

STATISTIKA A PRAVDĚPODOBŇNOST

OJ205

statistický soubor

- Statistický soubor je posloupnost údajů o nějakých objektech.
- Typy těchto údajů nazýváme statistické znaky.
- Jejich počet pak určuje rozměr statistického souboru.
- Základní soubor (též populace) uvažuje všechny objekty daného typu.
- Statistický soubor je omezený výběr objektů ze základního souboru.

jednorozměrný statistický soubor

- **Rozsah** statistického souboru je počet jeho prvků.
- **Absolutní četnost** hodnoty (někdy též pouze četnost) v souboru je počet jejích výskytů.
- **Relativní četnost** je absolutní četnost podělená rozsahem souboru a udává se obvykle v procentech.
- **Kumulativní četnost** hodnoty je četnost hodnoty souboru plus četnost všech menších hodnot. Rozeznáváme opět absolutní a relativní kumulativní četnost.

charakteristiky

- Pro jednorozměrný statistický soubor zavádíme tzv. **charakteristiky polohy** a **charakteristiky variability**.
- **Charakteristiky polohy** shrnují potenciálně velké množství dat do několika málo čísel, které lze snadno interpretovat a vytvořit si tak hrubý úsudek o celém vzorku dat.
- **Charakteristiky variability** ukazují, jak je statistický soubor vnitřně konzistentní, čili jak moc se od sebe vzájemně liší hodnoty obsažené v souboru.

charakteristiky polohy

- **Modus:** je hodnota či třída s největší četností.
- **Aritmetický průměr** (značený avg) je součet hodnot ve statistickém souboru, podělený velikostí souboru.
- **Medián** je „prostřední“ hodnota v souboru po jeho setřídění. V případě, že datový soubor má sudý počet prvků, je to průměr ze dvou prostředních.

charakteristiky variability

Hlavní charakteristikou variability statistického souboru je rozptyl (též disperze nebo variance) značený s^2 . Je definován jako

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - avg)^2 = ((x_1 - avg)^2 + (x_2 - avg)^2 + \dots + (x_n - avg)^2) / n$$

dvourozměrný statistický soubor

- **Dvourozměrný statistický soubor** lze chápat jako dva jednorozměrné soubory, vzájemně provázané. Formálně jej můžeme reprezentovat jako posloupnost n dvojic, $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$.
- Důležitou vlastností dvourozměrného statistického souboru je **korelace statistických znaků**. Pojmem korelace rozumíme stupeň lineární závislosti znaků x a y , tedy to, do jaké míry hodnoty znaku y lineárně závisí na hodnotách znaku x .
- (Jinými slovy, to, jak dobře lze grafem závislosti y na x proložit přímkou.)

korelace znaků

- Formální zápis – (x) , (y) jsou směrodatné odchylky ch souborů pro znaky x a y):

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \text{avg}(x))(y_i - \text{avg}(y))}{n * s(x) * s(y)}$$

korelace znaků

- Hodnoty korelace se pohybují od -1 do 1.
- Pokud je korelace 0, jsou hodnoty znaků dokonale nezávislé.
- Pokud je korelace 1, jedná se o přímou úměrnost
- (čím větší je x , tím větší je y a hodnoty y lze z hodnot x získat jednoduše vynásobením nějakou kladnou konstantou).
- Pokud je korelace -1, jedná se o nepřímou úměrnost (čím větší je x , tím menší je y a hodnoty y lze z hodnot x získat jednoduše vynásobením nějakou zápornou konstantou).

pravděpodobnostní rozložení

- **Náhodná proměnná**, je vlastnost, jejíž hodnotu neznáme, protože o ní nemáme dost informací nebo protože dosud žádné hodnoty nenabyla.
- Většinou máme nějaké informace o dané vlastnosti, které nám mohou vyloučit nebo téměř vyloučit některé hodnoty, například minulá pozorování.

pravděpodobnostní rozdělení

- Pravděpodobnostní rozdělení (pravděpodobnostní rozložení, pravděpodobnostní distribuce) jevu či vlastnosti , je funkce, která pro jednotlivé možné hodnoty ukazuje pravděpodobnost, s jakou vlastnost nabude této hodnoty.

