I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

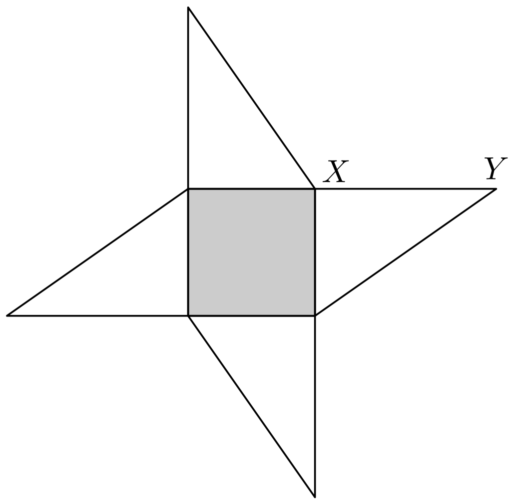
V naší ulici bydlí Čapkovi a Němcovi. Čapkovi mají dva syny, Karlíka a o dva roky staršího Pepíka. Němcovi mají dceru Bóžu. Narozeniny všech tří dětí slavívají obě rodiny společně, a to v den Karlíkových narozenin. Při letošní oslavě byla Bóža třikrát starší než Karlík. Za tři roky bude Karlíkovi a Pepíkovi dohromady stejně jako bude Bóže.

Kolik let bylo dětem při letošní oslavě? (*M. Petrová*)

Z5–I–2

Na obrázku je šedý čtverec se stranou délky 10 cm. Čtverec doplňují čtyři stejné pravoúhlé trojúhelníky do tvaru hvězdy. Součet obsahů těchto čtyř trojúhelníků je čtyřnásobkem obsahu čtverce.

Určete délku strany XY. (*E. Semerádová*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Z5–I–3

V následujícím příkladu je pětkrát použito znaménko + a výsledek je násobkem tří:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39.$$

Změňte dvě ze znamének + na znaménko − tak, aby výsledek nového příkladu byl opět násobkem tří. Najděte všechny možnosti. (*E. Semerádová*)

Z5–I–4

Pinocchio tvrdí, že číslo dne v datu jeho narození lze beze zbytku dělit třemi, čtyřmi, pěti a šesti. Tři z těchto čtyř informací jsou pravdivé, jedna je nepravdivá.

Kolikátý den v měsíci může mít Pinocchio narozeniny? Určete všechny možnosti. (*E. Novotná*)

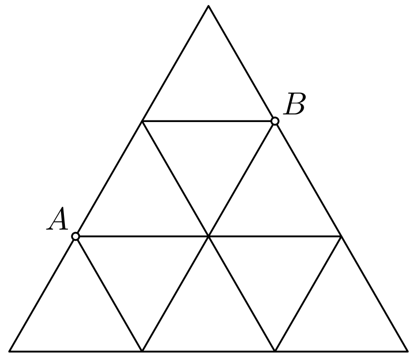
Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z5–I–5

V síti stezek vyznačených na obrázku má každá stezka mezi sousedními křižovatkami délku 1 km.

Kolik cest dlouhých nanejvýš 3 km vede po stezkách z místa A do místa B?

(*E. Semerádová*)



Z5–I–6

Andělka navléká na nit bez mezer za sebe korálky tří různých tvarů A, B, C. Postupuje tak, že tvary střídá ve stále stejném pořadí a postupně zvyšuje počty tvarů ve skupinách:

$$ABCAABBCCAAABBBCCCAAAABBBBCCCC\ldots$$

Korálek tvaru A zabírá 5 mm nitě, korálek tvaru B zabírá 4 mm, korálek tvaru C zabírá 3 mm.

Kolik korálků potřebuje Andělka k výrobě náhrdelníku dlouhého alespoň 50 cm?

(*L. Dedková*)

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

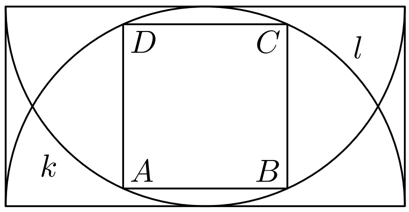
Pan Vaflička smaží a prodává koblížky, pan Koblížek peče a prodává vafličky. Oba cukráři mají každý týden otevřeno od pondělí do pátku. Libuška u nich kupuje každé pondělí dvě vafličky a jeden koblížek, každé úterý tři koblížky a jednu vafličku, každou středu čtyři koblížky, každý čtvrtek tři vafličky a každý pátek dva koblížky a dvě vafličky. Pan Koblížek si jednoho dne všiml, že od prvního pondělí tohoto měsíce prodal Libušce celkem 30 vafliček.

