

# Induktivní statistika

---

- z-skóry
  - pravděpodobnost
  - normální rozdělení
-

# Z-skóry

---

- umožňují najít a popsat **pozici každé hodnoty** v rámci rozdělení hodnot
  - a také **srovnávání hodnot** pocházejících z měření **na rozdílných stupnicích**
  - hrubé skóry jsou převedeny na **standardizovanou stupnici** (jednotkou je směrodatná odchylka)
-

# Z-skóry - příklad

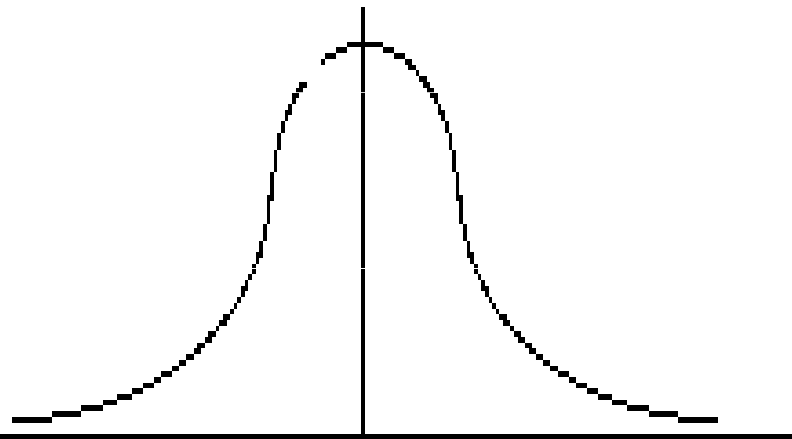
---

- např. skóry ze dvou testů – biologie a psychologie
  - student získal 26 bodů z biologie a 620 z psychologie. Ve kterém předmětu byl lepší?
-

# Z-skóry - příklad

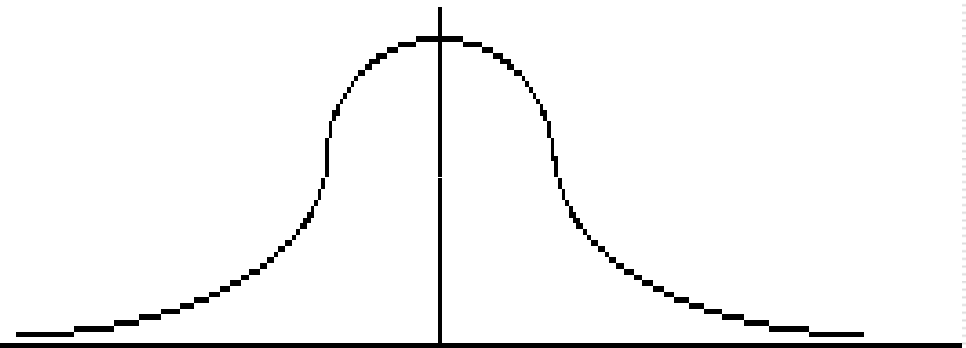
---

biologie



$$18 = \mu$$
$$6 = \sigma$$

psychologie



$$500 = \mu$$
$$100 = \sigma$$

---

# Z-skóry

---

- přímé porovnání není snadné – skóry z obou testů mají rozdílné průměry i směrodatné odchylky
  - $z$  skór = odchylka skóru od průměru vzhledem k velikosti směrodatné odchylky
  - $z = \text{odch. od průměru} / \text{směr. odch.}$
-

# Z-skóry - příklad

---

- skór z biologie:  $(26-18)/6 = 1,33$
  - skór psychologie:  $(620-500)/100=1,2$
  - v biologii byl student lepší – 1,33  
směrodatné odchylky nad průměrem
-

