MATEMATICKÝ APARÁT:

VEKTORY, SOUŘADNÉ SYSTÉMY,

PRŮBĚH FUNKCE,

DERIVACE, INTEGRÁLY,

KOMPLEXNÍ ČÍSLA.

1. Vektory ve fyzice

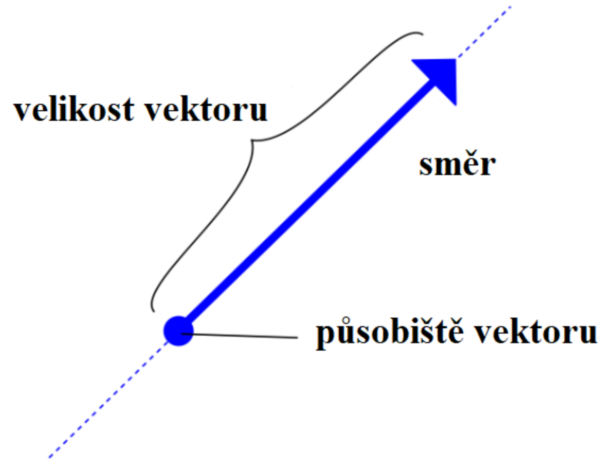
1.1 Základní pojmy

Vektory jsou fyzikální veličiny, které jsou charakterizovány

- **velikostí** (v příslušných fyzikálních jednotkách),
- **orientovaným směrem** v prostoru.

Příklady vektorů: rychlost, zrychlení, síla, intenzita elektrického pole.

Nulový vektor (symbol $\vec{0}$) je vektor, jehož velikost se rovná nule. Nulový vektor nemá směr.

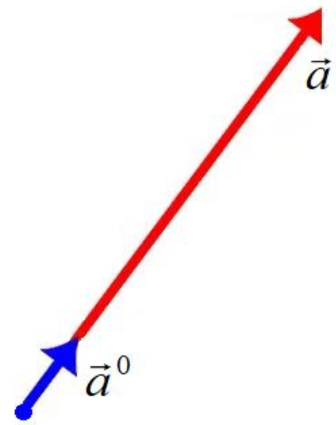


Geometrický obraz vektoru

Velikost libovolného vektoru $\vec{a}$ označujeme a nebo $|\vec{a}|$.

Jednotkový vektor $\vec{a}^{\,0}$ ve směru vektoru $\vec{a}$ je vektor, který má stejný směr a orientaci jako vektor $\vec{a}$, a jeho velikost se rovná jedné

$$\vec{a}^{\,0} = \frac{\vec{a}}{a}.$$

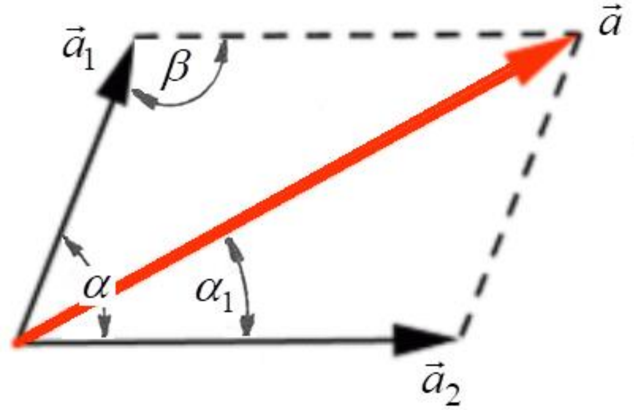


1.2 Sčítání (skládání) vektorů

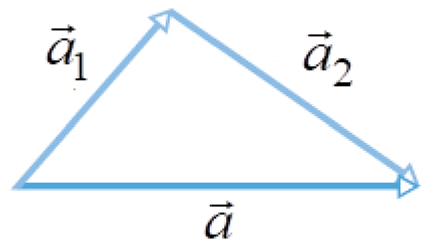
Sčítat můžeme pouze vektory stejného druhu,

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 .$$

Vektory se společným působištěm sčítáme geometricky.



