Přednáška

Korelace

Jednoduchá regresní analýza

Vícenásobná regresní analýza

Pearsonův korelační koeficient

- u intervalových a poměrových dat můžeme jako míru asociace – vztahu mezi proměnnými použít **Pearsonův korelační koeficient**
- **korelace**
  - ko = s, spolu, vzájemně
  - relace = vztah
  - korelace = vzájemný vztah proměnných

Pearsonův korelační koeficient

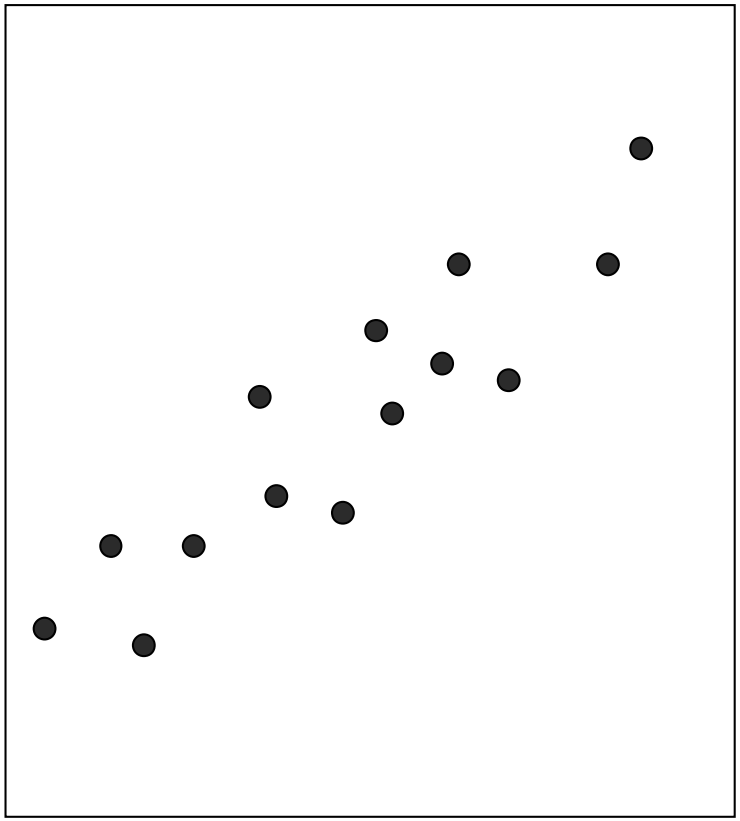
- absolutní hodnota koeficientu vyjadřuje **sílu (těsnost) vztahu**
- znaménko (+ nebo -) **směr vztahu**
- **rozsah -1 až +1**
- označuje se **r**

Pearsonův korelační koeficient

- je mírou **pouze pro lineární vztahy**
- před výpočtem je vhodné zobrazit vztah mezi proměnnými graficky – tzv. **scatter** (dvourozměrný bodový diagram)

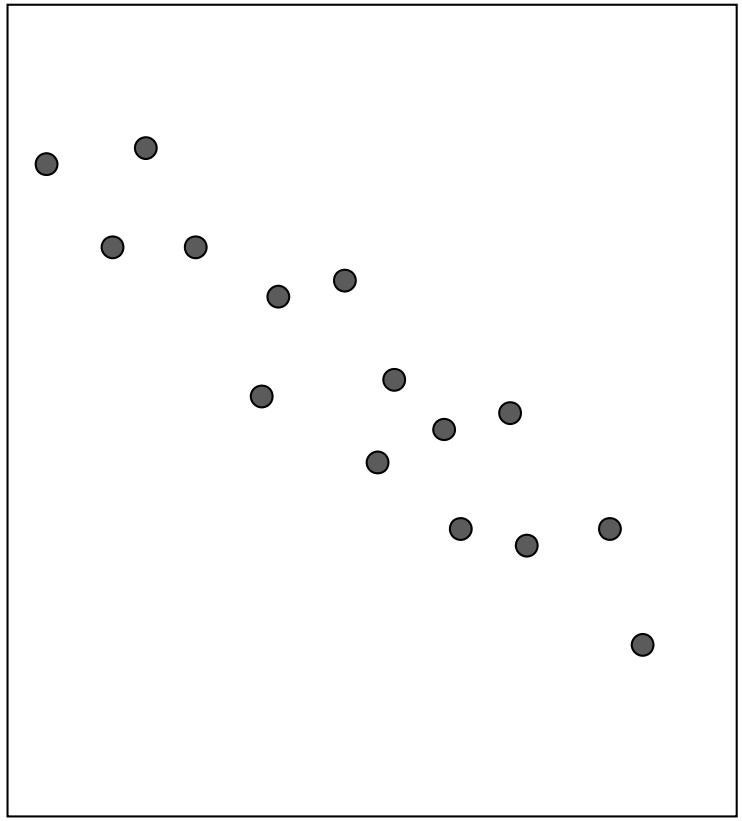
Scatter

- **pozitivní vztah** (přímá úměra) – čím vyšší hodnoty proměnné X, tím vyšší hodnoty proměnné Y
- r > 0