# Z-skóry

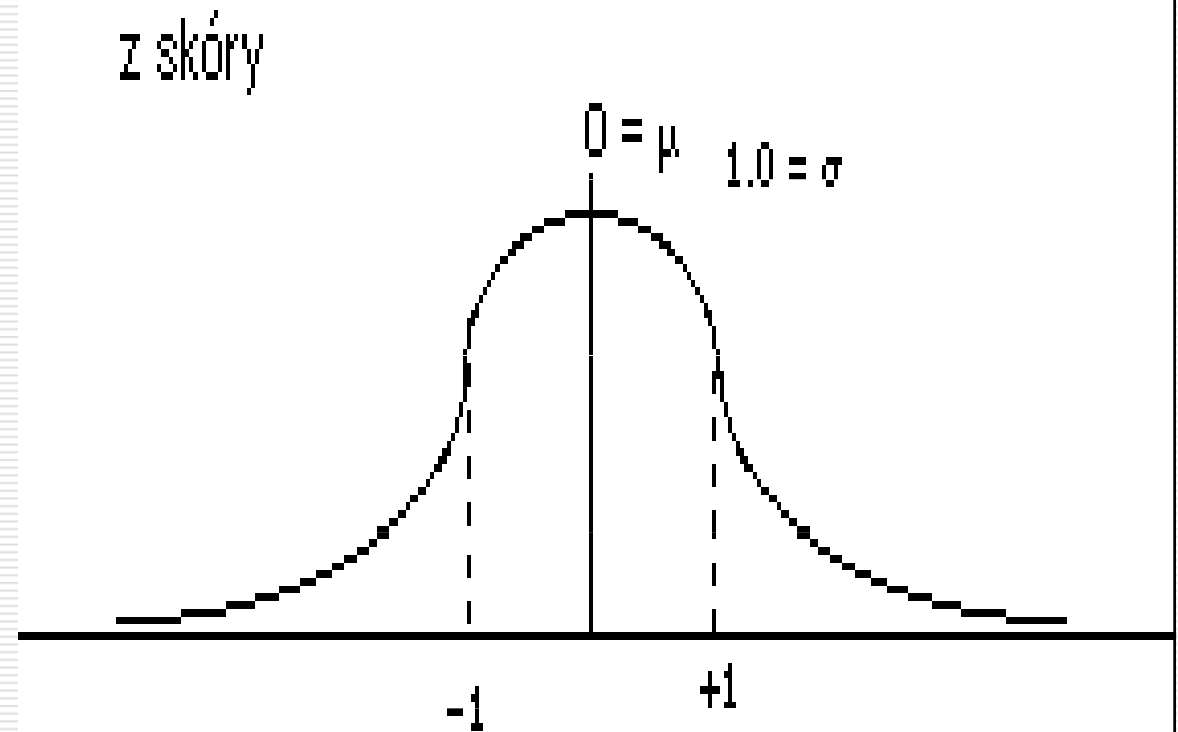
---

- z-skór přesně udává pozici každé hodnoty vzhledem k ostatním hodnotám
  - znaménko (+ nebo -) ukazuje, zda je hodnota nad nebo pod průměrem rozdělení
  - hodnota z-skóru upřesňuje, kolik směrodatných odchylek byla hodnota od průměru vzdálena
-

# Z-skóry

---

- průměr rozdělení z-skórů je vždy 0
- směrodatná odchylka je 1





# Z-skóry

---

**vzorec** pro výpočet z-skóru hodnoty  $X$

□ u populace:  $z = (X - \mu) / \sigma$

□ u vzorku:  $z = (X - m) / s$

---

# Z-skóry

---

- podobně můžeme i z-skór převést na hrubý skór, známe-li průměr a směrodatnou odchylku
-

# Z-skóry

---

- např. u stupnice IQ
  - $\mu = 100, \sigma = 15$
  - pro osobu se  $z = -3$  (3 směrodatné odchyly pod průměrem) bude IQ ?
-

# Z-skóry

---

- např. u stupnice IQ  $\mu = 100, \sigma = 15$
- pro osobu se  $z = -3$  (3 směrodatné odchylky pod průměrem) bude IQ

$$X = Z \cdot \sigma + \mu$$

$$X = -3 \cdot 15 + 100$$

$$X = 55$$

---

# Rozdělení z-skóru

---

- **tvar** rozdělení z-skóru je **stejný** jako tvar původního rozdělení hrubých skóru
  - průměr je 0, směrodatná odchylka 1
  - transformace změní jen označení hodnot na ose  $X$
-

# Pravděpodobnost

---

- postupy indukativní statistiky vycházejí z teorie pravděpodobnosti
- **pravděpodobnost**, že nastane určitý výsledek, **definujeme** jako podíl

$$P(A) = \frac{\text{počet pokusů, kdy nastal jev } A}{\text{celkový počet jevů}}$$

---

# Pravděpodobnost - příklady

---

- jaká je pravděpodobnost, že si z balíčku 52 karet vytáhneme určitou kartu (např. pikovou dámu) ?
-

# Pravděpodobnost - příklady

---

- jaká je pravděpodobnost, že si z balíčku 52 karet vytáhneme určitou kartu (např. pikovou dámu) ?

$$P(\text{piková dáma}) = f/N = 1/52 = 0,019 = 1,9\%$$

---



# Pravděpodobnost - příklady

---

- jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne trojka nebo šestka ?
-

# Pravděpodobnost - příklady

---

- jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne trojka nebo šestka ?

$$P(3 \text{ n. } 6) = f/N = 2/6 = 0,333 = 33,3\%$$

---

# Pravděpodobnost

---

- pravděpodobnost bývá uváděna nejčastěji jako **podíl** (0,33), **zlomek** ( $1/3$ ) nebo **procento** (33,3%)
  - pravděpodobnost určitého jevu nebo třídy jevů můžeme odhadnout z rozdělení hodnot (četností)
-

# Pravděpodobnost - příklady

---

- představme si, že máme krabici se 40 očíslovanými žetony s čísly 1 – 5
  - v tabulce jsou uvedeny absolutní i relativní četnosti jednotlivých čísel žetonů
-