Sčítání vektorů



Určení součtu výpočtem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\beta \text{ (kosinová věta)},$$

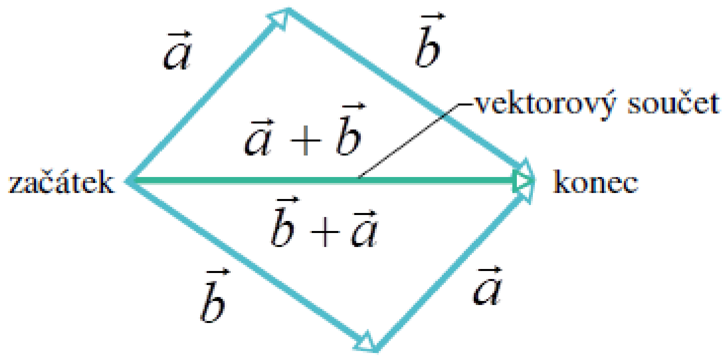
$$\alpha + \beta = \pi,\ \cos\beta = -\cos\alpha,$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\beta} \text{ (velikost výslednice)},$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{a}\sin\alpha \text{ (sinová věta, směr výslednice)}.$$

Platí **zákon komutativní**,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} .$$



Platí **zákon asociativní**,

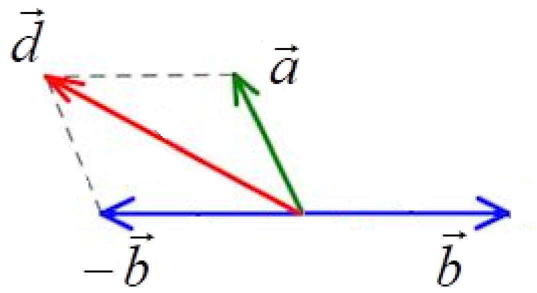
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

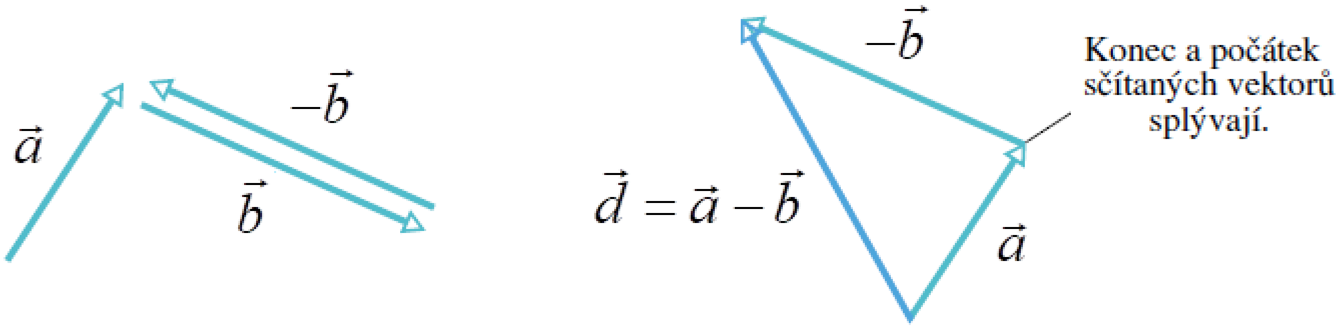
1.3 Odčítání vektorů

Vektorem opačným k vektoru $\vec{b}$ rozumíme vektor $-\vec{b}$, který má stejnou velikost a opačný směr.

Rozdíl $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$ dvou vektorů určíme jako součet vektoru $\vec{a}$ s vektorem $-\vec{b}$,

$$\vec{d}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$





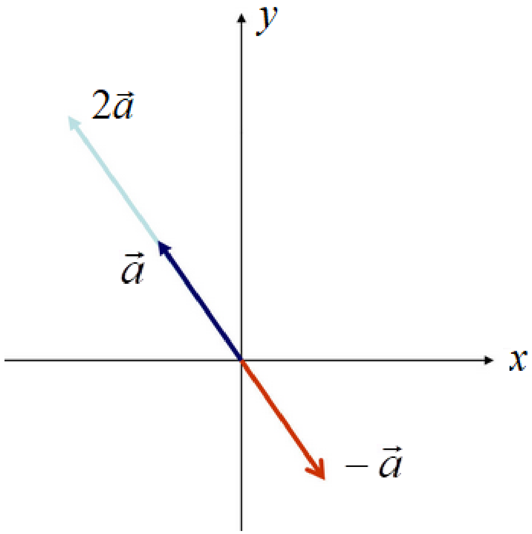
Odčítání vektorů

1.4 Násobení vektoru skalárem

Násobení vektoru $\vec{a}$ skalárem k:

$$\vec{b} = k\vec{a},$$

$$b = |k|a.$$



Je-li k kladné, má vektor $\vec{b}$ stejný směr jako vektor $\vec{a}$.

