\beta = 10 \log 1 = 0$ , referenční hladina odpovídá tedy nulové hodnotě v decibelech. Hodnota  $\beta$  se zvyšuje o 10 dB pokaždé, vzroste-li intenzita zvuku o jeden řád (zvětší-li se desetkrát). Hodnota  $\beta = 40$  tedy odpovídá intenzitě 10<sup>4</sup>krát větší než je referenční hladina. Tab. 18.2 ukazuje hladiny intenzity zvuku v různých situacích. **Hlasitost zvuku** je pak náš subjektivní vjem, související s hladinou intenzity zvuku. Určuje se porovnáváním zkoumaného zvuku s referenčním tónem výšky 1 000 Hz.

**Tabulka 18.2** Některé hladiny intenzity zvuku v dB

Práh slyšitelnosti	0	Rockový koncert	110
Ševelení listů	10	Práh bolesti	120
Běžný hovor	60	Proudový motor	130

### Odvození rov. (18.27)

Postup je obdobný jako při odvození rov. (17.35). Uvažujme (obr. 18.5a) tenkou vrstvičku vzduchu o tloušťce  $dx$ , ploše  $S$  a hmotnosti  $dm$  kmitající v procházející zvukové vlně dle rov. (18.13). Kinetická energie  $dE_k$  vrstvičky vzduchu je

$$dE_k = \frac{1}{2} dm v_s^2, \quad (18.30)$$

kde  $v_s$  není rychlost procházející vlny, ale rychlost kmitání tohoto elementu vzduchu. Obdržíme ji z rov. (18.13) jako

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \sin(kx - \omega t).$$

Užitím tohoto vztahu a dosazením  $dm = \rho S dx$  upravíme rov. (18.30) na tvar

$$dE_k = \frac{1}{2} (\rho S dx) (-\omega s_m)^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (18.31)$$

Průměrnou kinetickou energii připadající na jednotkovou tloušťku vrstvy vzduchu vypočteme integrací:

$$\overline{E_k} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dE_k. \quad (18.32)$$

Dosazením z rov. (18.31) dostaneme:

$$\overline{E_k} = \frac{1}{4} \rho S \omega^2 s_m^2. \quad (18.33)$$

Při odvození tohoto vztahu jsme použili toho, že průměrná hodnota kvadrátu funkce sinus (nebo kosinus) na intervalu délky  $\lambda$  je  $1/2$ . Předpokládejme, že je *potenciální* energie nesená spolu s vlnou a má stejnou průměrnou hodnotu jako energie kinetická. Intenzita  $I$  vlny, což je průměrná hodnota energie (kinetické + potenciální) prošlé jednotkovou plochou za jednotku času, je

$$I = \frac{1}{S} (\overline{E_k} + \overline{E_p}) v = \frac{2}{S} \overline{E_k} v = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_m^2,$$

což je právě rov. (18.27), kterou jsme chtěli odvodit.

### PŘÍKLAD 18.4

Elektrická jiskra letící po přímé dráze o délce  $h = 10 \text{ m}$  vysílá zvukový pulz, který se šíří radiálně symetricky od jiskry. Říkáme, že jiskra je v tomto případě *čárový zdroj zvuku*. Výkon vysílaného záření je  $P_Z = 1,6 \cdot 10^4 \text{ W}$ .

(a) Jaká je intenzita  $I$ , dosáhne-li zvukový pulz vzdálenosti  $r = 12 \text{ m}$  od jiskry?

**ŘEŠENÍ:** Představme si myšlený válec (s otevřenými konci) o poloměru  $r = 12 \text{ m}$  a výšce  $h = 10 \text{ m}$ , na jehož ose se nachází dráha jiskry (obr. 18.10). Množství energie, které prochází povrchem válce, se musí rovnat výkonu  $P_Z$ , se kterým zdroj energii vysílá. Podle rov. (18.26) musí být intenzita  $I$  na povrchu válce rovna výkonu  $P_Z$  dělenému velikostí jeho pláště  $2\pi r h$ :

$$I = \frac{P_Z}{2\pi r h}. \quad (18.34)$$

Tento vztah nám říká, že intenzita zvuku z *čárového* zdroje klesá se vzdáleností jako  $r$  (a ne jako  $r^2$ , jak tomu bylo u *bodového* zdroje). Dosazením zadaných hodnot dostáváme výsledek

$$I = \frac{(1,6 \cdot 10^4 \text{ W})}{2\pi(12 \text{ m})(10 \text{ m})} = 21,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \doteq 21 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jak velký výkon registruje akustický detektor o ploše  $S_D = 2,0 \text{ cm}^2$  zaměřený na jiskru ve vzdálenosti  $r = 12 \text{ m}$  od ní?

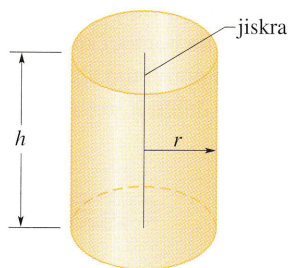
**ŘEŠENÍ:** Z rov. (18.26) víme, že

$$I = \frac{P_D}{S_D}$$

Odtud dostaneme po dosazení zadané plochy  $S_D$  a intenzity  $I$  z části (a)

$$P_D = (21,2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2})(2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 4,2 \text{ mW}. \text{ (Odpověď)}$$

**Obr. 18.10** Příklad 18.4. Jiskra radiálně vysílá zvukové vlny podél své přímé dráhy délky  $h$ . Vlny procházejí povrchem válce o poloměru  $r$  a výšce  $h$ , jehož osu tvoří dráha jiskry.



### PŘÍKLAD 18.5

V roce 1976 vytvořila skupina Who rekord v hlasitosti koncertu. Hladina intenzity zvuku byla ve vzdálenosti 46 m před reproduktory  $\beta_2 = 120$  dB. Jaký je poměr intenzity  $I_2$  zvuku v daném místě ku intenzitě  $I_1$  bucharu pracujícího s hladinou intenzity zvuku  $\beta_1 = 92$  dB?

**ŘEŠENÍ:** Napišme poměr obou intenzit jako

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2/I_0}{I_1/I_0}$$

Logaritmováním a vynásobením hodnotou 10 dB dostáváme

$$(10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_1} = (10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_0} - (10 \text{ dB}) \log \frac{I_1}{I_0}$$

Z rov. (18.29) pak vidíme, že členy na pravé straně rovnice jsou právě  $\beta_2$  a  $\beta_1$ . Odtud plyne

$$(10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_1} = \beta_2 - \beta_1. \quad (18.35)$$

Všimněme si, že poměr dvou intenzit odpovídá rozdílu příslušných hladin intenzit zvuku. Dosazením zadaných dat dostáváme

$$(10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_1} = 120 \text{ dB} - 92 \text{ dB} = 28 \text{ dB}$$

a

$$\log \frac{I_2}{I_1} = \frac{28 \text{ dB}}{10 \text{ dB}} = 2,8.$$

Odlogaritmováním obou stran dostaneme

$$\frac{I_2}{I_1} = 630.$$

Skupina Who byla opravdu velmi hlučná. Krátkodobý vliv intenzit tak velkých jako u uvedeného bucharu nebo koncertu Who má za následek dočasné poruchy sluchu. Opakovaný a delší vliv takových intenzit může způsobit jeho trvalé poškození (obr. 18.11). Ztráta sluchu je vážné riziko pro kohokoliv, kdo poslouchá heavy metal nebo jinou velmi hlučnou hudbu.



**Obr. 18.11** Příklad 18.5. Peter Dinklage ze skupiny Who hraje před reproduktory. Opakovaný a dlouhodobý vliv zvuku o nejvyšších intenzitách, speciálně při hraní přímo u reproduktoru kvůli zpětné vazbě, mu přivodil trvalé poškození sluchu.

## 18.6 ZDROJE HUDEBNÍHO ZVUKU

Hudební zvuky mohou být vytvořeny kmitáním strun (kytara, klavír, housle), membrán (bubny, tamburína), vzduchového sloupce (flétna, hoboj, varhany, fujara — obr. 18.12), dřevěných nebo kovových tyček (marimba, xylofon) nebo mnoha jiných těles. Většina nástrojů také obsahuje více než jednu kmitající část. U houslí se např. na tvorbě zvuku nepodílejí pouze struny, ale i celé tělo (**korpus**) nástroje. Zopakujme z kap. 17, že stojaté vlnění může vzniknout na struně, napneme-li ji mezi dva pevné body. Vznikne z postupných vln, které běží po struně a odrážejí se na jejích pevných koncích. Vlnová délka takových vln musí

odpovídat *vlastní frekvenci* struny. Stojaté vlny pak mohou dlouho kmitat s velkou amplitudou, rozechvívají okolní vzduch a vzniká tak dobře slyšitelný tón o frekvenci kmitající struny. Takto vytváří zvuk např. kytarista.

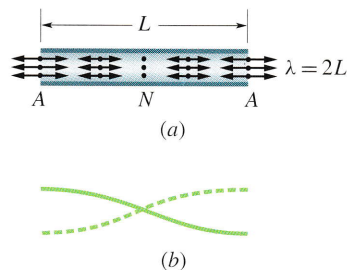


**Obr. 18.12** Při hře na tradiční slovenský nástroj fujaru kmitá uvnitř vzduchový sloupec.

Stojaté vlnění můžeme obdobně vytvořit i v **píšťale** — ve vzduchem naplněné trubici. Zvuková vlna šířící se v trubici se odráží na jejích koncích. (Takový odraz vzniká, i když jsou konce trubice otevřeny, ale pak není odraz tak dokonalý jako u konce uzavřeného). Pokud délka vlny odpovídá délce trubice, vznikne složením proti sobě běžících vln vlna stojatá. I její vlnová délka musí opět odpovídat *vlastní frekvenci* trubice. Stojaté vlny pak opět mohou dlouho kmitat s velkou amplitudou, rozechvívají okolní vzduch a opět vzniká dobře slyšitelný tón. Takto vytváří zvuk např. varhaník.

Mnoho dalších vlastností stojatých zvukových vln je podobných vlnám na struně: uzavřený konec trubice odpovídá upevněnému konci struny, ve kterém se nachází uzel (nulový rozkmit). Otevřený konec trubice odpovídá volně pohyblivému konci struny na kroužku podle obr. 17.16b, kde se zhruba nachází kmitna. (Ve skutečnosti je kmitna až kousek za koncem trubice, ale tímto detailem se zde

nebudeme zabývat). Nejjednodušší stojaté vlnění můžeme vytvořit v trubici s oběma otevřenými konci, jak ukazuje obr. 18.13a. Na koncích trubice jsou kmitny, uprostřed trubice je tedy uzel. Nejjednodušší vysvětlení vzniku takové podélné stojaté vlny je (obr. 18.13b) analogie se stojatou příčnou vlnou na struně. Stojatá vlna na obr. 18.13a se nazývá **základní mód kmitání** neboli **první harmonická**. Aby mohla vzniknout, musí být vlnová délka  $\lambda$  takové vlny v trubici o délce  $L$  rovna  $\lambda = 2L$ . Několik dalších stojatých vln v trubici s otevřenými konci je znázorněno na obr. 18.14a pomocí analogie s vlnami na struně. *Druhá harmonická* potřebuje vlnovou délku  $\lambda = L$ , *třetí harmonická* vlnovou délku  $\lambda = 2L/3$  atd.



**Obr. 18.13** (a) Nejjednodušší podélná stojatá zvuková vlna v trubici s oběma otevřenými konci má kmitny na koncích v bodech A a uzel v bodě N uprostřed trubice. (Výchylky jsou znázorněny dvojitými šipkami různé velikosti.) (b) Odpovídající příčná stojatá vlna na struně.

Obecněji řečeno, vlastní frekvence pro trubici délky  $L$  s oběma konci otevřenými odpovídají vlnovým délkám

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (18.36)$$

kde  $n$  je pořadové číslo příslušné harmonické. Vlastní frekvence jsou pak dány vztahem

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (18.37)$$

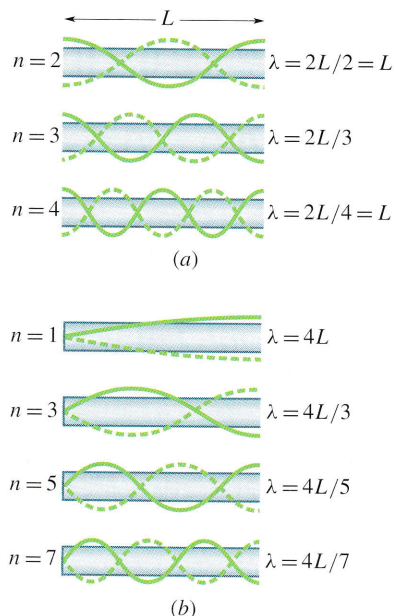
(píšťala s oběma otevřenými konci),

kde  $v$  je rychlost zvuku.

Obr. 18.14b ukazuje v analogii se strunou některé stojaté vlny, které mohou vzniknout v trubici s jedním otevřeným koncem. V otevřeném konci se nachází kmitna a v uzavřeném uzel. Pro nejjednodušší stojatou vlnu je třeba, aby vlnová délka splňovala vztah  $L = \lambda/4$ , tedy  $\lambda = 4L$ . Druhá nejjednodušší stojatá vlna má vlnovou délku  $L = 3\lambda/4$ , tedy  $\lambda = 4L/3$  atd.

Obecněji řečeno, vlastní frekvence pro trubici délky  $L$  jen s jedním otevřeným koncem odpovídá vlnovým délkám

$$\lambda = \frac{4L}{n} \quad (n = 1, 3, 5, \dots), \quad (18.38)$$



**Obr. 18.14** Typy stojatých vln, které známe ze struny, nakreslené přes trubice pro znázornění stojatých zvukových vln. (a) Jsou-li *oba* konce trubice otevřené, mohou v ní vzniknout všechny harmonické. (b) Je-li však *jeden* konec uzavřený, mohou vzniknout jen liché harmonické.

kde číslo harmonické  $n$  musí být liché. Vlastní frekvence jsou pak

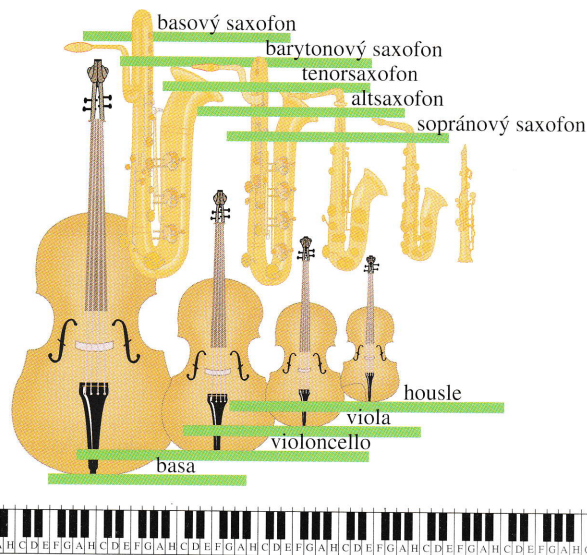
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (18.39)$$

(příště s jediným otevřeným koncem).

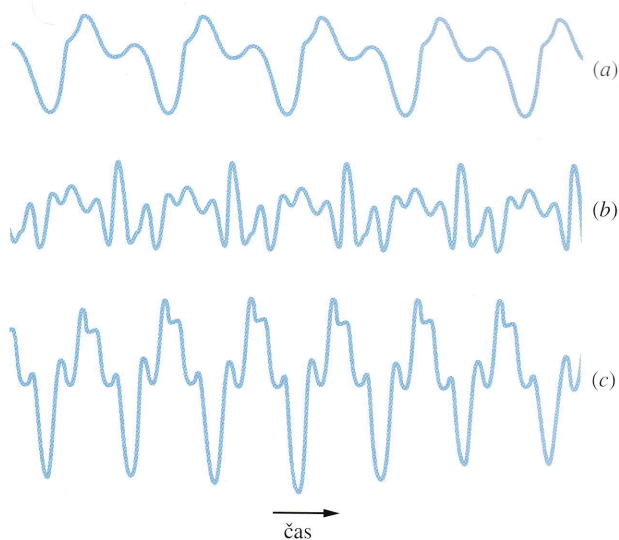
Ještě jednou zdůrazněme, že v trubici s jediným otevřeným koncem mohou existovat jen liché harmonické. Např. druhá harmonická s  $n = 2$  nemůže v takové trubici vzniknout. Všimněme si také, že v takovém případě spojení „třetí harmonická“ stále znamená harmonickou s  $n = 3$ , a ne v pořadí třetí možnou harmonickou, vyskytující se v této trubici (zde např.  $n = 5$ ).

Velikost hudebního nástroje je dána rozsahem frekvencí, pro který byl nástroj stavěn: menší velikost odpovídá vyšším frekvencím. Obr. 18.15 ukazuje jako příklad různé druhy saxofonů a smyčcových nástrojů s příslušným frekvenčním rozsahem. Rozsah každého nástroje se překrývá s rozsahy jeho sousedů.

V jakémkoli systému, ve kterém vzniká zvuk, ať už je to houslová struna nebo vzduchový sloupec v písťale varhan, vznikají vedle základní frekvence obvykle i vyšší harmonické; ty se s ní sčítají a vytvářejí **barvu** tónu. U různých nástrojů mají vyšší harmonické různé intenzity, což způsobuje různé zabarvení téhož tónu hraného různými ná-



**Obr. 18.15** Vztah mezi velikostí hudebního nástroje a jeho frekvenčním rozsahem na příkladu jednak smyčcových nástrojů, jednak různých druhů saxofonů. Frekvenční rozsah každého nástroje je znázorněn vodorovnou linkou podél měřítka frekvencí (zobrazeného klaviaturou dole; frekvence roste zleva doprava).



**Obr. 18.16** Tóny stejné výšky (tedy vlny se stejnou první harmonickou) vytvořené (a) flétnou, (b) hobojem a (c) saxofonem.

stroji. Obr. 18.16 ukazuje, jak se vlny se stejnou základní frekvencí mohou u různých nástrojů lišit.

#### PŘÍKLAD 18.6

Slabý šum pozadí vytvoří stojatou vlnu v lepenkové trubici s otevřenými konci, jejíž délka je  $L = 67,0$  cm. Předpokládejme, že rychlost zvuku ve vzduchu v trubici je  $343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .



(a) Jakou frekvenci uslyšíme, když přiložíme ucho ke konci trubice?

**ŘEŠENÍ:** Svým uchem příslušný konec trubice uzavíráme. Základní frekvence je tedy dána rov. (18.39) pro  $n = 1$ :

$$f = \frac{v}{4L} = \frac{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{4(0,670 \text{ m})} = 128 \text{ Hz. (Odpověď)}$$

Jestliže šum pozadí obsahuje i vyšší harmonické, např. třetí, pak můžeme uslyšet také frekvence, jež jsou lichými násobky 128 Hz.

(b) Jakou frekvenci uslyšíme, když oddálíme svou hlavu tak, aby trubice měla oba konce otevřené?

**ŘEŠENÍ:** Pro oba konce otevřené je základní frekvence dána rov. (18.37) pro  $n = 1$ :

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{2(0,670 \text{ m})} = 256 \text{ Hz. (Odpověď)}$$

Jestliže šum pozadí obsahuje i vyšší harmonické, jako např. druhou, pak uslyšíme také frekvence, jež jsou celočíselnými násobky 256 Hz. V každém případě ale již zvuk s frekvencí 128 Hz slyšet nebudeme.

**KONTROLA 4:** Trubice A délky  $L$  a trubice B délky  $2L$  mají každá oba konce otevřené. Kolikátá harmonická, příslušná trubici B, má stejnou frekvenci jako základní tón trubice A?

## 18.7 ZÁZNĚJE

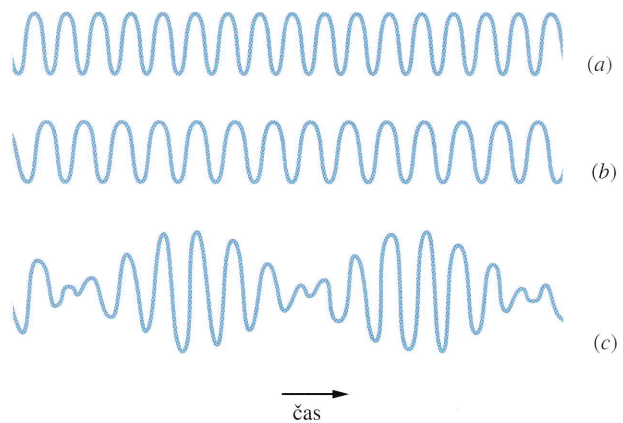
Když posloucháme po sobě dva tóny, jejichž frekvence jsou řekněme 552 Hz a 564 Hz, většina z nás je od sebe nedokáže odlišit. Když ale oba tóny dorazí do našeho ucha současně, uslyšíme tón, jehož frekvence je 558 Hz, tedy průměr původních dvou frekvencí. Navíc zaznamenáme střídavé změny v intenzitě zvuku: ta roste a opět klesá v poměrně pomalých rázech, které se opakují s frekvencí 12 Hz, tedy rozdílem obou původních frekvencí. Obr. 18.17 ukazuje tyto **rázy** neboli **zázněje**.

Nechť je časový průběh výchylek dvou zvukových vln v daném místě určen vztahem

$$s_1 = s_m \cos \omega_1 t \quad \text{a} \quad s_2 = s_m \cos \omega_2 t. \quad (18.40)$$

(Předpokládáme pro jednoduchost, že vlny mají stejnou amplitudu.) Podle principu superpozice je výsledná výchylka rovna

$$s = s_1 + s_2 = s_m(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t).$$



**Obr. 18.17** (a, b) Průběh tlaku  $\Delta p$  dvou zvukových vln, měřeny pro každou vlnu zvlášť. Frekvence vln jsou téměř stejné. (c) Výsledný průběh tlaku v případě, že jsou vlny měřeny současně.

Goniometrická identita (dodatek E)

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

nám umožní přepsat výslednou výchylku do tvaru

$$s = 2s_m \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t. \quad (18.41)$$

Když ještě položíme

$$\omega' = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad \text{a} \quad \omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad (18.42)$$

můžeme přepsat rov. (18.41) do tvaru

$$s(t) = (2s_m \cos \omega' t) \cos \omega t. \quad (18.43)$$

Předpokládejme nyní, že úhlové frekvence  $\omega_1$  a  $\omega_2$  skládajících se vln jsou skoro stejné, tedy že v rov. (18.42) platí  $\omega \gg \omega'$ . Potom můžeme považovat rov. (18.43) za kosinusoidu, jejíž úhlová frekvence je  $\omega$  a amplituda je výraz v závorce (který není konstantní, ale pozvolna roste a klesá, a to s frekvencí  $\omega'$ ).

Tato amplituda bude maximální, kdykoli  $\cos \omega' t$  v rovnici (18.43) bude roven jedné nebo minus jedné; to nastane během každé periody kosinusoidy dvakrát. Protože  $\cos \omega' t$  má úhlovou frekvenci  $\omega'$ , bude úhlová frekvence, s kterou se budou opakovat rázy, rovna  $\omega_{\text{rázy}} = 2\omega'$ . Potom s pomocí rov. (18.42) můžeme psát

$$\omega_{\text{rázy}} = 2\omega' = 2\left(\frac{1}{2}\right)(\omega_1 - \omega_2) = \omega_1 - \omega_2.$$

Protože ale platí  $\omega = 2\pi f$ , můžeme psát

$$f_{\text{rázy}} = f_1 - f_2 \quad (\text{frekvence záznějů}). \quad (18.44)$$

Hudebníci používají záznejče k ladění svých nástrojů. Když necháme nástroj znít současně s nějakou standardní frekvencí (např. komorním a hraným na první hoboj) a ladíme jej, dokud rázy nezaniknou, bude nástroj sladěn s tímto standardem. Ve Vídni, proslavenou její dávnou hudební tradicí, je **komorní a** ( $a^1$ , 440 Hz) zavedeno jako telefonní služba pro potřeby profesionálních i amatérských hudebníků ve městě.

### PŘÍKLAD 18.7

Chcete naladit notu „a“ na klavíru na její správnou frekvenci 220 Hz, ale máte k dispozici jen ladičku „a<sup>1</sup>“ s frekvencí 440 Hz. Jak budete postupovat?

**ŘEŠENÍ:** Tyto dvě frekvence jsou příliš vzdálené na to, aby vytvořily rázy. Připomeňme si naši analýzu rov. (18.43), kde jsme předpokládali, že skládající se frekvence jsou dostatečně blízko. Použijeme ale toho, že  $440 \text{ Hz} = 2 \cdot 220 \text{ Hz}$  je druhá harmonická frekvence 220 Hz.