# Pravděpodobnost

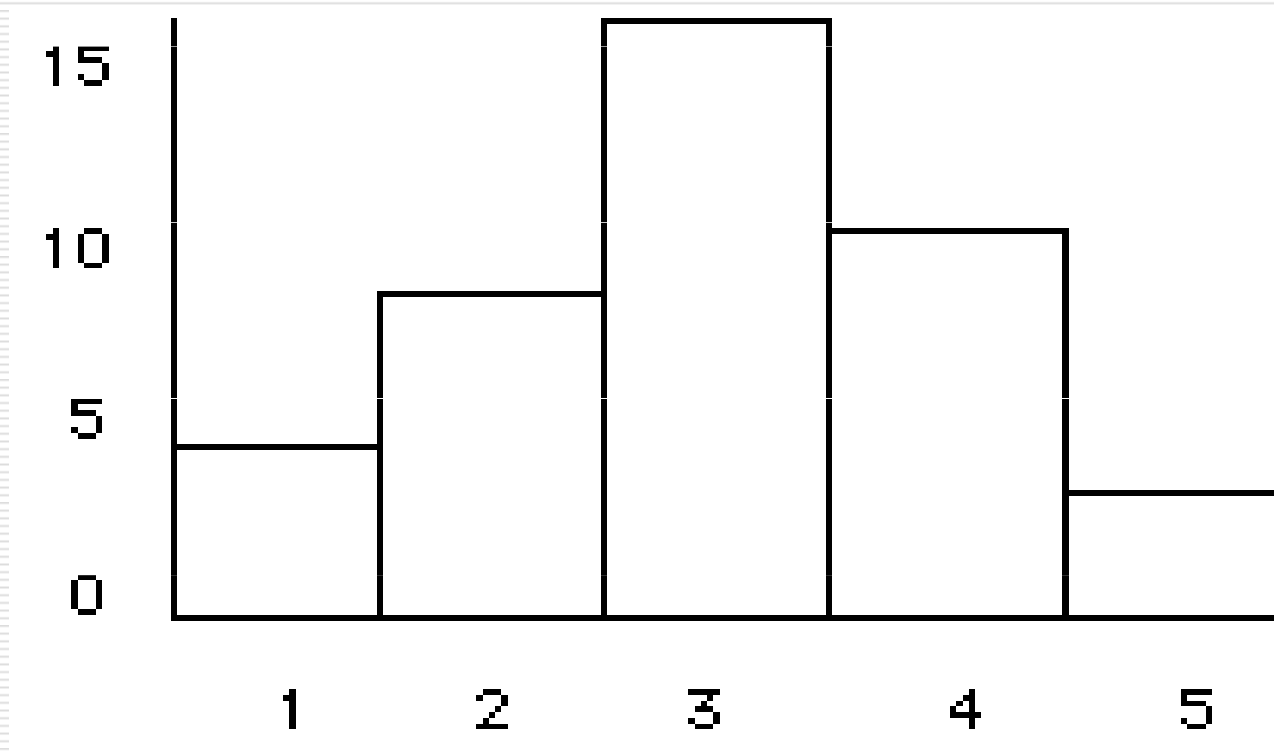
---

$X$	$f$	$p$
5	2	0,05
4	10	0,25
3	16	0,40
2	8	0,20
1	4	0,10

---

# Pravděpodobnost

---



# Pravděpodobnost - příklady

---

- vaším úkolem je vytáhnout 1 žeton
  - **jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem 3?**
-

# Pravděpodobnost

---

$X$	$f$	$p$
5	2	0,05
4	10	0,25
3	16	0,40
2	8	0,20
1	4	0,10

---



# Pravděpodobnost

---

- ❑ vaším úkolem je vytáhnout 1 žeton
  - ❑ jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem 3?
  - ❑  **$p(3) = f/N = 16/40 = 0,40$**   
nebo  $2/5$  či 40%
-

# Pravděpodobnost

---

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem vyšším než 2?**
-

# Pravděpodobnost

---

$X$	$f$	$p$
5	2	0,05
4	10	0,25
3	16	0,40
2	8	0,20
1	4	0,10

---

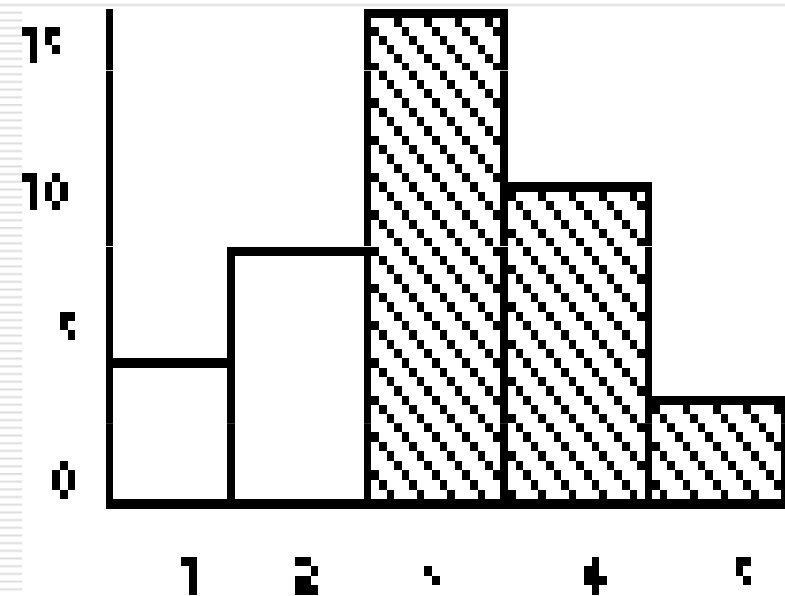
# Pravděpodobnost

---

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem vyšším než 2?

$$p(X > 2) = ?$$

$$0,05 + 0,25 + 0,40 \\ = \mathbf{0,70}$$



# Pravděpodobnost

---

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 5?**
-

# Pravděpodobnost

---

$X$	$f$	$p$
5	2	0,05
4	10	0,25
3	16	0,40
2	8	0,20
1	4	0,10

---

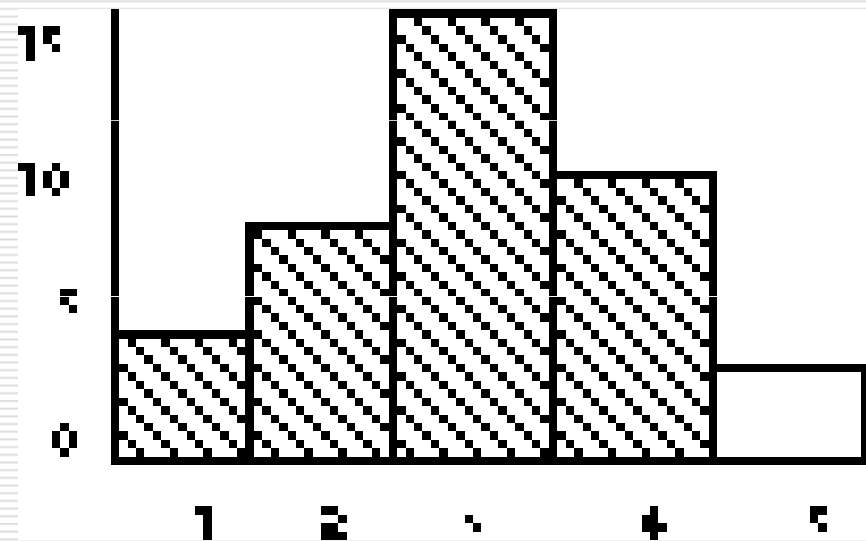
# Pravděpodobnost

---

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 5?