Kolik koblížků prodal Libušce za stejné období pan Vaflička? (*M. Petrová*)

Z6–I–2

V obdélníku se stranami délek 4 cm a 8 cm jsou dány půlkružnice k a l, jejichž krajní body leží ve vrcholech obdélníku.

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby vrcholy A a B ležely na půlkružnici k, vrcholy C a D ležely na půlkružnici l a strany čtverce byly rovnoběžné se stranami obdélníku. (*K. Pazourek*)



Z6–I–3

Pětimístným palindromem myslíme takové pětimístné číslo, které má na místě jednotek stejnou číslici jako na místě desetitisíců a na místě desítek stejnou číslici jako na místě tisíců.

Najděte nejmenší pětimístný palindrom dělitelný 36. (*I. Jančigová*)

Z6–I–4

Šárka s Lubošem společně zasadili 70 tulipánů různých barev. Šárka nesázela žluté tulipány a pět devítin těch, které zasadila, byly červené. Luboš nesázel červené tulipány a dvě sedmnáctiny těch, které zasadil, byly žluté.

Kolik zasazených tulipánů mělo jinou barvu než červenou či žlutou? (*L. Hozová*)

Z6–I–5

Tři kamarádky se po letech sešly a sdělovaly si, kde která z nich bydlí:

První: „Já bydlím v Hradci Králové.“

Druhá: „Já nebydlím v Opavě.“

Třetí druhé: „Ty nebydlíš ani v Jihlavě.“

Kamarádky opravdu bydlí ve zmiňovaných městech, každá v jiném. Jedna z kamarádek neřekla ostatním pravdu a nebyla to ta z Opavy.

Rozhodněte, kde která z kamarádek bydlí. (*M. Petrová*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z6–I–6

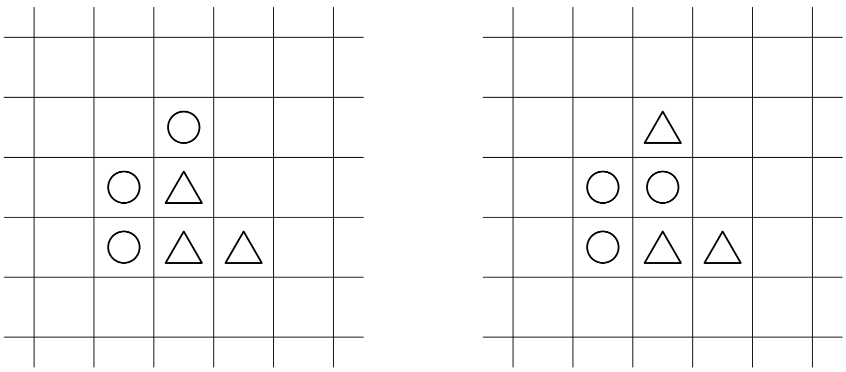
Ve čtvercové síti bydlí tři kruhy a tři trojúhelníky, každý v jiném poli. Každý tvar má alespoň jednoho souseda, přičemž sousedé obývají pole se společnou stranou. Obydlená pole tvoří souvislou oblast, tedy od každého ke každému se lze dostat přes sousedy. Každou noc se každý tvar může změnit podle toho, jak přes den vypadali jeho sousedé:

- pokud je tvar kruhem a mezi jeho sousedy bylo víc trojúhelníků než kruhů, tak se tvar změní na trojúhelník,
- pokud je tvar trojúhelníkem a mezi jeho sousedy bylo víc kruhů než trojúhelníků, tak se tvar změní na kruh,
- v ostatních případech se tvar nezmění.

Příklad obydlené čtvercové sítě a proměny po jedné noci je na obrázku níže.

a) Rozmístěte tvary tak, aby se v noci neměnily.
b) Rozmístěte tvary tak, aby se každý tvar každou noc změnil.
c) Rozmístěte tvary tak, aby po několika nocích byly všechny tvary stejné.