Je-li k záporné, má vektor $\vec{b}$ opačný směr než vektor $\vec{a}$.

Pokud vektor $\vec{a}$ dělíme skalárem $k \neq 0$, výsledkem je násobení vektoru převrácenou hodnotou $\frac{1}{k}$.

Příklady

Vektor $\vec{a} = (3, -2, 1)$ násobíme skalárem $k = 2$, výsledkem je vektor $\vec{b} = (6, -4, 2)$.

Vektor $\vec{c} = (-2, 0, 4)$ násobíme skalárem $k = -\frac{1}{2}$, výsledkem je vektor $\vec{d} = (1, 0, -2)$.

1.5 Analytické vyjádření vektorů

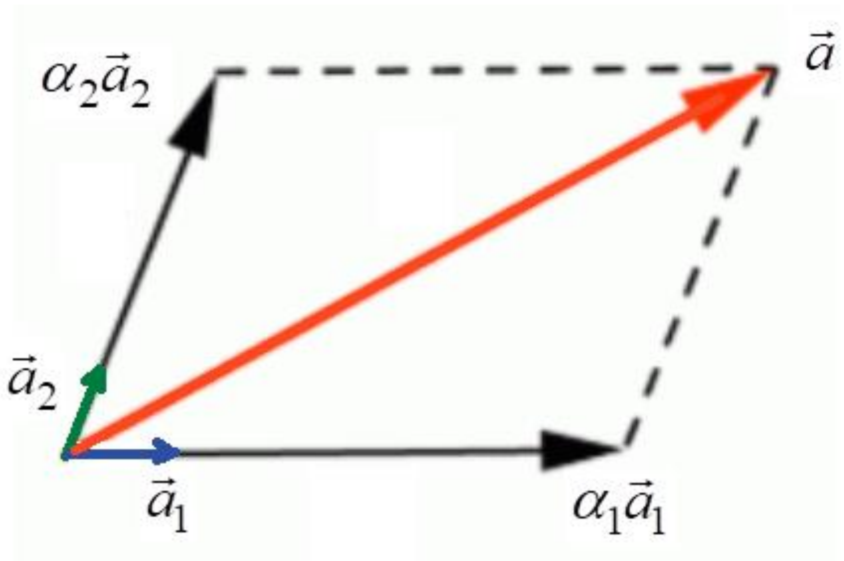
Leží-li obrazy tří vektorů $\vec{a}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ v jedné rovině, říkáme, že tyto vektory jsou **komplanární**. Platí

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 .$$

Vektor $\alpha_1\vec{a}_1$ je složkou vektoru $\vec{a}$ ve směru daném směrem vektoru $\vec{a}_1$, vektor $\alpha_2\vec{a}_2$ je složkou ve směru vektoru $\vec{a}_2$.

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – **bázové (základní) vektory**.

α_1, α_2 – **souřadnice vektoru** $\vec{a}$.



Rozklad vektoru do dvou směrů

Libovolný vektor $\vec{a}$ v prostoru můžeme vyjádřit pomocí nekomplanárních základních vektorů $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$,

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 .$$

Rozklad libovolného vektoru $\vec{a}$ v ortogonálním pravotočivém systému jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, které určují směry os x, y, z:

