HRW, Kapitola 16:

Otázka 2. Na obrázku je vynesena časová závislost zrychlení $a(t)$ pro částici, která vykonává harmonický pohyb.

(a) Kterému z číslovaných bodů odpovídá poloha $-x_m$? 2

(b) Je rychlost částice v bodě 4 kladná, záporná nebo nulová?

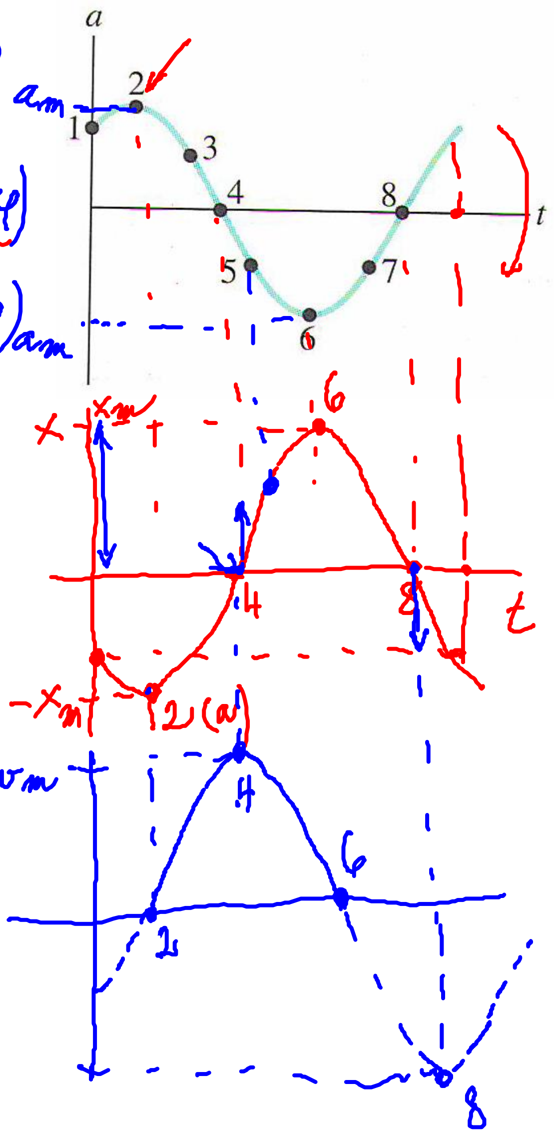
(c) Odpovídá bodu 5 poloha částice $-x_m$, $+x_m$, 0, mezi $-x_m$ a 0, nebo mezi 0 a $+x_m$?

$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi)$

$v = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$

$a_m = \omega^2 \cdot x_m$



HRW, Kapitola 16:

Otázka 3. Výchylka kmitající částice je popsána vztahem

$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.

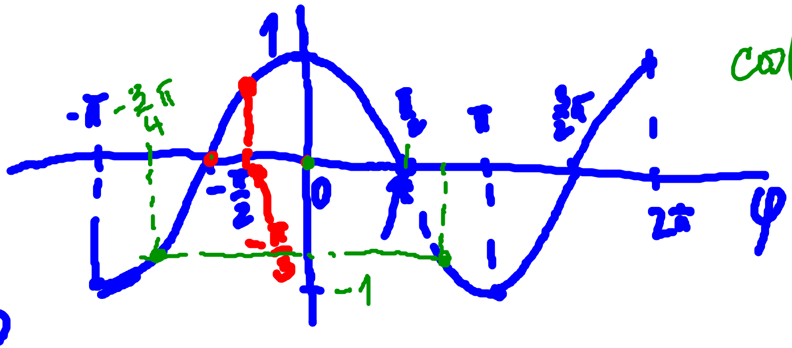
(a) (c); (d) (b)

Určete, zda se částice v čas t = 0 nachází v $-x_m$, $+x_m$, v počátku, mezi $-x_m$ a 0, nebo mezi 0 a $+x_m$, jestliže je φ rovno (a) π/2, (b) -π/3, (c) -3/4 π a (d) 3/4 π.