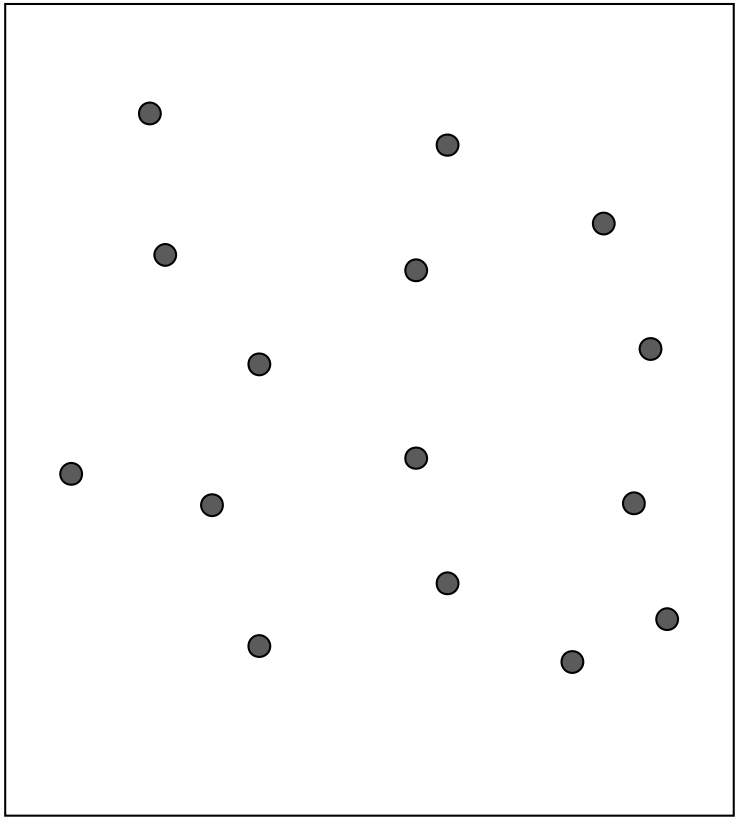
Scatter

- **negativní vztah** (nepřímá úměra) – čím vyšší hodnoty proměnné X, tím nižší hodnoty proměnné Y
- $r < 0$