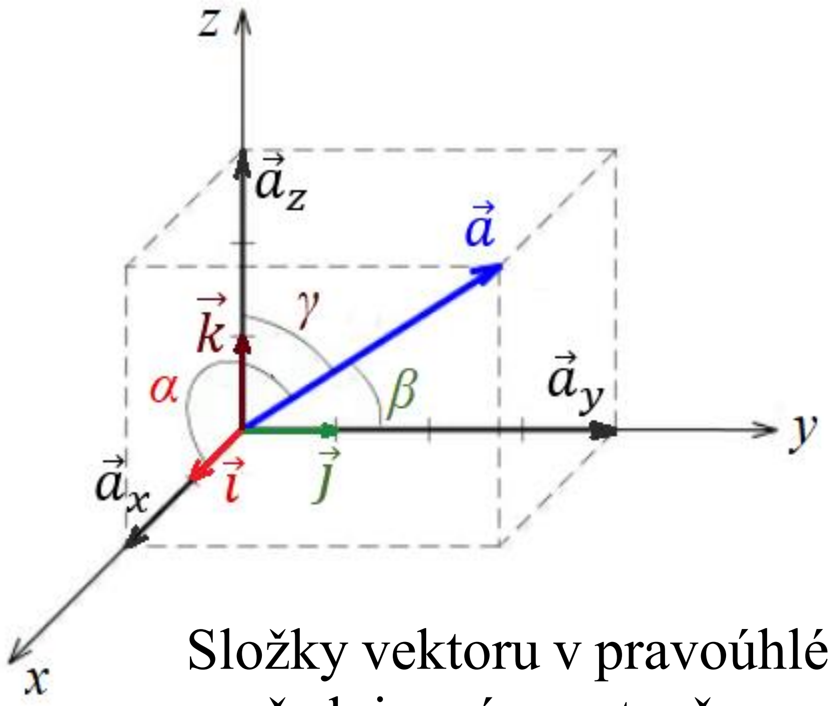
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z .$$

Vektory $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$ jsou **složkami vektoru** $\vec{a}$ v daném systému $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$$\vec{a}_x = a_x \vec{i}\,,\ \vec{a}_y = a_y \vec{j}\,,\ \vec{a}_z = a_z \vec{k}\,.$$

Veličiny a_x, a_y, a_z jsou **souřadnicemi vektoru** $\vec{a}$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\,.$$



Složky vektoru v pravoúhlé souřadnicové soustavě

Pro velikost vektoru $\vec{a}$ platí

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Směrové úhly α, β, γ vektoru $\vec{a}$ určíme z rovnic

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}\,,\ \cos\beta = \frac{a_y}{a}\,,\ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}\,.$$

Pro **směrové kosiny** platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Jsou-li vektory stejného druhu zadány v analytickém tvaru, zjistíme jejich **součet** (**rozdíl**) pomocí součtu (rozdílu) příslušných souřadnic.

Příklady

Při skládání dvou sil

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}) = (3, -2, 1) = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k} = (F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}) = (-2, 0, 4) = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k},$$

je výsledná síla

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_{1x} + F_{2x}, F_{1y} + F_{2y}, F_{1z} + F_{2z}) = (3-2, -2+0, 1+4) = (1, -2, 5) \text{ nebo}$$

$$\vec{F} = (F_{1x} + F_{2x})\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y})\vec{j} + (F_{1z} + F_{2z})\vec{k} = (3-2)\vec{i} + (-2+0)\vec{j} + (1+4)\vec{k} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

Rozdíl dvou vektorů

$$\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (F_{1x} - F_{2x}, F_{1y} - F_{2y}, F_{1z} - F_{2z}) = (3+2, -2-0, 1-4) = (5, -2, -3) \text{ nebo}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (F_{1x} - F_{2x})\vec{i} + (F_{1y} - F_{2y})\vec{j} + (F_{1z} - F_{2z})\vec{k} = 5\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Velikost vektoru

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}$$

Při **násobení vektoru skalárem** násobíme skalárem jednotlivé souřadnice daného vektoru.

Příklad

Při určování hybnosti tělesa o hmotnosti m = 3, které se pohybuje rychlostí

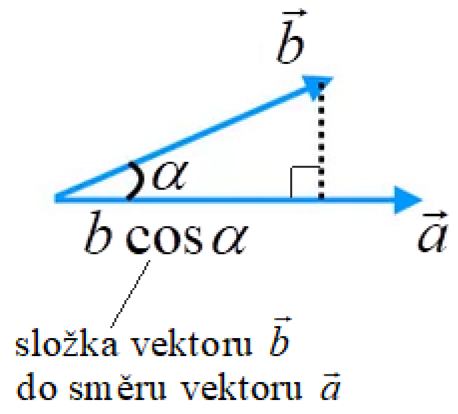
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = (v_x, v_y, v_z) = (4, 5, -2) = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k},$$

je výsledná hybnost

$$\vec{p} = m\vec{v} = mv_x\vec{i} + mv_y\vec{j} + mv_z\vec{k} = (mv_x, mv_y, mv_z) = 12\vec{i} + 15\vec{j} - 6\vec{k} = (12, 15, -6).$$

1.6 Skalární součin dvou vektorů

Skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je definován vztahem



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\alpha,$$

kde a, b jsou velikosti vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, α je úhel jimi sevřený.
Skalární součin se označuje násobící tečkou mezi vektory.
Výsledkem skalárního součinu je **skalární veličina**.