Předpokládejme, že struna klavíru je rozladěna, tj. její základní frekvence není přesně 220 Hz. Posloucháme rázy mezi základní frekvencí ladičky a druhou harmonickou „a<sup>1</sup>“ tónu „a“ na klavíru, přičemž slyšíme rázy s frekvencí např. 6 Hz. Pak povolujeme nebo utahujeme strunu, dokud rázy nezmizí — a struna je naladěna.

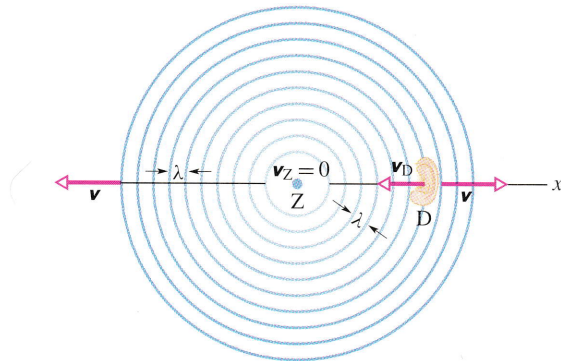
**KONTROLA 5:** V př. 18.7 přitáhneme strunu a frekvence rázů vzroste z 6 Hz na 7 Hz. Máme pokračovat s utahováním struny, nebo ji naopak povolit, abychom ji správně naladili?

## 18.8 DOPPLERŮV JEJ

Siréna policejního auta zaparkovaného u kraje silnice vydává zvuk o frekvenci 1 000 Hz. Jestliže také parkujete u kraje, uslyšíte tutéž frekvenci. Ale v případě, že se vůči policejnímu autu pohybujete, ať už směrem k němu nebo od něj, uslyšíte jinou frekvenci. Například když se k policejnímu autu *blížíte* rychlostí 120 km/h, uslyšíte *vyšší* frekvenci (1 096 Hz, tedy *nárůst* o 96 Hz). Když se od policejního auta *vzdalujete* stejnou rychlostí, uslyšíte *nižší* frekvenci (904 Hz, tedy *pokles* o 96 Hz).

Tyto změny frekvence v závislosti na pohybu jsou příkladem **Dopplerova jevu**. Tento jev byl objeven (i když ne zcela objasněn) v roce 1842 rakouským fyzikem Johannem Christianem Dopplerem. Experimentálně jeho existenci potvrdil roku 1845 Buys Ballot v Holandsku (použil přítom „... lokomotivu, která táhla otevřený vagon s několika trumpetisty.“).

Dopplerův jev se projevuje nejen u zvukových vln, ale také u elektromagnetických vln včetně mikrovln, rádiových vln a viditelného světla. Policie používá Dopplerův jev u mikrovln k měření rychlosti auta: radarová jednotka vysílá svazek mikrovln jisté frekvence  $f$  směrem k příjíždějícímu autu. Mikrovlny, které se odrazí od kovových součástí auta zpět, mají vyšší frekvenci  $f'$  úměrnou rychlosti pohybu auta vůči radarové jednotce. Radarová jednotka zachytí rozdíl mezi  $f$  a  $f'$  a převede jej na rychlost auta, která se pak přímo zobrazí na displeji. Zobrazená rychlost je však správná, jen když se auto pohybuje přímo k radarové jednotce nebo přímo od ní; není-li tomu tak, je měřená frekvence  $f'$  nižší a tím vyjde nižší i měřená rychlost.



**Obr. 18.18** Stacionární zdroj zvuku Z vysílá kulové vlnoplochy (znázorněné ve vzdálenosti jedné vlnové délky), které se rozbíhají rychlostí  $v$ . Detektor zvuku D (zobrazovaný jako ucho) se pohybuje rychlostí  $v_D$  ke zdroji. Díky svému pohybu zachytí detektor vyšší frekvenci zvuku.

V následujícím rozboru se omezíme na zvukové vlny a za vztahnou soustavu vezmeme vzduch, jímž vlny procházejí. (Pokud není uvedeno jinak, je vzduch v klidu vzhledem k Zemi, takže rychlosti můžeme také měřit vůči Zemi.) Budeme předpokládat, že se Z a D budou pohybovat přímo k sobě nebo přímo od sebe rychlostmi menšími, než je rychlost zvuku.

Nejprve odvodíme rovnice pro Dopplerův jev ve dvou speciálních situacích: (1) pro detektor v pohybu a zdroj v klidu a (2) pro zdroj v pohybu a detektor v klidu. Potom rovnice popisující tyto případy spojíme a dostaneme rovnici obecného Dopplerova jevu, která platí nejen pro oba uvedené případy, ale i pro situace, kdy se zároveň pohybuje zdroj i detektor.

### Detektor v pohybu, zdroj v klidu

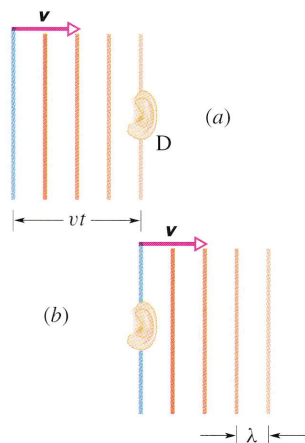
Na obr. 18.18 se detektor D (znázorněný jako ucho) pohybuje rychlostí  $v_D$  směrem ke klidnému zdroji Z, který vysílá kulové vlnoplochy o vlnové délce  $\lambda$  a frekvenci  $f$  šířící

se rychlostí  $v$  zvuku ve vzduchu. Znázorněné vlnoplochy jsou od sebe vzdáleny o jednu vlnovou délku. Frekvence zaznamenaná detektorem D je dána tím, jak často přicházejí vlny na detektor (resp. počtem vlnových délek, které projdou detektorem za jednotku času). Je-li D v klidu, je tato hodnota rovna  $f$ , ale když se D pohybuje vstříc vlnoplochám, bude počet prošlých vlnových délek za sekundu větší, tzn. zaznamenané frekvenci  $f'$  vyšší než  $f$ .

Uvažujme zatím situaci, kdy je D v klidu (obr. 18.19). Za dobu  $t$  se vlnoplochy posunou doprava o vzdálenost  $vt$ . Počet vlnových délek na tomto intervalu délky  $vt$  odpovídá počtu vlnových délek, které projdou detektorem za dobu  $t$ , tzn. tento počet je roven  $vt/\lambda$ . Počet vlnových délek, které projdou detektorem za dobu  $t$  (odpovídá frekvenci zaznamenané detektorem), je tedy

$$f = \frac{vt/\lambda}{t} = \frac{v}{\lambda}. \quad (18.45)$$

Zatím je tedy D v klidu a k Dopplerovu jevu nedochází: frekvence zaznamenaná detektorem je shodná s frekvencí vyslanou zdrojem.



**Obr. 18.19** Vlnoplochy z obr. 18.18 (pro jednoduchost rovinné) (a) dosáhnou, (b) opustí detektor D, který je v klidu; za dobu  $t$  se vlny posunou o vzdálenost  $vt$  doprava.

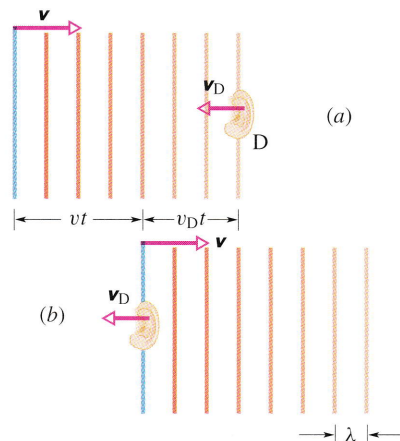
Vraťme se zpět k situaci, kdy se D pohybuje vstříc vlnoplochám (obr. 18.20). Za dobu  $t$  se vlnoplochy posunou doprava o vzdálenost  $vt$  jako v předchozím případě, ale zároveň se D posune doleva o vzdálenost  $v_D t$ . Proto se za tuto dobu  $t$  posunou vlnoplochy vzhledem k D o vzdálenost  $vt + v_D t$ . Počet vlnových délek na intervalu této délky ( $vt + v_D t$ ) je roven počtu vlnových délek, které projdou detektorem za dobu  $t$ , tedy  $(vt + v_D t)/\lambda$ . Počet vlnových délek, které projdou detektorem za jednotku času (je roven frekvenci  $f'$  zaznamenané detektorem), je dán vztahem

$$f' = \frac{(vt + v_D t)/\lambda}{t} = \frac{v + v_D}{\lambda}. \quad (18.46)$$

Z rov. (18.45) víme, že platí  $\lambda = v/f$ . Dosazením do rov. (18.46) dostaneme

$$f' = \frac{v + v_D}{v/f} = f \frac{v + v_D}{v}. \quad (18.47)$$

Všimněme si, že podle rov. (18.47) musí být  $f'$  vyšší než  $f$ , pokud není  $v_D = 0$  (detektor v klidu).



**Obr. 18.20** Vlnoplochy (a) přicházejí k detektoru, (b) vzdalují se od detektoru D, který se pohyboval proti nim. Za dobu  $t$  se vlnoplochy posunou o vzdálenost  $vt$  doprava a D se posune o vzdálenost  $v_D t$  doleva.

Podobně odvodíme frekvenci změřenou detektorem v případě, že se detektor pohybuje od zdroje. V takovém případě se vlnoplochy posunou o vzdálenost  $vt - v_D t$  vzhledem k D za dobu  $t$  a frekvence  $f'$  bude dána vztahem

$$f' = f \frac{v - v_D}{v}. \quad (18.48)$$

Podle rov. (18.48) musí být frekvence  $f'$  nižší než  $f$ , není-li ovšem  $v_D = 0$ .

Rov. (18.47) a (18.48) můžeme shrnout do tvaru

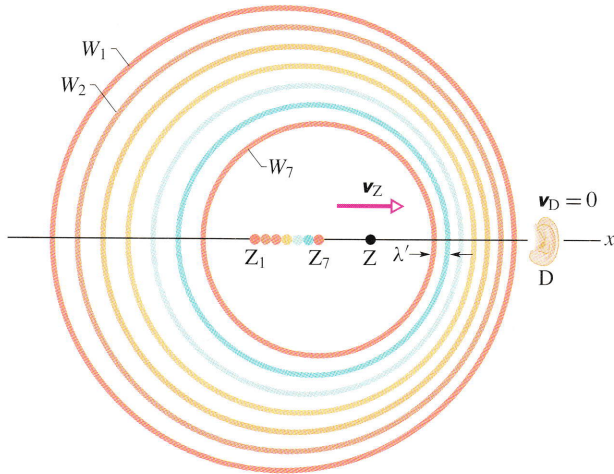
$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v} \quad (\text{detektor v pohybu; zdroj v klidu}). \quad (18.49)$$

Znaménko v rovnici rov. (18.49) můžeme určit z fyzikální zkušenosti: pohybuje-li se detektor ke zdroji, je frekvence vyšší (*směrem k sobě* znamená *vyšší*), tzn. použijeme znaménko  $+$  v čitateli. V opačném případě použijeme znaménko  $-$ .

### Zdroj v pohybu; detektor v klidu

Uvažujme detektor D v klidu vzhledem k okolnímu vzduchu a zdroj Z, který se pohybuje k D rychlostí  $v_Z$  podle

obr. 18.21. Pohybem Z se mění vlnová délka vyslaného zvuku, a tedy i frekvence zaznamenaná detektorem.



**Obr. 18.21** Detektor D je v klidu; zdroj se pohybuje směrem k detektoru rychlostí  $v_Z$ . Vlnoplocha  $W_1$  byla vyslána v okamžiku, kdy byl zdroj v poloze  $Z_1$ , vlnoplocha  $W_7$  byla vyslána, když byl zdroj v  $Z_7$ . Ve znázorněném okamžiku je zdroj v poloze Z. Detektor přijímá vyšší frekvenci, protože pohybující se zdroj (dohánějící vyslané vlnoplochy) vysílá zkrácené vlnové délky  $\lambda'$  ve směru svého pohybu.

K popisu této změny položíme  $T = 1/f$  (doba mezi vysláním libovolné dvojice následujících vlnoploch  $W_1$  a  $W_2$ ). Během doby  $T$  se vlnoplocha  $W_1$  posune o vzdálenost  $vT$  a zdroj se posune o vzdálenost  $v_Z T$ . Po uplynutí  $T$  je vyslána vlnoplocha  $W_2$ . Ve směru pohybu zdroje je vzdálenost mezi  $W_1$  a  $W_2$  (což je vlnová délka  $\lambda'$ ) rovna  $vT - v_Z T$ . Jestliže tyto vlny dopadnou na D, budou zaznamenány s frekvencí  $f'$  danou vztahem

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{vT - v_Z T} = \frac{v}{v/f - v_Z/f} = f \frac{v}{v - v_Z}. \quad (18.50)$$

Všimněme si, že  $f'$  je vyšší než  $f$ , kromě případu  $v_Z = 0$  (zdroj v klidu).

Pohybuje-li se zdroj Z od detektoru, je vlnová délka  $\lambda'$  rovna výrazu  $vT + v_Z T$ . Pokud tyto vlny přijdou na detektor, zaznamenají se s frekvencí  $f'$  danou vztahem

$$f' = f \frac{v}{v + v_Z}. \quad (18.51)$$

V takovém případě musí být  $f'$  nižší než  $f$ , není-li ovšem  $v_Z = 0$  (zdroj v klidu).

Rov. (18.50) a (18.51) můžeme shrnout do tvaru

$$f' = f \frac{v}{v \mp v_Z} \quad (\text{zdroj v pohybu; detektor v klidu}). \quad (18.52)$$

Znaménko v rov. (18.52) můžeme určit ze zkušenosti: jestliže se zdroj pohybuje k detektoru, je frekvence vyšší (směrem k sobě znamená vyšší), tzn. ve jmenovateli je znaménko minus. V opačném případě použijeme znaménko +.

### Rovnice obecného Dopplerova jevu

Spojením rov. (18.49) a (18.52) vznikne vztah pro obecný Dopplerův jev, kdy se detektor i zdroj pohybují vzhledem k okolnímu vzduchu. Nahrazením  $f$  v rov. (18.52) (frekvence zdroje) frekvencí  $f'$  z rov. (18.49) (frekvence spojená s pohybem detektoru) dostaneme

$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v \mp v_Z} \quad (\text{obecný Dopplerův jev}). \quad (18.53)$$

Speciálně, dosazením  $v_Z = 0$  do rov. (18.53) dostaneme rov. (18.49); podobně dosazením  $v_D = 0$  dostaneme (18.52). Znaménka plus a minus v rov. (18.53) jsou určena stejně jako v rovnicích (18.49) a (18.52): směrem k sobě znamená vyšší frekvence.

### Dopplerův jev při malých rychlostech

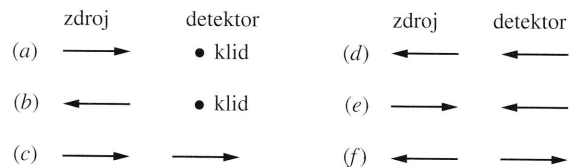
Dopplerův jev pro pohybující se detektor (popsaný rovnicí (18.49)) je různý od případu, kdy se pohybuje zdroj (podle rov. (18.52)), i když se detektor a zdroj pohybují vůči vzduchu stejně rychle. Pokud jsou však jejich rychlosti dostatečně malé (tzn.  $v_D \ll v$  i  $v_Z \ll v$ ), jsou změny frekvencí způsobené těmito dvěma pohyby stejné.

Užitím binomické věty (viz bod 7.2) můžeme ukázat, že rov. (18.53) lze upravit do tvaru

$$f' \approx f \left( 1 \pm \frac{u}{v} \right) \quad (\text{malé rychlosti}), \quad (18.54)$$

ve kterém  $u = |v_Z \pm v_D|$  je rychlost relativního pohybu zdroje vzhledem k detektoru. Pravidlo pro znaménka zůstává stejné: jestliže se detektor a zdroj pohybují směrem k sobě, dostáváme vyšší frekvenci a v rov. (18.54) použijeme znaménko +. V opačném případě, kdy se zdroj a detektor pohybují od sebe, frekvence poklesne a použijeme znaménko minus.

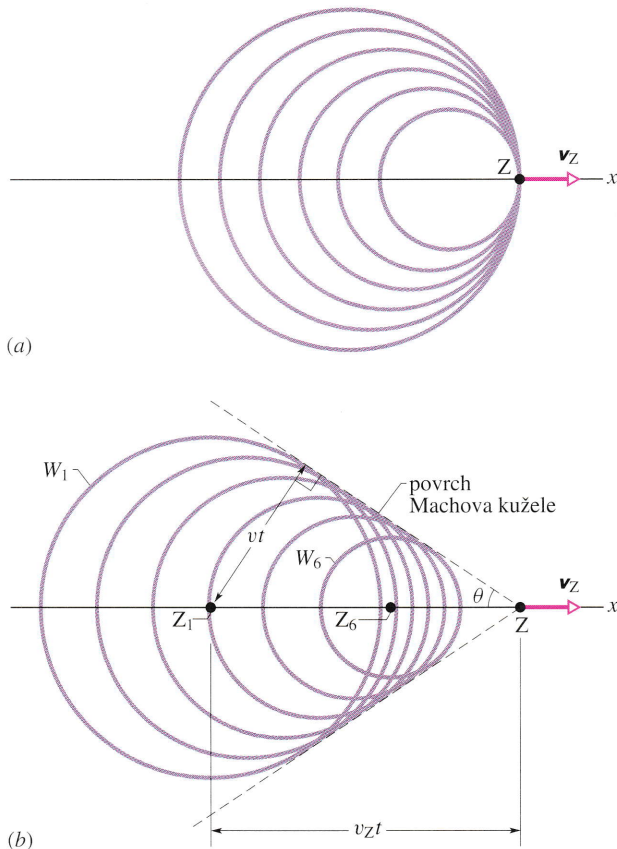
**KONTROLA 6:** Obrázek znázorňuje pohyb detektoru a zdroje zvuku pro šest situací v klidném vzduchu.



Pro každou situaci rozhodněte, jestli bude změřena frekvence vyšší, nebo nižší než vyslaná frekvence, nebo zda to nemůžeme určit bez dalších informací.

### Nadzvukové rychlosti; rázové vlny

Jestliže se zdroj pohybuje směrem ke klidnému detektoru právě rychlostí zvuku, tedy  $v_Z = v$ , předpovídá rov. (18.52), že frekvence  $f'$  bude nekonečně vysoká. To znamená, že se zdroj pohybuje tak rychle, že se stále dotýká již dříve vyslaných vlnoploch, jak ukazuje obr. 18.22a. A co se stane, když rychlost zdroje *překročí* rychlost zvuku?



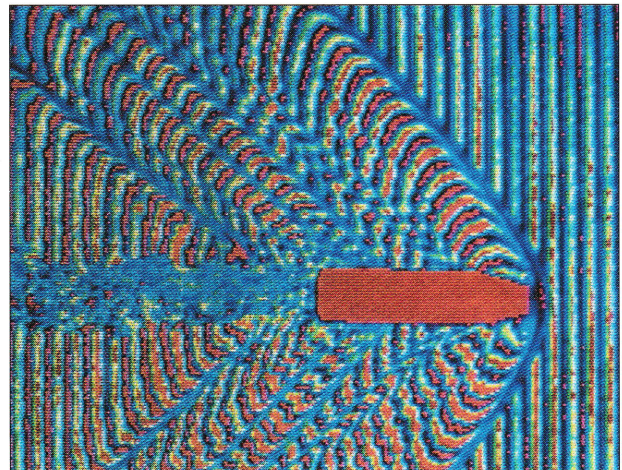
**Obr. 18.22** (a) Zdroj zvuku Z se pohybuje rychlostí  $v_Z$  právě rovnou rychlosti zvuku, tzn. stejně rychle, jak se pohybují vlnoplochy. (b) Zdroj Z se pohybuje rychlostí větší, než je rychlost zvuku, tzn. rychleji než vlnoplochy. Když byl zdroj v poloze  $Z_1$ , vyslal vlnoplochu  $W_1$ ; v poloze  $Z_6$  vyslal vlnoplochu  $W_6$ . Všechny tyto kulové vlnoplochy se šíří rychlostí zvuku  $v$  a hromadí se podél povrchu kužele zvaného Machův kužel, čímž vytvářejí rázovou vlnu. Vrcholový úhel kužele je  $2\theta$ ; kužel je tečný ke všem vlnoplochám.

Pro nadzvukové rychlosti už rov. (18.52) neplatí. Takovou situaci popisuje obr. 18.22b, který znázorňuje kulové

vlny, vzniklé v různých polohách zdroje. Poloměr každé z vln je na tomto obrázku  $vt$ , kde  $v$  je rychlost zvuku a  $t$  doba, která uplynula od okamžiku, kdy zdroj vlnoplochu vyslal. Všimněme si, že se vlnoplochy hromadí na obálce tvaru V (obr. 18.22b), resp. ve trojrozměrném prostoru na povrchu kužele zvaného **Machův kužel** (podle Ernsta Macha, rodáka z Chrlíc u Brna). Povrch tohoto kužele vytváří **rázovou vlnu**, protože nahromaděné vlnoplochy způsobují strmý nárůst a pokles tlaku vzduchu v místě, kterým povrch kužele prochází. Z obr. 18.22b je patrné, že poloviční úhel kužele  $\theta$ , zvaný **Machův úhel**, je dán vztahem

$$\sin \theta = \frac{vt}{v_Z t} = \frac{v}{v_Z} \quad (\text{Machův úhel}). \quad (18.55)$$

Poměr  $v_Z/v$  se nazývá **Machovo číslo**. Jestliže uslyšíte, že letadlo má 2,3 machů, znamená to, že letí 2,3krát rychleji než zvuk ve vzduchu. Rázová vlna způsobená nadzvukovým letadlem nebo střelou (obr. 18.23) vytváří *aerodynamický třesk*, při kterém tlak vzduchu nejprve náhle vzroste a poté klesne pod normál, než se opět vrátí k původní hodnotě.



**Obr. 18.23** Obrázek v nepravých barvách. Dvacetimilimetrová střela se pohybuje s Machovým číslem 1,3. Všimněte si prvního Machova kužele vytvořeného čelem střely a sekundárních kuželů vzniklých nepravidlostmi na povrchu střely.

#### PŘÍKLAD 18.8

Maketa rakety se pohybuje rychlostí  $242 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  klidným vzduchem přímo k nehybnému stožáru. Přitom vysílá zvukové vlny o frekvenci  $f = 1250 \text{ Hz}$ .

(a) Jakou frekvenci  $f'$  naměří detektor, který je připevněn ke stožáru?

**ŘEŠENÍ:** K určení  $f'$  použijeme rov. (18.53) pro obecný Dopplerův jev. Protože je detektor v klidu, dosadíme  $v_D = 0$ . Zdroj zvuku (raketa) se pohybuje *směrem k* detektoru, proto

použijeme ve jmenovateli znaménko minus. Dosazením zadaných hodnot a hodnoty  $v = 343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  z tab. 18.1 zjistíme naměřenou frekvenci

$$f' = f \frac{v}{v - v_Z} = (1\,250 \text{ Hz}) \frac{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) - (242 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})} = 4\,245 \text{ Hz} \doteq 4\,250 \text{ Hz.} \quad (\text{Odpověď})$$

Tento výsledek můžeme zběžně ověřit fyzikální zkušeností: jestliže se zdroj pohybuje *směrem ke* klidnému detektoru, pak změřená frekvence (zde 4 245 Hz) by měla být *vyšší* než vysílaná frekvence (1 250 Hz).

(b) Část zvukové vlny se od stožáru odrazí zpět k raketě, která má svůj vlastní detektor. Jakou frekvenci  $f''$  zaznamená?

**ŘEŠENÍ:** Stožár nyní slouží jako zdroj zvuku, který působí tak, že odráží zvukovou vlnu, tzn. vytváří ozvěnu. Frekvence vlny odražené od stožáru je stejná jako frekvence  $f' = 4\,245 \text{ Hz}$ , kterou „vnímá“ stožár. Protože nyní je v klidu zdroj (stožár), pokládáme v rov. (18.53)  $v_Z = 0$ . Detektor (v raketě) se pohybuje k novému zdroji, proto použijeme znaménko  $+$  v čitateli. Frekvence zaznamenaná detektorem v raketě je tedy

$$f'' = f' \frac{v + v_D}{v} = (4\,245 \text{ Hz}) \frac{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) + (242 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})} = 7\,240 \text{ Hz.} \quad (\text{Odpověď})$$

Výsledek můžeme opět zběžně ověřit: jestliže se detektor pohybuje *směrem k* nepohyblivému zdroji, měla by být zaznamenaná frekvence (zde 7 240 Hz) *vyšší* než vysílaná frekvence (4 245 Hz).

