

Př. 1

Mějme definována přirozená čísla a základní operace na nich. Definujte dělitelnost.

Př. 2

Na základě definice dělitelnosti definujte sudé a liché číslo. Definujte je i bez využití dělitelnosti.

Př. 3

Dokažte, že součet dvou, tří, čtyř sudých čísel je sudé číslo. Využijte přímý důkaz i důkaz sporem.

Př. 4

Dokažte, že součet dvou lichých čísel je sudé číslo. Dokažte, že součet tří lichých čísel je liché číslo. Využijte přímý důkaz i důkaz sporem.

Př. 5

Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla a, b platí: pokud $2 * a * a = b * b$, pak b je sudé.

Př. 6

Vyjádrete výroky $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ pouze pomocí negace a implikace.

Př. 7

Vyjádrete výrok $(A \Rightarrow B)$ pouze pomocí negace a disjunkce.

Př. 8

Mějme výroky:

- A: x je sudé.
- B: y je sudé.
- C: $x + y$ je sudé

Přečtěte následující výroky:

- $A \Rightarrow C$

- $(A \vee B) \Rightarrow C$
- $(A \wedge \neg A)$
- $(A \wedge \neg A) \Rightarrow C$
- $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow C$
- $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg C$

Které z nich jsou pravdivé?

Př. 9

Přepište v jazyce predikátové logiky:

- Všechna prvočísla jsou lichá.
- Všechna prvočísla menší než 5 jsou sudá.
- Všechna prvočísla větší než 5 jsou lichá.
- Existuje sudé prvočísllo.

Můžete používat predikát $\text{Prime}(x)$ a aritmetiku nad celými čísly. Které z výroků výše jsou pravdivé?

Př. 10

Přepište v jazyce predikátové logiky a dokažte:

- žádné sudé číslo není zároveň liché
- $(2 * x * x = y * y) \Rightarrow y$ je sudé
- žádné prvočísllo větší než 2 není sudé

Můžete používat predikát $\text{Prime}(x)$, aritmetiku nad celými čísly a operátor dělitelnosti ($|$).

Př. 11

Dokažte indukci pro všechna přirozená $n \geq 1$:

- $n + 1 \leq 2 * n$
- $2 * n \leq 2^n$

- $1 + 2 + \dots + n = n/2 * (1 + n)$

Př. 12

Induktivně definujte:

- přirozená čísla pomocí konstanty 1 a operace +
- celočíselné výrazy s operací +
- celočíselné výrazy s operací + a *
- nekonečnou posloupnost 7, 11, 15, 19, 23, ...
- nekonečnou posloupnost 2, 5, 11, 23, 47, ...

Př. 13

Dokažte strukturální indukcí, že každý celočíselný výraz podle definice výše má sudý počet závorek.

Př. 14

Jsou následující výroky pravdivé?

- $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
- $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
- $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
- $\{4\} \in \{x \in N \mid x > 3\}$
- $4 \in \{x \in N \mid x > 3\}$
- $\{4\} \subseteq \{x \in N \mid x > 3\}$
- $4 \subseteq \{x \in N \mid x > 3\}$
- $\{4\} \in \{\{x\} \mid x \in N \wedge x > 3\}$

Př. 15

Zapište $\mathcal{P}(A)$ pro množiny:

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Př. 16

Zapište:

- množinu všech sudých čísel
- množinu všech prvočísel

Můžete používat množinu N , aritmetiku nad ní a operátor dělitelnosti.

Př. 17

Definujte:

- množinový rozdíl
- symetrický množinový rozdíl

Př. 18

Dokažte:

- $a \in A \cap B \Rightarrow a \in A$
- $a \in A \cap B \Rightarrow a \in A \cup B$
- $a \in A \wedge A \subseteq B \Rightarrow a \in B$

Př. 19

Přepište v jazyce predikátové logiky Peanovy axiomy

- existuje nula
- každé číslo x má následníka $S(x)$
- nula není následníkem žádného čísla
- různá čísla mají různé následníky: $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$

Př. 20

Mějme definováno sčítání a násobení následujícími předpisy:

- $a + 0 = a$
- $a + S(b) = S(a + b)$
- $a * 0 = 0$
- $a * S(b) = (a * b) + a$

Vypočtete podle definic:

- $1 + 1$
- $2 + 2$
- $2 * 1$
- $1 * 2$

($1 = S(0)$, $2 = S(1)$)

Př. 21

Definujme induktivně slova nad množinou $\{a, b, c\}$:

- a, b, c jsou slova
- pokud x je slovo, pak ax, bx, cx jsou slova

Definujme sčítání řetězců následovně: Pro slova x a y

- $a + x = ax$
- $b + x = bx$
- $c + x = cx$
- $ya + x = y + ax$
- $yb + x = y + bx$
- $yc + x = y + cx$

Vypočtete podle definice:

- $abc + aaa$

- $aaa + bbb$
- $ab + aaabac$
- $aaabac + ab$

Př. 22

Přepište jako množiny čísla:

- 1
- 2
- 4

$$0 \equiv \emptyset, S(x) \equiv x \cup \{x\}$$

Př. 23

Přepište jako množiny:

- (a, b)
- $(1, 2, 3)$
- (ϕ, ψ, ω)

Př. 24

Zapište kartézský součin AxB , resp. $AxBxC$ pro množiny:

- $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}$
- $A = \{1, 2, 3\}, B = \emptyset$
- $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}, C = \{1, 2, 3\}$
- $A = N, B = \{1, 2, 3\}$
- $A = N, B = N$

Př. 25

Mějme následující relace nad množinou $\{a, b\}$:

- $R_1 = \{(a, a), (b, b)\}$
- $R_2 = \{(a, b), (b, a)\}$
- $R_3 = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$
- $R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$
- $R_5 = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$
- $R_6 = \emptyset$
- $R_7 = \{(a, a), (b, a)\}$

Které z nich jsou reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní? Které z nich jsou funkce? Které z funkcí jsou úplné, injektivní, surjektivní, bijekce?