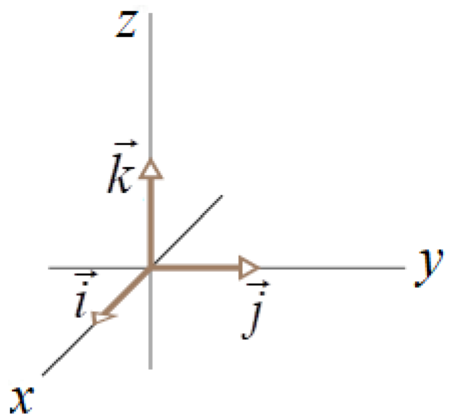
Mezní případy:

- vektory mají stejný směr ($\alpha = 0$) – maximální hodnota,
- vektory jsou na sebe kolmé ($\alpha = \dfrac{\pi}{2}$) – nulová hodnota.

Skalární součiny jednotkových vektorů jsou

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1,$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0.$$



Platí **zákon komutativní**,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

Platí **zákon distributivní**,

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Pro vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ v analytickém tvaru

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$

$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

je jejich skalární součin roven

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}).(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Příklad

Vektor $\vec{a}=(3,2,-1)$ násobíme vektorem $\vec{b}=(0,4,-2)$, výsledkem skalárního součinu je skalární veličina

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3\vec{i}+2\vec{j}-1\vec{k})\cdot(0\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k})=3\cdot 0+2\cdot 4+(-1)\cdot(-2)=0+8+2=10.$$

Pro **kosinus úhlu**, který svírají vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, platí

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Příklad

Vypočítáme, jaký úhel svírají vektory $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ a $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Velikosti vektorů

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{i} - \vec{j} + 0\vec{k})\cdot(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) = 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 2 = 1 + 2 + 0 = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$$

Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ svírají úhel $\dfrac{\pi}{4}$ nebo 45°.

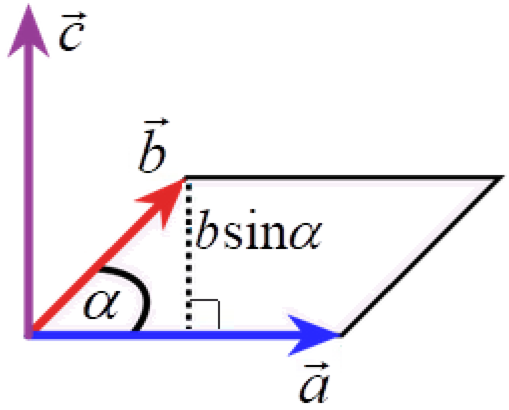
1.7 Vektorový součin dvou vektorů

Výsledkem **vektorového součinu** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ je vektor, který má tyto vlastnosti:

1. Jeho velikost je $c = a\,b \sin\alpha$,

   kde α je úhel sevřený vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

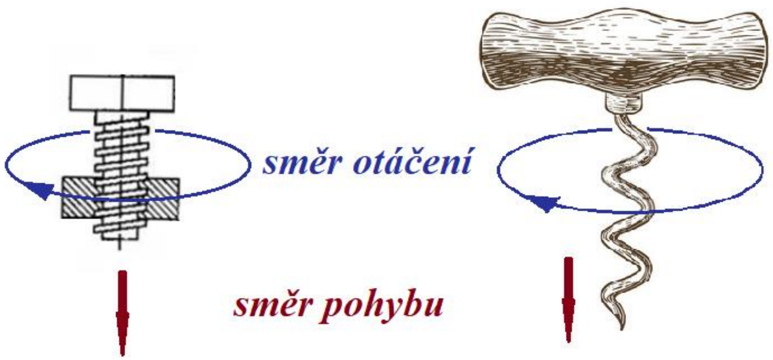
   Velikost vektorového součinu se číselně rovná plošnému obsahu rovnoběžníku sestrojeného z obou vektorů.



