Př. 1

Nakreslete grafy a určete stupně jednotlivých vrcholů:

- $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}\}$
- $V = \{w, x, y, z\}, E = \{\{w, x\}, \{x, y\}, \{y, z\}\}$
- $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{\{1, 2\}\}$
- $V = \{1, 2\}, E = \emptyset$
- $V = \emptyset, E = \emptyset$

Které z nich jsou souvislé, které z nich jsou stromy? Vyjádřete tyto grafy jako relace.

Př. 2

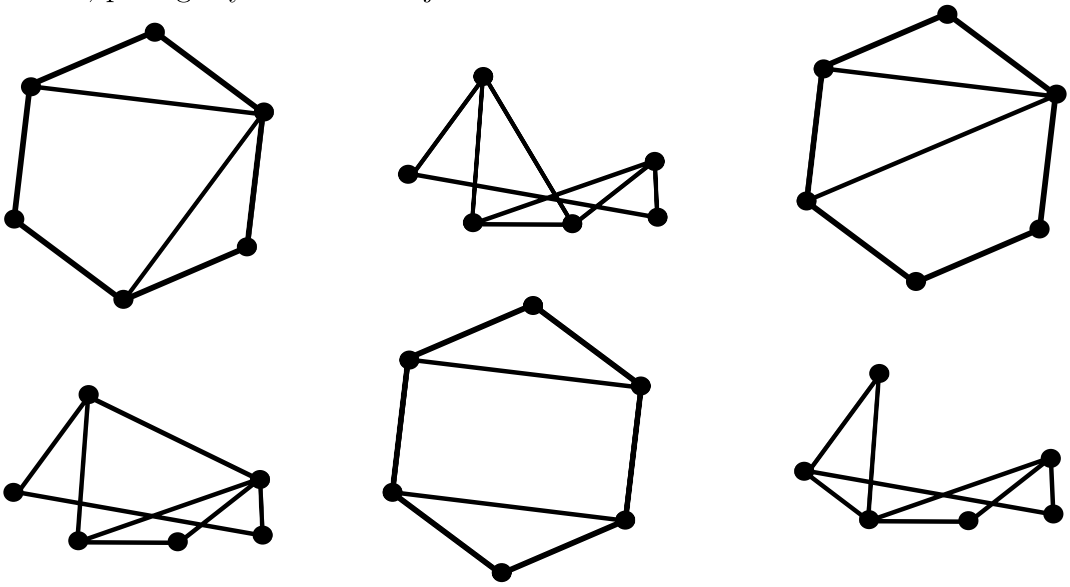
Nakreslete a zapište množinovým zápisem následující grafy:

- úplný graf na 4 vrcholech
- úplný graf na 3 vrcholech
- úplný graf na 2 vrcholech
- úplný graf na 1 vrcholu
- úplný graf na 6 vrcholech
- kružnici na 6 (resp. 5, 4, 3, 2, 1) vrcholech
- cestu na 6 (resp. 5, 4, 3, 2, 1) vrcholech
- graf, který má stupně vrcholů postupně 2, 3, 3, 2
- graf, který má stupně vrcholů postupně 3, 3, 4, 4, 4
- graf, který má stupně vrcholů postupně 2, 4, 4, 2

Najděte v těchto grafech největší kliky, největší cykly a nejdelší cesty.