1) $t = 0$: $x(t=0) = x_m \cdot \cos(\omega\, 0 + \varphi_0) = x_m \cdot \cos \varphi_0$

a) $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$



$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$x = x_m \cdot 0 = 0$

b) $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \in (0, 1)$ $x = x_m \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \in (0; x_m)$

$(0; 1)$

c) $\varphi_0 = -\frac{3}{4}\pi$ $\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \in (-1; 0)$ $x = x_m \cdot \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \in (-x_m, 0)$

d) $\varphi_0 = \frac{3}{4}\pi$ $\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ $x \in (-x_m, 0)$

Malé těleso o hmotnosti 0,12 kg harmonicky kmitá s amplitudou 8,5 cm a periodou 0,2 s.

(a) Jaká největší síla působí na částici?
(b) Předpokládejme, že kmitání je vyvoláno pružinou. Jaká je tuhost pružiny?

$x = x_m \cdot \sin(\omega t)$

$F = m \cdot a = -k \cdot x$

$v = \omega x_m \cdot \cos(\omega t)$

$a = -\omega^2 x_m \sin(\omega t)$

$$F = m \cdot a = -\underbrace{m \cdot \omega^2 \cdot x_m}_{F_m} \cdot \sin(\omega t)$$

$$F_m = m \cdot \omega^2 x_m$$

$x_m = 8{,}5 \cdot 10^{-2}\,m$ $\quad m = 0{,}12\,kg$ $\quad T = 0{,}2\,s$

$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

$$F_m = 0{,}12 \left(\frac{2\pi}{0{,}2}\right)^2 \cdot 8{,}5 \cdot 10^{-2}\,N =$$

$10{,}06\,N$

b) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m \cdot \omega^2 = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 =$

$$= 0{,}12\ \frac{4\pi^2}{0{,}2^2}\ N/m = \underline{118{,}43\ N/m}$$

Daná částice harmonicky kmitá s frekvencí 0,25 Hz kolem rovnovážné polohy $x = 0$. V čase $t = 0$ měla výchylku x = 0,37 cm a nulovou rychlost. Určete pro její kmitání

(a) periodu,
(b) úhlovou frekvenci,
(c) amplitudu,
(d) výchylku jako funkci času
(e) rychlost jako funkci času
(f) maximální rychlost
(g) maximální zrychlení,
(h) výchylku v čase t = 3 s,
(i) rychlost v čase t = 3 s.

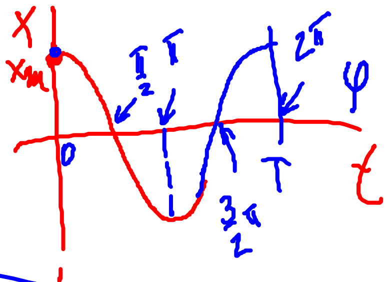
$f = 0{,}25\,Hz$

$x(t=0) = 0{,}37\cdot 10^{-2}\,m$

$v(t=0) = 0\,m/s$

$\Downarrow$

$x(t=0) = x_m$



a) $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25}\,s = 4\,s$

b) $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 0{,}25\,s^{-1} = \frac{\pi}{2}\,s^{-1}$

c) $x_m = 0{,}37\cdot 10^{-2}\,m$

d) $x = x_m\cdot\cos(\omega t) = 3{,}7\cdot 10^{-3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$

e) $v = \frac{dx}{dt} = -\underbrace{\omega\cdot x_m}_{v_m}\cdot\sin(\omega t) = -\underbrace{\frac{\pi}{2}\cdot 3{,}7\cdot 10^{-3}}_{0{,}0057}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) =$

$= -0{,}0058\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) = -5{,}8\cdot 10^{-3}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

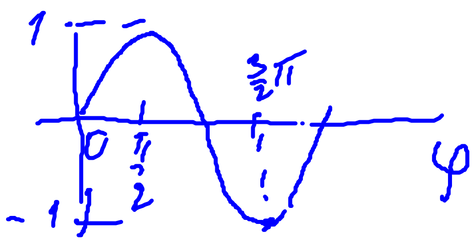
f) $v_{max} = 0{,}0058\,m/s$

g) $a_m = \omega^2\cdot x_m = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 0{,}0037\,m/s^2 = 0{,}009\,m/s^2$

h) $x(t=3s)$ $\quad x(t=3s) = 3{,}7\cdot 10^{-3}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)}_{0} = 0\,m$

i) $v(t=3s)$

$v(t=3s) = -5{,}8\cdot 10^{-3}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)}_{-1} = +5{,}8\cdot 10^{-3}\,m\cdot s^{-1}$