2. Je kolmý k rovině určené vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

3. Jeho orientace je dána **pravidlem pravotočivého šroubu (vývrtky)**:

Vektor $\vec{c}$ míří na tu stranu, na kterou by postupoval pravotočivý šroub při otáčení od vektoru $\vec{a}$ k vektoru $\vec{b}$ ve směru menšího úhlu mezi oběma vektory.

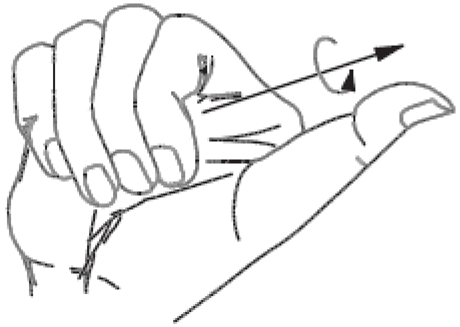


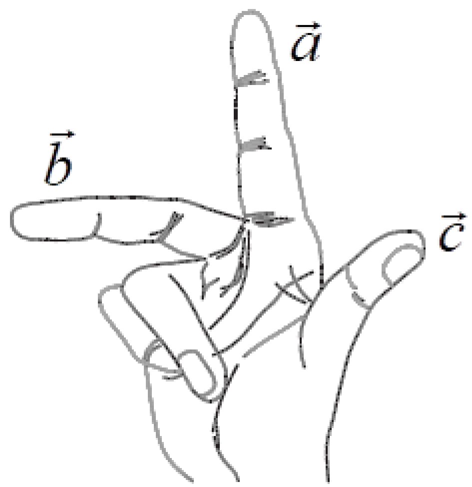
Další možnost je použít **pravidlo pravé ruky**:

Ohnuté prsty pravé ruky postupují od vektoru $\vec{a}$ k vektoru $\vec{b}$ ve směru menšího úhlu mezi oběma vektory, palec pak ukazuje orientaci vektoru $\vec{c}$.

Nebo:

Jsou-li vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ znázorněny ukazovákem a prostředníkem pravé ruky, pak vektor $\vec{c}$ má směr palce.





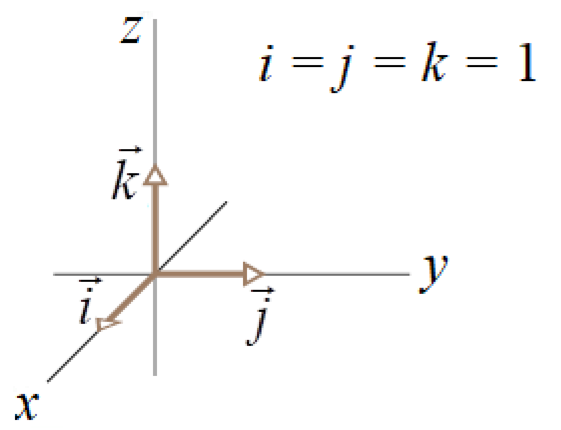
Mezní případy:

- vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ jsou navzájem kolmé ($\alpha = \dfrac{\pi}{2}$) − maximální velikost vektoru $\vec{c}$,
- vektory mají stejný směr a orientaci ($\alpha = 0$) − nulový vektor $\vec{c}$.

Pro vektorové součiny jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ platí

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$



Neplatí zákon komutativní

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},$$

Platí **zákon distributivní**

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Jsou-li vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ zadány v analytickém tvaru, platí

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Tento výraz můžeme zapsat ve tvaru **determinantu**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} .$$

Poznámka: Dělení vektoru vektorem není definováno, proto nesmíme vektorové rovnice krátit vektorem.

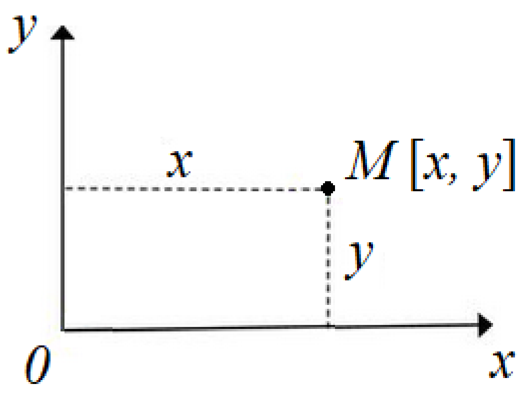
2. Souřadné systémy a polohový vektor

2.1 Určení polohy v rovině

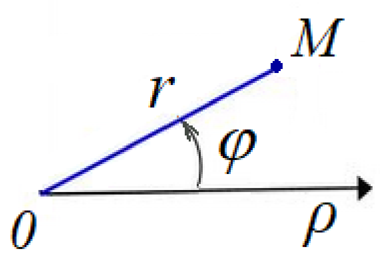
a) **Kartézská soustava souřadnic**, např. x, y (obr. a)

b) **Polární souřadnice** r, φ (obr. b)