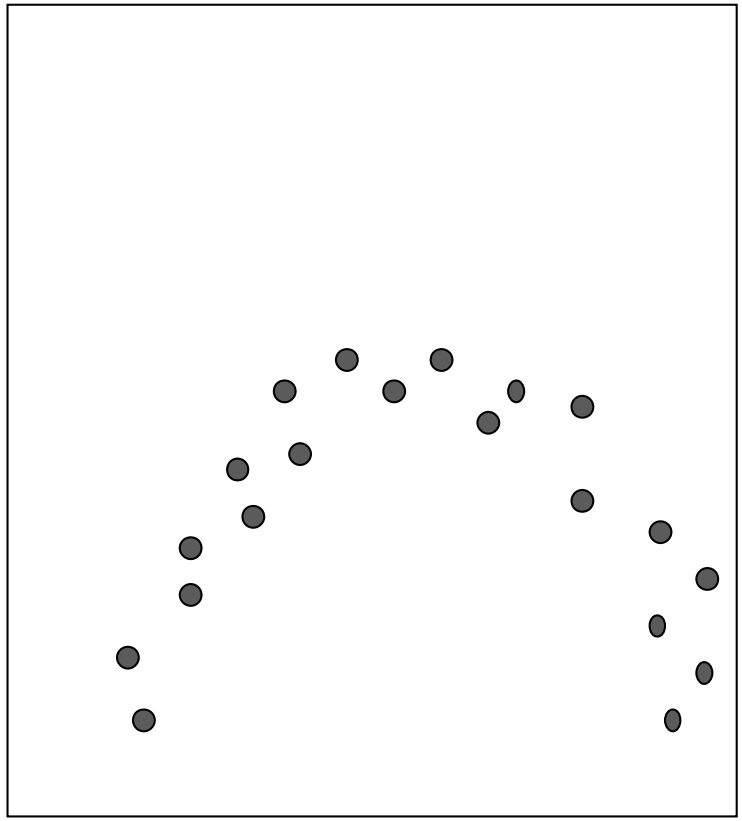
Scatter

- **žádný vztah** - hodnoty proměnné X nesouvisí s hodnotami proměnné Y
- r = 0



Scatter

- **nelineární vztah**
- r = 0



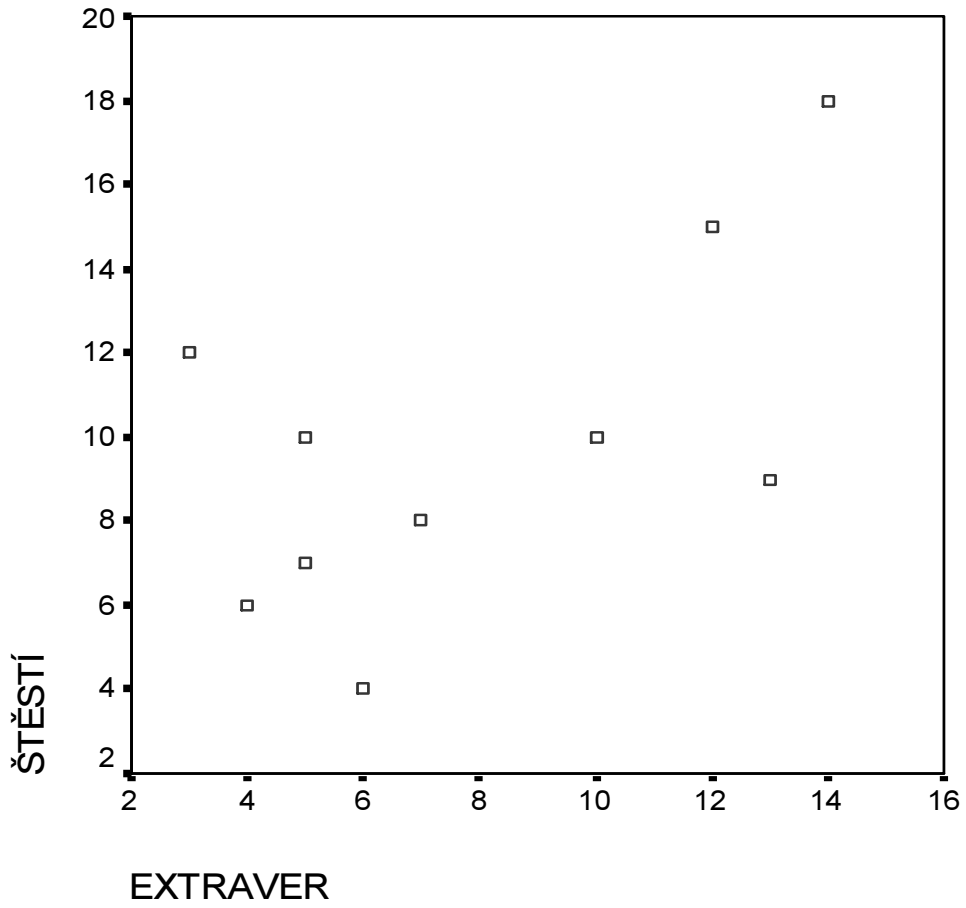
Pearsonův korelační koeficient

- sám o sobě je deskriptivní statistikou, ale podobně jako u ostatních měr asociace je možno spočíst **statistickou významnost**
- závisí na velikosti výběru – čím vyšší, tím nižší koeficient vychází průkazný

Příklad

- jak spolu souvisí pocit štěstí a míra extraverze?
- 10 osob, 2 proměnné – skór z dotazníku štěstí a skór ze škály extraverze

Příklad



Příklad

štěstí	**15**	**8**	**7**	**18**	**4**	**12**	**10**	**10**	**6**	**9**
extraverze	**12**	**7**	**5**	**14**	**6**	**3**	**5**	**10**	**4**	**13**

Příklad

- **výpočet r**

$$r = \frac{SP_{XY}}{\sqrt{SS_X \, SS_Y}}$$

Příklad

- $SP_{XY} = \Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y}) = \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)/N$

$SS_X = \Sigma(X-\bar{X})^2 = \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/N$

$SS_Y = \Sigma(Y-\bar{Y})^2 = \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/N$

Příklad

- $\mathbf{SP_{XY}}$**=** 91,9

  $\mathbf{SS_X}$**=** 158,9

  $\mathbf{SS_Y}$**=** 144,9

r = 91,9/($\sqrt{158,9*144,9}$)

r = 0,606

Výstup ve Statistice

Proměnná	Korelace (data příklad přednáška 2) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,0500(N=10 (Celé případy vynechány u ChD)	
	štěstí	extraverze
štěstí	1,00	0,61
extraverze	0,61	1,00

Interpretace r

- není shoda v tom, jaká hodnota r je považována za těsný vztah
- interpretace navržená Guilfordem:
  - <0.20 zanedbatelný vztah
  - 0.20-0.40 nepříliš těsný vztah
  - 0.40-0.70 středně těsný vztah
  - 0.70-0.90 velmi těsný vztah
  - >0.90 extrémně těsný vztah

Interpretace r

- pro lepší interpretaci je možné převést koeficient korelace na **koeficient determinace (r^2)**
- ukazuje, kolik rozptylu v jedné proměnné může být vysvětleno rozptylem ve druhé proměnné

Interpretace r

- v našem příkladu
  - r = 0,606
  - r^2 = 0,367
- 36,7% rozdílů v míře štěstí můžeme vysvětlit rozdíly v míře extraverze

Interpretace r

- **korelace neznamená příčinný vztah mezi proměnnými**
  - ten můžeme ověřovat např. experimentem, kdy jsou všechny ostatní proměnné udržovány konstantní, proměnná X předchází Y v čase atd.