(I. Jančigová)



I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

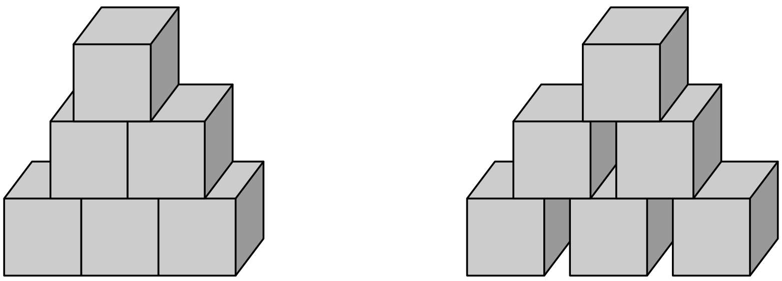
Andulka a Zuzana pojídaly švestky. První den snědla Andulka tři čtvrtiny toho, co týž den snědla Zuzana. Druhý den snědla Zuzana tři poloviny toho, co týž den snědla Andulka. Dohromady za oba dny snědly 31 švestek a každé děvče každý den snědlo celý počet švestek.

Kolik švestek snědla za oba dny Andulka? (*L. Hozová*)

Z7–I–2

Mikuláš postavil pyramidu ze šesti stejných krychlí s hranami délky 7 cm. Spodní patro tvořily tři krychle, prostřední patro dvě krychle a horní patro jedna krychle. Sousední krychle v každém patře měly společnou stěnu, patra navzájem nepřečnívala. Vítězslav posunul krychle tak, že každá krychle v horních dvou patrech stála na dvou spodnějších krychlích a mezi sousedními krychlemi ve spodních dvou patrech byly mezery široké třetinu hrany krychle. Až na tyto mezery patra navzájem nepřečnívala.

O kolik cm^2 se liší povrchy původní a upravené pyramidy? (*V. Dedek*)



Z7–I–3

Pankrác, Servác a Bonifác se ubytovali v hotelu. Čísla pokojů byla trojmístná a číslice na místě stovek určovala patro, na kterém se pokoj nacházel. U snídaně si podle přívěsků na klíčích od pokojů všimli, že:

- v číslech jejich pokojů jsou použity všechny číslice od 1 do 9,
- Pankrácovo číslo je dělitelné devíti, Servácovo číslo je dělitelné osmi, Bonifácovo číslo je dělitelné sedmi,
- Bonifácovo číslo je čtyřikrát větší než Pankrácovo číslo,
- Servác bydlí na patře mezi Pankrácem a Bonifácem.

Určete čísla pokojů Pankráce, Serváce a Bonifáce. (*L. Hozová, E. Novotná*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z7–I–4

V jedné z pěti nádob očíslovaných 1, 2, 3, 4, 5 je mince. Doprovodné nápisy oznamují:

„Mince je v nádobě s lichým číslem.“
„Mince je v nádobě s číslem větším než 3.“
„Mince je v nádobě s číslem menším než 4.“

Pravdomluvný hlídač s bezchybným úsudkem dodává:

„Jeden z nápisů není pravdivý, zbylé dva pravdivé jsou. Přestože vím, který nápis pravdivý není, neumím určit, ve které nádobě je mince.“

Rozhodněte, který z nápisů není pravdivý. (*K. Pazourek*)

Z7–I–5

Je dán trojúhelník ABC s délkami stran $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$.

Sestrojte půlkružnici, jejíž krajní body leží na straně AC a která se dotýká stran AB a BC. (*K. Pazourek*)

Z7–I–6

Káťa a Škubánek smaží každý na své pánvičce jednu palačinku za druhou. Oba začali smažit současně, Kátě trvá každá palačinka tři minuty, Škubánkovi trvá každá palačinka čtyři minuty. Každých pět minut od začátku smažení se objeví mlsný kocour Luciáš. Pokud se Káťa i Škubánek věnují smažení, tak jim jednu hotovou palačinku ukradne, pokud zrovna přendávají palačinku z pánvičky na talíř, tak se schová a palačinky nechá být.

Kolik palačinek musí Káťa se Škubánkem usmažit, aby jim zbylo 150? Jak dlouho jim to bude trvat? (*M. Petrová*)

74. ročník Matematické olympiády (2024/25)

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Ivan, Jarek, Kája a Luboš mají dohromady 90 známek. Kdyby měl Ivan o dvě známky méně, Jarek o dvě více, Kája dvojnásobek a Luboš polovinu toho, co nyní, měli by všichni stejně.

Kolik známek má každý z chlapců? (*L. Hozová*)

Z8–I–2

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník se základnou délky 12 cm a výškou k základně velikosti 18 cm. Rozdělte trojúhelník na tři lichoběžníky o stejném obsahu. (*L. Dedková*)

Z8–I–3

Pro čísla a, b, c, d platí:

- číslo a dává po dělení třemi zbytek 1,
- číslo b dává po dělení šesti zbytek 2,
- $a - b = d - c$,
- číslo d je dělitelné třemi.