- Formálně se jedná o funkci

$$: \rightarrow [0, 1]$$

kde je množina ch hodnot příslušné vlastnosti a

$[0, 1]$ je uzavřený interval od nuly do jedné, tedy

$$\forall \in (() \leq 1 \wedge () \geq 0).$$

pravděpodobnostní rozdělení

- Musí platit, že součet hodnot funkce pro všechny možné hodnoty je 1, tedy

$$\sum_{x \in X} p(x) = 1$$

- Zároveň platí:

- $(\cdot) = (\cdot = \cdot)$

(Hodnota pravděpodobnostního rozložení (malé \cdot) je rovna pravděpodobnosti (velké \cdot , tedy obecná pravděpodobnost), s jakou vlastnost \cdot nabude hodnoty \cdot . Dvojice (\cdot, \cdot) , tedy množina všech \cdot ch hodnot vlastnosti spolu s pravděpodobnostním rozložením, se nazývá pravděpodobnostní prostor.)

určení pravděpodobnostního rozložení

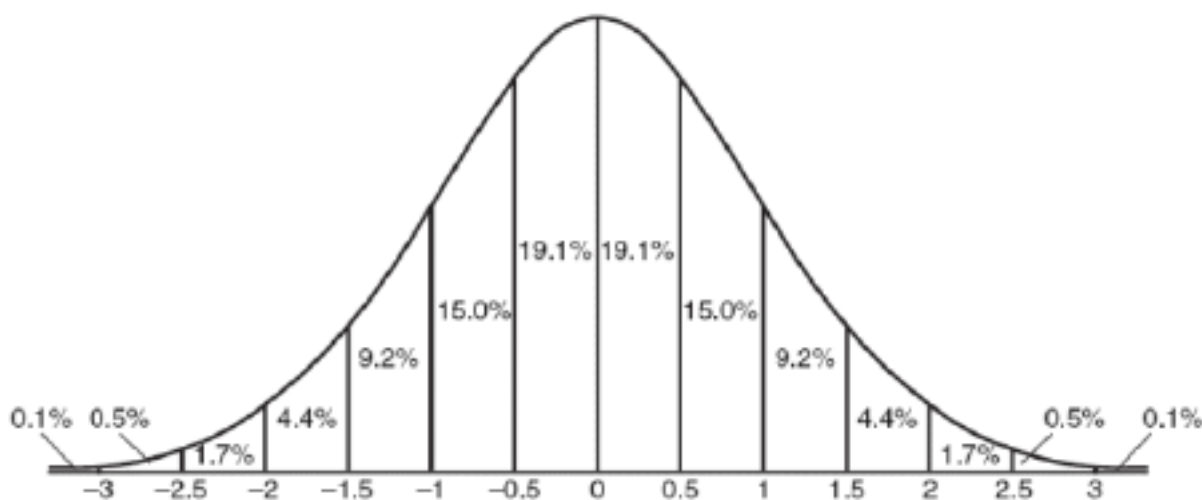
- První možnost: použití nějaké „ideální“ funkce, které vychází z našich předpokladů o dané vlastnosti. (například hod kostkou)
- Druhá možnost: určovat pravděpodobnostní rozložení na základě měření provedeného v minulosti, které bylo zachyceno ve statistickém souboru. (například pravděpodobnostní rozložení slov, sousloví, slovních druhů v jazyku)

uniformní pravděpodobnostní rozložení

- Uniformní rozložení je takové, v němž všechny hodnoty mají přibližně stejnou pravděpodobnost. Grafem jsou tedy body uspořádané přibližně do přímky vodorovné s osou x .
- Příkladem může být pravděpodobnostní rozložení sledků hodu vyváženou kostkou.