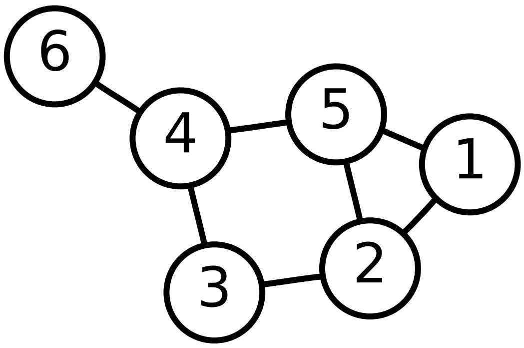
Př. 3

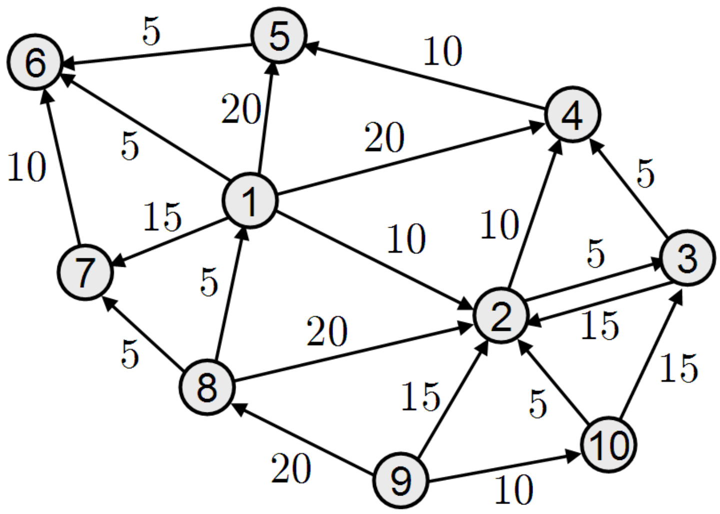
Které z následujících grafů jsou izomorfní? Najděte isomorfismy, případně určete, proč grafy izomorfní nejsou.



Př. 4

Najděte nejdelší cesty a cykly v následujících grafech:





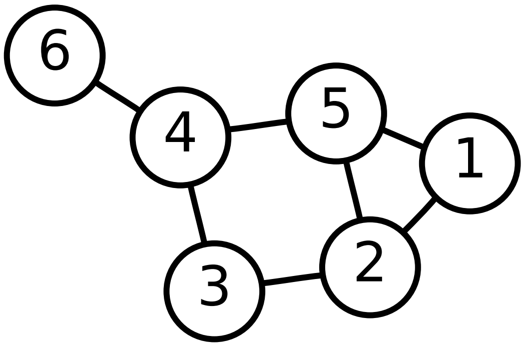
Př. 5

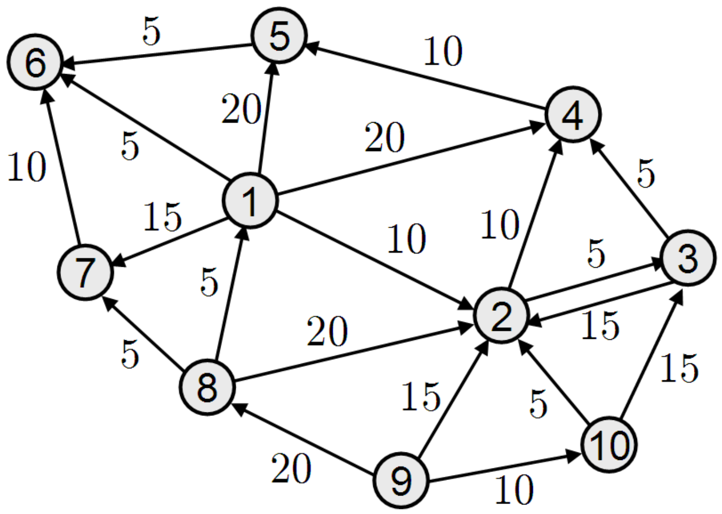
Nakreslete následující orientované grafy:

- $V = \{1,2,3,4\}, E = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,4),(2,4)\}$
- $V = \{w,x,y,z\}, E = \{(w,x),(x,y),(z,y),(w,z)\}$
- $V = \{1,2,3,4\}, E = \{(1,2)\}$
- $V = \{1,2\}, E = \emptyset$ Najděte v těchto grafech největší cykly a nejdelší cesty.

Př. 6

V následujících grafech najděte minimální kostry a nejkratší cesty mezi vybranými dvojicemi vrcholů. Nejprve „selským rozumem", poté použijte Kruskalův a Dijkstrův algoritmus.





Př. 7

V orientovaném grafu z předchozího cvičení najděte silně souvislé komponenty.

Př. 8

Naprogramujte Kruskalův a Dijkstrův algoritmus v Pythonu.

Př. 9

Zapište v jazyce logiky vlastnosti, které musí splňovat pravděpodobnostní rozložení.

Př. 10

Vyjádřete funkčním zápisem a grafem rozložení pravěpodobnosti při hodu kostkou.

Př. 11

Mějme následující statistický soubor (výška lidí ve skupině):

160, 160, 160, 170, 170, 180, 180, 180, 190, 210

Nakreslete graf pravděpodobnostního rozložení výšky lidí na základě tohoto souboru. Jaká je pravděpodobnost, že člověk bude vyšší než 185?

Nakreslete graf distribuční funkce pro statistický soubor výše.

Př. 12

Házeme dvakrát po sobě kostkou. Poprvé padlo 5. Jaká je pravděpodobnost, že padne součet větší než 8? Použijte vzorec podmíněné pravděpodobnosti.

Př. 13

Mějme následující údaje o skupině lidí:

ID	Výška (cm)	Váha (kg)
1	180	80
2	170	90
3	190	60
4	190	80
5	180	80
6	190	90

Mějme člověka, o kterém víme, že měří 190 cm. Jaká je pravděpodobnost, že jeho váha bude alespoň 80 kg? (Předpokládejme, že naše data jsou reprezentativní. (Kterému zákonu tento náš předpoklad odporuje?))

Př. 14

Dokažte Bayesův vzorec.

Př. 15

Všichni chlapci nosí kalhoty, polovina dívek nosí také kalhoty (druhá polovina nosí sukně :)). Vidíme z dálky člověka, který má kalhoty. Jaká je pravděpodobnost, že je to chlapec?

Př. 16

Mějme následující text a předpokládejme, že pro dané účely je to reprezentativní vzorek:

Stát má stát na straně pro stát vhodné. Stát na straně občanů je pro stát obvykle nevýhodné. Nicméně stát by se mohl stát poctivějším.

Jaká je pravděpodobnost, že slovo „stát” (bez rozlišení velikosti písmen) je sloveso (podst. jméno), pokud:

- neuvažujeme žádnou informaci o kontextu
- slovo „stát" stojí na začátku věty
- předchozí slovo je předložka
- následující slovo obsahuje právě dvě písmena

Př. 17

Máme podezření, že hrací kostka není vyvážená, ale že na ní častěji padají šestky. Máme v úmyslu kostku sérií 20 pokusů vyzkoušet. Kolikrát musí padnout šestka, aby se naše podezření statisticky potvrdilo s možností chyby méně než 1 %?

Závěrečné opakování:

Př. 18

Ze 4 pokusů padla na hrací kostce 4x (3x, ...) šestka. Na základě toho jsme usoudili, že kostka není vyvážená (pravděpodobnost, že padne šestka, je větší než 1/6). Jaká je pravděpodobnost, že jsme se spletli?

Př. 19

Vytvořte bigramový model znaků pro frázi: „to be or not to be".

Př. 20

Zapište zkrácenou notací:

- $a_1 + a_2 + a3 + ... + a_n$
- $(a_1 + 1) * (a_2 + 1) * (a3 + 1) * ... * (a_n + 1)$
- $(a_1 + 1) * (a_2 + 2) * (a3 + 3) * ... * (a_n + n)$
- $(a_1 + 1) * (a_2 + 4) * (a3 + 9) * ... * (a_n + n^n)$

Př. 21

Nakreslete graf distribuční funkce pro výsledky hodu vyváženou kostkou.

Př. 22

Zapište v jazyce predikátové logiky:

- prázdná množina je podmnožinou čehokoli
- pro všechny prvky prázdné množiny platí, že nejsou prvkem prázdné množiny
- axiomy pravděpodobnostní distribuce

Př. 23

Navrhněte datový soubor (např. o velikosti 10 prvků), jehož distribuce bude přibližně odpovídat:

- uniformnímu rozložení
- normálnímu rozložení
- Zipfovu rozložení

Př. 24

Spočitejte entropii výsledku hodu třemi mincemi (Entropie = $\sum_{x \in X} p(x) log_2 p(x)$)