Faktory ovlivňující r

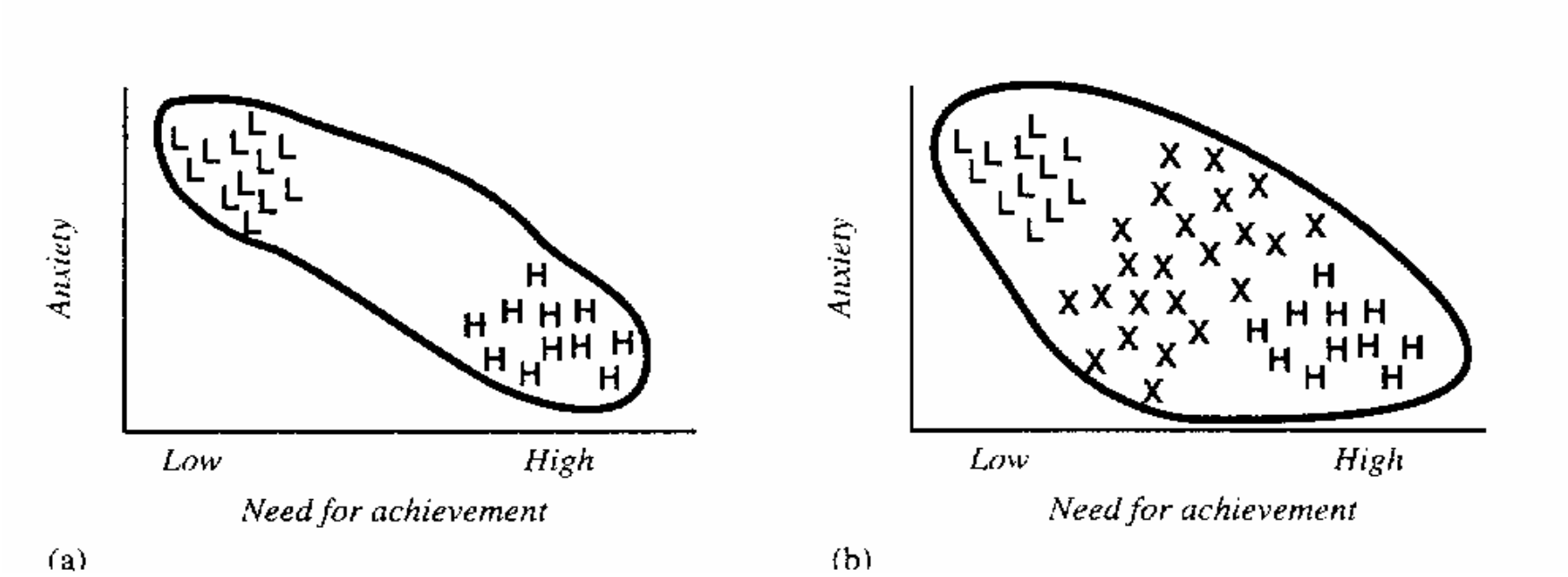
- omezený rozsah hodnot proměnné
- použití extrémních skupin
- nehomogenní soubor
- extrémní hodnoty (outliers)
- nelineární vztahy
- reliabilita použitých nástrojů

Omezený rozsah hodnot

- omezený rozsah hodnot jedné nebo obou proměnných snižuje hodnotu r
- stejně tak nízká variabilita (extrémní případ:pokud by všechny hodnoty 1 proměnné byly stejné, zákonitě r=0)

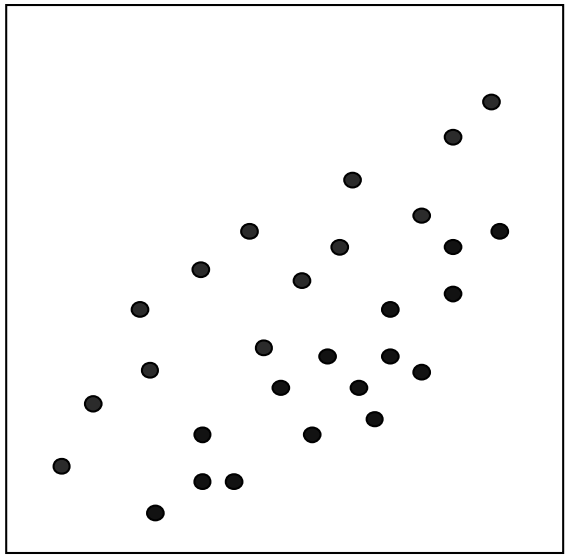
Použití extrémních skupin

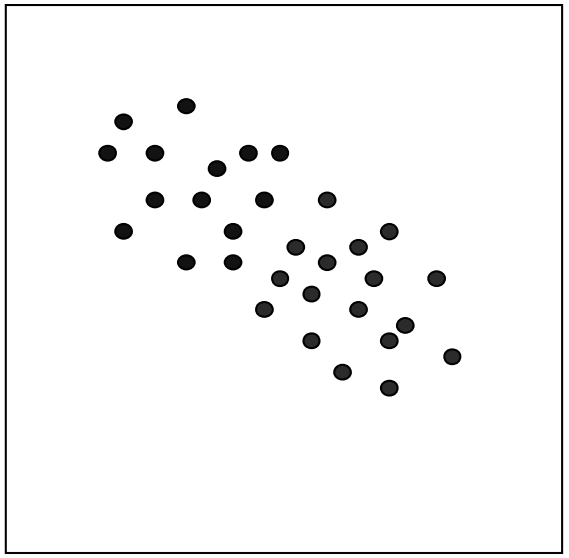
- použití extrémních skupin (např. jen osob s vysokým IQ) vede k vyššímu r



