GRUPY
POLOGRUPY
SVAZY

GRUPA

Grupou nazýváme množinu G spolu s binární operací na ní (značíme např. $*$), která se nazývá **grupovou operací**.

Tato operace libovolným dvěma prvkům grupy a, b přiřazuje prvek téže grupy: **a $*$ b = c**.

Podle kontextu říkáme, že c je *složení* (*součin*, *součet*) prvků

a a *b*.

GRUPOVÁ OPERACE MUSÍ SPLŇOVAT URČITÉ VLASTNOSTI, AXIOMY GRUPY

i) **uzavřenost**: $(\forall\ a, b \in G)\colon a * b \in G$

i) **asociativita**: $(\forall\ a, b, c \in G)\colon\ a * (b * c) = (a * b) * c$

i) **existence neutrálního prvku**:
$(\exists\ e \in G)\ (\forall\ a \in G)\colon a * e = e * a = a$

i) **existence inverzního prvku**:
$(\forall\ a \in G)\ (\exists\ a^{-1} \in G)\colon a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

DEFINICE GRUPY POMOCÍ TŘÍ OPERACÍ:

i) **nulární operace** (tj. konstanty) e představující neutrální prvek

i) **unární operace** $^{-1}$, která každému prvku přiřadí prvek k němu inverzní

i) **binární operace**

GRUPOID

MNOŽINU (M), NA KTERÉ JE DEFINOVÁNA JEDNA BINÁRNÍ OPERACE ($\ast$) NAZÝVÁME GRUPOID A ZNAČÍME (M ; $\ast$).

Grupoid (M; $\ast$) se nazývá asociativní, právě když $(\forall x,y,z \in \mathrm{M})(x \ast y) \ast z = x \ast (y \ast z)$ – tj. operace na něm definovaná je asociativní. Pokud je grupoid asociativní, nazývá se **pologrupa**.

Grupoid (M; $\ast$) se nazývá grupoid s neutrálním prvkem, právě když $(\exists e \in \mathrm{M})(\forall x \in \mathrm{M})\ e \ast x = x \ast e = x$ – tj. operace na něm definovaná má neutrální prvek.

Grupoid (M; $\ast$) se nazývá grupoid s inverzními prvky, právě když $1 \in \mathrm{M} \wedge (\forall x \in \mathrm{M})(\exists y \in \mathrm{M})\ x \ast y = y \ast x = 1$ – tj. obsahuje jednotkový prvek a ke každému prvku take inverzní prvek.

Grupoid (M; $\ast$) se nazývá komutativní, právě když $(\forall x,y \in \mathrm{M})\ x \ast y = y \ast x$ – tj. operace na něm definovaná je komutativní.

GRUPOID

MNOŽINU (M), NA KTERÉ JE DEFINOVÁNA JEDNA BINÁRNÍ OPERACE ($*$) NAZÝVÁME GRUPOID A ZNAČÍME (M ; $*$).

Grupoid (M; $*$) se nazývá grupoid s krácením zleva, právě když $(\forall x,y,z \in M)\ (z*x = z*y \Rightarrow x = y)$.

Grupoid (M; $*$) se nazývá grupoid s krácením zprava, právě když $(\forall x,y,z \in M)\ (x*z = y*z \Rightarrow x = y)$.

Grupoid (M; $*$) se nazývá grupoid s krácením, právě když $(\forall x,y,z \in M)\ (z*x = z*y \Rightarrow x = y) \wedge (x*z = y*z \Rightarrow x = y)$.

Grupoid (M; $*$) se nazývá grupoid s dělením, právě když $(\forall x,y \in M)(\exists u,v \in M)\ (x*u = y \wedge v*x = y)$.

TEORIE SVAZŮ

Částečně uspořádaná množina formalizuje uspořádání (určení pořadí některých prvků) na množině. Skládá se z množiny a binární relace popisující uspořádání jednotlivých dvojic prvků.

Částečné uspořádání je binární relace ≤ na množině G, která je:

$\rightarrow$ **reflexivní**: $(\forall\ x, y, z \in G)\ a \leq a$

$\rightarrow$ **tranzitivní**: $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

$\rightarrow$ **antisymetrická**: $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

MAXIMUM A MINIMUM

Máme možinu X. Existuje číslo *M* z množiny X, tak že pro všechna $x \in X$ platí $x \leq M$. Číslo M nazýváme maximum množiny X označujeme ho maxX.

Máme možinu X. Existuje číslo *m* z množiny X, tak že pro všechna $x \in X$ platí $m \leq x$. Číslo M nazýváme minimum množiny X označujeme ho minX.

Každá konečná množina má maximum a minimum.

OHRANIČENÍ MNOŽINY

Množina X se nazývá zhora ohraničená, pokud existuje takové číslo *B* takové, že pro každé $x \in X$ platí $x \leq B$.

Množina X se nazývá zdola ohraničená, pokud existuje takové číslo *b* takové, že pro každé $x \in X$ platí $b \leq x$.

Číslo *B* nazýváme horním ohraničením množiny X a číslo *b* dolním ohraničením množiny X.

Množina ohraničená zdola i zhora sa nazývá ohraničená.

SUPREMUM A INFIMUM

Nejmenší horní ohraničení množiny X se nazývá supremum množiny X a značí se supX.

Největší dolní ohraničení množiny X se nazývá infimum množiny X a značí se infX.

SVAZY

Definice: Uspořádaná množina, v níž ke každým dvěma prvkům existuje supremum i infimum, se nazývá **SVAZ**.

SVAZ je uspořádaná množina $(A, \subseteq)$, kde pro každé $a, b \in A$ existuje $\sup(\{a, b\})$ a $\inf(\{a, b\})$.

Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, kde $\forall\ (a, b \in A)\ \exists\ ((\sup\ (a, b) = (a \vee b) \wedge (\inf\ (a, b) = (a \wedge b))$, pak $(A, \vee, \wedge)$ je **SVAZ** a $(A, \vee)$ a $(A, \wedge)$ jsou **POLOSVAZY**.

OPERACE VE SVAZU

Je-li dána uspořádaná množina $(A, \subseteq)$, která je **svazem**, tj. existují suprema a infima každé dvojice prvků $a, b \in A$. Pak $\sup(\{a, b\})$ a $\inf(\{a, b\})$ jsou dána jednoznačně a můžeme je tedy považovat za **binární operace**. Svaz budeme značit $(A, \vee, \wedge, \subseteq)$.

Označme $a \vee b = \sup(\{a, b\})$; $a \wedge b = \inf(\{a, b\})$. Operace $\vee$ se nazývá spojení, operace $\wedge$ se nazývá průsek.

OPERACE VE SVAZU

Je-li dán svaz $(A, \subseteq)$, pak pro operace $\vee$ a $\wedge$ platí:

Pro každý prvek $a \in A$ platí:

$a \vee a = a$ a zároveň $\mathbf{a \wedge a = a}$

Pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí:

$a \vee b = b \vee a$ a zároveň $\mathbf{a \wedge b = b \wedge a}$

Pro každé tři prvky $a, b, c \in A$ platí:

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ a zároveň $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

Pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí:

$a \vee (b \wedge a) = a$ a zároveň $a \wedge (b \vee a) = a$