**KONTROLA 7:** V př. 18.8 navíc předpokládejte, že se vzduch pohybuje směrem k tyči rychlostí  $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jaká rychlost zdroje  $v_Z$  by měla být použita v řešení části (a) a jakou rychlost  $v_D$  by měl mít detektor v části (b)?

### PŘÍKLAD 18.9

Netopýři se orientují a hledají kořist vysíláním a přijímáním odrazů ultrazvukových vln, jejichž frekvence jsou vyšší než je schopen slyšet člověk. Předpokládejme, že netopýr letí k mušce rychlostí  $v_n = 9,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (vůči zemi), kdežto muška letí k netopýrovi rychlostí  $v_m = 8,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (také vůči zemi). Netopýr ze svých nozder vysílá ultrazvukové vlny o frekvenci  $f_{nv}$ , které se odrážejí od mouchy a vracejí zpět k netopýrovi s frekvencí  $f_{no}$ . Netopýr upraví vysílanou frekvenci  $f_{nv}$  takovým způsobem, že odražená vlna bude mít frekvenci  $f_{no}$  rovnou 83 kHz, na které je sluch netopýra nejcitlivější.

(a) Jakou frekvenci  $f_m$  slyší muška (taková frekvence se od ní také odráží), když  $f_{no}$  je 83 kHz?

**ŘEŠENÍ:** Vyjdeme z rov. (18.53), kde zdrojem je muška (resp. odražené vlny s frekvencí  $f_m$ ) a detektorem netopýr (vnímá ozvěnu s frekvencí  $f_{no} = 83 \text{ kHz}$ ). Protože se detektor pohybuje ke zdroji (rychlostí  $v_n$ ), použijeme znaménko  $+$  v čitateli rov. (18.53). Navíc se zdroj pohybuje k detektoru (rychlostí  $v_m$ ), takže použijeme znaménko minus ve jmenovateli. Tím dostaneme

$$f_{no} = f_m \frac{v + v_n}{v - v_m}$$

neboli

$$(83 \text{ kHz}) = f_m \frac{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) + (9,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) - (8,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})},$$

odkud

$$f_m = 78,99 \text{ kHz} \doteq 79 \text{ kHz.} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jakou frekvenci  $f_{nv}$  vysílá netopýr, když slyší frekvenci  $f_{no} = 83 \text{ kHz}$ ?

**ŘEŠENÍ:** Opět použijeme rov. (18.53), ale nyní je netopýr zdrojem (o frekvenci  $f_{nv}$ ) a muška detektorem (přijímá frekvenci  $f_m$ ). Protože se detektor pohybuje ke zdroji (rychlostí  $v_m$ ), použijeme znaménko  $+$  v čitateli rov. (18.53). Zdroj se navíc pohybuje k detektoru (rychlostí  $v_n$ ), takže použijeme znaménko minus ve jmenovateli. V takovém případě dostaneme

$$f_m = f_{nv} \frac{v + v_m}{v - v_n}$$

neboli

$$(78,99 \text{ kHz}) = f_{nv} \frac{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) + (8,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{(343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) - (9,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})},$$

odkud

$$f_{nv} = 75 \text{ kHz.} \quad (\text{Odpověď})$$

Netopýr určuje relativní rychlost pohybu mušky ( $17 \text{ m/s}$ ) z rozdílu  $8 \text{ kHz}$  ( $= 83 \text{ kHz} - 75 \text{ kHz}$ ), o který musí snížit vysílanou frekvenci, aby slyšel ozvěnu na frekvenci  $83 \text{ kHz}$  (kde slyší nejlépe). Některé mušky se vyhýbají ulovení tím, že odlétají přímo od směru, ve kterém slyší ultrazvukové vlny. Tato volba dráhy letu zmenšuje rozdíl frekvencí, které netopýr vysílá a přijímá, takže netopýr ozvěnu snadněji přeslechne. Jiné mušky se brání ulovení bzučením, které vytváří jiné ultrazvukové vlny, čímž netopýra zmatou.

## 18.9 DOPPLERŮV JEV U SVĚTLA

Je lákavé pokusit se použít vztah pro Dopplerův jev, odvozený v předcházející kapitole pro zvukové vlny

(rov. (18.53)), také pro světelné vlny, a to jednoduchým dosazením rychlosti světla  $c$  místo rychlosti zvuku  $v$ . Takovému pokušení je však třeba odolat.

Důvod je zajímavý. Zvukové vlny totiž potřebují prostředí, ve kterém se mohou šířit, zatímco světlo ne. Rychlost zvuku se proto také vždy, na rozdíl od rychlosti světla, měří vzhledem k prostředí. Rychlost světla je ale stejná ve všech inerciálních systémech, a to ve všech směrech. Právě z těchto důvodů, jak ukazuje Einsteinova teorie relativity, závisí Dopplerův jev u světla pouze na vzájemné rychlosti světelného zdroje a detektoru.

Přestože se rovnice Dopplerova jevu pro světlo a pro zvuk od sebe liší, lze je při nízkých rychlostech zjednodušit tak, že mají stejný tvar. (Dokonce je pravda, že všechny výsledky získané pomocí teorie relativity přecházejí při nízkých rychlostech na výsledky známé z klasické fyziky). Proto lze po dosazení  $v = c$  použít rov. (18.54) i pro světelné vlny, pokud platí  $u \ll c$ , kde  $u$  je vzájemná rychlost zdroje a detektoru. Jako dobré přiblížení je tedy možné použít

$$f' = f(1 \pm u/c) \quad (\text{světlo; } u \ll c). \quad (18.56)$$

Jestliže se k sobě zdroj a detektor *přibližují*, předpokládáme, že frekvence *vzroste*, a podle naší znaménkové dohody použijeme v rov. (18.56) znaménko plus.

Při měření Dopplerova jevu na světelných vlnách v astronomii je snazší měřit vlnovou délku než frekvenci. V rov. (18.56) tedy nahradíme  $f = c/\lambda$  a  $f' = c/\lambda'$ , čímž získáme

$$\lambda' = \lambda(1 \pm u/c)^{-1} \approx \lambda(1 \mp u/c).$$

To můžeme upravit na tvar

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \mp \frac{u}{c}$$

neboli

$$u = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c \quad (\text{světlo; } u \ll c), \quad (18.57)$$

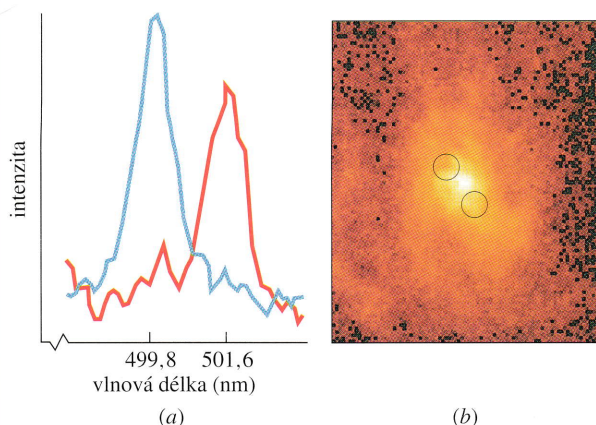
kde  $\Delta\lambda$  je *velikost* (bez znaménka) Dopplerova posuvu vlnové délky.

Rov. (18.57) ukazuje, jak můžeme zjistit vzájemnou rychlost zdroje a detektoru ze změny vlnové délky. Pokud se vlnová délka zmenšuje („**modrý posuv**“, neboť modrá část viditelného spektra má kratší vlnovou délku), zvětšuje se frekvence a znamená to, že se zdroj a detektor navzájem přibližují. Pokud se vlnová délka zvětšuje („**rudý posuv**“), zdroj a detektor se vzájemně vzdalují. Astronomové měřící posuvy vlnových délek světla, které k nám přichází z dalekých hvězd a galaxií, zjistili, že světlo ze *všech* vzdálených galaxií vykazuje rudý posuv. To znamená, že všechny tyto galaxie se od nás vzdalují, a to dokonce tím rychleji, čím jsou od nás dál.

### PŘÍKLAD 18.10

Obr. 18.24a ukazuje závislost intenzity na vlnové délce světla přicházejícího z mezihvězdného plynu, který se nachází ve dvou protilehlých oblastech galaxie M87 (obr. 18.24b). Jedna křivka má pík (tj. ostré maximum) v 499,8 nm, druhá v 501,6 nm. Plyn obíhá okolo jádra galaxie ve vzdálenosti  $r = 100$  světelných let; při jedné straně se tedy pohybuje směrem k nám, při druhé naopak od nás.

(a) Jaká křivka odpovídá pohybu plynu směrem k nám? Jaká je relativní rychlost plynu vzhledem k nám (a vzhledem k jádru galaxie)?



**Obr. 18.24** Příklad 18.10. (a) Závislost intenzity na vlnové délce světla vyzařovaného plynem v protilehlých oblastech galaxie M87. (b) Centrální oblast galaxie M87. Kroužky ukazují polohu plynu, jehož intenzita záření je znázorněna v (a). Střed galaxie se nachází uprostřed mezi oběma kroužky.

**ŘEŠENÍ:** Kdyby se plyn nepohyboval okolo jádra galaxie, naměřili bychom světlo s vlnovou délkou  $\lambda$  (danou procesem emise a rychlostí pohybu galaxie směrem od nás). Vlnová délka světla vysílaného z pohybujícího se plynu se však díky Dopplerovu jevu posouvá. Při pohybu plynu směrem od nás vlnová délka roste, při pohybu směrem k nám klesá. Křivka s maximum v 501,6 nm tedy odpovídá pohybu plynu směrem od nás a křivka s maximum v 499,8 nm odpovídá pohybu směrem k nám.

Předpokládejme, že vzrůst a pokles vlnové délky pohybujícího se plynu je co do velikosti stejný. Potom původní vlnová délka  $\lambda$  musí být průměrem obou posunutých vlnových délek:

$$\lambda = \frac{501,6 \text{ nm} + 499,8 \text{ nm}}{2} = 500,7 \text{ nm}.$$

Dopplerův posuv  $\Delta\lambda$  světla z plynu pohybujícího se směrem od nás je pak

$$\Delta\lambda = 501,6 \text{ nm} - 500,7 \text{ nm} = 0,90 \text{ nm}.$$

Dosazením tohoto výsledku a hodnoty  $\lambda = 500,7 \text{ nm}$  do rov. (18.57) vypočítáme, že se plyn pohybuje směrem od nás

rychlostí

$$u = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c = \frac{(0,90 \text{ nm})}{(501,6 \text{ nm})} (3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) = 5,39 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Plyn obíhá okolo jádra galaxie, které na něj, díky své hmotnosti  $M$ , působí gravitační silou. Jak velká je tato hmotnost v násobcích hmotnosti Slunce  $M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (14.1) vyplývá, že gravitační síla působící na částici plynu o hmotnosti  $m$  obíhající ve vzdálenosti  $r$  je

$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$

Po použití druhého Newtonova zákona na částici plynu a po dosazení dostředivého zrychlení  $u^2/r$  za  $a$  dostaneme

$$\frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mu^2}{r}.$$

Po dosazení známých hodnot dostaneme

$$M = \frac{u^2 r}{G} = \frac{(5,39 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 (100 \text{ ly}) (9,46 \cdot 10^{15} \text{ m/ly})}{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2})} = 4,12 \cdot 10^{39} \text{ kg} = 2,1 \cdot 10^9 M_S. \quad (\text{Odpověď})$$

Tento výsledek nám ukazuje, že v jádru galaxie je namačkána hmota o velikosti dvou miliard Sluncí. To velmi silně nasvědčuje tomu, že jádro galaxie obsahuje *supertěžkou* černou díru.

## PŘEHLED & SHRUTÍ

### Zvukové vlny

Zvukové vlny jsou mechanické vlny šířící se pevným, kapalným nebo plynným prostředím. Mohou být podélné (kdekoliv) anebo příčné (pouze v pevných látkách). Rychlost zvukové vlny  $v$  v prostředí s modulem objemové pružnosti  $K$  a hustotou  $\rho$  je

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (\text{rychlost zvuku}). \quad (18.3)$$

Ve vzduchu je při teplotě  $20^\circ \text{C}$  rychlost zvuku  $343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Zvuková vlna způsobuje podélnou výchylku  $s$  částice prostředí podle vztahu

$$s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t), \quad (18.13)$$

kde  $s_m$  je *amplituda výchylky* (maximální výchylka z rovnovážné polohy),  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $\lambda$  je vlnová délka a  $f$  frekvence zvukové vlny. Zvuková vlna také způsobuje odchylku tlaku  $\Delta p$  prostředí od rovnovážného tlaku:

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \sin(kx - \omega t), \quad (18.14)$$

kde *amplituda tlaku* je

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m. \quad (18.15)$$

### Interference

Výsledek interference (skládání) dvou vln o stejné vlnové délce procházejících jedním bodem závisí na jejich fázovém rozdílu  $\varphi$  v tomto bodě. Jestliže jsou obě vlny emitovány ve fázi a šíří se (přibližně) stejným směrem, pak pro  $\varphi$  platí

$$\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi, \quad (18.21)$$

kde  $\Delta L$  je jejich *dráhový rozdíl* (rozdíl mezi vzdálenostmi, které obě vlny urazily do bodu setkání). Podmínky pro úplnou konstruktivní a destruktivní interferenci vln jsou dány vztahy

$$\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.22)$$

(konstruktivní interference)

a

$$\varphi = 2\pi(m + \frac{1}{2}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.23)$$

(destruktivní interference).

Tyto vztahy odpovídají podmínkám

$$\Delta L = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.24)$$

(konstruktivní interference)

a

$$\Delta L = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.25)$$

(destruktivní interference)

pro dráhový rozdíl  $\Delta L$ .

### Intenzita zvuku

Intenzita  $I$  zvukové vlny je průměrný výkon, s jakým prochází energie jednotkovou plochou kolmou na směr šíření:

$$I = \frac{P}{S}, \quad (18.26)$$

kde  $P$  je výkon (velikost energie přenesené zvukovou vlnou za jednotku času) a  $S$  je velikost plochy, na kterou zvuk dopadá. Intenzita  $I$  je svázána s amplitudou zvukové vlny  $s_m$  vztahem

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_m^2. \quad (18.27)$$



Intenzita ve vzdálenosti  $r$  od bodového zdroje vysílajícího zvukové vlny o výkonu  $P_Z$  je

$$I = \frac{P_Z}{4\pi r^2}. \quad (18.28)$$

### Hladina intenzity zvuku v decibelech

Hladina intenzity zvuku  $\beta$  v decibelech dB je definována jako

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}, \quad (18.29)$$

kde  $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  je referenční hladina, ke které se všechny ostatní hodnoty vztahují. Každému zvýšení intenzity o desetinásobek odpovídá nárůst hladiny zvuku o 10 dB.

### Stojaté vlnění v trubcích

V trubcích lze vybudit stojaté vlnění. Trubice délky  $L$  otevřená na obou koncích bude rezonovat při frekvencích

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{otevřená trubice}), \quad (18.37)$$

kde  $v$  je rychlost zvuku ve vzduchu uvnitř trubice. Trubice, která je otevřená jen na jedné straně a uzavřená na druhé, má vlastní frekvence

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (18.39)$$

(trubice otevřená jen na jedné straně).

### Rázy

Rázy vznikají při skládání dvou vln o blízkých frekvencích  $f_1$  a  $f_2$ . Frekvence rázů je rovna

$$f_{\text{rázy}} = f_1 - f_2. \quad (18.44)$$

### Dopplerův jev

Při Dopplerově jevu se mění pozorovaná frekvence vlny tím, že se zdroj nebo detektor (nebo oba) pohybují vzhledem k prostředí. Pro zvuk je pozorovaná frekvence  $f'$  vyjádřena pomocí

frekvence zdroje  $f$  vztahem

$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v \mp v_Z} \quad (\text{obecný Dopplerův jev}), \quad (18.53)$$

kde  $v_D$ , resp.  $v_Z$  je relativní rychlost detektoru, resp. zdroje vůči prostředí a  $v$  je rychlost zvuku v tomto prostředí. Znaménka jsou volena tak, aby  $f'$  rostla při vzájemném pohybu zdroje a detektoru k sobě a klesala při jejich pohybu směrem od sebe.

### Rázová vlna

Pokud rychlost zdroje vzhledem k prostředí překročí rychlost šíření zvuku v prostředí, pozbývá Dopplerova rovnice platnosti. V takovém případě dojde ke vzniku rázové vlny. Vrcholový úhel  $2\theta$  kuželové vlnoplochy (obr. 18.22) je dán vztahem

$$\sin \theta = \frac{v}{v_Z} \quad (\text{Machův úhel}). \quad (18.55)$$

### Dopplerův jev pro světlo

Pokud se světelný zdroj a detektor pohybují vzájemnou rychlostí  $u \ll c$ , bude naměřená frekvence světla  $f'$  rovna

$$f' = f(1 \pm u/c), \quad (18.56)$$

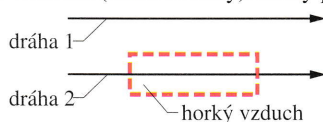
kde  $f$  je frekvence, která by byla naměřena, pokud by zdroj a detektor byly navzájem v klidu. Vzájemná rychlost  $u$  je spojena s posuvem vlnové délky  $\Delta\lambda$  vztahem

$$u = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c, \quad (18.57)$$

kde  $\lambda$  je vlnová délka při vzájemném klidu ( $u = 0$ ). Pokud se zdroj a detektor pohybují směrem k sobě, je posuv  $\Delta\lambda$  záporný (modrý posuv), pokud se od sebe vzdalují, je posuv  $\Delta\lambda$  kladný (rudý posuv).

## OTÁZKY

1. Obr. 18.25 ukazuje dráhy dvou zvukových pulzů, které odstartovaly ve stejný okamžik a závodí spolu ve vzduchu na tratích stejné délky. Jediný rozdíl je v tom, že podél 2. dráhy se nachází oblast horkého vzduchu (nízké hustoty). Který pulz zvítězí?



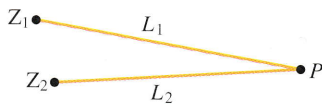
Obr. 18.25 Otázka 1

2. Zvuková vlna o vlnové délce  $\lambda$  a amplitudě výchylky  $s_m$  se

začne šířit chodbou. Ve chvíli, kdy malé zařízení zachytí tuto vlnu, vyšle samo druhou zvukovou vlnu („antizvuk“), která dokáže odrušit první vlnu tak, že na konci chodby není nic slyšet. Jaký musí být (a) směr šíření, (b) vlnová délka a (c) amplituda výchylky druhé vlny, aby bylo takové odrušení možné? (d) Jaký musí být fázový rozdíl mezi oběma vlnami? (Takováto zařízení se používají k odrušení nežádoucích zvuků v hlučných prostředích.)

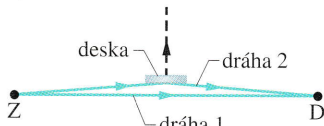
3. V obr. 18.26 vysílají dva bodové zdroje  $Z_1$  a  $Z_2$  ve fázi stejné zvukové vlny o vlnové délce 2,0 m. Jaký je rozdíl mezi fázemi vln (v jednotkách vlnových délek) přicházejících do bodu  $P$ ,

pokud (a)  $L_1 = 38$  m a  $L_2 = 34$  m, (b)  $L_1 = 39$  m a  $L_2 = 36$  m?  
(c) Za předpokladu, že vzdálenost mezi zdroji je mnohem menší než  $L_1$  a  $L_2$ , jaký druh interference nastává v bodě  $P$  v situaci (a) a (b)?



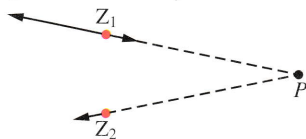
Obr. 18.26 Otázka 3

4. V obr. 18.27 jsou zvukové vlny o vlnové délce  $\lambda$  vysílány z bodového zdroje  $Z$  a šíří se směrem k detektoru  $D$  po dvou drahách. První dráha vede přímo, druhá vede přes odraz na desce. Zpočátku je deska blízko 1. dráhy a vlny přicházející do  $D$  po obou drahách jsou skoro ve fázi. Později je panel posunut dále od 1. dráhy tak, aby vlny přicházely do  $D$  přesně v protifázi. Jaký je potom dráhový rozdíl  $\Delta\lambda$  mezi oběma drahami?



Obr. 18.27 Otázka 4

5. V obr. 18.28 jsou dva bodové zdroje  $Z_1$  a  $Z_2$  ve stejné fázi, které vysílají stejné zvukové vlny o vlnové délce  $\lambda$ , a bod  $P$ ,



Obr. 18.28 Otázka 5

který je ve stejné vzdálenosti od obou zdrojů. Zdroj  $Z_2$  je poté posunut směrem od bodu  $P$  o vzdálenost  $\lambda/4$ . Setkají se vlny v bodě  $P$  ve fázi, v protifázi nebo v nějakém jiném fázovém vztahu, jestliže (a) zdroj  $Z_1$  je posunut směrem k bodu  $P$  o vzdálenost rovnou  $\lambda/4$ , (b) zdroj  $Z_1$  je posunut směrem od bodu  $P$  o vzdálenost rovnou  $3\lambda/4$ ?

6. V př. 18.3 a obr. 18.8a jsou vlny přicházející do bodu  $P_1$  přesně ve stejné fázi. To znamená, že vlny přicházející ze zdrojů  $Z_1$  a  $Z_2$  vždy pohybují částicemi vzduchu stejným směrem. Označme  $P_3$  střed spojnice zdrojů  $Z_1$  a  $Z_2$ . (a) Jsou vlny, které se setkávají v bodě  $P_3$ , ve fázi, v opačné fázi, nebo v nějakém stavu mezi tím? (b) Jaká bude odpověď, pokud zvětšíme vzdálenost mezi zdroji na  $1,7\lambda$ ?

7. Zjistěte bez použití kalkulačky, o kolik se zvýší hladina zvuku, když se intenzita zdroje zvuku zvýší  $10^7$  krát?

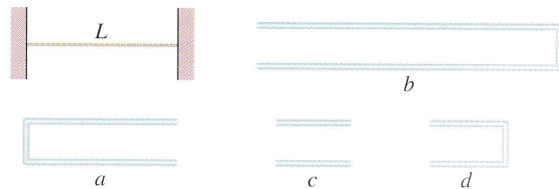
8. Stojatá vlna v trubici má pět uzlů a pět kmitů. (a) Kolik otevřených konců má trubice (má určitě alespoň jeden)? (b) Jaký mód (kolikátá harmonická)  $n$  odpovídá této stojaté vlně?

9. Uvnitř trubice se vybudila šestá harmonická. (a) Kolik otevřených konců má trubice? (Alespoň jeden má vždy.) (b) Je uprostřed trubice uzel, kmitna, nebo ani jedno z toho?

10. (a) Když se rozcvičuje orchestr, zahřívají hráči svým dechem vzduch uvnitř dechových nástrojů (a snižují tak hustotu vzduchu). Zvýší se, nebo sníží rezonanční frekvence? Když trombonista při hře povytáhne snížec (tj. zatlačí ho směrem od sebe), zvýší se, nebo sníží rezonanční frekvence nástroje?

11. Trubice A má délku  $L$  a jeden otevřený konec. Trubice B má délku  $2L$  a dva otevřené konce. Které harmonické pro trubku B mají frekvence odpovídající rezonančním frekvencím trubice A?

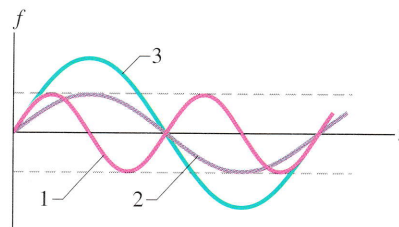
12. Na obr. 18.29 je napnutá struna o délce  $L$  a trubice  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $d$  o délkách  $L$ ,  $2L$ ,  $L/2$  a  $L/2$ . Struna je napnutá tak, aby rychlost vln po ní se šířících byla rovna rychlosti zvuku ve vzduchu. Struna je rozkmitána v základním módu. Ve které trubici způsobí strunou vydávaný zvuk rezonanci a kolikátá harmonická to bude?