Nehomogenní soubor

- může zkreslit r jak směrem nahoru, tak dolů



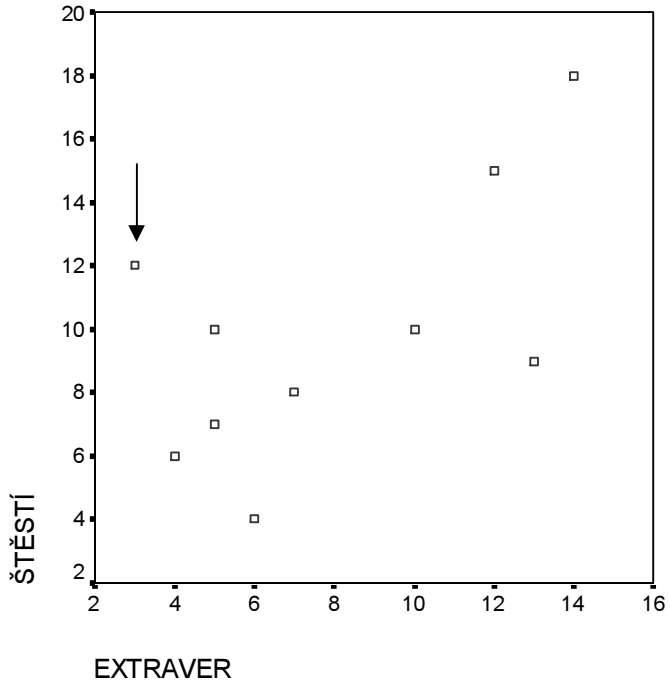


Extrémní hodnoty

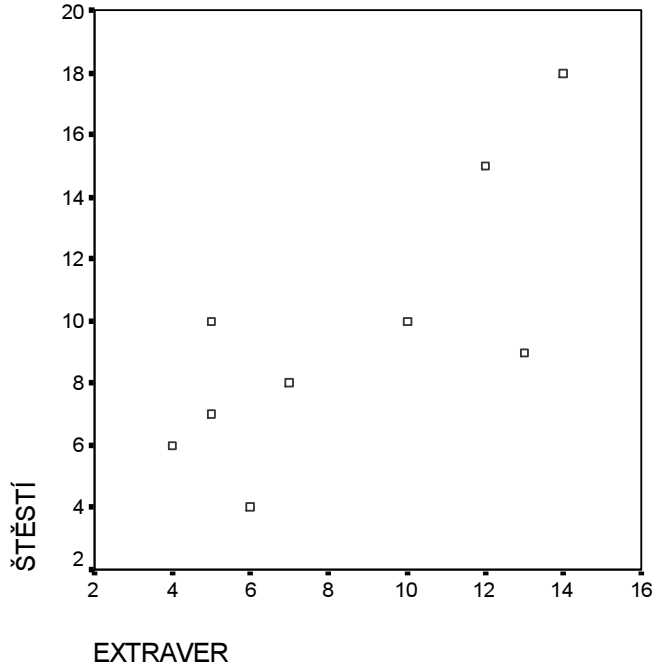
- extrémní hodnoty v jedné nebo obou proměnných mohou r výrazně zkreslit (nejen hodnotu, ale i směr), zvláště když je počet osob v souboru nízký

Extrémní hodnoty

- r= 0,606



- r= 0,766



Neparametrický koeficient

- pro ordinální data je možno spočítat **Spearmanův koeficient pořadové korelace** (ρ)
- počítá se tak, že
  - hodnoty obou proměnných se seřadí od nejnižší po nejvyšší a přidělí se jim pořadí
  - z pořadí se pak počítá Pearsonův koeficient korelace

Parciální korelace

- parciální korelace je taková korelace mezi dvěma proměnnými, kdy kontrolujeme vliv třetí proměnné na obě z nich
- např. chceme zjistit, jaký je vztah mezi prospěchem na SŠ a prospěchem na VŠ; obě proměnné jsou nejspíš ovlivněny IQ

Kontrolní otázky

- co vyjadřuje absolutní hodnota Pearsonova koeficientu korelace? a co jeho znaménko (+ nebo -)?
- co je to koeficient determinace?
- čím může být zkreslen korelační koeficient?

