MNOŽINY

VZTAHY, OPERACE, BINÁRNÍ OPERACE, KARTÉZSKÝ SOUČIN, BINÁRNÍ RELACE, VLASTNOSTI RELACÍ

VZTAHY MEZI MNOŽINAMI

podmnožina (inkluze)

$A \subseteq B$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

rovnost

$A = B$

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$A = B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

vlastní podmnožina

$A \subset B$

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\ ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \exists x\ (x \in B \wedge x \notin A))$

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\ ((A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge \exists x\ (B(x) \wedge \neg A(x))$

MNOŽINOVÉ OPERACE

sjednocení množin

$A \cup B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \vee x \in B)$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

průnik množin

$A \cap B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \wedge x \in B)$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(disjunktní množiny: $A \cap B = 0$)

rozdíl množin

$A - B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \wedge x \notin B)$

doplněk množiny

$A' = B - A \Leftrightarrow \forall x\ (x \in B \wedge x \notin A)$

VLASTNOSTI MNOŽINOVÝCH OPERACÍ

komutativní (nezáleží na pořadí)

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

asociativní

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Idempotentní

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

distributivní

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

KARTÉZSKÝ SOUČIN

uspořádaná dvojice

$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

UD je dvouprvková množina obsahující jako své prvky dvě množiny, z nichž jedna je jednoprvková a je podmnožinou druhé, dvouprvkové. Prvek jednoprvkové množiny považujeme za první prvek UD, prvek dvouprvkové množiny, který není prvkem jednoprvkové množiny, považujeme za druhý prvek UD.

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

kartézský součin množin A, B

$A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}\}$

KS množin A, B je množina všech uspořádaných dvojic takových, že jejich první prvek KS je prvkem množiny A a druhý prvek prvkem množiny B.

BINÁRNÍ RELACE

Definice: Binární relace z množiny A do množiny B se nazývá každá podmnožina kartézského součinu A x B.

Je-li A = B, pak mluvíme o binární relaci v množině A.

Doplňková relace R´ k relaci R v množině A je množina všech uspořádaných dvojic z A x A, které nepatří do relace R, tj. R´= (A x A) – R.

Relace R z množiny A do množiny B se nazývá **zobrazením** z A do B, právě když ke každému prvku a $\in$A existuje nejvýše jeden prvek b $\in$B takový, že platí (a, b) $\in$R.
(Tedy každý prvek z množiny A se může vyskytnout jako první složka uspořádané dvojice v relaci R nejvýše jednou.)

Jestliže (a, b) $\in$R, pak prvek a nazýváme vzorem prvku b a prvek b obrazem prvku a v zobrazení R (nebo že zobrazení R přiřazuje prvku a prvek b).

VLASTNOSTI RELACÍ

Nechť U je binární relace v A. Relace U se nazývá:

1. **reflexivní** právě, když pro všechny prvky platí, že prvek je v relaci se sebou samým

$\forall x \in A: (x, x) \in U$

2. **antireflexivní** právě, když platí

$\forall x \in A: (x, x) \notin U$

3. **symetrická** právě, když platí

$\forall x, y \in A: (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U$

4. **antisymetrická** právě, když platí

$\forall x, y \in A: (x, y) \in U \wedge x \neq y \Rightarrow (y, x) \notin U$

5. **transitivní** právě, když platí

$\forall x, y, z \in A: (x, y) \in U \wedge (y, z) \in U \Rightarrow (x, z) \in U$

5. **Ekvivalence** je binární relace, která je reflexivní, symetrická, a tranzitivní současně.