Obr. 18.29 Otázka 12

13. Máme tři ladičky. Ladička s nejnižší frekvencí kmitá s frekvencí 500 Hz. Úderem do dvou ladiček najednou lze vytvořit následující frekvence rázů: 1, 2, 3, 5, 7 a 8 (údaje jsou v Hz). Jaké jsou možné frekvence ostatních ladiček? (Jsou dvě varianty řešení.)

14. Váš kamarád postupně jede na třech různých kolotočích a přitom drží v ruce zdroj, který všemi směry vysílá zvuk jedné frekvence. Frekvence zvuku, který slyšíte během každé z jízd vašeho kamaráda, se během otáčení kolotoče mění. Tyto změny ve frekvencích během tří jízd na třech různých kolotočích jsou zachyceny v obr. 18.30. Seřadte sestupně křivky (a) podle postupné rychlosti  $v$  zdroje zvuku, (b) podle úhlové rychlosti  $\omega$ , s jakou se otáčejí kolotoče, a (c) podle poloměru  $r$  kolotoče.



Obr. 18.30 Otázka 14

## CVIČENÍ & ÚLOHY

Kdykoliv není jinak řečeno, použijte rychlost zvuku ve vzduchu  $v = 343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 1125 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-1}$  a hustotu vzduchu  $\rho = 1,21 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

### ODST. 18.2 Rychlost zvuku

**1C.** Pravidlo pro určení vzdálenosti v kilometrech od místa, kde udeřil blesk, doporučuje počítat sekundy od chvíle, kdy je vidět blesk, až do chvíle, kdy je slyšet hrom a pak počet sekund vydělit třemi. (a) Vysvětlete toto pravidlo a určete procentuální chybu při teplotě  $20^\circ\text{C}$  za předpokladu, že se zvuk k vám šíří po přímce. (b) Vymyslete podobné pravidlo pro určení vzdálenosti v mílích.

**2C.** Zástup vojáků pochoduje v rytmu 120 kroků za minutu podle taktu kapely, která kráčí na jeho začátku. Vojáci na konci kolony vykračují levou nohou právě tehdy, když hudebníci vykračují pravou. Jak je zástup přibližně dlouhý?

**3C.** Jste na velikém hudebním koncertu a sedíte 300 m od reproduktoru. Koncert je také vysílán v přímém přenosu přes satelit (rychlostí světla). Kdo slyší hudbu dřív: vy v sále, nebo posluchač rádia vzdáleného 5 000 km? Jak veliký je časový rozdíl?

**4C.** Dva diváci fotbalového utkání na stadionu Montjuic uvidí a za malou chvíli uslyší výkop míče na hřišti. Časový rozdíl je pro jednoho z nich 0,23 s a pro druhého 0,12 s. Přímkou spojující oba diváky s kopajícím hráčem svírají úhel  $90^\circ$ . (a) Jak daleko jsou diváci vzdáleni od hráče? (b) Jak daleko jsou diváci vzdáleni od sebe?

**5C.** Průměrná hustota zemského pláště 10 km pod kontinenty je  $2,7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . Rychlost podélných seizmických vln v této hloubce, určená sledováním jejich příchodů ze vzdálených zemětřesení, je  $5,4 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Určete modul pružnosti zemského pláště v dané hloubce. Pro porovnání: modul pružnosti oceli je kolem  $16\cdot 10^{10} \text{ Pa}$ .

**6C.** Jaký je modul pružnosti kyslíku za standardní teploty ( $0^\circ\text{C}$ ) a tlaku (1 atm)? Za těchto podmínek zaujímá 1 mol (32,0 g) kyslíku objem 22,41 a rychlost zvuku v něm je  $317 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**7Ú.** Experimentátorka chce změřit rychlost zvuku v 10 cm dlouhé hliníkové tyči. Měří proto čas, za který zvukový impuls překoná celou délku tyče. Jestliže výsledky mají být uvedeny s přesností na 4 platné cifry, jak přesně je potřeba znát délku tyče a s jakou přesností je nutné měřit časové intervaly?

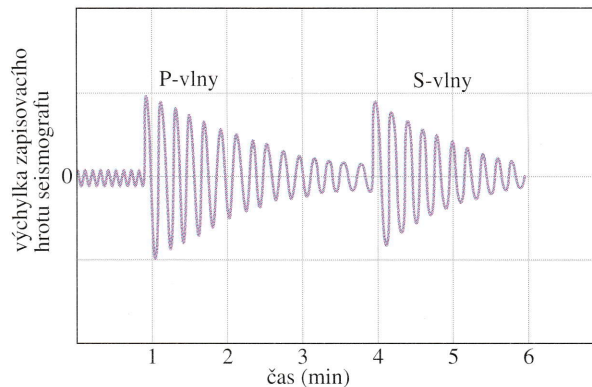
**8Ú.** Rychlost zvuku v jistém kovu je  $v_k$ . Do dlouhé roury z tohoto kovu na jednom konci silně udeříme. Člověk naslouchající na druhém konci uslyší dva zvuky. Jeden pochází z vlny šířící se podél roury a druhý z vlny šířící se vzduchem. (a) Jestliže  $v_v$  je rychlost zvuku ve vzduchu, jaký čas  $t$  uplyne mezi příchody obou úderů? (b) Položte  $t = 1,00 \text{ s}$  a za kov vezměte ocel. Najděte délku  $l$  roury.

**9Ú.** Do dlouhé hliníkové tyče na jednom konci silně udeříme. Pozorovatel na opačném konci s uchem blízko tyče uslyší

úder dvakrát (jednou přes tyč a jednou přes vzduch) s odstupem 0,120 s. Jak dlouhá je tyč?

**10Ú.** Zemětřesením vznikají v zemském nitru zvukové vlny. Na rozdíl od plynů se v Zemi šíří jak příčné (S), tak podélné (P) vlnění. Rychlost S-vln je kolem  $4,5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ , rychlost P-vln asi  $8,0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Seismograf zaznamená první P-vlny tři minuty před příchodem prvních S-vln (obr. 18.31). Předpokládejme, že vlny se šířily přímočaře. V jaké vzdálenosti probíhalo zemětřesení?

**11Ú.** Do studny hodíme kámen a za 3 vteřiny uslyšíme šplouchnutí. Jak je studna hluboká?



Obr. 18.31 Úloha 10

### ODST. 18.3 Šíření zvukových vln

**12C.** Lidské ucho slyší frekvence přibližně od 20 Hz do 20 kHz. Jaké jsou vlnové délky příslušných zvukových vln?

**13C.** Nejmenší vlnová délka, kterou je schopný vydat netopýr, je 3,3 mm. Jaká je příslušná frekvence?

**14C.** K vyšetřování nádorů v měkkých tkáních používají lékaři ultrazvuk o frekvenci 4,50 MHz. (a) Jakou vlnovou délku mají tyto vlny ve vzduchu? (b) Jestliže rychlost zvuku v tkáni je  $1500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , jaká je v ní vlnová délka?

**15C.** (a) Kuželový reproduktor má průměr 15,0 cm. Jakou frekvenci musí mít vydávaný zvuk, aby vlnová délka ve vzduchu byla rovna průměru reproduktoru? Desetinásobku průměru? Desetině průměru? (b) Proveďte stejné výpočty pro reproduktor průměru 30,0 cm.

**16C.** Ultrazvukovým mikroskopem lze získat velmi detailní obrázky tranzistorů. Vlny vysílané mikroskopem mají frekvenci 4,2 GHz a rychlost (v tekutém heliu, ve kterém je vzorek ponořen)  $240 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jakou mají vlnovou délku?

**17Ú.** (a) Zdroj oscilací je spojen s velmi dlouhou pružinou a vysílá po ní souvislou podélnou sinusovou vlnu. Frekvence zdroje je 25 Hz a vzdálenost mezi dvěma po sobě následujícími body maximálního roztahení pružiny je 24 cm. Určete rychlost vlny. (b) Napište rovnici této vlny, jestliže maximální

podélná výchylka částice v pružině je 0,30 cm a vlna se šíří proti směru osy  $x$ . Zdroj nechť leží v bodě  $x = 0$  a nechť výchylka v bodě  $x = 0$  je nulová v čase  $t = 0$ .

**18Ú.** Tlak v šířící se zvukové vlně je dán rovnicí

$$\Delta p = (1,5 \text{ Pa}) \sin \pi((1,00 \text{ m}^{-1})x - (330 \text{ s}^{-1})t).$$

Určete (a) amplitudu tlaku, (b) frekvenci, (c) vlnovou délku a (d) rychlost vlny.

**19Ú.** Dvě zvukové vlny z různých zdrojů stejné frekvence 540 Hz se šíří rychlostí  $330 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Zdroje jsou ve fázi. Jaký je fázový rozdíl vln v bodě vzdáleném 4,40 m od jednoho a 4,00 m od druhého zdroje? Obě vlny putují ve stejném směru.

**20Ú.** Dvě vlny vyvolávají v jistém místě prostoru změny tlaku

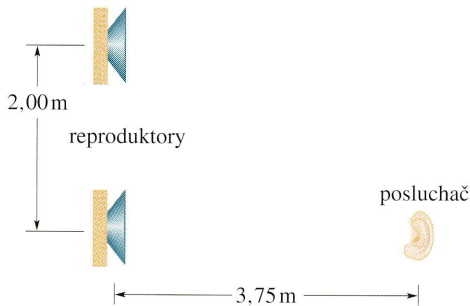
$$\Delta p_1 = \Delta p_m \sin \omega t,$$

$$\Delta p_2 = \Delta p_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Jaká je amplituda tlaku výsledné vlny v daném bodě, když  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi/3$  a  $\varphi = \pi/4$ ?

#### ODST. 18.4 Interference

**21Ú.** Dva reproduktory na obr. 18.32, jejichž vzdálenost je 2,00 m, jsou ve fázi. Předpokládejme, že amplitudy zvukových vln z reproduktorů jsou zhruba stejné v místě, kde stojí posluchač, tj. 3,75 m přímo před jedním z reproduktorů. (a) Pro jaké frekvence v slyšitelném rozsahu (20 Hz až 20 000 Hz) vnímá posluchač nejslabší signál? (b) Pro jaké frekvence je signál nejsilnější?



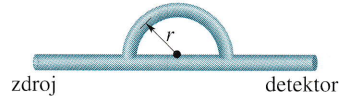
Obr. 18.32 Úloha 21

**22Ú.** Dva reproduktory jsou umístěny 3,35 m od sebe na jevišti hudebního sálu. Posluchač sedí ve vzdálenosti 18,3 m od jednoho a 19,5 m od druhého reproduktoru. Zvukový generátor udržuje na obou reproduktorech stejnou amplitudu a frekvenci. Vysílaná frekvence se mění v celém slyšitelném rozsahu (20 Hz–20 000 Hz). (a) Najděte tři nejnižší frekvence, při kterých bude kvůli destruktivní interferenci posluchač vnímat nejslabší signál. (b) Jaké jsou tři nejnižší frekvence, při kterých bude vnímaný signál maximální?

**23Ú.** Dva bodové zdroje zvukových vln stejné vlnové délky  $\lambda$  jsou od sebe vzdáleny na délku  $d = 2,0\lambda$ . Oba zdroje jsou ve

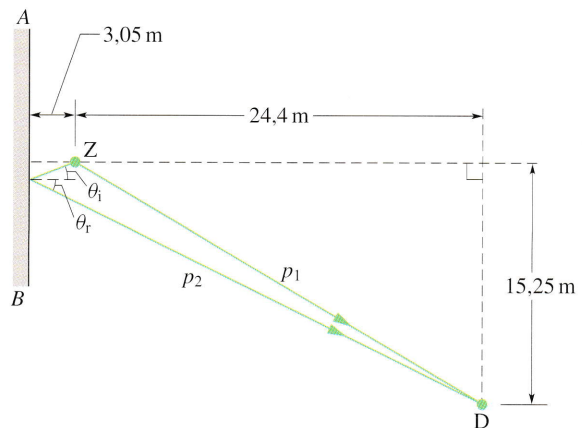
fázi. (a) Kolik bodů s maximálním signálem (maximum konstruktivní interference) leží na velkém kruhu kolem zdrojů? (b) Kolik tam leží bodů s minimálním signálem (destruktivní interference)?

**24Ú.** Zvuková vlna o vlnové délce 40,0 cm vstupuje do trubice nakreslené na obr. 18.33 koncem, na němž je připojen zdroj. Jaký musí být nejmenší poloměr  $r$ , aby detektor na druhém konci zachytil nejslabší signál?



Obr. 18.33 Úloha 24

**25Ú.** Na obr. 18.34 je bodový zdroj Z zvukových vln umístěn blízko odrazové stěny AB. Detektor zvuku D zachytává paprsek  $p_1$ , šířící se přímo ze zdroje Z. Zachytává také paprsek  $p_2$  odražený od stěny tak, že úhel dopadu  $\theta_i$  je roven úhlu odrazu  $\theta_r$ . Najděte dvě frekvence, při kterých nastává v D maximum konstruktivní interference paprsků  $p_1$  a  $p_2$ . (Odras od stěny nemění fázi zvukové vlny.)



Obr. 18.34 Úloha 25

**26Ú\*.** Dva bodové zdroje vzdálené od sebe 5,00 m vysílají zvukové vlny stejné amplitudy a frekvence (300 Hz), ale navzájem přesně opačné fáze. V kterých bodech spojnice zdrojů způsobuje zvuk největší kmitání molekul vzduchu? (Tip: Jeden takový bod leží v jejím středu.)

#### ODST. 18.5 Intenzita zvuku a její hladina

**27C.** Bodový zdroj výkonu 1,0 W izotropně vysílá zvukové vlny. Za předpokladu, že energie vln se zachovává, jaká je intenzita ve vzdálenosti (a) 1,0 m od zdroje a (b) 2,5 m od zdroje?

**28C.** Zdroj izotropně vysílá zvukové vlny, jejichž intenzita ve vzdálenosti 2,50 m je  $1,91 \cdot 10^{-4} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Jaký je výkon zdroje za předpokladu, že se energie vln zachovává?

**29C.** Zvuková vlna má intenzitu  $100 \mu\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$  a frekvenci 300 Hz. S jakou amplitudou kmitají molekuly vzduchu, když jí prochází tato vlna?

**30C.** Dvě zvukové vlny se v hlasitosti liší o 1,00 dB. Jaký je poměr větší intenzity k menší intenzitě?

**31C.** Hlasitost zvuku zvětšíme o 30 dB. Kolikrát se zvýší (a) jeho intenzita a (b) amplituda tlaku?

**32C.** Prodavač tvrdil, že stereo věž má maximální výkon 120 W. Zákaznice testovala reproduktory tak, že jejich rozmístěním simulovala bodový zdroj. Zjistila, že při maximální hlasitosti se může přiblížit až na vzdálenost 1,2 m, teprve pak pocítí bolest v uších. Má celou záležitost ohlásit obchodní inspekci?

**33C.** Soustava reproduktorů vysílá izotropně zvuk frekvence 2 000 Hz a intenzity  $0,960 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$  ve vzdálenosti 6,10 m. Předpokládejte, že nenastává odraz. (a) Jaká je intenzita ve vzdálenosti 30,0 m? Jaká je ve vzdálenosti 6,10 m (b) amplituda výchylky a (c) amplituda tlaku?

**34C.** Zdroj zvukových vln má výkon  $1,00 \mu\text{W}$ . Jestliže se jedná o bodový zdroj, (a) jaká je intenzita vln ve vzdálenosti 3,00 m a (b) jaká je hlasitost v decibelech v tomtéž místě?

**35C.** (a) Dvě zvukové vlny, z nichž jedna se šíří ve vzduchu a druhá ve vodě, mají stejnou intenzitu. Jaký je poměr amplitudy tlaku vlny ve vodě k amplitudě tlaku vlny ve vzduchu? Předpokládejte, že voda i vzduch mají teplotu  $20^\circ\text{C}$  (viz tab. 15.1). (b) Jestliže jsou naopak stejné amplitudy tlaku, jaký je poměr intenzit?

**36Ú.** (a) Dokažte, že intenzita  $I$  vlny je součinem její hustoty energie  $u$  a její rychlosti  $v$ . (b) Rádiové vlny se šíří rychlostí  $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Určete hustotu energie  $u$  pro rádiovou vlnu ve vzdálenosti 450 km od 50 kW zdroje za předpokladu, že vlnoplochy mají kulový tvar.

**37Ú.** Předpokládejme, že hlučný nákladní vlak na přímé dráze vydává válcovou rozepínající se zvukovou vlnu. Jestliže vzduch neabsorbuje žádnou energii, jak závisí amplituda  $s_m$  vlny na kolmé vzdálenosti  $r$  od zdroje?

**38Ú.** Zvuková vlna se šíří stejnoměrně ve všech směrech z bodového zdroje (říkáme, že zdroj je izotropní). (a) Odůvodněte následující vztah pro výchylku  $s$  prostředí v libovolné vzdálenosti  $r$  od zdroje:

$$s = \frac{b}{r} \sin k(r - vt),$$

kde  $b$  je konstanta. Uvažte rychlost, směr šíření a intenzitu vlny. (b) Jaký rozměr má konstanta  $b$ ?

**39Ú.** Určete poměry (a) intenzit, (b) amplitud tlaku a (c) amplitud výchylky dvou zvukových vln, které se liší v hlasitosti zvuku o 37 dB.

**40Ú.** Ve vzdálenosti 10 km je sotva slyšet 100 Hz parní píšťalu, o níž předpokládáme, že je bodovým zdrojem. V jaké vzdálenosti by člověku způsobila bolest?

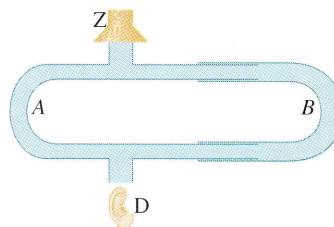
**41Ú.** Stojíte ve vzdálenosti  $l$  od zdroje vysílajícího zvukové vlny do všech směrů stejně. Když se přemístíte o 50,0 m blíže, zjistíte, že intenzita vln se zdvojnásobila. Vypočtete vzdálenost  $l$ .

**42Ú.** Bodový zdroj o výkonu 30,0 W vysílá izotropně zvukové vlny. Malý mikrofón s účinnou plochou  $0,750 \text{ cm}^2$  je umístěn 200 m od zdroje. Vypočtete (a) intenzitu zvuku v daném místě a (b) výkon přijímaný mikrofónem.

**43Ú.** Při zkušebním letu prolétá tryskové letadlo podzvukovou rychlostí ve výšce 100 m nad zemí. Intenzita zvuku na zemi při průletu je 150 dB. V jaké výšce by mělo letadlo letět, aby hlasitost na povrchu nepřekročila práh bolesti, tj. 120 dB? Konečnou dobu, za kterou zvuk z letadla dosáhne povrchu Země, zanedbejte.

**44Ú.** Konstruktor navrhl kulový reproduktor, který vysílá zvuk izotropně. Zařízení vysílá výkon 10 W v **bezdozvukové komoře** (s dokonale tlumivými stěnami). (a) Jaká je intenzita zvukových vln (v  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) ve vzdálenosti 3,0 m od středu zdroje? (b) Porovnejte amplitudy vln ve vzdálenostech 4,0 m a 3,0 m od středu zdroje.

**45Ú.** Obr. 18.35 zachycuje vzduchem plněný **akustický interferometr**, používaný k demonstraci interference zvukových vln. Z je oscilující membrána; D je detektor zvuku, například lidské ucho nebo mikrofón. Délku dráhy ZBD můžeme měnit, kdežto vzdálenost ZAD je pevná. V bodě D interferuje zvuková vlna přicházející dráhou ZBD s vlnou z dráhy ZAD. V pokusu má intenzita zvuku v bodě D minimální hodnotu 100 jednotek. Při posunu bodu B o 1,65 cm intenzita spojitě vzrostla až k maximální hodnotě 900 jednotek. Spočítejte (a) frekvenci vysílaného zvuku a (b) poměr amplitud ZAD-vlny a ZBD-vlny v bodě D. (c) Jak je možné, že vlny mají různé amplitudy, ačkoli pocházejí ze stejného zdroje?



Obr. 18.35 Úloha 45

### ODST. 18.6 Zdroje hudebního zvuku

**46C.** Zvuková vlna frekvence 1 000 Hz šířící se vzduchem má amplitudu tlaku 10,0 Pa. Jaká je (a) vlnová délka, (b) amplituda výchylky molekul vzduchu a (c) jejich největší rychlost? (d) Uvedená frekvence je základní frekvencí varhanní píšťaly otevřené na obou koncích. Vypočtete délku píšťaly.

**47C.** Zvuková vlna šířící se v tekutém prostředí se odráží od stěny, čímž vznikne stojaté vlnění. Vzdálenost uzlů je 3,8 cm a rychlost šíření vlny je  $1\,500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Určete frekvenci zvukové vlny.

**48C.** Struna houslí dlouhá 15,0 cm a s pevnými konci kmitá na základní frekvenci (mezi jejími konci není žádný další uzel). Vlnění šířící se po struně má rychlost  $250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , rychlost zvuku ve vzduchu je  $348 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Jaká je (a) frekvence a (b) vlnová délka vzniklé zvukové vlny?

**49C.** Houslová struna kmitá v základním módu, přičemž vznikají zvukové vlny o vlnové délce  $\lambda$ . Kolikrát musíme zvýšit napětí ve struně, aby se při stejném způsobu kmitání vlnová délka zvuku zmenšila na polovinu?

**50C.** Varhanní píšťala A je na obou koncích otevřena a má základní frekvenci 300 Hz. Píšťala B je otevřena na jednom konci a její třetí harmonická frekvence je stejná jako druhá harmonická píšťaly A. Jaká je délka (a) píšťaly A a (b) píšťaly B?

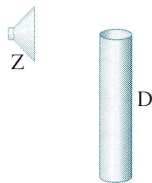
**51C.** Výšku vodní hladiny v 1,00 m dlouhé svislé skleněné trubici můžeme libovolně měnit. Těsně nad trubicí držíme ladičku vibrující s frekvencí 686 Hz. Při jaké výšce vodního sloupce nastane rezonance?

**52C.** (a) Určete rychlost vln pohybujících se po houslové struně hmotností 800 mg a délky 22,0 cm, jejíž základní frekvence je 920 Hz. (b) Jaké je ve struně napětí? Jaká je při základní frekvenci vlnová délka (c) vln pohybujících se po struně a (d) vznikajících zvukových vln?

**53Ú.** Vzdálenost pevných konců houslové struny je 30 cm. Struna má hmotnost 2,0 g. „Prázdná“ struna (tj. když na ní nemáme prst) vydává tón  $a^1$  (440 Hz). (a) Kam musíme položit prst, abychom zahráli tón  $c^2$  (523 Hz)? (b) Jaký je poměr vlnových délek struny kmitající s tóny  $a^1$  a  $c^2$ ? (c) Jaký je poměr vlnových délek zvukových vln tónu  $a^1$  k tónu  $c^2$ ?

**54Ú.** Délka violoncellové struny je  $L$  a její základní frekvence je  $f$ . (a) O jakou délku  $l$  musíme strunu zkrátit přitisknutím prstu, aby se její základní frekvence změnila na  $rf$ ? (b) Vypočítejte  $l$ , jestliže  $L = 0,80$  m a  $r = 1,2$ . (c) Když  $r = 1,2$ , jaký je poměr vlnových délek nové zvukové vlny a zvukové vlny vydávané před přitisknutím prstu?

**55Ú.** Na obr. 18.36 je malý reproduktor Z napájený oscilátorem a zesilovačem. Vydává zvuk, jehož frekvenci můžeme měnit pouze v rozsahu od 1 000 Hz do 2 000 Hz. Trubice D je kus válcové kovové roury dlouhý 5,49 m a otevřený na obou koncích. (a) Jestliže se za určité teploty zvuk šíří ve vzduchu rychlostí  $344,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , při jakých frekvencích nastane v trubici rezonance? (b) Načrtněte stojaté vlny (podle konvence z obr. 18.13(b) při každé rezonanční frekvenci.

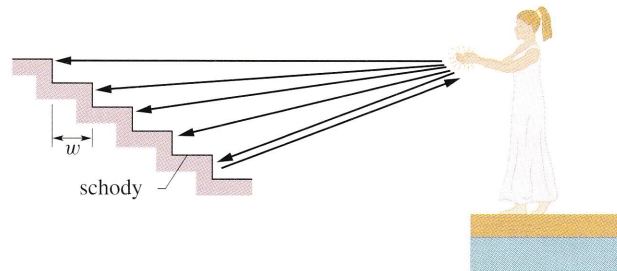


Obr. 18.36 Úloha 55

**56Ú.** Nejnižší rezonanční frekvence studny se svislými stěnami a vodou na dně je 7,00 Hz. Vzduch ve studni má hustotu  $1,10 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a modul pružnosti  $1,33\cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Jak je studna hluboká?