Regresní analýza

- výsledkem regresní analýzy je **matematický model vztahu mezi** dvěma nebo více **proměnnými**
- snažíme se z jedné proměnné nebo lineární kombinace více proměnných predikovat hodnoty další proměnné

Regresní analýza

- dva typy proměnných: **predikovaná** (závislá) **proměnná** a **prediktory** (nezávisle proměnné)
- predikovaná proměnná se označuje **Y**, prediktory $\mathbf{X_1, X_2 \ldots X_n}$
- pouze 1 prediktor – **jednoduchá regrese**
- více prediktorů – **vícenásobná regrese**

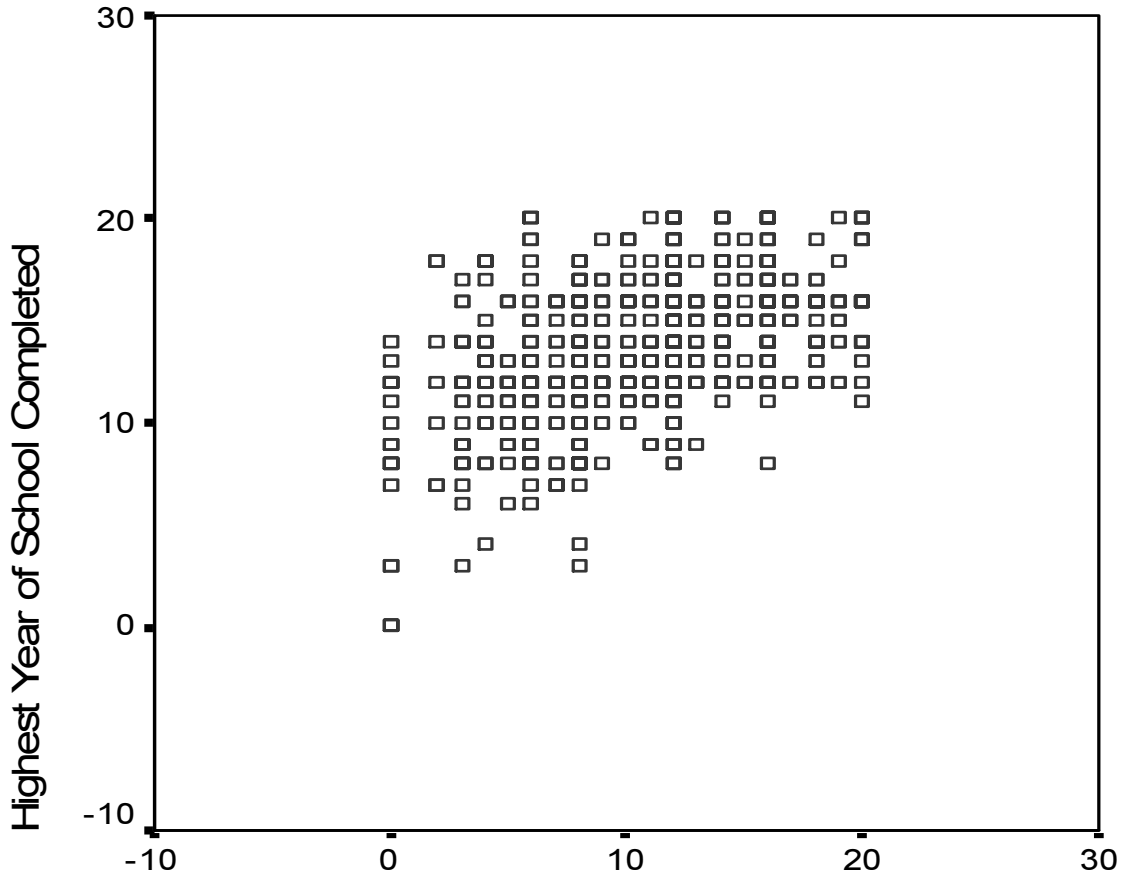
Regresní analýza

- regresní analýza umožňuje
  - porozumět vztahům mezi proměnnými,
  - predikovat hodnoty proměnné Y z hodnot proměnné X (s určitou přesností) – např. z hodnot známek na střední škole nebo z počtu bodů u přijímacího testu předpovědět úspěšnost na VŠ

Jednoduchá regresní analýza

- **příklad** – Jak souvisí vzdělání respondenta se vzděláním otce?
- tj. jak dobře můžeme předpovědět počet let formálního vzdělání respondenta z údaje o počtu let vzdělání jeho otce?