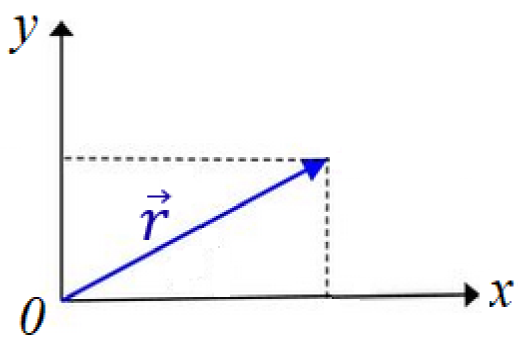
c) **Polohový vektor** $\vec{r}$ (obr. c)



a)



b)



c)

Polohový vektor $\vec{r}$ definujeme jako vektor, jehož počátek je v počátku souřadné soustavy a jeho koncový bod je v místě, kde se nachází bod, jehož polohu určujeme.

Souřadnice polohového vektoru jsou shodné se souřadnicemi daného bodu.

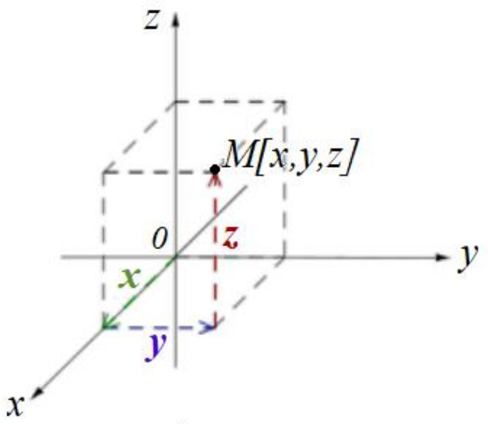
Určení polohy v prostoru

a) **Kartézské souřadnice** x, y, z (obr. a)

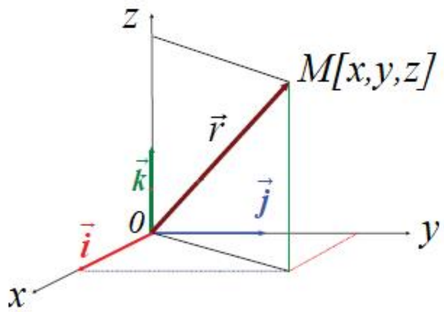
b) **Polohový vektor** $\vec{r}$ (obr. b)

c) **Válcové souřadnice** ρ, φ, z (obr. c)

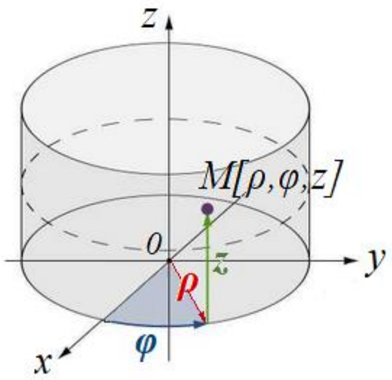
d) **Kulové souřadnice** r, φ, θ (obr. d)



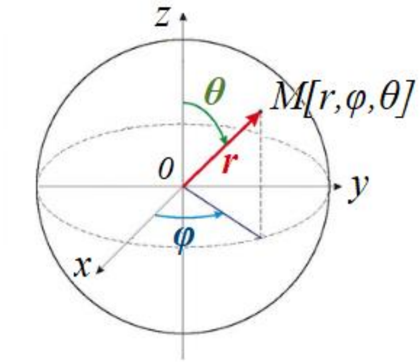
a)



b)



c)



d)

V pravoúhlém souřadnicovém systému s jednotkovými vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ve směru souřadnicových os je poloha bodu M o souřadnicích x, y, z dána polohovým vektorem

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

jehož velikost je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

3. Funkce

Zobrazení (předpis), který každému prvku (např. číslo) z jedné množiny (definiční obor) přiřadí jednoznačně jeden prvek (číslo, vektor) z druhé množiny (obor hodnot).