**57Ú.** Zvuk tlesknutí na jevišti starořeckého amfiteátru je přenášen zvukovými vlnami (obr. 18.37), které se posléze rozptýlí na schodech šířky  $w = 0,75$  m. Zvuk se pak vrací na jeviště jako

řada pulzů, od každého schodu jeden. Přicházející pulzy spolu znějí jako jeden tón. (a) Za předpokladu, že všechny paprsky se šíří horizontálně, najděte frekvenci, se kterou se pulzy vracejí (tj. frekvenci tónu vnímaného na jevišti). (b) Kdyby byly schody užší, byla by výsledná frekvence vyšší, nebo nižší?



Obr. 18.37 Úloha 57

**58Ú.** Trubice dlouhá 1,20 m je na jednom konci uzavřena. K otevřenému konci umístíme natažený drát o délce 0,330 m a hmotnosti 9,60 g. Drát má oba konce pevné a kmitá v základním módu. Rezonancí se rozechvěje také vzduchový sloupec v trubici svou základní frekvencí. Určete (a) frekvenci kmitů vzduchu a (b) napětí drátu.

**59Ú.** Periodu pulzující hvězdy s proměnlivou velikostí lze odhadnout z představy, že hvězda kmitá *radiálně* podélně v základním módu stojatého vlnění. To znamená, že poloměr hvězdy se s časem periodicky mění, přičemž kmitna se nachází na jejím povrchu. (a) Bude střed hvězdy uzlem, nebo kmitnou? (b) Ukažte pomocí analogie s otevřenou píšťalou, že perioda pulzací  $T$  je dána vztahem

$$T = \frac{4R}{v},$$

kde  $R$  je poloměr hvězdy v rovnováze a  $v$  je průměrná rychlost zvuku. (c) Většina bílých trpaslíků je tvořena látkou s modulem pružnosti  $1,33\cdot 10^{22} \text{ Pa}$  a s hustotou  $10^{10} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Jejich poloměry jsou  $9,0\cdot 10^{-3}$  násobkem poloměru Slunce. Jaká je přibližná perioda kmitů bílého trpaslíka?

**60Ú.** Houslová struna dlouhá 30,0 cm s délkovou hustotou  $0,650 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$  je umístěna před reproduktor, napojený na oscilátor měnitelné frekvence. Zjistíme, že když měníme frekvenci oscilátoru v rozsahu 500 Hz až 1 500 Hz, rozkmitá se struna jen při 880 Hz a 1 320 Hz. Jaké je napětí struny?

### ODST. 18.7 Zázněje

**61C.** Když necháme ladičku neznámé frekvence znít současně se standardní ladičkou frekvence 384 Hz, uslyšíme tři zázněje za sekundu. Když na rameno zkoumané ladičky nalepíme kousek vosku, frekvence rázů klesne. Jaká je frekvence zkoumané ladičky?

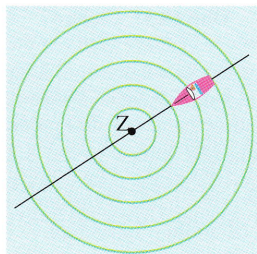
**62C.** Houslová struna A je trochu přetažená. Když ji necháme znít spolu s ladičkou, která vydává přesné komorní  $a$  ( $a^1 = 440 \text{ Hz}$ ), slyšíme čtyři zázněje za sekundu. Jaká je perioda kmitů struny?

**63Ú.** Dvě stejné struny klavíru mají při stejném napětí základní frekvenci 600 Hz. O jakou část se musí napětí jedné z nich zvýšit, aby při současném znění obou strun bylo slyšet 6 rázů za vteřinu?

**64Ú.** Máte k dispozici pět ladiček s různými frekvencemi. Určete (a) největší a (b) nejmenší počet rázových frekvencí, které můžete získat, když necháte znít vždy dvě z ladiček současně.

### ODST. 18.8 Dopplerův jev

**65C.** Na jezeře se od zdroje Z šíří kruhové vlny, jejichž hřebeny jsou znázorněny na obr. 18.38. Rychlost šíření vln je  $5,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a vzdálenost hřebenu je 2,3 m. Vy se nacházíte v člunu plovoucím v přímém směru na zdroj Z konstantní rychlostí  $3,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  vzhledem ke břehu jezera. Jakou frekvenci vln naměříte?



Obr. 18.38 Cvičení 65

**66C.** Na přímém úseku silnice pronásleduje policie lupiče. Obě auta jedou rychlostí  $100 \text{ mi}\cdot\text{h}^{-1}$ . Policii se nedaří lupiče dohonit a zapne znovu sirénu. Rychlost zvuku ve vzduchu je  $1\,100 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-1}$  a frekvence sirény je 500 Hz. Jaký je v autě lupiče Dopplerův posuv sirény?

**67C.** Píšťalka na psy má frekvenci 30 kHz. Pes ji přesto ignoruje. Jeho majitelka se tedy chce pomocí Dopplerova jevu přesvědčit, že píšťalka funguje, ačkoli ona sama neslyší zvuky nad 20 kHz. Požádá proto svou přítelkyni, aby na píšťalku zapískala z jedoucího auta, zatímco ona bude stát u silnice a naslouchat. (a) Jakou rychlostí a v jakém směru musí auto jet, aby majitelka psa píšťalku uslyšela? (b) Výpočet zopakujte pro frekvenci píšťalky 22 kHz místo 30 kHz.

**68C.** Turbíny tryskového letadla bzučí s frekvencí 16 000 Hz. Letadlo letí rychlostí  $200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jakou frekvenci slyší pilot druhého letadla, který se snaží první letadlo předletět rychlostí  $250 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ?

**69C.** Sanitka, jejíž siréna zní s frekvencí 1 600 Hz, předjíždí cyklistu jedoucího rychlostí  $2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Poté, co ho sanitka předjede, slyší cyklista frekvenci 1 590 Hz. Jakou rychlostí jede sanitka?

**70C.** V roce 1845 Buys Ballot poprvé ověřoval Dopplerův jev u zvuku. Na plošinu nákladního vagonu taženého lokomotivou umístil jednoho trubače a ke kolejím postavil druhého. Jak rychle se pohyboval vagon, jestliže oba muzikanti troubili tón s frekvencí 440 Hz a bylo slyšet 4 rázy za vteřinu?

**71C.** Rychlost světla ve vodě je asi tři čtvrtiny rychlosti světla ve vakuu. Svazek elektronů s vysokou rychlostí pocházejících

z betatronu vyzařuje ve vodě Čerenkovovo záření; čelo vlny tvoří kužel s vrcholovým úhlem  $60^\circ$ . Určete rychlost elektronů ve vodě.

**72C.** Z pistole je vystřelen náboj rychlostí  $2\,200 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-1}$ . Určete úhel sevřený rázovou vlnou a trajektorii náboje.

**73C.** Dvě stejné ladičky oscilují s frekvencí 440 Hz. Někde na jejich spojnicí se nachází posluchač. Vypočítejte, jakou naměří frekvenci, když (a) on je v klidu a obě ladičky se pohybují doprava rychlostí  $30,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a (b) když jsou v klidu ladičky a posluchač se pohybuje doprava rychlostí  $30,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**74Ú.** Píšťalka s frekvencí 540 Hz koná kruhový pohyb s poloměrem 0,61 m a s úhlovou rychlostí  $15,0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jaké jsou (a) nejnižší a (b) nejvyšší frekvence, které slyší pozorovatel v dále, jestliže je v klidu vzhledem ke středu kruhového pohybu?

**75Ú.** Letadlo letí 1,25krát rychleji než zvuk ve vzduchu. Rázová vlna dosáhne muže na zemi minutu poté, co mu letadlo přeletělo přesně nad hlavou. V jaké výšce letadlo letělo? Předpokládejte, že rychlost zvuku je  $330 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

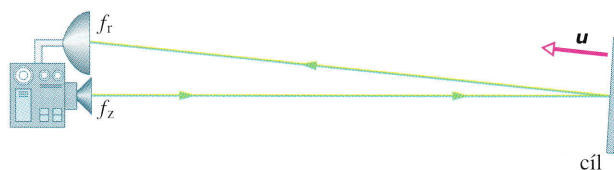
**76Ú.** Tryskové letadlo nad námi přeletí ve výšce 5 000 m rychlostí 1,5 M (machů). (a) Určete úhel Machova kuželu. (b) Za jak dlouho od přeletu nás dostihne rázová vlna? Za rychlost zvuku dosaďte  $331 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**77Ú.** Na obr. 18.39 je nakreslen přístroj na vysílání a přijímání vln, který se používá k stanovení rychlosti u pohyblivého cíle (na obrázku je znázorněn symbolicky jako deska). Zařízení analyzuje vlny odražené od objektu, pohybujícího se přímým směrem k němu. (a) Dokažte, že frekvence  $f_r$  vln zachycených přístrojem závisí na frekvenci  $f_z$  vysílaných vln podle vztahu

$$f_r = f_z \left( \frac{v + u}{v - u} \right),$$

kde  $v$  je rychlost vln. (b) Ve velké většině případů je  $u \ll v$ . Dokažte, že v takové situaci lze předchozí vztah přepsat na

$$\frac{f_r - f_z}{f_z} \approx \frac{2u}{v}.$$



Obr. 18.39 Úloha 77

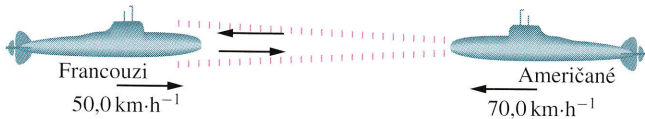
**78Ú.** Nehybný detektor pohybu vysílá zvukové vlny frekvence 0,150 MHz proti kamiónu přibližujícímu se rychlostí  $45,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jaká je frekvence vln dopadajících zpátky na detektor?

**79Ú.** Siréna vydávající zvuk frekvence 1 000 Hz se pohybuje směrem od nás ke stěně skalního útesu rychlostí  $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Rychlost zvuku ve vzduchu je  $330 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . (a) Jaká je frekvence zvuku, který slyšíme přímo od sirény? (b) Jaká je frekvence zvuku odraženého od útesu? (c) Jaká je frekvence zánějů? Může lidské

ucho tyto záněje rozeznat (jejich frekvence musí být nižší než 20 Hz)?

**80Ú.** Trubač na železničním vagonu zahraje na trubce tón o frekvenci 440 Hz. Vagon se s rychlostí  $20,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pohybuje směrem ke zdi. Vypočtete (a) frekvenci zvuku vnímaného pozorovatelem stojícím u zdi a (b) frekvenci odraženého zvuku v místě jeho zdroje.

**81Ú.** Francouzská a americká ponorka plují přímo proti sebe (obr. 18.40) při manévrech v nehybných vodách severního Atlantiku. Francouzská pluje rychlostí 50,0 km/h, americká rychlostí 70,0 km/h. Francouzi vyšlou sonarový signál (zvuková vlna ve vodě) frekvence 1 000 Hz. Sonarové vlny se šíří rychlostí 5 470 km/h. (a) Jakou frekvenci signálu zachytí Američané? (b) Jakou frekvenci zachytí Francouzi v signálu odraženém zpátky od americké ponorky?



Obr. 18.40 Úloha 81

**82Ú.** Dle zahraničního zpravodajství se zdroj zvukových vln frekvence 1 200 Hz pohyboval doprava rychlostí  $98,0 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-1}$  vzhledem k okolí. Před ním se nacházela odrazová plocha (reflektor) pohybující se doleva rychlostí  $216 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-1}$  vzhledem k okolí. Jestliže rychlost zvuku ve vzduchu je  $1 080 \text{ ft}\cdot\text{s}^{-1}$ , vypočtete (a) vlnovou délku zvuku vyslaného směrem k reflektoru, (b) počet vlnoploch dopadajících za sekundu na odrazovou plochu, (c) rychlost odražených vln, (d) vlnovou délku odražených vln a (e) počet odražených vlnoploch dopadajících zpátky na zdroj.

**83Ú.** Autoři článku o Dopplerově posuvu ultrazvukových vln, jehož se využívá v lékařské diagnostice, konstatují: „Když se v těle pohybuje nějaký orgán, pak každý milimetr za sekundu v jeho rychlosti způsobí relativní posuv frekvence ultrazvuku o  $1,30 \cdot 10^{-4}\%$  (tj. např. o 1,30 Hz při 1 MHz).“ Jaká z toho plyne rychlost ultrazvuku v živé tkáni?

**84Ú.** Poplašné zařízení obsahuje zdroj zvukových vln o frekvenci 28,0 kHz. Jaká bude frekvence zánějů vln odražených od zloděje jdoucího průměrnou rychlostí  $0,950 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  od alarmu?

**85Ú.** V jeskyni poletuje netopýr, orientující se pomocí ultrazvukových signálů. Předpokládáme, že frekvence vyslaného zvuku je 39 000 Hz. Při letu střemhlav na plochu stěny letí netopýr 0,025násobkem rychlosti zvuku ve vzduchu. Jakou frekvenci zvuku odraženého od stěny zaznamená?

**86Ú.** Ponorka se pohybuje na sever těsně pod hladinou moře. Pluje rychlostí 75,0 km/h v mořském proudu směřujícím také na sever, jehož rychlost je 30,0 km/h. Obě rychlosti jsou udány vzhledem k mořskému dnu. Ponorka vyšle sonarový signál (zvukovou vlnu) frekvence  $f = 1 000 \text{ Hz}$  o rychlosti 5 470 km/h, který je zachycen válečnou lodí nacházející se severně od ponorky. Jaký je rozdíl vyslané a zachycené frekvence, jestliže je vá-

lečná loď (a) unášena proudem rychlostí 30,0 km/h a (b) v klidu vzhledem k mořskému dnu?

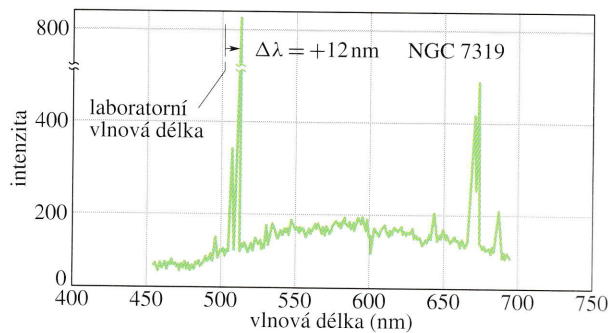
**87Ú.** Siréna s frekvencí 2 000 Hz je připevněna k budově, důstojník civilní obrany sedí poblíž. Jakou frekvenci uslyší důstojník, jestliže vítr fouká rychlostí  $12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (a) od zdroje k pozorovateli a (b) od pozorovatele ke zdroji?

**88Ú.** Dva vlaky jedou směrem k sobě, každý jede rychlostí  $30,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  vzhledem k Zemi. Jeden z nich zatroubí s frekvencí 500 Hz. (a) Jakou frekvenci bude slyšet ve druhém vlaku za bezvětří? (b) Jakou frekvenci bude slyšet ve druhém vlaku, jestliže vítr fouká rychlostí  $30,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  od pozorovatele k houkačce? (c) Jaká bude tato frekvence při opačném směru větru?

**89Ú.** Ve vlaku, který se pohybuje rychlostí  $10,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  směrem na východ, sedí při otevřeném okně děvče. Její strýc ji byl doprovodit na nádraží, takže teď stojí u kolejí a dívá se za odjíždějícím vlakem. Naráz lokomotiva zatroubí s frekvencí 500,0 Hz. Je bezvětří. (a) Jakou frekvenci slyší strýc? (b) Jakou děvče? Od východu se zvedne vítr s rychlostí  $10,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . (c) Jakou frekvenci slyší teď strýc? (d) A děvče?

### ODST. 18.9 Dopplerův jev u světla

**90C.** Obr. 18.41 je graf závislosti intenzity na vlnové délce světla, které k Zemi přichází z galaxie NGC 7319, vzdálené od nás kolem  $3 \cdot 10^8$  světelných roků. Nejjasnější čára ve spektru patří kyslíku. V laboratoři má kyslík spektrální čáru na vlnové délce  $\lambda = 513 \text{ nm}$ , ale ve světle z NGC 7319 je tato čára posunuta kvůli Dopplerově jevu (stejně jako všechny ostatní čáry). (a) Jak rychle se galaxie pohybuje vůči Zemi? (b) Pohybuje se směrem k nám nebo od nás?



Obr. 18.41 Cvičení 90

**91C.** Vlnové délky spektrálních čar jisté galaxie v souhvězdí Panny jsou o 0,4 % větší než ty, které naměříme ve světle z pozemských zdrojů. Jaká je radiální složka rychlosti této galaxie vzhledem k Zemi? Přibližuje se k nám, nebo se od nás vzdaluje?

**92C.** Ve spektru záření vzdálené galaxie je čára vlnové délky 434 nm. Tato hodnota je ovlivněna rudým posuvem, neboť v záření pozemského zdroje měla táž čára vlnovou délku 462 nm. (a) Jaká je rychlost galaxie (přesněji řečeno její průmět na spojnici se Zemí) vzhledem k zeměkouli? (b) Přibližuje se galaxie k Zemi, nebo se od ní vzdaluje?



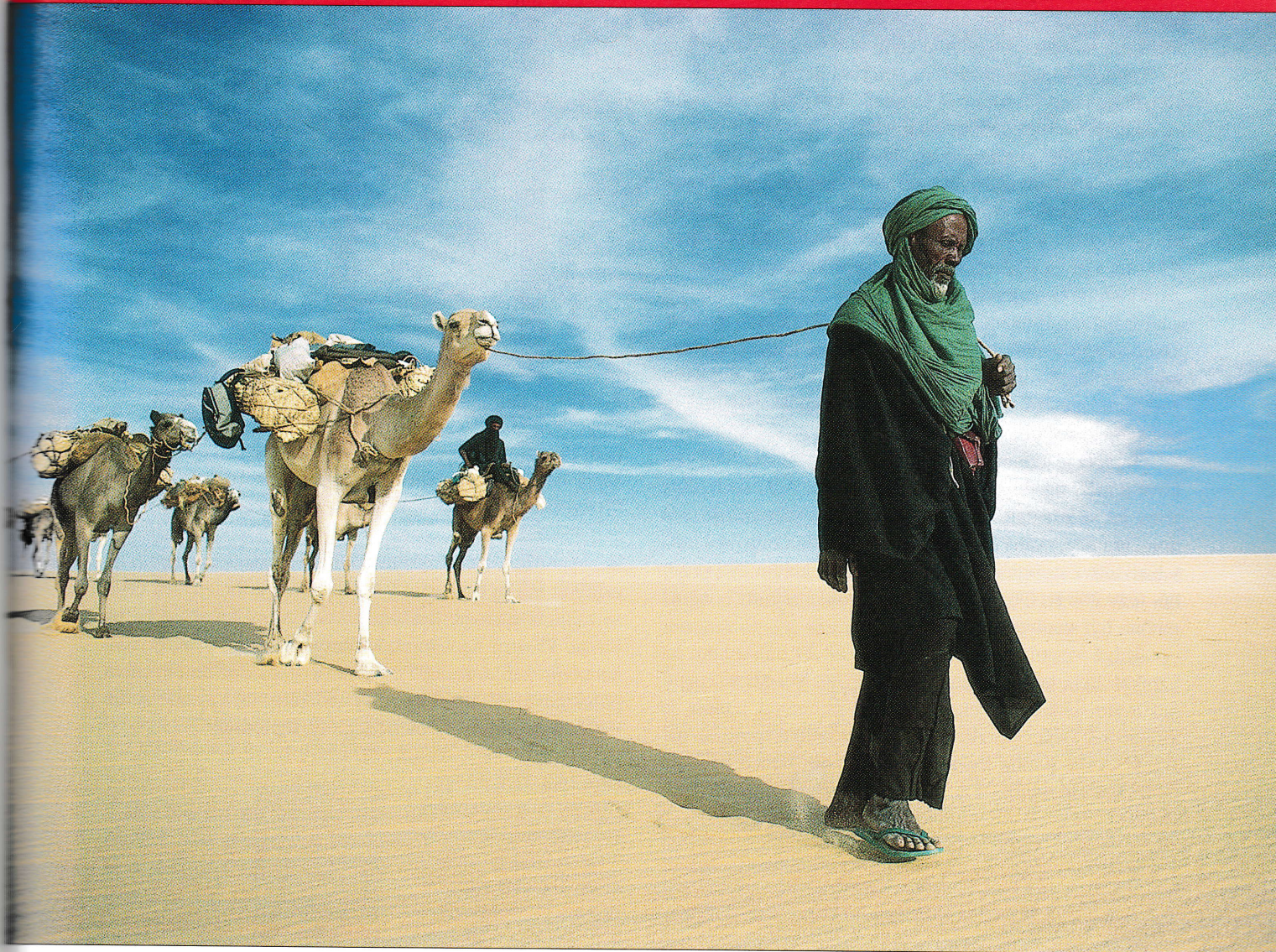
**93C.** Za předpokladu, že platí rov. (18.57), vypočtete, jak rychle byste museli procházet červeným světlem, aby se vám zdálo zelené. Vlnová délka červeného světla je 620 nm a zeleného 540 nm.

**94Ú.** Perioda otáčení Slunce na rovníku je 24,7 dne. Jeho poloměr je  $7,00 \cdot 10^5$  km. Jaký bude Dopplerův posuv ve vlnové délce světla, které pochází z rovníku a jehož vlnová délka je 550 nm?

**95Ú.** Umělá družice Země, vysílající přesně na frekvenci 40 MHz, přeletí nad radiostanicí ve výšce 400 km rychlostí

$3,0 \cdot 10^4$  km/h. Nakreslete změnu frekvence způsobenou Dopplerovým jevem jako funkci času, přičemž  $t = 0$  bude okamžik, když je družice přesně nad stanicí. (*Tip:* Rychlost  $u$  ve vzorci pro Dopplerův jev není skutečnou rychlostí družice, nýbrž pouze její složkou ve směru k radiostanicí. Zakřivení Země a dráhy družice zanedbejte.)

**96Ú.** Mikrovlny, šířící se rychlostí světla, jsou odraženy od letounu letícího k jejich zdroji. Když se odražené vlny složí s vysílanými, frekvence zánějšu je 990 Hz. Jestliže vlnová délka mikrovln je 0,100 m, jakou rychlostí se přibližuje letoun?



---

*Na sluníčku se obvykle více zahřívá předmět s černým povrchem než se světlým. To platí i pro obleky beduinů v Sinaiské poušti: černé obleky se zahřívají více než bílé. Proč je ale tedy beduinové nosí? Nesnižuje to automaticky jejich šanci na přežití v drsném prostředí žhavé pouště?*

---

## 19.1 TERMODYNAMIKA

V této kapitole opustíme mechaniku a začneme se věnovat novému oboru — termodynamice. Mechanika se zabývá mechanickou energií systémů a řídí se Newtonovými zákony. Termodynamika se zabývá **vnitřní energií** systémů — „tepelnou energií“ — a řídí se novými zákony, se kterými se seznámíme v následujících třech kapitolách.

Centrálním pojmem termodynamiky je **teplota**. Toto slovo je nám důvěrně známé: od narození rozeznáme horké a studené, takže o přesnějším významu teploty zpravidla ani neuvažujeme. Ale náš „mysl pro teplotu“ není ve skutečnosti vždycky věrohodný. Tak například za studeného zimního dne se nám zdá železné zábradlí na dotyk mnohem studenější než dřevěné, třebaže mají obojí stejnou teplotu. Tento rozdíl v našem vnímání pochází z toho, že železo odebírá energii z našeho prstu rychleji než dřevo. V dalším zavedeme teplotu objektivně, aniž bychom se spoléhali na své subjektivní pocity.

Teplota je jednou ze sedmi základních veličin SI. Fyzikové ji měří v jednotkách zvaných **kelvin**. Ačkoliv teplota těles, jak se zdá, může být libovolně\* vysoká, existuje jistá dolní hranice, zvaná **absolutní nula**; ta byla vzata jako nula v Kelvinově stupnici. Pokojová teplota je kolem 290 kelvinů, tedy 290 K. Obr. 19.1 ukazuje široké rozmezí, v němž mohou být stanoveny teploty.