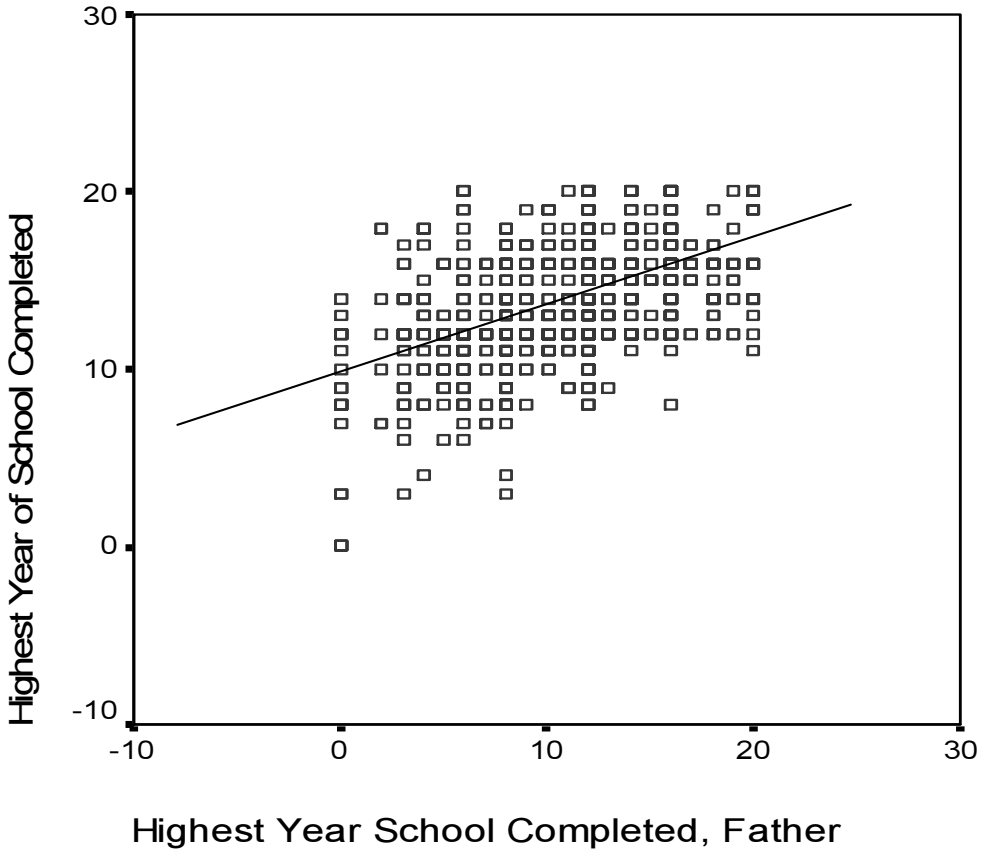
Jednoduchá regresní analýza



Jednoduchá regresní analýza

- snažíme se najít rovnici tzv. regresní přímky
- **regresní přímka** je taková přímka, od které je vzdálenost bodů (představujících naměřená data) co nejmenší
- taková přímka, která nejlépe vystihuje data

Jednoduchá regresní analýza



Jednoduchá regresní analýza

- jednou z metod, jak regresní přímku nalézt, je **metoda nejmenších čtverců**
- je zvolena taková přímka, kdy platí, že součet čtverců vzdáleností jednotlivých bodů od přímky je minimální

Jednoduchá regresní analýza

- obecná rovnice regresní přímky

$$Y' = a + bX$$

- **a** je **konstanta** (predikovaná hodnota Y, když hodnota X je 0)
- **b** je **směrnice** regresní přímky (úhel přímky vzhledem k ose; kolikrát se Y zvětší s každou jednotkou X);

Jednoduchá regresní analýza

- v příkladu vychází rovnice regresní přímky ***Y' = 9,93 + 0,32*X***
- pro děti otců s 0 lety vzdělání předpovídáme necelých 10 let vzdělání
- s každým dalším rokem otcova vzdělání předpovídáme o 0,32 roku vzdělání respondenta více
  - např. pro děti otců s 12 lety vzdělání je predikovaná hodnota jejich vlastního vzdělání 13,8 let

Výstup ve Statistice

N=1065	Výsledky regrese se závislou proměnnou : EDUC (us) R= ,46341505 R^2= ,21475351 uprav. R^2= ,21401480 F(1,1063)=290,72 p<0,0000 Směrod. chyba odhadu : 2,5348					
	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(1063)	Úroveň p
Abs.člen			9,925692	0,219305	45,25983	0,00
PAEDUC	0,463415	0,027179	0,321573	0,018860	17,05037	0,00

Vícenásobná regresní analýza

- predikujeme závislou proměnnou z více prediktorů
- vliv každého z prediktorů na závislou proměnnou je **kontrolován** pro vliv všech ostatních prediktorů (jde tedy o vliv „očištěný“ od vlivů ostatních proměnných a tudíž počítáme **parciální** koeficienty)

Vícenásobná regresní analýza

- **příklad** – kromě vzdělání otce *(X_1)* může mít na dosažené vzdělání vliv také počet dětí v rodině *(X_2)*
- rovnice regresní přímky je

  $$Y' = a + b_1X_1 + b_2X_2$$

Vícenásobná regresní analýza

- $Y' = 10,68 + 0,30*X_1 - 0,13*X_2$
- vliv vzdělání otce (b=0,30) je o něco menší než u jednoduché regresní analýzy (b=0,32) – je kontrolován pro počet dětí v rodině, který je zřejmě ovlivněn také vzděláním otce
- vliv počtu dětí v rodině je záporný – tj. čím více dětí, tím nižší vzdělání

Vícenásobná regresní analýza

- vícenásobná regresní analýza nám umožní srovnat vliv všech prediktorů na závislou proměnnou
- můžeme dojít k závěru, že větší vliv na vzdělání respondenta má vzdělání otce než počet dětí v rodině?