$$p(X < 5) = ?$$

$$0,10 + 0,20 + 0,40 + 0,25 = \mathbf{0,95}$$



# Pravděpodobnost

---

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 4 a vyšším než 1?**
-



# Pravděpodobnost

---

$X$	$f$	$p$
5	2	0,05
4	10	0,25
3	16	0,40
2	8	0,20
1	4	0,10

---

# Pravděpodobnost

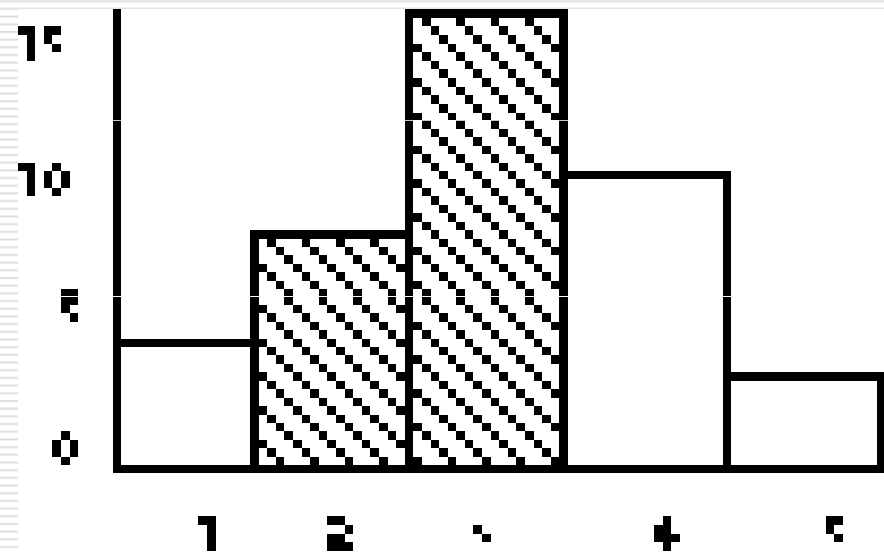
---

- Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete žeton s číslem nižším než 4 a vyšším než 1?

$$p(4 > X > 1) = ?$$

$$0,20 + 0,40 =$$

$$\mathbf{0,60}$$



# Pravděpodobnost

---

- pravděpodobnost odpovídá hustotě **oblasti pod křivkou** pro daný interval
-

# Kontrolní otázky

---

- základní typy grafů, výhody/nevýhody
  - odlehlá pozorování
  - výpočet a interpretace z-skóru
-

# Normální rozdělení

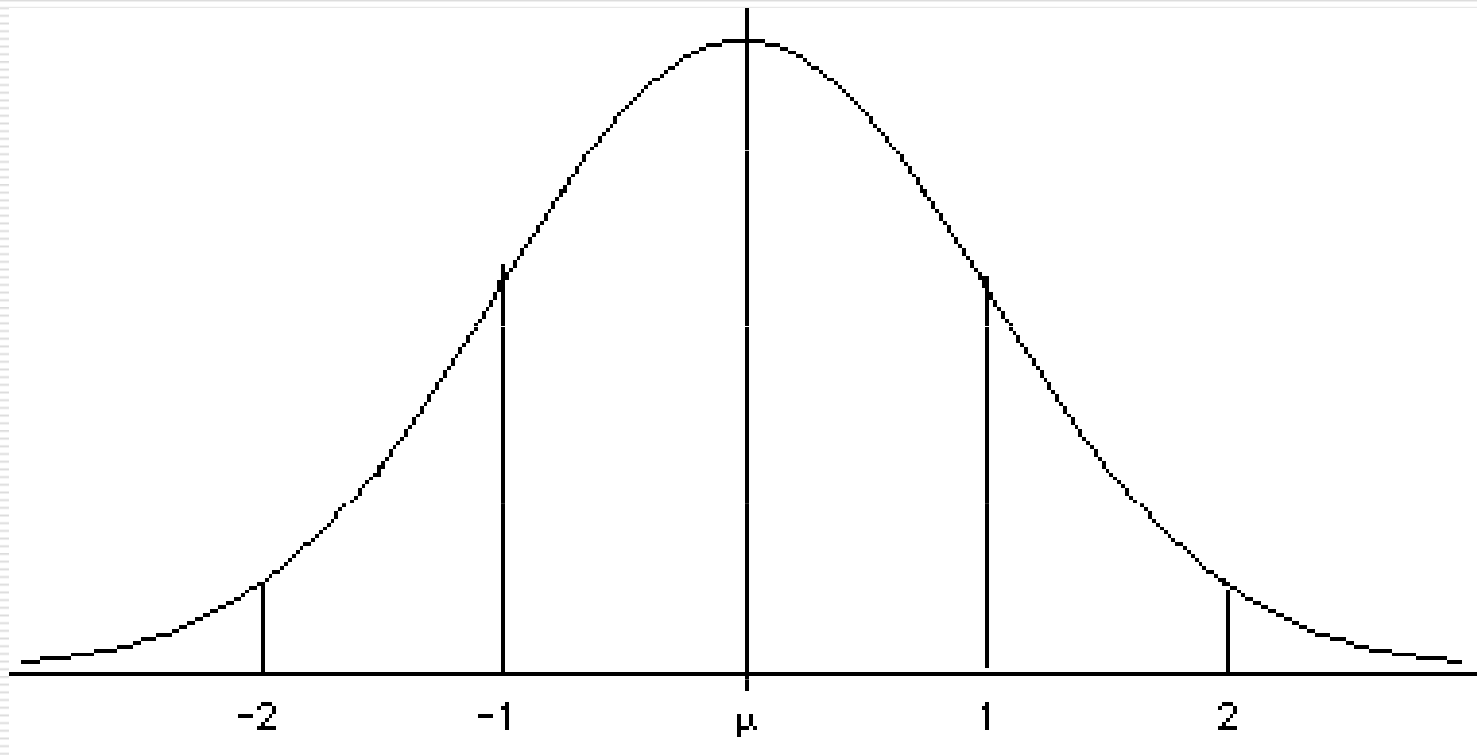
---

- normální rozdělení je symetrické, unimodální, zvonovitého tvaru
- označuje se i jako Gaussova křivka