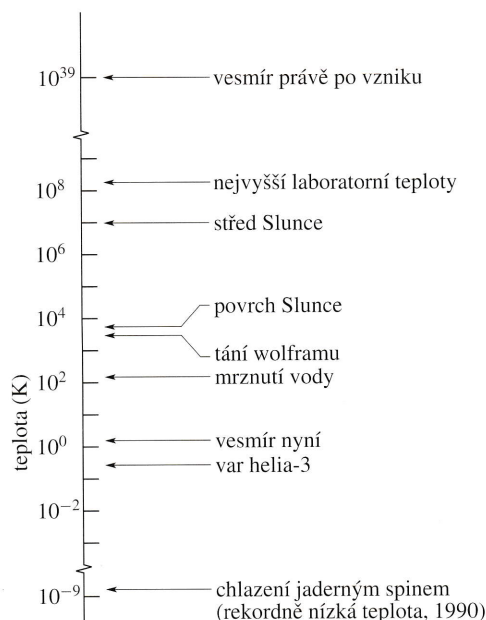
Když Vesmír před nějakými 10 až 20 miliardami let vznikl, byla jeho teplota kolem  $10^{39}$  K. Vesmír se rozpínal a tím chladnul; jeho současná průměrná teplota je kolem 3 K. Nám na Zemi je o něco tepleji, protože našťástí žijeme poblíž hvězdy. Bez našeho Slunce bychom měli také jen teplotu 3 K (a nejspíš bychom ani neexistovali).

## 19.2 NULTÝ ZÁKON TERMODYNAMIKY

Vlastnosti různých předmětů se mění, měníme-li jejich teplotu — třeba přenesením z chladničky do teplé pece. Např.: s rostoucí teplotou se objem kapalin zvětšuje, kovová tyčka se roztahuje, elektrický odpor drátu roste, stejně tak roste tlak plynu uzavřeného v nádobě. Kteroukoli z těchto vlastností můžeme použít jako základ přístroje, který nám pomůže zavést pojem teploty.

Obr. 19.2 ukazuje takový přístroj. Každý vynalézavý inženýr by ho mohl navrhnout a postavit na základě kterékoliv z výše uvedených vlastností. Přístroj je vybaven čís-

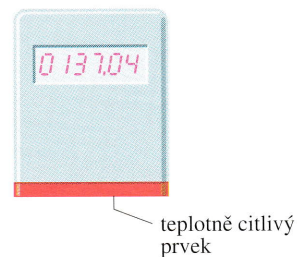
\* Nepříměřenou změnou teploty se může ovšem konkrétní těleso podstatně změnit, např. tato kniha zahřátím na  $1000^{\circ}\text{C}$  nebo meloun ochlazením na  $-50^{\circ}\text{C}$ .



**Obr. 19.1** Některé teploty na Kelvinově stupnici. Teplota  $T = 0$  odpovídá  $10^{-\infty}$  a v našem logaritmickém měřítku proto nemůže být vynesena.

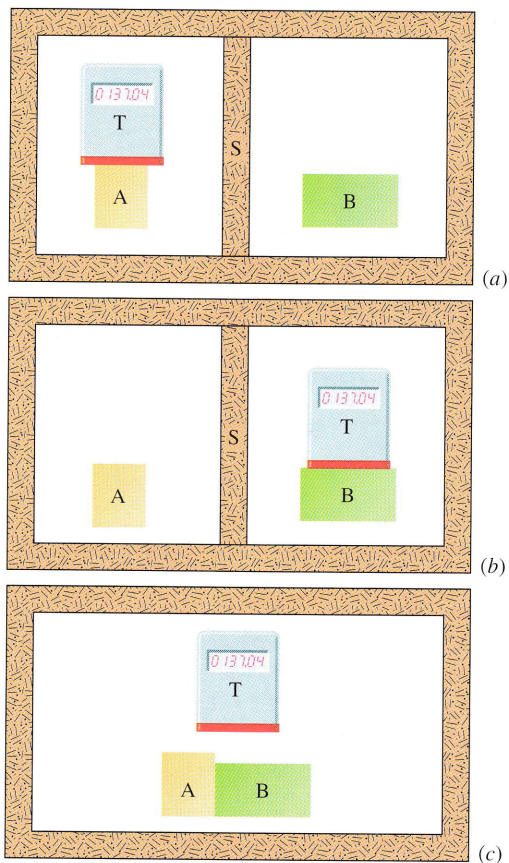
licovým displejem a má následující vlastnost: začnete-li ho zahřívát (třeba Bunsenovým kahanem), zobrazované číslo se začne zvětšovat; uložíte-li ho do mrazáku, číslo začne klesat. Přístroj není nijak kalibrován a jeho číselný údaj nemá (prozatím) žádný fyzikální význam. Zařízení bychom pojmenovali **termoskop**, tedy indikátor teploty, ale zatím nikoli **termometr**, tj. měřič teploty, **teploměr**\*.

**Obr. 19.2** Termoskop. Číselný údaj roste, když zařízení zahříváme, a klesá, když ho chladíme. Teplotně citlivým prvkem by mohla být např. cívečka drátu, jehož elektrický odpor měříme a zobrazujeme.



Předpokládejme, že podle obr. 19.3a dáme termoskop (budeme ho nazývat tělesem T) do těsného styku s jiným tělesem (těleso A). Celý systém je uzavřen v silnostěnné izolující krabici. Čísla na displeji se mění, až se ustálí na hodnotě „137,04“ a dále zůstávají stejná. Předpokládáme přitom, že po jisté době dosáhne každá měřitelná vlastnost těles T a A, tedy i teplota, jisté pevné, neproměnné hodnoty. Potom prohlásíme, že obě tělesa jsou navzájem

\* Místo „teploměr“ bychom měli správně říkat „teplotoměr“. Ale tuto historicky danou nedůslednost už asi nikdy nikdo nenapraví.



**Obr. 19.3** (a) Těleso T (termoskop) a těleso A jsou v tepelné rovnováze. (Těleso S je teplotně izolující stěna.) (b) Těleso T a B jsou také v tepelné rovnováze s tímto údajem termoskopu. (c) Je-li pravda (a) i (b), pak nulový zákon termodynamiky tvrdí, že i tělesa A a B budou navzájem v tepelné rovnováze.

v **tepelné rovnováze**, tzn. mají tutéž teplotu. A třebaže číselný údaj tělesa T nebyl nijak kalibrován, použijeme ho k jednoznačnému očíslování: obě tělesa mají tutéž **teplotu**  $T = 13,704$ .

Předpokládejme, že poté uvedeme těleso T do kontaktu s tělesem B (obr. 19.3b) a zjistíme, že obě tělesa budou v tepelné rovnováze při tomto údaj termoskopu. Tělesa T a B tedy budou mít také tutéž teplotu. Budou také tělesa A a B navzájem v tepelné rovnováze, uvedeme-li je do kontaktu podle obr. 19.3c? Experiment potvrzuje, že tomu tak skutečně je.

Experimentální fakta z obr. 19.3 jsou shrnuta do **nulového zákona termodynamiky**:

Je-li každé z těles A i B v tepelné rovnováze se třetím tělesem T, budou v tepelné rovnováze také tělesa A a B navzájem. K očíslování stavů tepelné rovnováhy stačí jediný spojitě proměnný parametr — teplota.

Pro úplnost bychom měli ještě dodat: „Každé těleso, které se samo nachází v tepelné rovnováze, má vlastnost zvanou **teplota**. Jsou-li dvě tělesa navzájem v tepelné rovnováze, mají stejné teploty. Také obráceně, mají-li tělesa stejnou teplotu\*, budou po uvedení do kontaktu v tepelné rovnováze.“ Nyní můžeme náš termoskop (třetí těleso T) přejmenovat na teploměr a být si jisti, že jeho údaj má fyzikální smysl. Zbývá ho už jenom vhodně kalibrovat.

Nulový zákon používáme v laboratoři stále. Chceme-li zjistit, zda kapaliny ve dvou nádobách mají tutéž teplotu, změříme teploměrem teplotu každé z nich. Nemusíme je uvést do kontaktu a zkoumat, zda budou nebo nebudou navzájem v tepelné rovnováze.

Nulový zákon, který je vlastně dodatečnou logickou myšlenkou, byl formulován až ve třicátých letech tohoto století, tedy dávno po objevu a očíslování prvního a druhého zákona. Pojem teploty je však pro oba tyto zákony natolik klíčový, že bylo záhodno tento zákon, který činí pojem teploty smysluplným, očíslovat nižším číslem. Proto ho nazýváme nulovým zákonem.

## 19.3 MĚŘENÍ TEPLoty

Podívejme se, jak definujeme a měříme teplotu v Kelvinově stupnici. Jinými slovy — podívejme se, jak kalibrovat náš termoskop, aby se stal teploměrem.

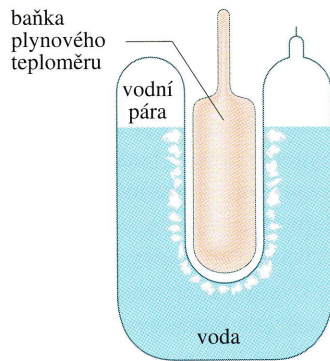
### Trojný bod vody

Pro nastavení teplotní stupnice vybereme nějaký reprodukovatelný teplotní jev a přiřadíme — zcela libovolně — nějakou číselnou hodnotu jemu i jeho okolí, které je s ním v tepelné rovnováze. Vybereme tedy *standardní pevný bod* a přiřadíme mu jistou teplotu (**teplotu standardního bodu**). Dlouhou dobu byla užívána Celsiova stupnice stanovená tak, že teplotě tání ledu byla přiřazena hodnota  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  a teplotě varu vody  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  (obojí za obvyklého atmosférického tlaku). Při přesnějším přístupu k měření teplot je zvolena jediná teplota, daná **trojným bodem vody**.

Kapalná voda, pevný led a vodní pára (tj. plynná voda) mohou spolu být v tepelné rovnováze při jediné teplotě a tlaku. Obr. 19.4 ukazuje aparaturu, v níž může být trojný bod vody získán v laboratoři. Podle mezinárodní dohody trojnému bodu vody přiřazujeme hodnotu  $273,16\text{ K}$  jakožto standardní teplotu pevného bodu pro kalibraci teploměrů. (Číselná hodnota  $273,16$  byla zvolena právě proto, aby se nově definovaný **kelvin** K co nejlépe shodoval s dosavadním Celsiovým stupněm  $^{\circ}\text{C}$  ve smyslu setiny rozdílu teplot

\* K úplnému popisu teploty stačí *jediné* číslo. To by nestačilo např. pro popis chuti nebo barvy.

**Obr. 19.4** Baňka pro trojný bod vody, v níž jsou v tepelné rovnováze led, kapalná voda a vodní pára. Podle mezinárodní dohody je stanovena teplota této směsi jako 273,16 K. Baňka plynového teploměru je na obrázku vsunuta do dutiny baňky.



tání ledu a varu vody. Je tedy

$$T_3 = 273,16 \text{ K} \quad (\text{teplota trojného bodu}), \quad (19.1)$$

kde index 3 nám připomíná, že jde o trojný bod. Tato hodnota také určuje velikost Kelvinova stupně jako  $1/273,16$  rozdílu mezi absolutní nulou a teplotou trojného bodu vody.

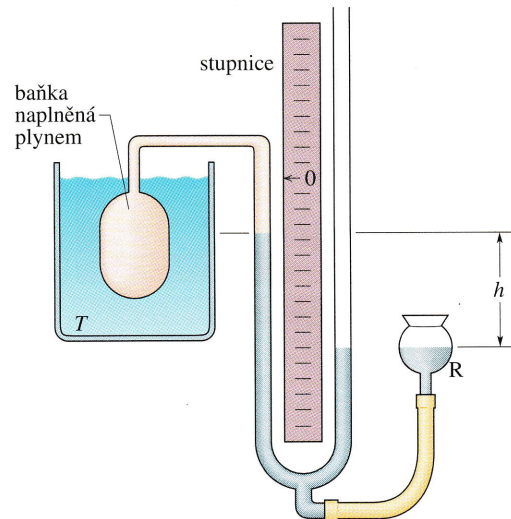
Všimněme si, že u Kelvinovy teploty neuvádíme značky stupně. Je tedy 300 K (nikoli  $300^\circ \text{K}$ ) a čteme to „300 kelvinů“ a nikoli „300 stupňů Kelvina“. Můžeme též používat obvyklých předpon pro jednotky, takže 0,003 5 K je 3,5 mK. V nomenklatuře nečiníme rozdíl mezi Kelvinovou teplotou a teplotním rozdílem. Můžeme tedy psát „bod varu síry je 717,8 K“ a „teplota této vodní lázně stoupá o 8,5 K“.

### Plynový teploměr s konstantním objemem

Až doposud jsme se podrobněji nezabývali konkrétní fyzikální vlastností závislou na teplotě, na níž bychom založili s mezinárodním souhlasem náš teploměr. Co máme zvolit — délku kovové tyčky, elektrický odpor drátu, tlak vykazovaný plynem v nádobě nebo něco jiného? Volba je podstatná, protože různé volby vedou při zvolené teplotě trojného bodu k různým teplotám jiných jevů, např. k různé teplotě varu vody. Z důvodů, které vyplynou dále, je standardní teploměr, vůči němuž by měly být všechny ostatní teploměry kalibrovány, založen na tlaku, který vyazuje plyn uzavřený v pevném objemu.

Obr. 19.5 ukazuje takový **plynový teploměr (s konstantním objemem)**. Sestává z plynem naplněné baňky vyrobené ze skla, taveného křemene nebo platiny (v závislosti na teplotním rozmezí, v němž hodláme teploměr používat). Ta je spojena hadičkou se rtuťovým manometrem. Zvedáním a snižováním zásobníku rtuti R můžeme udržovat hladinu rtuti v levé trubici ve stálé poloze, a tím zajistit, že objem uzavřeného plynu zůstává stejný. Teplotu libovolného tělesa v tepelném kontaktu s baňkou definujeme jako

$$T = C p, \quad (19.2)$$



**Obr. 19.5** Plynový teploměr s konstantním objemem, jehož baňka je ponořena do lázně o teplotě  $T$ , která má být změřena.

kde  $p$  je tlak, kterým působí plyn, a  $C$  je konstanta. Tlak  $p$  spočítáme ze vztahu

$$p = p_0 - \rho g h, \quad (19.3)$$

kde  $p_0$  je okolní atmosférický tlak,  $\rho$  je hustota rtuti v manometru a  $h$  je změřený rozdíl výšek hladin rtuti v obou ramenech trubice.

Je-li baňka plynového teploměru vnořena do baňky pro trojný bod, tak jako na obr. 19.4, máme

$$T_3 = C p_3, \quad (19.4)$$

kde  $p_3$  je tlak změřený v těchto podmínkách. Vyloučením  $C$  z rov. (19.2) a rov. (19.4) dostáváme

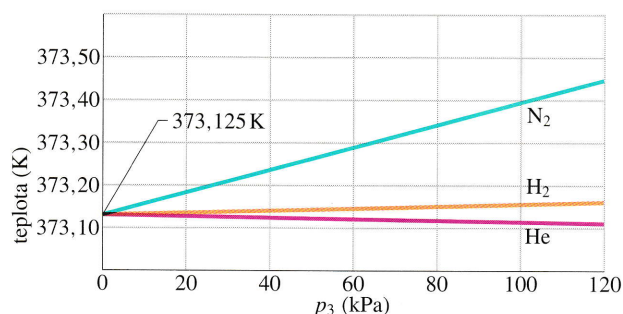
$$\begin{aligned} T &= T_3 \left( \frac{p}{p_3} \right) = \\ &= (273,16 \text{ K}) \left( \frac{p}{p_3} \right) \quad (\text{prozatím}). \end{aligned} \quad (19.5)$$

Rov. (19.5) ještě není naší konečnou definicí teploty měřené plynovým teploměrem. Neřekli jsme totiž nic o tom, jaký plyn (ani kolik plynu) se nachází v baňce teploměru. Kdybychom užili náš teploměr pro měření teploty varu vody, zjistili bychom, že různé plyny dávají poněkud různé hodnoty naměřené teploty. Jestliže bychom však používali menšího a menšího množství plynu v baňce (jeho množství měříme např. hmotností  $m$ ), zjistili bychom, že by se výsledky dobře blížily jisté hodnotě, nezávisle na tom, jaký plyn jsme použili. Obr. 19.6 ukazuje tuto uspokojivou shodu.\*

\* Pro tlak použijeme jednotek zavedených v kap. 15.3. Jednotkou pro tlak v SI je newton na čtverečný metr, nazývaný pascal (Pa). Pascal souvisí s ostatními běžnými jednotkami tlaku vztahy  $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 14,7 \text{ lb/in}^2$ .

Můžeme tedy psát, jakožto konečný návod na měření teploty plynovým teploměrem,

$$T = (273,16 \text{ K}) \left( \lim_{m \rightarrow 0} \frac{p}{p_3} \right). \quad (19.6)$$



**Obr. 19.6** Teploty vypočtené podle rov. (19.5) pro plynový teploměr s baňkou umístěnou ve vařící se vodě. V baňce byly použity různé plyny při různých hustotách (což dává různé hodnoty  $p_3$ .) Všimněte si, že pro tlak klesající k nule se všechny hodnoty blíží téže limitě: 373,125 K.

Podle toho budeme měřit neznámou teplotu následovně. Naplníme baňku teploměru libovolným množstvím *libovolného* plynu (například dusíku); jeho hmotnost buď  $m$ . Změříme tlak  $p_3$  (použitím buňky pro trojný bod) a tlak  $p$  odpovídající měřené teplotě. Vypočteme podíl  $p/p_3$ . Pak opakujeme obě měření s menším množstvím plynu a opět vypočteme tento podíl. V tomto postupu pokračujeme s menším a menším množstvím plynu v baňce, až budeme moci extrapolovat hodnotu  $p/p_3$ , kterou bychom dostali, kdyby už nebyl skoro žádný plyn v baňce. Vypočteme teplotu  $T$  dosažením této extrapolované hodnoty do rov. (19.6). (Teplota takto měřená se nazývá **ideální plynová teplota**.)

Má-li být teplota opravdu základní fyzikální veličinou, použitou v termodynamických zákonech, je žádoucí\*, aby byla její definice nezávislá na nějakých konkrétních materiálových vlastnostech. Nebylo by vhodné např. mít veličinu tak základní, jako je teplota, závislou na roztažnosti rtuti, elektrickém odporu platiny nebo jiné takové vlastnosti. Vybereme zatím plynový teploměr jako náš standardní přístroj právě proto, že nezahrnuje žádné speciální materiálové vlastnosti při své činnosti. Použijeme-li *libovolný* plyn — dostaneme tentýž výsledek. Definitivní upřesnění provedeme v čl. 21.7.

\* Je to vítané, není to však absolutně nutné. Vždyť i tak základní jednotka jako kilogram je dosud definována jako hmotnost konkrétního odliktu jisté konkrétní slitiny.

### PŘÍKLAD 19.1

Baňka plynového teploměru je naplněna dusíkem o tlaku 120 kPa. Jakou prozatímní hodnotu (obr. 19.6) by udal teploměr pro bod varu vody a jaká je chyba této hodnoty?

**ŘEŠENÍ:** V obr. 19.6 ukazuje křivka pro dusík, že prozatímní bod varu vody by byl kolem 373,44 K. Skutečná teplota (nalezená extrapolací na obr. 19.6) je 373,125 K. Použití prozatímní teploty by vedlo k chybě 0,315 K neboli 315 mK.

## 19.4 CELSIOVA A FAHRENHEITOVA STUPNICE

Zatím jsme se zabývali jen Kelvinovou stupnicí, užívanou v základních vědeckých pracích. Ve většině zemí na světě se však teplota pro všeobecné, obchodní a často i pro vědecké účely měří v Celsiově stupnici. Teplotní údaj v Celsiově stupnici neboli Celsiova teplota se měří ve stupních a Celsiův stupeň je stejně velký jako kelvin. Celsiova stupnice má však počátek posunut k příhodnějším teplotám. Celsiova teplota je nyní definována vztahem

$$T_C = T - 273,15 \text{ C}^\circ. \quad (19.7)$$

Při vyjadřování v Celsiově stupnici užíváme symbol stupně  $^\circ$ . Navíc v této knize z praktických důvodů rozlišujeme polohu tohoto symbolu vůči písmenu. Týž symbol před písmenem C znamená *údaj*, např.  $20,00 \text{ C}^\circ$  (stupně Celsia) neboli 293,15 K (kelviny). Tento symbol za písmenem C znamená *rozdíl údajů*, např.  $3,00 \text{ C}^\circ$  neboli 3,00 K. Zapišeme tedy např., že teplota přes den vzrostla o tři Celsiovy stupně  $3 \text{ C}^\circ$  ( $= 3 \text{ K}$ ) na teplotu  $23 \text{ C}^\circ$  ( $= 296 \text{ K}$ ).

Fahrenheitova stupnice používaná v USA užívá menší stupeň než Celsiova a jinou hodnotu nuly. Oba tyto rozdíly snadno zjistíte na pokojovém teploměru, který má obě stupnice. Převodní vztah mezi číselnými hodnotami těchto stupnic je

$$[T_F] = \frac{9}{5}[T_C] + 32, \quad (19.8)$$

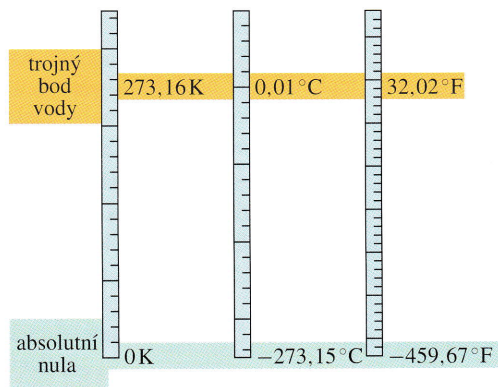
kde  $T_F$  je Fahrenheitova teplota. Převod mezi oběma stupnicemi snadno provedeme, známe-li několik odpovídajících si hodnot (jako třeba bod varu vody a bod mrazu, tj. mrznutí vody, viz tab. 19.1) a vzpomeneme-li si, že přírůstek 9 Fahrenheitových stupňů je 5 Celsiových stupňů. Obr. 19.7 porovnává Kelvinovu, Celsiovu a Fahrenheitovu stupnici.

Pro rozlišení obou stupnic užíváme písmena C a F. Tedy zápis

$$0 \text{ C}^\circ = 32 \text{ F}^\circ$$

znamená, že  $0 \text{ C}^\circ$  na Celsiově stupnici udává tutéž teplotu jako  $32 \text{ F}^\circ$  na Fahrenheitově stupnici, zatímco zápis

$$5 \text{ C}^\circ = 9 \text{ F}^\circ$$



**Obr. 19.7** Srovnání stupnice Kelvinovy, Celsiový a Fahrenheitovy

znamená, že teplotní rozdíl pěti Celsiových stupňů (všimněte si, že symbol stupně je *za* písmenem C, resp. F) je stejný jako teplotní rozdíl devíti Fahrenheitových stupňů.

**Tabulka 19.1** Některé význačné teploty ve °C a °F

TEPLŮTA	°C	°F
Teplota varu (vody) <sup>a</sup>	100	212
Tělesná teplota	37	98,6
Příjemně v pokoji	20	68
Teplota tuhnutí (vody) <sup>a</sup>	0	32
0 °F	≐ -18	0
Shoda stupnic	-40	-40

<sup>a</sup> Přesně měřeno, za tlaku 101 325 Pa je teplota varu vody v Celsiově stupnici 99,975 °C a její teplota tuhnutí 0,00 °C. Mezi těmito teplotami je tedy o něco méně než 100 °C.

### PŘÍKLAD 19.2

Představte si, že listujete starými vědeckými spisy, kde se užívá teplotní stupnice Z. Voda vře při 65,0 °Z a tuhne při -14,0 °Z.

(a) Jaká změna teploty  $\Delta T$  měřená touto stupnicí odpovídá změně o 53,0 F°?

**ŘEŠENÍ:** Abychom našli převodní faktor mezi oběma stupnicemi, použijeme teploty varu a tuhnutí vody. Na stupnici Z je rozdíl mezi nimi 65,0 °Z - (-14,0 °Z) = 79,0 °Z. Na Fahrenheitově stupnici totéž činí 212 °F - 32 °F = 180 F°. Změna o 79,0 °Z je tedy rovna změně o 180 F°. Změně o 53,0 F° tedy odpovídá

$$\begin{aligned} \Delta T &= 53,0 \text{ F}^\circ = 53,0 \text{ F}^\circ \left( \frac{79,0 \text{ Z}^\circ}{180 \text{ F}^\circ} \right) = \\ &= 23,3 \text{ Z}^\circ. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaké teplotě Fahrenheitova a Celsia odpovídá teplota  $T = -98,0 \text{ Z}^\circ$ ?