Těleso o hmotnosti 0,10 kg osciluje tam a zpět v přímém směru. Jeho výchylka, měřená od počátku souřadnic, je popsána vztahem

$x = (10\ \mathrm{cm})\ \cos\left[(10\ \mathrm{rad.s^{-1}})\ t + \frac{1}{2}\pi\ \mathrm{rad}\right].$

a) Jaká je frekvence kmitů?
b) Jakou maximální rychlostí se těleso pohybuje?
c) Jaké je největší zrychlení tělesa? Při jaké hodnotě výchylky je zrychlení největší?
d) Určete časovou závislost síly, která působí na těleso a vyvolává uvedené kmitání.

[a) 1,59 Hz; b) 1 m.s^{-1}; c) 10 m.s^{-2}; d) …]

$m = 0{,}1\,kg$ $\quad x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ $\quad F = kx = m \cdot a$

$x_m = 10\,cm = 0{,}1\,m$ $\quad F = \underbrace{-\omega^2 m x_m}_{a_m} \cos(\omega t + \varphi)$

$\omega = 10 \cdot s^{-1}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}\,rad$

a) $f = ?$ $\quad \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\pi}\,Hz = 1{,}59\,Hz$

b) $v_m = \omega \cdot x_m = 10 \cdot 0{,}1\,m \cdot s^{-1} = \underline{1\,m \cdot s^{-1}}$

c) $a_m = \omega^2 \cdot x_m = 10^2 \cdot 0{,}1\,m\,s^{-2} = \underline{10\,m \cdot s^{-2}}$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

d) $F = -F_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) = m \cdot a = -kx$

$a = -\omega^2 \cdot x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \underline{-10 \cdot \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}$

$F = m \cdot a = -m \cdot \underbrace{\omega^2 \cdot x_m}_{a_m} \cdot \cos(\omega t + \varphi) =$ $\quad \omega^2 = \frac{k}{m}$

$= -0{,}1\,kg \cdot 10\,m/s^2 \cdot \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) =$ $\quad \underline{k = \omega^2 \cdot m}$

$= \underline{-1\,N \cdot \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}$

Výchylka harmonicky kmitající částice je v jistém okamžiku rovna jedné polovině amplitudy. Jaká část celkové mechanické energie má v tomto okamžiku formu energie
a) kinetické a
b) potenciální?
c) Při jaké výchylce má jedna polovina celkové mechanické energie formu energie kinetické? Vyjádřete hledanou výchylku pomocí amplitudy.

[a) 3/4 E_C; b) 1/4 E_C; c) $x_m/\sqrt{2}$]

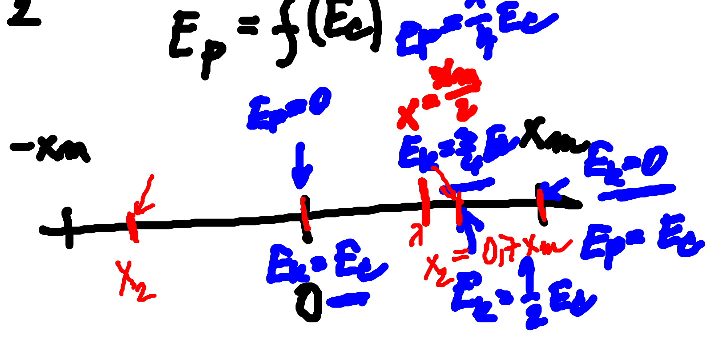
$X = \frac{x_m}{2}$ $\quad E_k = f(E_c)$ $\quad E_p = f(E_c)$

$E_c = E_k + E_p \Rightarrow E_k =$

$E_k = \frac{1}{2} m v^2$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2$

$E_c = \frac{1}{2} k x_m^2$



$$E_p\left(x = \frac{x_m}{2}\right) = \frac{1}{2} k \left(\frac{x_m}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} k \frac{x_m^2}{4} = \frac{1}{2} k x_m^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} E_c$$

$$E_k = E_c - E_p = \frac{3}{4} E_c$$

b) x_2 $\quad E_k = E_p = \frac{1}{2} E_c$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{k} x_2^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} \frac{1}{2} \cancel{k} x_m^2$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2} x_m^2$$

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{x_m^2}{2}} = \pm \frac{x_m}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}7 \cdot x_m$$