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

# Normální rozdělení

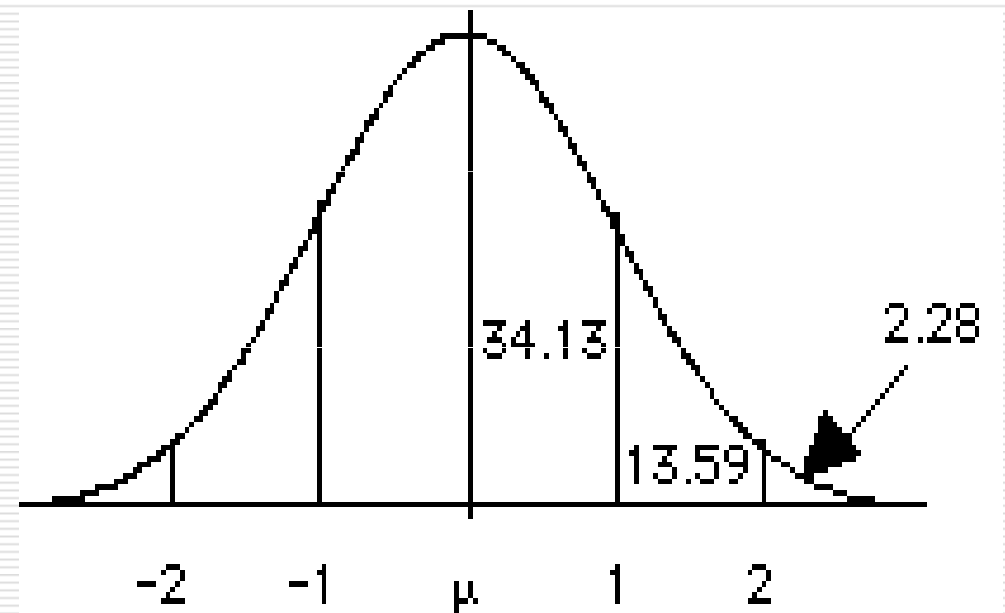
---



# Normální rozdělení

---

- 34.13% skóreů spadá mezi průměr a 1 směr. odchylku
- 13.59% hodnot spadá mezi 1. a 2. směr. odchylku
- 2.28% hodnot spadá nad 2. směr. odchylku



# Normální rozdělení

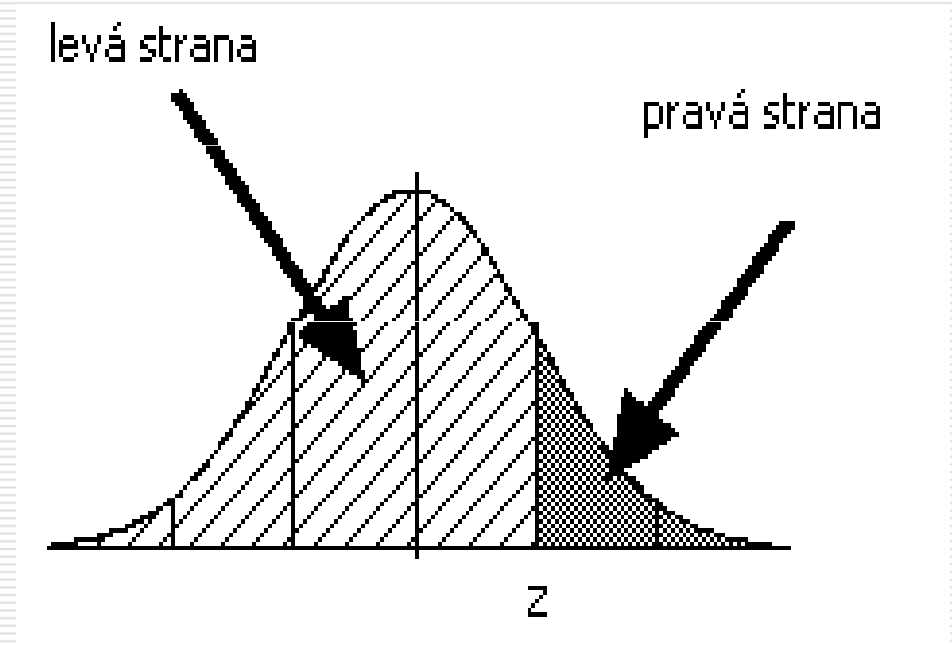
---

- tabulka normálního rozdělení (z rozdělení)
  - důležitý nástroj, obvykle jako apendix v učebnicích statistiky (spolu s dalšími tabulkami)
  - umožňuje zjistit hustotu oblasti pod křivkou (tj. pravděpodobnost) pro jednotlivé z-skóry
-



# Normální rozdělení

z	levá strana	pravá strana
0.00	0.5000	0.5000
0.01	0.5040	0.4960
...	...	...
0.30	0.6179	0.3821
0.31	0.6217	0.3783
...	...	...
1.00	0.8413	0.1587
...	...	...