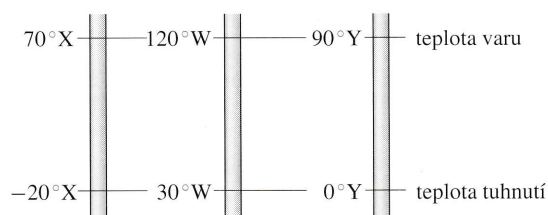
**ŘEŠENÍ:** Teplota tuhnutí vody je -14,0 °Z, takže rozdíl mezi ní a hledanou teplotou je 84,0 °Z. Tento rozdíl převedeme do obou stupnic:

$$\begin{aligned} \Delta T &= 84,0 \text{ Z}^\circ \left( \frac{180 \text{ F}^\circ}{79,0 \text{ Z}^\circ} \right) = 191 \text{ F}^\circ = \\ &= 84,0 \text{ Z}^\circ \left( \frac{100 \text{ C}^\circ}{79,0 \text{ Z}^\circ} \right) = 106,3 \text{ C}^\circ. \end{aligned}$$

Teplota  $T$  je tedy 191 F° = 106,3 C° pod teplotou tuhnutí a platí

$$\begin{aligned} T &= 32,0 \text{ F}^\circ - 191 \text{ F}^\circ = -159 \text{ F}^\circ = \\ &= 0 \text{ C}^\circ - 106,3 \text{ C}^\circ = -106,3 \text{ C}^\circ. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

**KONTROLA 1:** Na obrázku jsou tři teplotní stupnice s vyznačenými teplotami varu a tuhnutí. (a) Uspořádejte je sestupně podle velikosti stupně. (b) Uspořádejte sestupně teploty 50 °X, 50 °Y, 50 °Z.



### RADY A NÁMĚTY

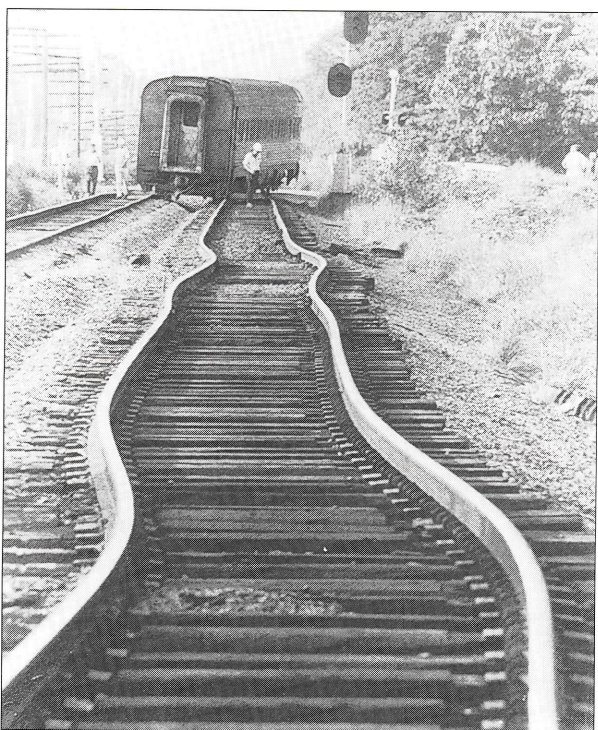
#### Bod 19.1: Teplotní rozdíly

Mezi teplotami varu a tuhnutí vody je (přibližně) 100 kelvinů neboli 100 Celsiových stupňů. Vidíme, že jakýkoliv teplotní rozdíl je v Celsiových stupních a v kelvinech vyjádřen stejným číslem (viz též rov. (19.7)). Například změna teploty o 10 K je totéž jako změna o 10 C°. Mezi varem a tuhnutím vody je 180 Fahrenheitových stupňů. Je tedy 180 F° = 100 C° a Fahrenheitův stupeň musí být 100 K/180 F°, tedy  $\frac{5}{9}$  velikosti kelvina či Celsiova stupně. Odtud nebo z rov. (19.8) vidíme, že každý rozdíl teplot vyjádřený Fahrenheitovými stupni musí být  $\frac{9}{5}$  z téhož rozdílu vyjádřeného v kelvinech nebo v Celsiových stupních. Např. změna teploty o 10 K je (9 F°/5 K)(10 K) neboli 18 F°.

Pozor, abychom nezaměnili *teplotu* (např. údaj v °C) a *teplotní změnu* (= teplotní rozdíl, údaj v C°). Teplota 10 K určitě není totéž co teplota 10 °C nebo 18 °F, ale — jak jsme viděli výše — teplotní *změna* o 10 K je totéž co změna o 10 C° nebo 18 F°.

## 19.5 TEPLOTNÍ ROZTAŽNOST

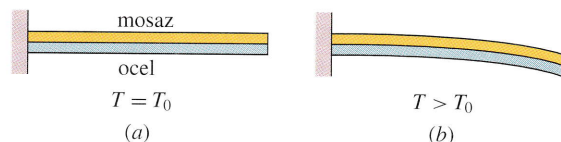
Často můžeme uvolnit kovové víčko na zavařovačce, když na víčko pustíme proud horké vody. Jak kovové víčko, tak skleněná zavařovačka se roztahují tím, že horká voda dodává energii jejich atomům. (S trochou energie navíc mohou atomy částečně překonat meziatomové síly, které je jako pružiny drží pohromadě, a tím se dostat ze své obvyklé polohy o něco dál od sebe.) Protože se však atomy kovu navzájem vzdálí více než atomy tvořící sklo, víčko se roztáhne více než sklenice a tím se uvolní.



**Obr. 19.8** Železniční koleje v Asbury Park, New Jersey, zkroucené vlivem teplotní roztažnosti za velmi horkého červencového dne.

Tato **teplotní roztažnost** není vždy žádoucí, jak je zřejmé z obr. 19.8. Aby se zabránilo vybočení kolejí, umísťují se na mostech expanzní mezery pro kompenzaci roztažnosti za horkých dnů. V leteckém průmyslu se nýty a jiné podobné součásti často zchladí před zasunutím suchým ledem, aby se po rozmrznutí roztáhly a pevně držely.

Teploměry a termostaty bývají založeny na rozdílech v teplotní roztažnosti mezi dvěma kovy, tvořícími **bimetalový proužek** (obr. 19.9). Také běžný skleněný teploměr je založen na tom, že kapaliny (např. rtuť nebo alkohol) se roztahují podstatně více než sklo, z něhož je vyrobena baňka a kapilára teploměru.



**Obr. 19.9** Bimetalový proužek (bimetal) je tvořen proužkem mosazi a oceli, svařenými k sobě. (a) Bimetal při referenční teplotě  $T_0$ . (b) Bimetal se ohýbá podle obrázku při teplotách vyšších než referenční. Při teplotách nižších se ohýbá na druhou stranu. Mnoho termostatů pracuje na tomto principu tak, že bimetal sepne, resp. rozepne elektrický kontakt (pece, žehličky), když teplota klesne, resp. vzroste.

### Délková roztažnost

Jestliže teplota  $T$  kovové tyčky vzroste o  $\Delta T$ , její délka  $d$  vzroste o hodnotu

$$\Delta d = d\alpha\Delta T, \quad (19.9)$$

kde  $\alpha$  je na materiálu závislá konstanta zvaná **teplotní součinitel délkové roztažnosti**. Její jednotkou je  $\text{K}^{-1}$ , což je totéž jako  $(\text{C}^\circ)^{-1}$ . Jednotku čteme „na kelvin“ neboli „na Celsiův stupeň“. Přepíšeme-li rov. (19.9) jako

$$\alpha = \frac{\Delta d/d}{\Delta T}, \quad (19.10)$$

vidíme, že  $\alpha$  je poměrný (relativní) přírůstek délky při jednotkové změně teploty. Ačkoliv se  $\alpha$  mírně mění s teplotou, lze ho pro většinu praktických účelů pro daný materiál brát jako konstantní. Tab. 19.2 udává hodnoty  $\alpha$  pro některé látky.

**Tabulka 19.2** Součinitelé délkové roztažnosti látek<sup>a</sup>

LÁTKA	$\frac{\alpha}{10^{-6}/\text{C}^\circ}$	LÁTKA	$\frac{\alpha}{10^{-6}/\text{C}^\circ}$
Led (při 0 °C)	51	Ocel	11
Olovo	29	Sklo (obyč.)	9
Hliník	23	Sklo (Pyrex)	3,2
Mosaz	19	Diamant	1,2
Měď	17	Invar <sup>b</sup>	0,7
Beton	12	Tavený křemen	0,5

<sup>a</sup> Kromě ledu jsou hodnoty udány pro pokojovou teplotu.

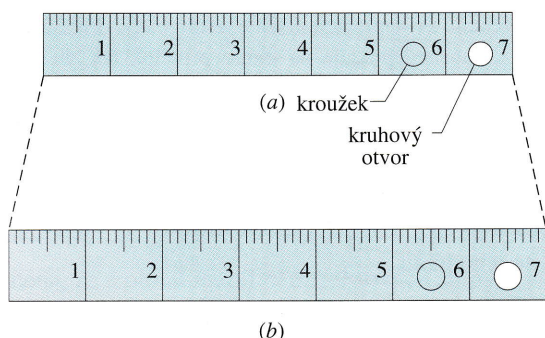
<sup>b</sup> Slitina invar byla navržena tak, aby měla co nejnižší součinitel roztažnosti. Slovo samo je zkratkou z lat. „invariabilis“ = angl. „invariable“ = neproměnný.

Teplotní roztažnost pevných látek je něco jako fotografické zvětšení ve všech třech rozměrech. Obr. 19.10b ukazuje (přehnaně\*) roztažení ocelového pravítka při vzrůstu

\* Zvětšení je zhruba tisíckrát větší, než by odpovídalo ohřátí o 100 °C.



teploty oproti stavu na obr. 19.10a. Rov. (19.9) se vztahuje na každý délkový element pravítka: na hrany, tloušťku, diagonálu, průřez vyrytého kroužku i průřez vyvrtané kruhové díry. Kdyby kroužek vyříznutý z pravítka padl těsně do otvoru při jedné teplotě, pak by stejně dobře padl i při libovolné jiné teplotě.



**Obr. 19.10** Totéž ocelové pravítko při dvou teplotách. Při roztažení se mění ve stejném měřítku všechny jeho rozměry. Stupnice, čísla, tloušťka, průměr vyrytého kruhu i průměr kruhového otvoru se mění ve stejném poměru. (Pro názornost je roztažení značně přehnáno, viz pozn. pod čarou na str. 501.)

### Objemová roztažnost

Vzrostou-li při zahřátí všechny rozměry tělesa, musí vzrůst i jeho objem. Pro tekutiny je objemová roztažnost jediný rozumný parametr k měření teplotní roztažnosti. Zvýší-li se teplota pevné látky nebo tekutiny objemu  $V$  o hodnotu  $\Delta T$ , bude přírůstek objemu

$$\Delta V = V\beta\Delta T, \quad (19.11)$$

kde  $\beta$  je **teplotní součinitel objemové roztažnosti** materiálu. Součinitele objemové a délkové roztažnosti pevných látek jsou spojeny vztahem

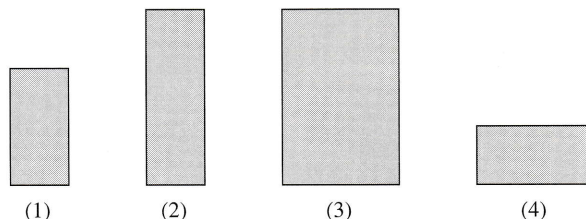
$$\beta = 3\alpha. \quad (19.12)$$

Nejběžnější kapalina — voda — se však chová jinak než ostatní kapaliny. Nad teplotou cca  $4^\circ\text{C}$  se voda zahřátím roztahuje, jak bychom očekávali. Ale mezi  $0^\circ\text{C}$  a  $4^\circ\text{C}$  se voda s rostoucí teplotou *smršťuje*. Hustota vody prochází tedy kolem  $4^\circ\text{C}$  maximem; při všech ostatních teplotách je její hustota nižší.

Toto chování vody je také důvodem, proč jezírka zamrzají shora dolů a nikoli zezdola nahoru. Když voda na hladině chladne řekněme z  $10^\circ\text{C}$  k bodu mrazu, stává se hustší („těžší“) než voda níže a klesá proto ke dnu. Ale pod  $4^\circ\text{C}$  se dalším ochlazováním voda na povrchu stává *řidší*

(*lehčí*) než spodní vrstvy a zůstává tedy na povrchu až do zamrznutí. Kdyby voda jezírka zamrzala ode dna nahoru, pak by i v běžné zimě zamrzla úplně a nemohl by v ní přetrvávat život tak, jak ho známe. Dokonce by mohl u dna zůstávat led i přes léto.

**KONTROLA 2:** Obrázek ukazuje čtyři pravoúhlé kovové desky o hranách  $d$ ,  $2d$  a  $3d$ . Všechny jsou z téhož materiálu a jejich teploty se mají zvýšit o tutéž hodnotu. Uspořádejte sestupně desky podle očekávaného přírůstku (a) výšky, (b) plochy.



### PŘÍKLAD 19.3

Ocelový drát o teplotě  $830^\circ\text{C}$  má délku  $a = 130\text{ cm}$  a průměr  $d = 1,1\text{ mm}$ . Je upnut mezi dva pevné svěráky. Jaké mechanické napětí v drátu vznikne při ochlazení na  $20^\circ\text{C}$ ?

**ŘEŠENÍ:** Nejprve spočítáme, o kolik by se drát zkrátil, kdybychom ho ochladili neupnutý. Z rov. (19.9) a tab. 19.2 nalezneme, že zkrácení bude

$$\Delta a = \alpha a \Delta T = (1,3\text{ m})(11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C})(830^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) = 1,16 \cdot 10^{-2}\text{ m} = 1,16\text{ cm}.$$

Ale drát je upnut a zkrátit se nemůže. Spočítáme proto, jaká síla by byla zapotřebí, aby drát o tuto délku protáhl. Z rov. (13.34) plyne

$$F = \frac{\Delta a ES}{a} = \frac{\Delta a E (\pi/4) d^2}{a},$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti pro ocel (viz tab. 13.1) a  $S$  je velikost plochy průřezu drátu. Dosazením dostaneme

$$F = (1,16 \cdot 10^{-2}\text{ m})(200 \cdot 10^9\text{ N/m}^2)(\pi/4) \cdot \frac{(1,1 \cdot 10^{-3}\text{ m})^2}{(1,3\text{ m})} = 1700\text{ N}. \quad (\text{Odpověď})$$

Můžete dokázat, že výsledek nezávisí na délce drátu?

Někdy se vyboulené stěny starých budov zpevňují stažením ocelovou tyčí, vedoucí skrz budovu z vnější strany jedné zdi na vnější stranu protilehlé zdi; na obou stranách procházejí deskami, za kterými jsou matky. Opraváři tyč zahřejí a utáhnou matky na obou stranách. Když tyč chladne,

smršťuje se; protože je upnutá, vzniká v ní mechanické napětí, které pomáhá držet stěny proti dalšímu vyboulení.

#### PŘÍKLAD 19.4

Za horkého letního dne vyjíždí z Las Vegas tanker vozoucí 9 785 galonů nafty. Během cesty se ochladí a do přístavu v Paysonu vyjíždí za teploty o 41 F° nižší než v Las Vegas. Tam vyloží celý náklad; kolik galonů to vlastně je? Součinitel objemové roztažnosti nafty je  $9,5 \cdot 10^{-4} / \text{C}^\circ$ , součinitel délkové roztažnosti oceli, z níž jsou zhotoveny nádrže, je  $11 \cdot 10^{-6} / \text{C}^\circ$ .

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (19.11) plyne

$$\begin{aligned} \Delta V &= V\beta\Delta T = \\ &= (9\,785 \text{ gal})(9,5 \cdot 10^{-4} / \text{C}^\circ)(-41 \text{ F}^\circ) \left( \frac{5 \text{ C}^\circ}{9 \text{ F}^\circ} \right) = \\ &= -212 \text{ gal.} \end{aligned}$$

Dodané množství nafty je tedy

$$\begin{aligned} V_{\text{dod}} &= V + \Delta V = 9\,785 \text{ gal} - 212 \text{ gal} = \\ &= 9\,573 \text{ gal} \approx 9\,600 \text{ gal.} \end{aligned}$$

Všimněte si, že teplotní roztažnost ocelové nádrže nemá vliv\* na výsledek.

Otázka: Kdo zaplatí „chybějící“ množství?

## 19.6 TEPLOTA A TEPLŮ

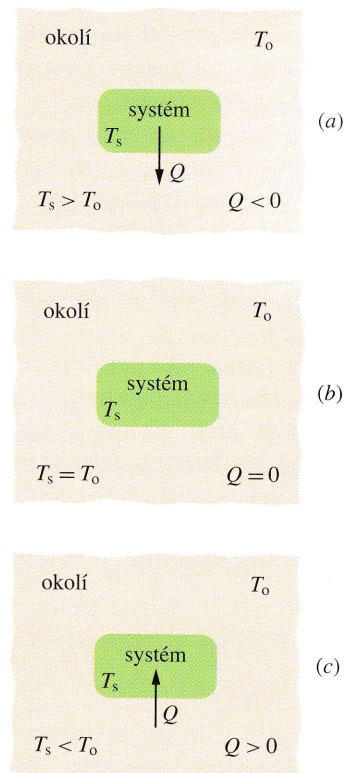
Vezmete-li si láhev piva z chladničky a necháte-li ji na stole, její teplota poroste — nejdřív rychle, potom volněji — až se vyrovná s teplotou místnosti (láhev i místnost budou v tepelné rovnováze). Podobně bude chladnout horký šálek kávy, zapomenutý na stole, až se jeho teplota vyrovná s teplotou místnosti.

Zobecníme tuto situaci: pivo nebo kávu označíme jako **systém** (s teplotou  $T_s$ ) a příslušnou část kuchyně jako **okolí** (s teplotou  $T_o$ ) tohoto systému. Zjistili jsme, že pokud  $T_s$  není rovno  $T_o$ , pak se  $T_s$  mění (i  $T_o$  se při tom může měnit) tak dlouho, dokud se teploty nevyrovnají; pak bude dosaženo tepelné rovnováhy.

Taková změna teploty je způsobena speciálním přenosem energie mezi systémem a jeho okolím. Mění se přitom **vnitřní energie**, což je souhrn potenciální a kinetické energie spojené s *náhodným* pohybem atomů, molekul a jiných

mikroskopických částí zkoumaného předmětu. Přenos nastává zpravidla tím, že systém a jeho okolí mají různé teploty. Energie takto přenesená se nazývá **teplo** a značí se  $Q$ . Teplo bereme jako *kladné*, je-li dodáno do systému z okolí (někdy říkáme, že bylo teplo systémem pohlceno). Teplo je *záporné*, jestliže přešlo ze systému do jeho okolí (říkáme, že bylo teplo uvolněno, předáno, příp. vyzařeno). Nechceme-li určit směr přenosu energie, mluvíme o teplotě vyměněném s okolím.

Tento přenos energie je znázorněn na obr. 19.11. V situaci na obr. 19.11a, když je  $T_s > T_o$ , přechází teplo ze systému do okolí; platí tedy  $Q < 0$ . Na obr. 19.11b je  $T_s = T_o$  a teplo se nepřenáší\*. Platí  $Q = 0$  a teplo se ani neuvolňuje, ani nepohlcuje. Na obr. 19.11c je  $T_s < T_o$ . Teplo přechází z okolí do systému, takže  $Q > 0$ .



**Obr. 19.11** Je-li teplota systému vyšší než teplota okolí, jako v případě (a), předává systém teplo do okolí (tj. „ztrácí teplo“) tak dlouho, až je dosaženo tepelné rovnováhy, tj. rovnosti teplot (b). Je-li teplota systému nižší než teplota okolí (jako v případě (c)), předává okolí teplo do systému (tj. systém pohlcuje teplo z okolí) tak dlouho, až je dosaženo rovnováhy.

\* To je ovšem jen proto, že se nafta smrští více než tank. Kdyby se tank smrští více (nebo realističtěji, kdybychom tankovali v mrazu a vykládali v horku), nadbytečné množství nafty by z nádrže vyteklo ven.

\* Ve zcela zvláštních případech se může přenášet teplo i zde. Fázový přechod, např. tání ledu, probíhá za teploty obou fází, a přitom se v principu vratně přenáší teplo z okolí do tajícího ledu.

To nás vede k následující definici tepla:

Teplu je energie vyměněná mezi systémem a okolím jako důsledek teplotního rozdílu mezi nimi.

Připomeňme, že energii mezi systémem a okolím lze vyměňovat také prostřednictvím práce; to spojujeme s působením síly během přemístění v systému. Na rozdíl od teploty, tlaku a objemu *nejsou* teplo a práce vlastnostmi systému. Mají smysl jen tehdy, pokud popisují děj — výměnu energie mezi systémem a jeho okolím. Má tedy smysl např. prohlásit „Během posledních tří minut bylo přeneseno 15 J tepla z okolí do systému“ anebo „V poslední minutě jsme dodali systému 12 J práce“. Nemá však smysl prohlásit „V systému je 450 J tepla“ nebo „Systém obsahuje 385 J práce.“ Proto také odlišujeme **dějové veličiny** (jako je teplo či práce), mající smysl jen při popisu konkrétního děje probíhajícího v systému, od **stavových veličin** (jako je vnitřní energie, teplota, tlak atd.), které mají smysl při popisu konkrétního stavu systému.

Než si vědci uvědomili, že teplo je přenesená energie, měřili ho pomocí vzrůstu teploty vody. Jedna **kalorie** byla definována jako množství tepla, které zvýší teplotu 1 g vody ze 14,5 °C na 15,5 °C. V britském systému je odpovídající jednotkou **British thermal unit (Btu)**, definovaná jako množství tepla, které zvýší teplotu 1 lb vody z 63 °F na 64 °F.

Protože teplo je (stejně jako práce) přenesená energie, rozhodlo se v roce 1948, že jednotka tepla v SI bude táž jako jednotka energie, tedy **joule**. Kalorie je nyní definována jako 4,186 0 J přesně, bez dalšího odkazu na vlastnosti vody. Mezi různými jednotkami tepla platí vztah

$$1 \text{ cal} = 3,969 \cdot 10^{-3} \text{ Btu} = 4,186 \text{ J}. \quad (19.13)$$

## 19.7 ZAHŘÍVÁNÍ PEVNÝCH LÁTEK A KAPALIN

### Teplná kapacita

Teplná kapacita  $C$  nějakého předmětu (např. šálku na kávu nebo mramorové desky stolu) je konstanta úměrnosti mezi množstvím tepla dodaného předmětu a tím způsobenou změnou jeho teploty. Platí tedy

$$Q = C(T_f - T_i), \quad (19.14)$$

kde  $T_i$  a  $T_f$  jsou počáteční a koncová teplota předmětu. Jednotkou teploty je kelvin (neboli energie na stupeň Celsia). Teplná kapacita  $C$  takové mra-

morové desky může být 1 790 cal/°C, což můžeme psát také jako 1 790 cal/K nebo 7 470 J/K.

Slovo „kapacita“ v tomto kontextu poněkud zavádí, protože podsouvá analogii s kapacitou nádrže na vodu. *Tato analogie je zavádějící.* Předmět především „neobsahuje“ žádné teplo (obsahuje energii, ale pojem teplo je spojen s dějem, s jistým způsobem přenosu energie). Dále, na rozdíl od nádrže není předmět omezen v přijímání tepla. Přenos tepla může probíhat bez omezení, pokud dokážeme vytvořit příslušný rozdíl teplot. (V praxi se ovšem konkrétní předmět může během dodávání tepla roztavit, vypařit nebo jinak změnit.) Prostě: tepelná kapacita neurčuje „kolik tepla se vejde do tělesa“, ale kolik tepla zvětší jeho teplotu o jednotku.

### Měrná tepelná kapacita

Dva předměty z téhož materiálu, dejme tomu z mramoru, budou mít tepelné kapacity úměrné svým hmotnostem. Je proto výhodné zavést „teplnou kapacitu na jednotku hmotnosti“ neboli **měrnou tepelnou kapacitu**  $c$  (dříve nazývanou měrné neboli specifické teplo). Nevztahuje se už ke konkrétnímu předmětu, ale k jeho *materiálu*. Rov. (19.14) pak získá tvar

$$Q = cm(T_f - T_i). \quad (19.15)$$

Pokusem zjistíme, že zatímco tepelná kapacita výše zmíněné mramorové desky je 7 470 J/K, měrná tepelná kapacita mramoru jakožto materiálu (ať už oné desky nebo čehokoliv jiného) je 880 J/(kg·K).