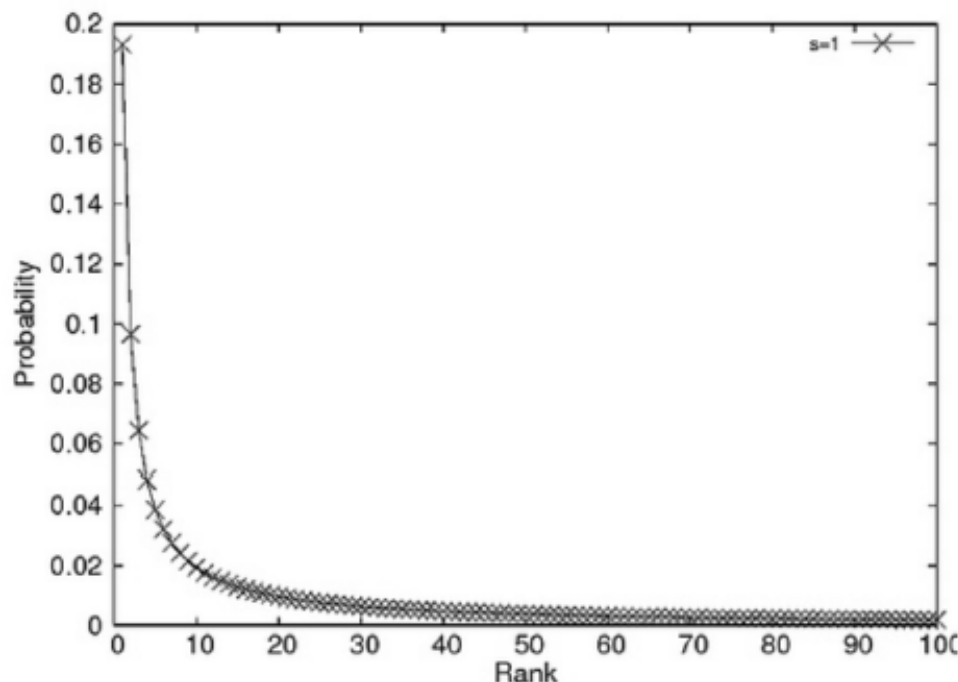
normální pravděpodobnostní rozložení

- Normální rozložení se vyznačuje tím, že nejpravděpodobnější hodnoty jsou blízké průměru a s větší odchylkou od průměru pravděpodobnost klesá.
- Graf takového rozložení má tvar zvonu, např.:



Zipfovo pravděpodobnostní rozložení

- Zipfovo rozložení: několik málo nejčastějších hodnot má velkou pravděpodobnost, s každou další hodnotou (setřídění od nejčastější) tato pravděpodobnost prudce klesá.



Zipfův zákon

- Zipfovo rozložení s_{tižně} popisuje velké množství jevů, proto se někdy označuje jako „Zipfův zákon“.
- Zejména v přirozeném jazyce tento zákon platí téměř všude: téměř vždy je frekvence (nebo ekvivalentně – pravděpodobnost výskytu) zhruba nepřímo úměrná pořadí podle této frekvence; to platí pro slova, dvojice slov, slovní druhy, syntaktické vztahy, sémantické kategorie a mnohá další.
- Frekvence nejčastějších slovních tvarů v angličtině: „the“ má relativní četnost 7 %, druhé „of“ má 3,5 % a více než polovina slov ch korpusů je pokryta 135 nejčastějšími slovy (stoplist)

distribuční funkce

- **Pravděpodobnostní rozložení** je pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude určité hodnoty (resp. zda patří do dané třídy), čili $P(X = x) = P(X = x)$, a její hodnoty odpovídají relativním četnostem ve statistickém souboru.
- **Distribuční funkce** (cumulative distribution function) , je pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude určité hodnoty nebo menší, čili $P(X \leq x) = P(X \leq x)$.
- Její hodnoty odpovídají kumulativním relativním četnostem ve statistickém souboru. Hodnoty distribuční funkce jsou také dobře známé jako tzv. percentil. Hodnota distribuční funkce (percentil) mediánu statistického souboru je 0,5.

náhodný vektor

- Náhodný vektor je posloupnost náhodných veličin (počasí). Jeho pravděpodobnostní rozložení můžeme modelovat s využitím vícerozměrného statistického souboru.
- Pro dvourozměrný náhodný vektor (X, Y) je hodnota pravděpodobnostního rozložení $(x, y) = (X = x \wedge Y = y)$.
- Lze definovat i distribuční funkci pro náhodný vektor, např. pro dvourozměrný náhodný vektor je distribuční funkce analogicky definována jako $(x, y) = (X \leq x \wedge Y \leq y)$.

podmíněná pravděpodobnost

- **Podmíněná pravděpodobnost** je motivována potřebou formalizovat to, že často máme kromě pravděpodobnostního rozložení daného jevu další informace o jiném jevu, který s původním může, ale nemusí souviset.
- Podmíněnou pravděpodobnost zapisujeme (\mid) a čteme „pravděpodobnost jevu za předpokladu, že nastal jev “.
- Podmíněnou pravděpodobnost lze vypočítat:
$$(\mid) = (,) \mid ()$$
kde $(,)$ je pravděpodobnost, že jevy a nastaly současně.

nezávislé jevy

- Skrze podmíněnou pravděpodobnost definujeme i tzv. **nezávislé jevy**. Intuitivně platí, že pokud jsou jevy nezávislé, pak by nám informace o jednom z nich neměla dát žádnou informaci o druhém z nich. Jevy A a B jsou nezávislé, pokud

$$P(A|B) = P(A) \wedge P(B|A) = P(B)$$

čili jsou nezávislé, pokud to, jestli nastal jev A , nijak neovlivní pravděpodobnost jevu B a naopak.

- Jen a pouze pro nezávislé jevy pak platí vzorec, který se snadno odvodí z nezávislosti jevů a z definice podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(A, B) = P(A) * P(B)$$