Vícenásobná regresní analýza

- pokud chceme srovnávat vliv prediktorů měřených v různých jednotkách, je nutné použít tzv. **standardizované regresní koeficienty**
- ukazují, kolikrát vzroste hodnota závislé proměnné, pokud se změní hodnota prediktoru o 1 směrodatnou odchylku a hodnoty ostatních prediktorů přitom zůstanou konstantní

Výstup ve Statistice

Výsledky regrese se závislou proměnnou : EDUC (us)
R= ,47898587 R^2= ,22942746 uprav. R^2= ,22797492
F(2,1061)=157,95 p<0,0000 Směrod. chyba odhadu : 2,5117

N=1064	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(1061)	Úroveň p
Abs.člen			10,67468	0,270874	39,40827	0,000000
SIBS	-0,128882	0,028046	-0,12766	0,027780	-4,59535	0,000005
PAEDUC	0,427009	0,028046	0,29631	0,019462	15,22516	0,000000

Vícenásobná regresní analýza

- beta pro vzdělání otce je 0,43
- pro počet dětí v rodině -0,13
- větší vliv má tedy vzdělání otce než počet dětí v rodině

Vícenásobná regresní analýza

- kromě regresních koeficientů je počítán také tzv. **koeficient vícenásobné korelace** – korelace všech prediktorů se závislou proměnnou; ozn. **R**
- jde vlastně o korelaci mezi pozorovanými hodnotami závislé proměnné a hodnotami predikovanými na základě regresního modelu

Vícenásobná regresní analýza

- koeficient **vícenásobné determinace** – tzv. % vysvětleného rozptylu (závislé proměnné) lineární kombinací prediktorů; ozn. $\mathbf{R^2}$

Výstup ve Statistice

Statist.	Statistické shrnutí;ZP: EDUC (us) Hodnota
Vícenás. R	0,4790
Vícenás. R^2	0,2294
Přizpůs. R^2	0,2280
F(2,1061)	157,9491
p	0,0000
Sm. chyba odhadu	2,5117

Vícenásobná regresní analýza

- u jednoduché regresní analýzy je **koeficient vícenásobné korelace** roven korelaci mezi oběma proměnnými

Testování hypotéz v regresní analýze

- jsou testovány 2 typy hypotéz
- 1) zda se R průkazně liší od 0
  - testuje se analýzou rozptylu (porovnává rozptyl vysvětlený regresním modelem a reziduální rozptyl)
- 2) zda se regresní koeficienty průkazně liší od 0
  - testuje se t-testem

Výstup ve Statistice

Statist.	Statistické shrnutí;ZP: EDUC (us) Hodnota
Vícenás. R	0,4790
Vícenás. R^2	0,2294
Přizpůs. R^2	0,2280
F(2,1061)	157,9491
p	0,0000
Sm. chyba odhadu	2,5117

Výstup ve Statistice

N=1064	Výsledky regrese se závislou proměnnou : EDUC (us) R= ,47898587 R^2= ,22942746 uprav. R^2= ,22797492 F(2,1061)=157,95 p<0,0000 Směrod. chyba odhadu : 2,5117					
	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(1061)	Úroveň p
Abs.člen			10,67468	0,270874	39,40827	0,000000
SIBS	-0,128882	0,028046	-0,12766	0,027780	-4,59535	0,000005
PAEDUC	0,427009	0,028046	0,29631	0,019462	15,22516	0,000000

Reziduály

- výsledkem regresní analýzy jsou **predikované skóry** (na základě regresní rovnice)
- z nich je možno odvodit **reziduální skóry** – rozdíl mezi skutečnou a predikovanou hodnotou proměnné

Předpoklady regresní analýzy

- skóry v proměnných jsou nezávislé (nejde např. o opakovaná měření)
- dostatečná variabilita všech proměnných
- rozdělení hodnot proměnných je normální
  - u malých výběrů zkontrolovat extrémní hodnoty

Předpoklady regresní analýzy

- vztahy mezi Y a každou X jsou lineární
  - zkontrolovat scatterem
- vzájemné korelace mezi prediktory nejsou příliš vysoké (tzv. problém mulikolinearity)
  - pokud ano, je vhodné buď některou z nich vyřadit, nebo z nich vytvořit např. faktorovou analýzou jeden skór

Předpoklady regresní analýzy

- rozdělení hodnot reziduálů je normální
  - zkontrolovat analýzou reziduálů – histogramem, pravděpodobnostním grafem
- dostatečně velký počet osob ve výběru vzhledem k počtu prediktorů v modelu (nejméně 10-20x více osob než prediktorů)

Regresní analýza – prezentace výsledků

- jak model odpovídá datům (R^2), příp. výsledky ANOVA
- přehled beta koeficientů, obvykle v tabulce a test jejich statistické významnosti (t a p)
- výsledky analýzy residuálů (obvykle graficky)

Kontrolní otázky

- účel regresní analýzy
- obecná rovnice regresní přímky
- jak se interpretují regresní koeficienty
- co je to koeficient vícenásobné korelace?
- předpoklady regresní analýzy

Literatura

- Hendl, J. (2004): Přehled statistických metod zpracování dat. Praha: Portál