Ze způsobu, jak byly původně definovány kalorie a Btu, plyne měrná tepelná kapacita vody

$$c = 1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C}) = 1 \text{ Btu}/(\text{lb} \cdot ^\circ\text{F}) = 4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}). \quad (19.16)$$

Tab. 19.3 udává měrné tepelné kapacity některých látek za pokojové teploty. Všimněme si poměrně vysoké hodnoty pro vodu. Měrné tepelné kapacity látek závisí poněkud na teplotě; hodnoty z tab. 19.3 můžete s rozumnou přesností používat okolo pokojové teploty.

**KONTROLA 3:** Jisté množství tepla  $Q$  ohřeje 1 g materiálu A o 3 °C a 1 g materiálu B o 4 °C. Který z materiálů má větší měrnou tepelnou kapacitu?

### Molární tepelná kapacita

Nejvhodnější jednotkou k vyjádření množství látky je v mnoha případech *mol* (symbol mol):

$$1 \text{ mol} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ elementárních jednotek}$$

**Tabulka 19.3** Měrné a molární tepelné kapacity látek za pokojové teploty

LÁTKA	$c$	$c$	$c_{\text{mol}}$
	$\text{cal}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	$\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
<i>Pevné prvky</i>			
Olovo	0,030 5	128	26,5
Wolfram	0,032 1	134	24,8
Stříbro	0,056 4	236	25,5
Měď	0,092 3	386	24,5
Hliník	0,215	900	24,4
<i>Jiné pevné látky</i>			
Mosaz	0,092	380	
Žula	0,19	790	
Sklo	0,20	840	
Led ( $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ )	0,530	2 220	
<i>Kapaliny</i>			
Rtuť	0,033	140	
Lích (ethanol)	0,58	2 430	
Mořská voda	0,93	3 900	
Voda	1,00	4 190	

zkoumané látky. Např. 1 mol hliníku je  $6,02\cdot 10^{23}$  atomů (za elementární jednotku kovu bereme atom), 1 mol oxidu hlinitého je  $6,02\cdot 10^{23}$  molekul  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (za elementární jednotku sloučeniny bereme její molekulu). Elementární jednotka musí být jednoznačně zadána, viz např. bod 20.1.

Je-li látkové množství vyjádřeno v molech, je tepelná kapacita vztažena na 1 mol (a ne na hmotnost 1 kg). V tom případě ji nazýváme **molární tepelná kapacita** (dříve **molární teplo**). Tab. 19.3 udává příslušné hodnoty za pokojové teploty pro některé prvky sestávající z jednotlivých atomů.

Všimněte si, že molární tepelné kapacity všech prvků uvedených v tab. 19.3 mají za pokojové teploty zhruba touž hodnotu, totiž  $25\text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ . Toto zjištění nazýváme **Dulongův-Petitův zákon**. Molární tepelná kapacita *všech* pevných látek se s rostoucí teplotou blíží této hodnotě, ale některé látky jako berylium nebo uhlík jí dosahují až za podstatně vyšších teplot. Jiné látky mohou tát nebo se vypařit, dříve než potřebné teploty dosáhnou.

Porovnáme-li dvě látky na molekulové úrovni, srovnáváme vzorky obsahující stejný počet elementárních jednotek. Skutečnost, že za dostatečně vysokých teplot mají všechny pevné látky zhruba tutéž molární tepelnou kapacitu, naznačuje, že atomy všech druhů — ať je to hliník, měď, uran nebo cokoliv jiného — přijímají teplo stejným způsobem.

## Důležité upozornění

Při stanovení a používání hodnot měrné tepelné kapacity látek je nutné vědět, za jakých okolností bylo teplo vyměňováno. U pevných látek a kapalin jde zpravidla o přenos tepla za stálého tlaku (obvykle atmosférického). Lze si však představit i přenos tepla za udržování stálého objemu; tepelná roztažnost vzorku ovšem musí být kompenzována nějakým dodatečným tlakem. Toto lze pro pevné látky a kapaliny při skutečném pokusu zajistit jen obtížně; výpočtem však lze výsledné hodnoty celkem snadno odvodit z jiných veličin a ukazuje se, že pro každou pevnou látku či kapalinu se obě veličiny shodují s rozdílem nanejvýš několika procent. Jak však uvidíme, pro *plyny* má měrná tepelná kapacita za stálého tlaku zcela jinou hodnotu než za stálého objemu.

## Skupenské teplo

Dodáme-li pevné látce nebo kapalině teplo, teplota látky obvykle roste, ale nemusí tomu tak být vždy. Namísto růstu teploty může látka změnit své **skupenství** (tj. pevné, kapalné nebo plynné) nebo obecněji svou **fázi** i při zachování téhož skupenství (síra krystalující v soustavě kosočtverečné na jednoklonnou při tomtéž — pevném — skupenství). Tak například led může tát a pohlcovat teplo, aniž se mění jeho teplota. Voda se vaří a pohlcuje teplo, aniž roste její teplota. Při obráceném ději (mrznutí vody či kondenzaci páry) naopak teplo ze systému odchází, aniž se mění teplota systému.

Množství tepla, které musí být vyměněno pro změnu skupenství celého množství látky, se nazývá **skupenské teplo**  $Q$ ; teplo vztažené na jednotku hmotnosti, resp. na jeden mol se nazývá **měrné**, resp. **molární skupenské teplo** a značí se  $L$ , resp.  $L_{\text{mol}}$ . Jestliže tedy hmotnost  $m$  látky změní své skupenství, je příslušné přenesené množství tepla rovno

$$Q = Lm. \quad (19.17)$$

Jde-li o fázovou změnu z kapaliny na plyn (kapalině je nutno dodat teplo), mluvíme o **skupenském teple vypařování**  $L_v$ , resp. o **skupenském teple varu** (tj. vypařování při teplotě varu kapaliny). Pokud naopak dochází ke kapalnění plynu (plynu je nutno teplo odebrat), jedná se o **skupenské teplo kondenzace**, které je rovno skupenskému teple vypařování. Pro vodu při  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  činí

$$\begin{aligned} L_v &= 539\text{ cal/g} = 2\,256\text{ kJ/kg}, \\ L_{v,\text{mol}} &= 40,7\text{ kJ/mol}. \end{aligned} \quad (19.18)$$

Jde-li o fázovou změnu z pevné látky na kapalinu (pevné látce je nutno dodat teplo), mluvíme o **skupenském teple**

**tání**  $L_t$ . Pro vodu činí za normálních podmínek ( $0^\circ\text{C}$ , atmosférický tlak)

$$\begin{aligned} L_t &= 79,5 \text{ cal/g} = 333 \text{ kJ/kg}, \\ L_{t,\text{mol}} &= 6,01 \text{ kJ/mol}. \end{aligned} \quad (19.19)$$

**Skupenské teplo tuhnutí** charakterizuje naopak fázovou změnu kapaliny na pevnou látku; má touž hodnotu jako skupenské teplo tání. Tab. 19.4 udává skupenská tepla některých látek. Jde-li o fázový přechod beze změny skupenství (např. různé krystalické modifikace látky), pak místo skupenského tepla mluvíme ve všech výše uvedených případech o **teplu latentním**.

#### PŘÍKLAD 19.5

Karamelová tyčinka má uvedenu nutriční hodnotu 350 kcal. Kolik kilowatthodin vám dodá, když ji sníte?

**ŘEŠENÍ:** Energie  $E$  je rovna

$$\begin{aligned} E &= (350 \cdot 10^3 \text{ cal})(4,19 \text{ J/cal}) = \\ &= (1,466 \cdot 10^6 \text{ J})(1 \text{ W}\cdot\text{s/J}) \cdot \\ &\quad \cdot (1 \text{ h}/3600 \text{ s})(1 \text{ kW}/1000 \text{ W}) = \\ &= 0,407 \text{ kW}\cdot\text{h}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato energie by stačila k tomu, aby 100 W žárovka svítila po dobu 4,1 h. Chcete-li takovou energii „vyběhat“, běžte nějakých pět až šest kilometrů.

Slušná denní dávka energie je pro člověka kolem 3,5 kW·h. Je to také maximální práce, kterou je člověk schopen v jednom dni vykonat. Toto množství energie z elektrické sítě stojí u nás při sazbě N (0,91 Kč/kW·h, nepočítáme-li měsíční paušál) necelé 4 Kč.

#### PŘÍKLAD 19.6

(a) Kolik tepla potřebujeme dodat kusu ledu o hmotnosti  $m = 720 \text{ g}$  a o teplotě  $-10^\circ\text{C}$ , abychom dostali vodu teploty  $15^\circ\text{C}$ ?

**ŘEŠENÍ:** K odpovědi vedou tři kroky. V prvním kroku zahřejeme led z  $-10^\circ\text{C}$  na teplotu tání  $0^\circ\text{C}$ . Použijeme rov. (19.15) s měrnou tepelnou kapacitou ledu podle tab. 19.3. Počáteční teplota je zde  $T_i = -10^\circ\text{C}$ , koncová  $T_f = 0^\circ\text{C}$ . Tak najdeme

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{\text{led}}m(T_f - T_i) = \\ &= (220 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K}))(0,720 \text{ kg})(0^\circ\text{C} - (-10^\circ\text{C})) = \\ &= 15984 \text{ J} \doteq 15,98 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Ve druhém kroku roztavíme všechny led o teplotě  $0^\circ\text{C}$  na vodu téže teploty. Použijeme rov. (19.17) a (19.19) a dostaneme

$$Q_2 = L_t m = (333 \text{ kJ/kg})(0,720 \text{ kg}) \doteq 239,8 \text{ kJ}.$$

Ve třetím kroku zahřejeme vodu z  $0^\circ\text{C}$  na  $15^\circ\text{C}$ . Opět použijeme rov. (19.15), ale tentokrát s měrnou tepelnou kapacitou  $c_{\text{kap}}$  kapalné vody podle tab. 19.3. V tomto kroku je počáteční teplota  $T_i = 0^\circ\text{C}$  a koncová teplota  $T_f = 15^\circ\text{C}$ . Dostaneme

$$\begin{aligned} Q_3 &= c_{\text{kap}}m(T_f - T_i) = \\ &= (4190 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K}))(0,720 \text{ kg})(15^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) = \\ &= 45252 \text{ J} \doteq 45,25 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Celkové potřebné teplo  $Q_\Sigma$  je součtem dílčích tepel, potřebných pro jednotlivé kroky:

$$\begin{aligned} Q_\Sigma &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = \\ &= 15,98 \text{ kJ} + 239,8 \text{ kJ} + 45,25 \text{ kJ} \doteq \\ &\doteq 300 \text{ kJ}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněte si, že teplo potřebné k roztání ledu je mnohem větší, než teplo potřebné ke zvýšení teploty, ať už ledu nebo vody.

(b) Jaký bude výsledný stav a teplota, dodáme-li ledu celkové teplo jen 210 kJ?

Tabulka 19.4 Měrná skupenská tepla

LÁTKA	TÁNÍ		VAR	
	$\frac{T}{\text{K}}$	$\frac{L_t}{\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$	$\frac{T}{\text{K}}$	$\frac{L_v}{\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}}$
Vodík	14,0	58,0	20,3	455
Kyslík	54,8	13,9	90,2	213
Rtuť	234	11,4	630	296
Voda	273	333	373	2256
Olovo	601	23,2	2017	858
Stříbro	1235	105	2323	2336
Měď	1356	207	2868	4730

**ŘEŠENÍ:** Z prvního kroku víme, že je potřeba 15,98 kJ pro zahřátí ledu na teplotu tání. Zbývající teplo  $Q_{zb}$  je tedy 210 kJ – 15,98 kJ neboli něco kolem 194 kJ. Z druhého kroku vidíme, že toto teplo nestačí k roztání všeho ledu. Z rov. (19.17) a (19.19) však můžeme najít hmotnost  $m$  ledu, který roztaje:

$$m = \frac{Q_{zb}}{L_t} = \frac{(194 \text{ kJ})}{(333 \text{ kJ/kg})} = 0,583 \text{ kg} \doteq 580 \text{ g}.$$

Hmotnost neroztalého ledu je tedy 720 g – 580 g = 140 g. Protože neroztál veškerý led, musí být teplota směsi led + voda rovna 0 °C. Výsledný stav tedy je

580 g vody a 140 g ledu při 0 °C. (Odpověď)

### PŘÍKLAD 19.7

Měděný váleček o hmotnosti  $m_m = 75 \text{ g}$  byl v laboratorní pisce zahřát na teplotu  $T = 312 \text{ °C}$ . Poté byl vhozen do kádinky obsahující  $m_v = 220 \text{ g}$  vody. Tepelná kapacita kádinky je  $C_k = 45 \text{ cal/K}$ . Počáteční teplota kádinky s vodou byla  $T_i = 12 \text{ °C}$ . Jaká bude koncová teplota  $T_f$  válečku, vody a kádinky po dosažení tepelné rovnováhy?

**ŘEŠENÍ:** Náš systém budou tvořit *voda, kádinka a měděný váleček*. Systém nevymění s okolím žádné teplo, takže algebraický součet celkového přesunu tepla uvnitř systému musí být roven nule. Jde o tři přesuny:

$$\begin{aligned} \text{pro vodu: } Q_v &= m_v c_v (T_f - T_i); \\ \text{pro kádinku: } Q_k &= C_k (T_f - T_i); \\ \text{pro měď: } Q_m &= m_m c_m (T_f - T). \end{aligned}$$

Teplotní rozdíl je ve všech výrazech zapsán jako rozdíl koncové teploty ( $T_f$ ) a počáteční teploty ( $T_i$  pro vodu a kádinku,  $T$  pro váleček). Značíme to takto, i když víme, že  $Q_v$  a  $Q_k$  budou kladná (protože teplo přejde do původně chladné vody a kádinky), zatímco  $Q_m$  bude záporné (protože teplo odejde z původně horkého měděného válečku). Takto můžeme totiž napsat

$$Q_v + Q_k + Q_m = 0. \quad (19.20)$$

Po dosazení za výrazy pro přenos tepla z rov. (19.20) dostaneme

$$m_v c_v (T_f - T_i) + C_k (T_f - T_i) + m_m c_m (T_f - T) = 0. \quad (19.21)$$

V rov. (19.21) se vyskytují teploty pouze v rozdílech. Protože rozdíly teplot ve stupních Celsia a v kelvinech jsou stejné, můžeme užít v rovnicích kterékoliv z jednotek. Rov. (19.21) můžeme vyřešit pro  $T_f$  a dostaneme

$$T_f = \frac{m_m c_m T + C_k T_i + m_v c_v T_i}{m_m c_m + C_k + m_v c_v}.$$

Čitatel je při použití Celsiovy stupnice roven

$$\begin{aligned} (75 \text{ g})(0,092 \text{ cal}/(\text{g}\cdot\text{K}))(312 \text{ °C}) + (45 \text{ cal/K})(12 \text{ °C}) + \\ + (220 \text{ g})(1,00 \text{ cal}/(\text{g}\cdot\text{K}))(12 \text{ °C}) = \\ = 5\,332,8 \text{ cal} \end{aligned}$$

a jmenovatel je

$$\begin{aligned} (220 \text{ g})(1,00 \text{ cal}/(\text{g}\cdot\text{K})) + 45 \text{ cal/K} + \\ + (75 \text{ g})(0,092 \text{ cal}/(\text{g}\cdot\text{K})) = \\ = 271,9 \text{ cal}/\text{C}^\circ. \end{aligned}$$

Odtud získáme

$$T_f = \frac{(5\,332,8 \text{ cal})}{(271,9 \text{ cal}/\text{C}^\circ)} = 19,6 \text{ °C} \doteq 20 \text{ °C}. \quad (\text{Odpověď})$$

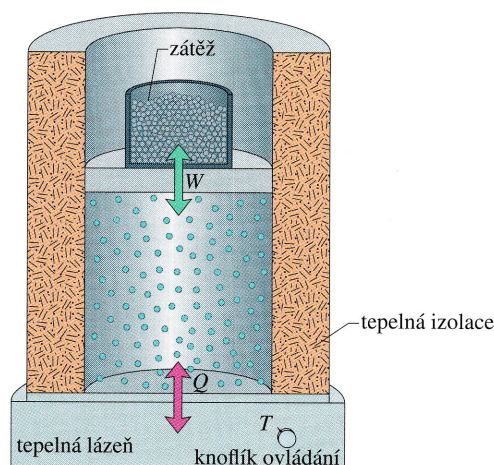
Z uvedených hodnot můžeme najít

$$Q_v \doteq 1\,670 \text{ cal}, \quad Q_k \doteq 342 \text{ cal}, \quad Q_m \doteq -2\,020 \text{ cal}.$$

Algebraický součet těchto tří přenesených tepel je až na zaokrouhlovací chyby opravdu roven nule, v souladu s požadavkem rov. (19.20).

## 19.8 PODROBNĚJŠÍ POHLED NA TEPLA A PRÁCI

Nyní se podíváme podrobněji, jak se přenáší teplo a práce mezi systémem a jeho okolím. Uvažujme jako systém plyn ve válci s pohyblivým pístem podle obr. 19.12. Síla působící na píst zdola nahoru, způsobená tlakem plynu, je v rovno-



**Obr. 19.12** Plyn je uzavřen ve válci s pohyblivým pístem. Teplo  $Q$  může být vyměněno s okolím (tj. dodáno nebo odebráno) ovládáním teploty  $T$  tepelné lázně knoflíkem ovládání. Práci  $W$  lze konat nebo dodávat zvedáním nebo snižováním pístu.

váze s tíhovou silou, způsobenou váhou pístu a zátěže — misky s olověnými broky. Stěny z válce jsou z izolačního materiálu a zabrání jakékoli výměně tepla s okolím. Dno válce spočívá na rezervoáru tepelné energie, **tepelné lázni** (třebas na horké plotně), jehož teplotu  $T$  můžeme řídit knoflíkem.

Systém, tj. plyn, vychází z *počátečního stavu*  $\mathcal{S}_i$ , popsaného tlakem  $p_i$ , objemem  $V_i$  a teplotou  $T_i$ . Systém chceme převést do *koncového stavu*  $\mathcal{S}_f$ , popsaného tlakem  $p_f$ , objemem  $V_f$  a teplotou  $T_f$ . Děj popisující tento přechod nazýváme **termodynamický děj**, příp. **termodynamický proces**. Během tohoto děje dochází k výměně tepla: teplo může přecházet z lázně do systému (kladné teplo), anebo naopak ze systému do lázně (záporné teplo). Systém také může konat práci: může zvedat píst (kladná práce) anebo píst klesá (záporná práce). Budeme předpokládat, že všechny změny probíhají natolik zvolna, že systém je v každém okamžiku prakticky v tepelné rovnováze (tj., že každá část systému je v tepelné rovnováze s ostatními částmi).

Überme nyní nepatrně zátěže z pístu na obr. 19.12. Tím umožníme plynu nadzdvihnout silou  $\mathbf{F}$  píst se zbývající zátěží o infinitezimální posunutí  $d\mathbf{s}$  proti shora působící síle. Vzhledem k tomu, že posunutí je malé, můžeme předpokládat, že během něho zůstává síla  $\mathbf{F}$  stejná. Její velikost je  $F = pS$ , kde  $p$  je tlak plynu a  $S$  plocha pístu. Diferenciál práce  $dW$  vykonané plynem během posunutí je

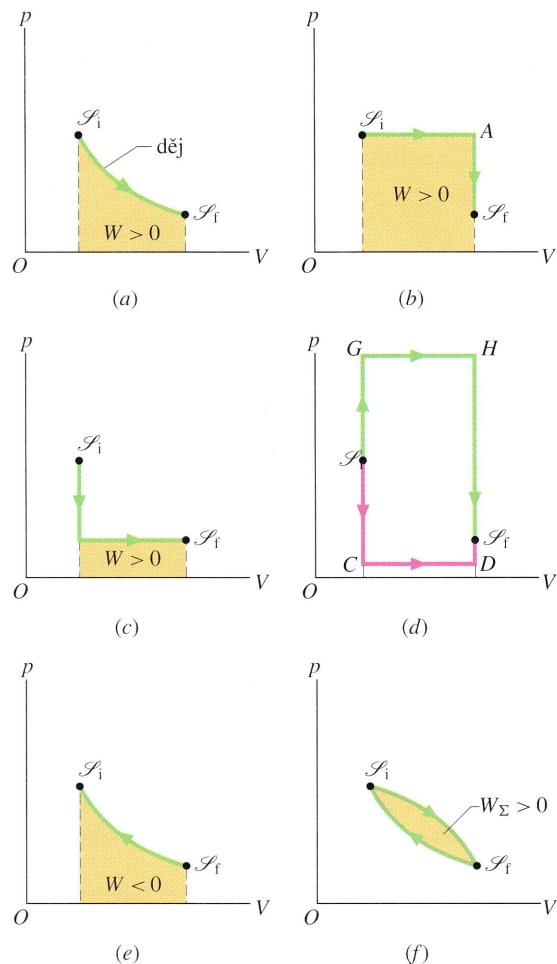
$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (pS)(ds) = p(S ds) = \\ &= p dV, \end{aligned} \quad (19.22)$$

kde  $dV$  je infinitezimální změna objemu plynu daná posuvem pístu. Übereme-li zátěže natolik, aby se plyn roztáhl z objemu  $V_i$  na  $V_f$ , bude celková práce vykonaná plynem rovna

$$W = \int_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{S}_f} dW = \int_{V_i}^{V_f} p dV. \quad (19.23)$$

Během změny objemu plynu se může měnit také tlak a teplota. Chceme-li tedy vypočítat integrál v rov. (19.23), musíme vědět, jak se mění tlak plynu v závislosti na jeho objemu pro konkrétní děj, vedoucí od počátečního stavu  $\mathcal{S}_i$  do stavu koncového  $\mathcal{S}_f$ .

Je mnoho možných způsobů, jak přejít od počátečního do koncového stavu. Několik z nich je zobrazeno na obr. 19.13 formou tzv.  $p$ - $V$  **diagramu**, kde je vynesena závislost tlaku  $p$  plynu na jeho objemu  $V$ . Jeden způsob je na obr. 19.13a. Křivka ukazuje, že během zvětšování objemu plynu jeho tlak klesá. Integrál z obr. 19.13a, který určuje práci  $W$  vykonanou plynem, je dán vybarvenou plochou pod křivkou mezi body  $\mathcal{S}_i$  a  $\mathcal{S}_f$ . Bez ohledu na to, jak



**Obr. 19.13** (a) Systém na obr. 19.12 přechází z *počátečního stavu*  $\mathcal{S}_i$  do *koncového stavu*  $\mathcal{S}_f$  prostřednictvím *termodynamického děje*. Plocha označená  $W$  představuje práci vykonanou systémem během tohoto děje. Je kladná, protože během děje se zvětšuje objem. (b) Jiný děj pro přechod mezi těmito stavy; práce je nyní větší než v (a). (c) Další děj, konající menší (kladnou) práci. (d) Práce může být libovolně malá (cesta  $\mathcal{S}_i$ - $C$ - $D$ - $\mathcal{S}_f$ ) nebo velká ( $\mathcal{S}_i$ - $G$ - $H$ - $\mathcal{S}_f$ ). (e) Zmenšíme-li objem (nějakou vnější silou), bude práce vykonaná systémem záporná. (f) Úhrnná práce vykonaná systémem během (uzavřeného) cyklického děje je vyjádřena uzavřenou plochou. Je to rozdíl mezi plochami pod oběma křivkami tvořícími cyklus.

jsme zajistili přechod plynu právě podél uvedené křivky, můžeme si být jisti, že vykonaná práce bude kladná, protože plyn bude zvětšovat svůj objem tím, že bude tlačit píst vzhůru.

Jiný způsob, jak se dostat ze stavu  $\mathcal{S}_i$  do  $\mathcal{S}_f$ , je na obr. 19.13b; tady provedeme změnu ve dvou krocích — nejprve ze stavu  $\mathcal{S}_i$  do  $A$ , poté ze stavu  $A$  do  $\mathcal{S}_f$ .

Krok  $\mathcal{S}_i$ - $A$  provedeme za konstantního tlaku; to znamená, že ponecháme všechny broky, které zatěžují píst na