# Normální rozdělení - příklady

---

- postup při zjišťování pravděpodobnosti z tabulky:
    - načrtnout si normální rozdělení, s hodnotou průměru a směr. odch.
    - zakreslit hledanou hodnotu (v přibližné vzdálenosti od průměru), vystínovat hledanou oblast
    - převést hodnotu  $X$  na  $z$ -skór
    - najít v tabulce pravděpodobnost
-

# Normální rozdělení - příklady

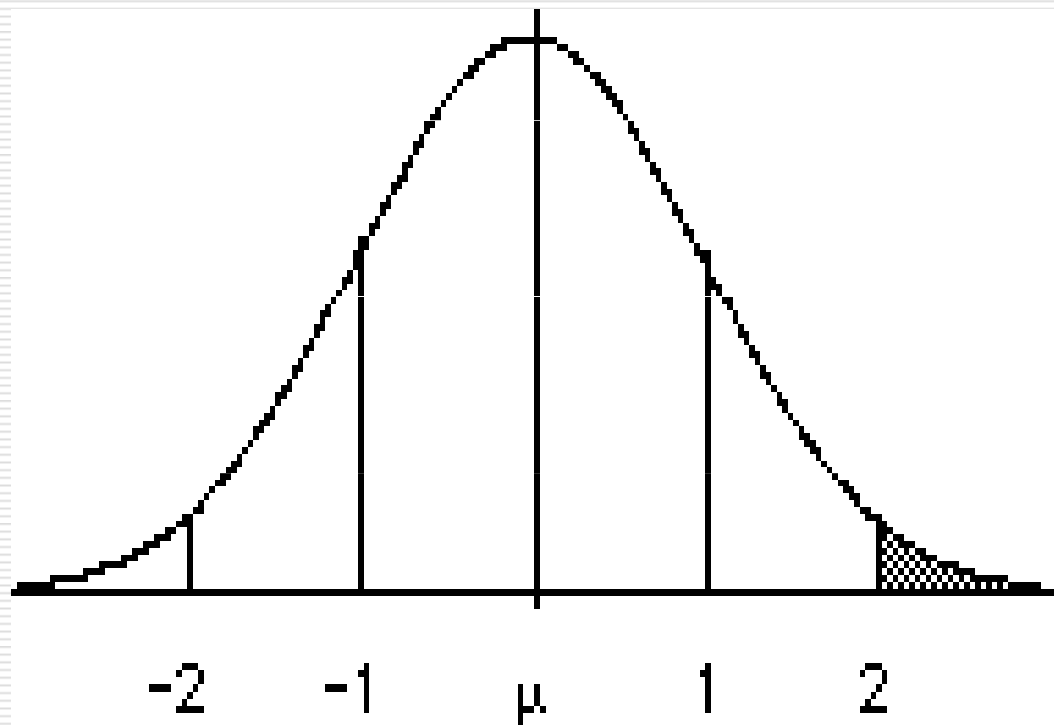
---

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 130 nebo vyšší? ( $\mu = 100, \sigma = 15$ )
-

# Normální rozdělení - příklady

---

□  $z = 2$



# Normální rozdělení - příklady

---

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 130 nebo vyšší?
  - $z = 2$
  - $p = 1 - (0.50 + 0.4772) = 0.0228$   
tj. **2,3%**
-

# Normální rozdělení - příklady

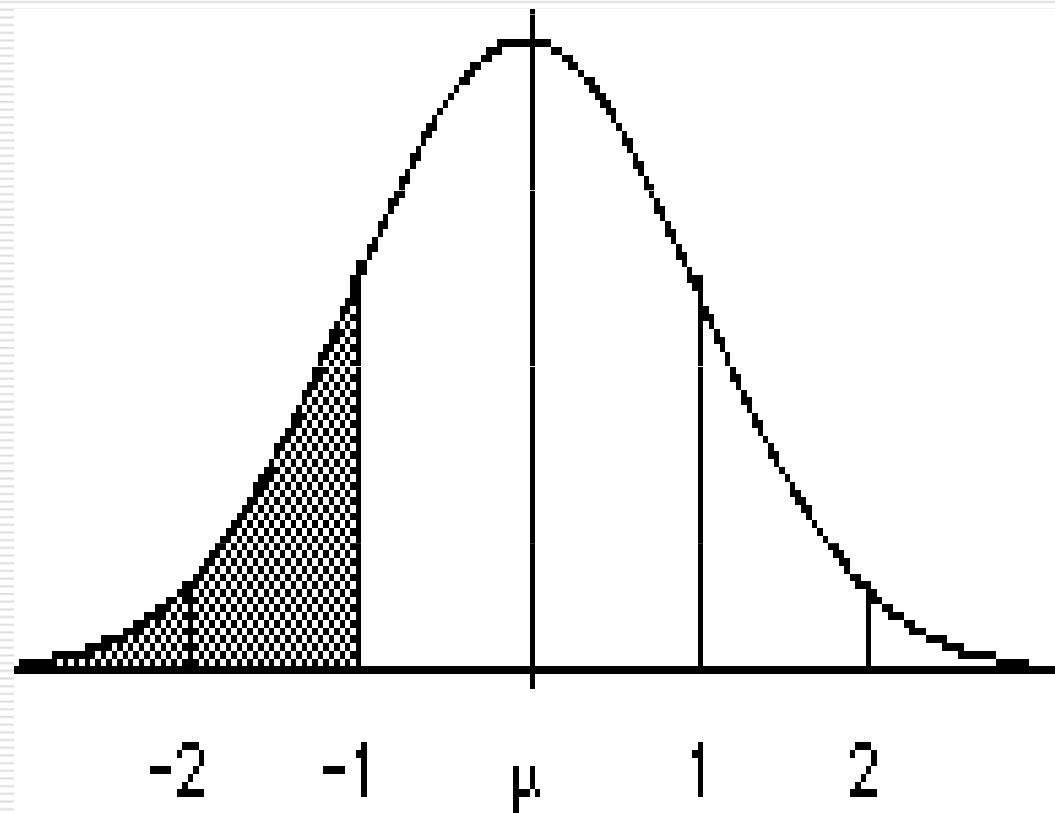
---

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 85 nebo nižší?
-

# Normální rozdělení - příklady

---

□  $z = -1$



# Normální rozdělení - příklady

---

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z populace bude mít IQ 85 nebo nižší?
  - $z = -1$
  - $p = 1 - (0.50 + 0.3413) = 0.1587$   
tj. **15,9%**
-



# Normální rozdělení - příklady

---

- postup při zjišťování z-skóru z tabulky:
    - načrtnout si normální rozdělení
    - vystínovat oblast odpovídající zadané pravděpodobnosti
    - v tabulce vyhledat příslušný z-skór
    - vypočítat z něj hrubý skór
-

# Normální rozdělení - příklady

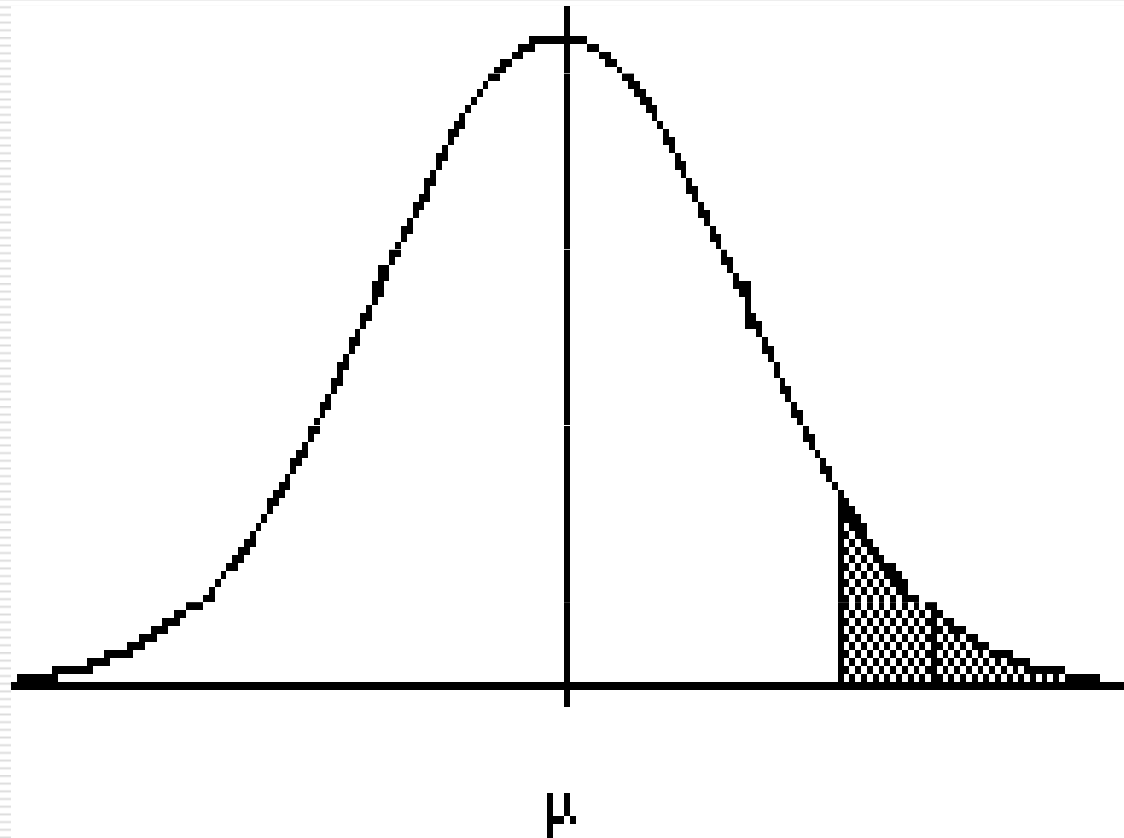
---

- Jakou minimální hodnotu IQ musí člověk mít, aby patřil mezi 5% osob s nejvyššími hodnotami IQ?
-

# Normální rozdělení - příklady

---

□  $p = 0.05$



# Normální rozdělení - příklady

---

- Jakou minimální hodnotu IQ musí člověk mít, aby patřil mezi 5% osob s nejvyššími hodnotami IQ?
  - $p = 0.05$
  - z tabulky (hledáme hodnotu nejbližší  $0.50 - 0.05$ , tj.  $0.45$ ):  **$z = 1.65$**
  - $X = (1.65) \times (15) + 100 = \mathbf{124.75}$
-

# Normální rozdělení - příklady

---

- někdy chceme zjistit pravděpodobnost, že skór bude spadat do určitého intervalu
  - postup:
    - načrtnout graf a vystínovat zadanou oblast
    - oba (ohraničující) skóry převést na z-skóry
    - vyhledat pravděpodobnosti  $<$  nebo  $>$  skóru
    - sečíst či odečíst pravděpodobnosti
-