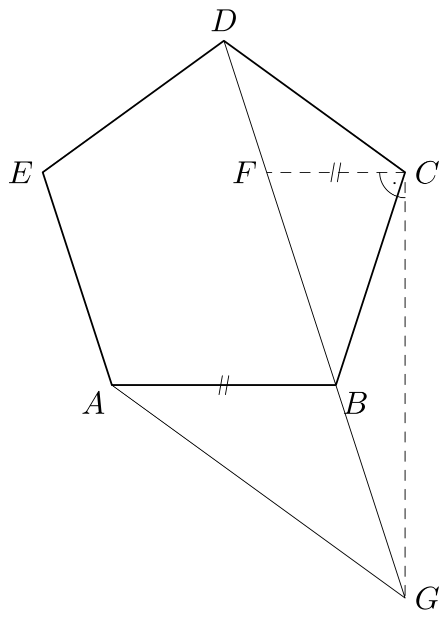
Jaký zbytek po dělení devíti může dávat číslo c? Najděte všechny možnosti.

(*E. Semerádová*)

Z8–I–4

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Rovnoběžka s přímkou AB procházející bodem C protíná přímku BD v bodě F. Kolmice k přímce CF procházející bodem C protíná přímku BD v bodě G.

Určete velikost úhlu AGF. (*P. Bak*)



Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z8–I–5

Podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele čísel a a b je 75. Součet čísel a a b je větší než 100 a menší než 200.

Určete všechny možné dvojice čísel a a b s uvedenými vlastnostmi. (*E. Semerádová*)

Z8–I–6

Rybář Štika chytil několik ryb. Když prodal tři nejtlustší ryby majiteli místní restaurace, snížil celkovou hmotnost svého úlovku o 35 %. Když dal tři nejhubenější ryby svému psovi, snížil hmotnost zbývajících ulovených ryb o pět třináctin.

Kolik ryb chytil pan Štika? (*L. Hozová*)

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y takových, že $x + y$ je prvočíslo a $3x + 5y$ je 16. (*P. Bak*)

Z9–I–2

Pravidelný čtyřboký hranol má objem $864\,\mathrm{cm}^3$ a obsah jeho pláště je dvojnásobkem obsahu podstavy.

Určete velikost tělesové úhlopříčky hranolu. (*V. Dedek*)

Z9–I–3

Množinu $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ sestávající z prvních n přirozených čísel máme za úkol rozdělit do pěti neprázdných podmnožin tak, aby čísla v každé podmnožině byla po dvou nesoudělná.

Najděte největší možné n, pro které to je možné. (*T. Bárta*)

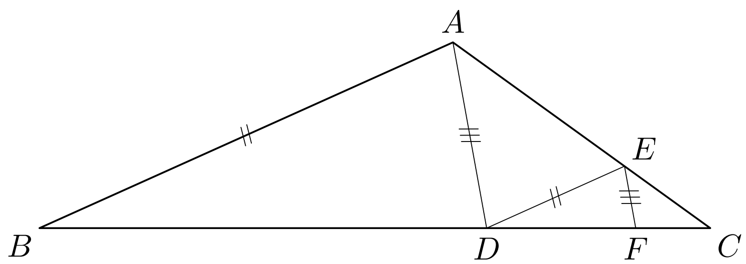
Z9–I–4

Rozhodněte, zda je možné k číslu s ciferným součtem 2024 přičíst jednomístné číslo tak, aby výsledné číslo mělo ciferný součet 74. (*T. Bárta*)

Z9–I–5

V trojúhelníku ABC je strana AB dvakrát delší než strana AC. Osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě D. Rovnoběžka se stranou AB procházející bodem D protíná stranu AC v bodě E. Rovnoběžka s úsečkou AD procházející bodem E protíná stranu BC v bodě F.

Určete poměr úseček AD a EF. (*M. Dományová*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Z9–I–6

Plavci Pstruh a Pulec chtěli změřit své síly. Z protilehlých stran bazénu skočili současně do sousedních drah a plavali proti sobě, každý svojí konstantní rychlostí. Poprvé se plavci minuli ve vzdálenosti osm metrů od Pstruhovy startovní strany, na konci dráhy se hbitě otočili a plavali nazpět. Podruhé se plavci minuli ve vzdálenosti pět metrů od Pulcovy startovní strany, doplavali na konec dráhy, a tím závod skončil.

Určete, kdo vyhrál a jaká byla délka bazénu. (*L. Hozová*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz