# Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory II

Pavel Rychlý Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic
{pary, xkovar3}@fi.muni.cz

část 3





## Obsah přednášky







## Souvislé komponenty

- Souvislé komponenty
  - největší souvislé podgrafy
  - → mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta
- Silně souvislé komponenty
  - v případě orientovaných grafů
  - mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta tam i zpět





## Vzdálenost v grafu

- Délka cesty
  - neohodnocený graf: počet hran v cestě
  - ohodnocený graf: součet ohodnocení jednotlivých hran v cestě
- Vzdálenost mezi dvěma vrcholy X a Y
  - je délka nejkratší cesty z X do Y

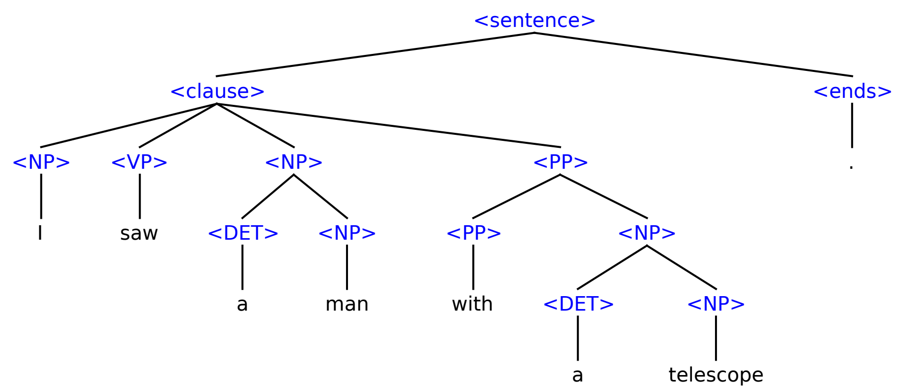
# Kořen a listy stromu

- Kořen stromu
  - jeden vyznačený vrchol
  - kreslíme většinou nahoře :)
- Listy stromu
  - vrcholy stupně 1, které nejsou kořenem
  - kreslíme většinou dole





# Příklad – syntaktický strom








# Kostra grafu

- Podgraf, který
  - obsahuje všechny vrcholy původního grafu
  - je strom
  - $\rightarrow$ musíme odstranit všechny cykly
- Minimální kostra grafu
  - pro ohodnocený graf
  - kostra s nejmenším součtem ohodnocení hran
  - analogicky maximální kostra





# Procházení grafu

- Např. hledáme určitý vrchol, chceme projít všechny, ...
- Procházení do hloubky – depth-first search
  - začínáme z nějakého vrcholu, ten označíme
  - označíme libovolný sousední neoznačený vrchol a pokračujeme z něj
  - pokud to dál nejde (všechny sousední vrcholy jsou označené), vrátíme se k nejbližšímu vrcholu, ze kterého to ještě jde

## Procházení grafu

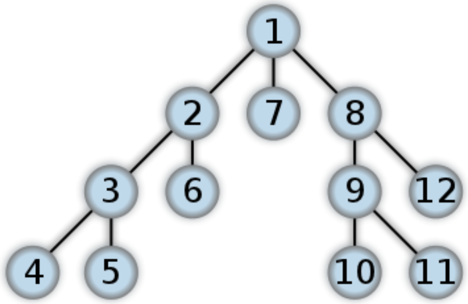
- Procházení do šířky – breadth-first search
    - začínáme z nějakého vrcholu, ten označíme
    - vybereme všechny sousední neoznačené vrcholy a přidáme je do seznamu
    - postupně ze začátku seznamu odebíráme a provádíme předchozí kroky
    - končíme, když je seznam prázdný





## Procházení do hloubky z vrcholu u

- $DFS(G, u)$
- ============
- označ $u$
- for všechny hrany $(u, v)$ vycházející z vrcholu $u$:
    - if $v$ není označen:
        - $DFS(G, v)$

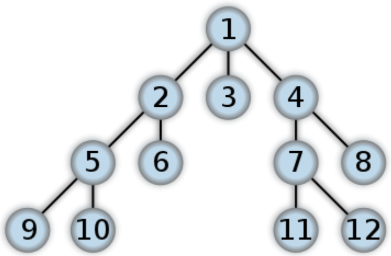







## Procházení do šířky z vrcholu u

- $BFS(G, u)$
- ============
- $Q = [u]$
- while $Q$ je neprázdný:
    - odstraň první prvek z $Q$ a přiřaď jej do $t$
    - označ $t$
    - přidej všechny neoznačené sousedy $t$ na konec $Q$








## Kruskalův algoritmus

- Vstup
    - neorientovaný graf $G$
    - ohodnocení hran $w$
- Výstup
    - minimální kostra grafu G
- Algoritmus je tzv. hladový
    - v každém kroku vybírá lokálně optimální možnost
- Idea
    - setřídit hrany podle ohodnocení
    - v každém kroku přidat do kostry tu nejmenší, která nevytvoří cyklus
    - udržujeme si seznam souvislých komponent kostry

# Kruskalův algoritmus (G, w)

- $K \leftarrow [\,]; comp \leftarrow \{\}$
- for $u$ in $G(V)$:
  - $comp[u] \leftarrow set(u)$
- setřiď $G(E)$ podle $w$
- for $(u, v)$ in $G(E)$:
  - if $comp[u] \neq comp[v]$ :
    - $K.append((u, v))$
    - $newset = union(comp[u], comp[v])$
    - for $x$ in $newset$ : $comp[x] \leftarrow newset$
- $K$ je minimální kostra grafu





# Dijkstrův algoritmus

- Vstup
  - graf s hranami ohodnocenými funkcí $w$
  - ohodnocení hran musí být nezáporné
  - počáteční vrchol $s$
- Výstup
  - vzdálenosti z vrcholu $s$ do všech dalších vrcholů grafu
- Idea
  - udržujeme si nejmenší známé vzdálenosti do všech vrcholů
  - na začátku nekonečno
  - procházíme postupně vrcholy a hodnoty upravujeme





# Dijkstrův algoritmus (G, s)

- for $u$ in $G(V)$:
  - $d[u] \leftarrow infinity$
- $d[s] \leftarrow 0$
- $N \leftarrow G(V)$
- $p \leftarrow \{\}$
- while $N \neq [\,]$:
  - $u \leftarrow$ vrchol z $N$ s nejmenší hodnotou $d[u]$
  - for všechny hrany $(u, x)$ vycházející z vrcholu $u$:
    - $alt \leftarrow d[u] + w((u, x))$
    - if $alt < d(x)$ : $d[x] \leftarrow alt; p[x] \leftarrow u$
  - odstraň $u$ z $N$
- $d$ jsou vzdálenosti vrcholů z vrcholu $s$
- $p$ obsahuje předchozí vrcholy na nejkratší cestě z $s$