Př. 26

Vyjádřete se k vlastnostem následujících relací:

- relace dělitelnosti ($\{(a, b) \mid \exists k \in N(a * k = b)\}$)
- $\{(a, 2 * a) \mid a \in N\}$

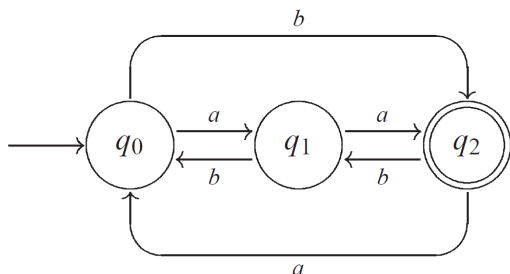
Př. 27

Jsou následující množiny spočetné? Pokud ano, pokuste se najít bijekci mezi přirozenými čísly a příslušnou množinou:

- sudá čísla
- lichá čísla
- celá čísla
- racionální čísla
- reálná čísla v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$

Př. 28

Vypište přechodovou funkci následujícího automatu:



Př. 29

Který jazyk generují následující gramatiky?:

- $S \rightarrow AB, A \rightarrow a, B \rightarrow b$
- $S \rightarrow aaS, S \rightarrow aa$
- $S \rightarrow X, S \rightarrow aS, X \rightarrow ab, X \rightarrow aXb$

Př. 30

Napište (bezkontextovou) gramatiku generující následující jazyky:

- $\{a\}$
- $\{a, aa, ab\}$
- \emptyset
- $\{ab, abab, ababab, \dots\}$
- $\{a, ab, aba, abab, ababa, ababab, abababa, \dots\}$
- $\{a^i b^j \mid i, j > 0\}$
- $\{a^i b^i \mid i > 0\}$

Je možné pro dané jazyky sestavit také konečný automat? Pokud ano, napište jej. Pokud ne, zamyslete se, proč to nejde.

Př. 31

Kolik existuje posloupností obsahujících právě následující prvky?

- Slunce, Měsíc, Země
- a, a, b, b, c
- a, a, a, a, a, b, c, d

Př. 32

Házeme třikrát po sobě kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

- padne po řadě 1, 2, 3
- padnou tři stejná čísla
- padne součet 5
- padne součet 7

Př. 33

Z místa A do místa B vedou 4 cesty, z místa B do místa C vedou 3 cesty. Kolika různými způsoby se můžeme dostat z A do C a zpět, pokud

- nemáme žádná omezení na výběr cest
- nechceme jít dvakrát stejnou cestou
- chceme jít tam i zpět stejnou cestou

Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru cest si vybereme stejné cesty jako náš kamarád, který jde stejnou trasu? (určete pro všechny výše uvedené případy)

Př. 34

Házeme třemi nerozlišitelnými mincemi.

- Kolik různých kombinací může padnout (pokud nejsme schopni rozlišit jednotlivé mince)?
- Jaká je pravděpodobnost, že padnou právě tři panny?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne právě jedna panna a dva orli?

Př. 35

Házeme třemi nerozlišitelnými kostkami.

- Kolik různých kombinací může padnout (pokud nejsme schopni rozlišit jednotlivé kostky)?
- Jaká je pravděpodobnost, že padnou tři stejná čísla?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 5?

Př. 36

Kolik je tříprvkových podmnožin

- množiny $\{1, 2, 3\}$
- množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}, n > 2$)

Kolik je m -prvkových podmnožin výše uvedených množin (pro libovolné přirozené m menší než velikost příslušné množiny)?

Př. 37

Mějme statistický soubor 2, 3, 3, 3, 5, 4, 5, 9. Určete modus, medián, průměr, rozptyl a směrodatnou odchylku. Nakreslete histogramy pro četnost, relativní četnost a kumulativní četnosti. (V tomto i v dalších příkladech můžete používat kalkulačky i jiné inteligentní stroje :) na písemce budou příklady zadány tak, aby vycházely pěkně.)

Př. 38

Pro následující soubory nakreslete graf závislosti na souboru z minulého cvičení, pokuste se odhadnout korelaci a poté korelaci vypočtete dosazením do vzorce:

- 2, 3, 3, 3, 5, 4, 5, 9
- 2, 2, 2, 3, 8, 8, 5, 8
- 10, 9, 9, 9, 6, 7, 6, 2
- 1, 9, 1, 9, 1, 9, 1, 9

Př. 39

Sestavte statistický soubor, který bude mít alespoň 5 prvků, z nichž maximálně dva budou stejné, tak, aby měl:

- modus 4
- medián 5
- průměr 6
- rozptyl 9
- všechny výše uvedené
- průměr 1000 a medián 3
- modus 4, medián 5 a rozptyl 0

Ke každému z navržených souborů se pokuste navrhnout druhý tak, aby jejich korelace byly postupně -1; 0; 0,5; 1. Nakreslete grafy závislosti souborů.