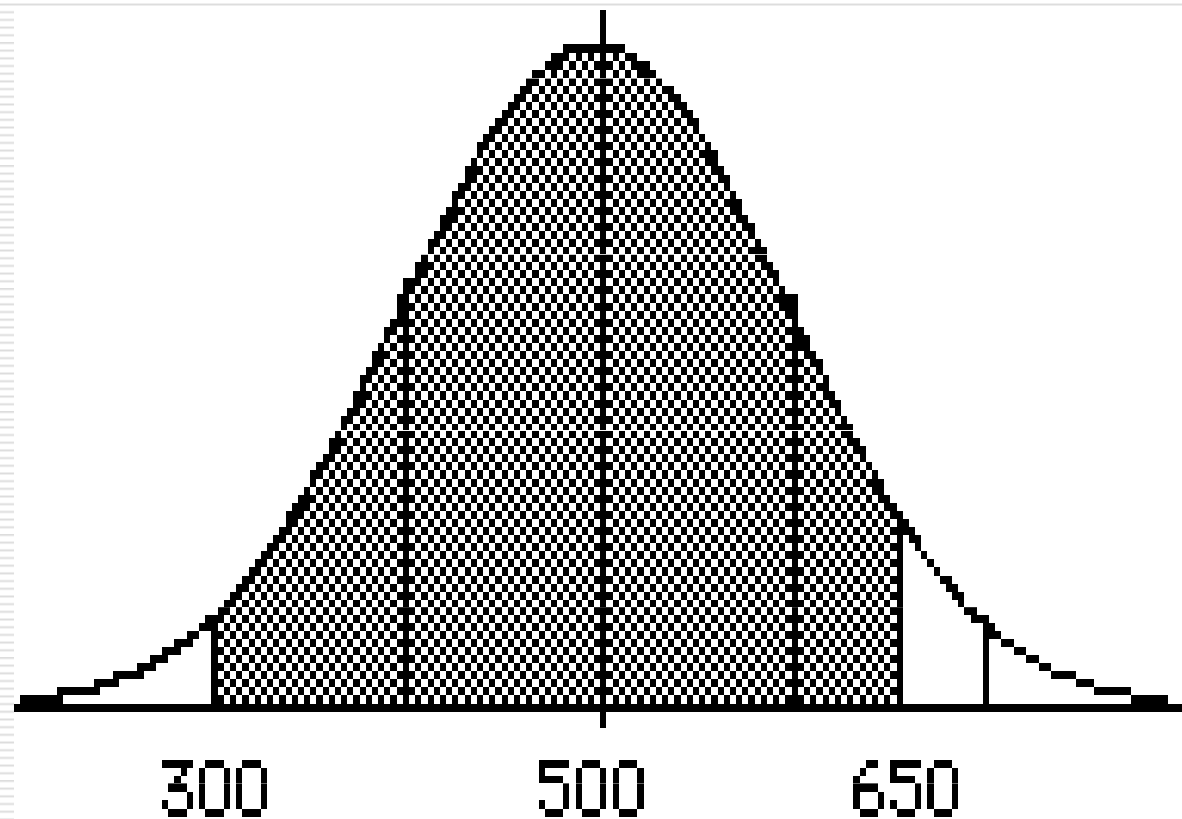
# Normální rozdělení - příklady

---

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude v testu z psychologie skórovat mezi 300 a 650 body? ( $\mu = 500$ ,  $\sigma = 100$ )
-

# Normální rozdělení - příklady

---



# Normální rozdělení - příklady

---

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude v testu z psychologie skórovat mezi 300 a 650 body? ( $\mu = 500$ ,  $\sigma = 100$ )
  - $p(300 < x < 650) = 0.4772 + 0.4332$   
**= 0.9104**
-



# Normální rozdělení - příklady

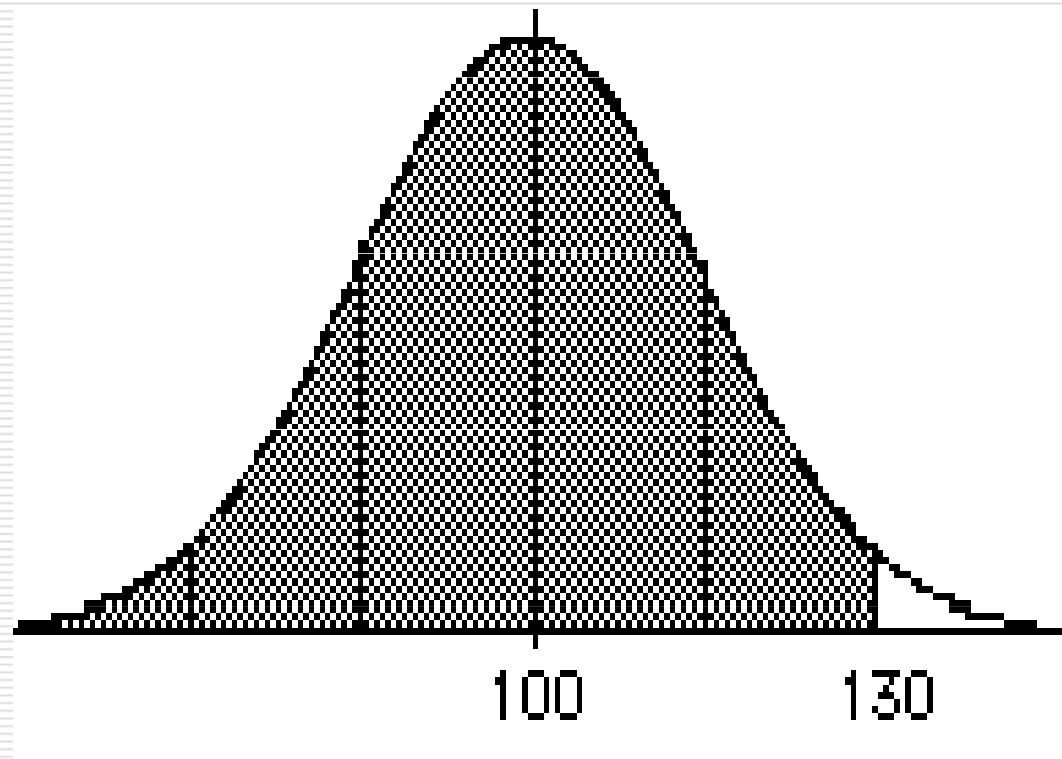
---

- příklad: kolik procent osob má nižší hodnoty IQ než člověk s IQ 130?
-

# Normální rozdělení - příklady

---

□  $z = 2$



# Normální rozdělení - příklady

---

□ Kolik procent osob má nižší hodnoty IQ než člověk s IQ 130?

□ z tabulky: pro  $z = 2$

$$p = 0.50 + 0.4772 = 0.9772$$

**97.72%** osob má nižší skór

---

# Kontrolní otázky

---

- výpočet a především interpretace z-skóru
  - normální rozdělení – charakteristiky
-

# Literatura

---

- Hendl: kapitoly 4 a 5
-