Zadání funkce:

- Explicitní: $y = f(x)$
- Implicitní: $F(x, y) = 0$
- Parametrické: $x = f_1(t),\ y = f_2(t)$
- Grafické

Příklady

Explicitní: $y = x^2 + 2x + 1$

Implicitní: $x + y - 1 = 0$

Parametrické: $x = \sin t,\ y = \cos t$

3.1 Průběh funkce

Vyšetřit průběh funkce znamená nakreslit graf této funkce jen ze znalosti jejího předpisu $y = f(x)$. Ze zadaného předpisu funkce zjistíme co nejvíce o chování dané funkce, popíšeme a propočítáme různé její vlastnosti.

Postup vyšetřování průběhu funkce

- Definiční obor a obor hodnot funkce a její omezenost.
- Průsečíky se souřadnými osami a intervaly, kde je funkce kladná a záporná.
- Symetrie a periodičnost funkce, parita (sudá, lichá, ani jedno, obojí).

Sudost $f(-x) = f(x)$ – graf funkce je osově souměrný podle osy y.

Lichost $f(-x) = -f(x)$ – funkce je středově souměrná podle počátku souřadnicového systému.

Ani sudá, ani lichá – žádná symetrie.

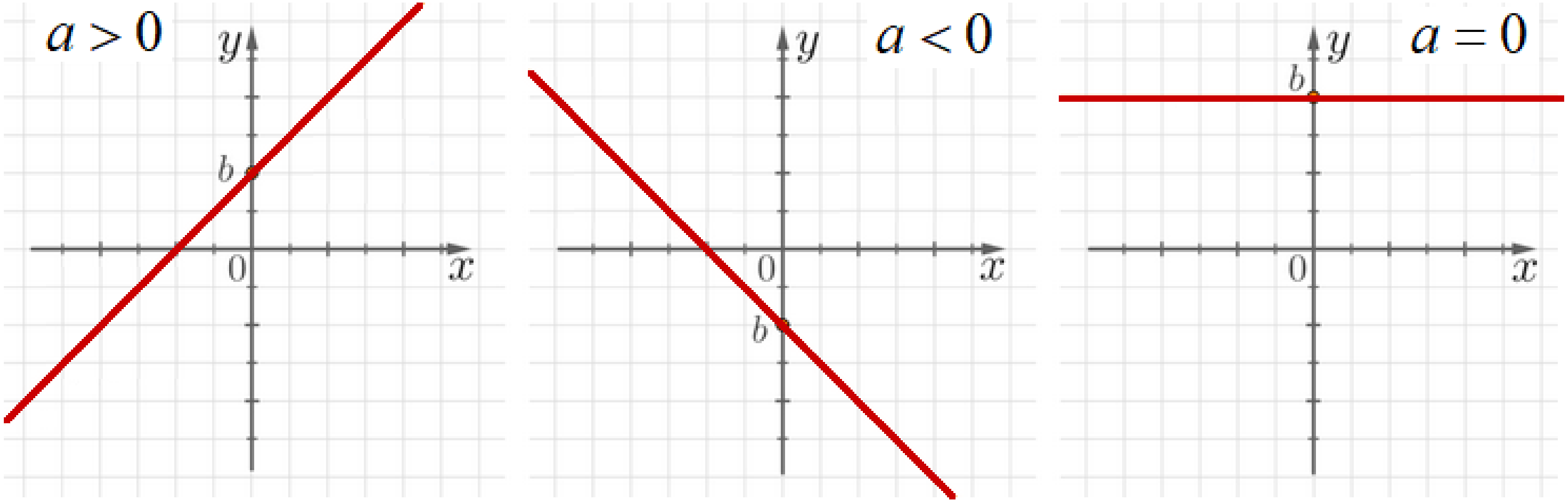
Periodičnost $f(x + P) = f(x)$.

- Monotónnost (rostoucí, klesající) a extrémy (minima a maxima, lokální, globální) – pomocí první derivace.
- Konvexnost, konkávnost a inflexní body – pomocí druhé derivace.
- Asymptoty se směrnicí a bez směrnice – pomocí limit.

3.2 Lineární funkce

$$y = ax + b$$

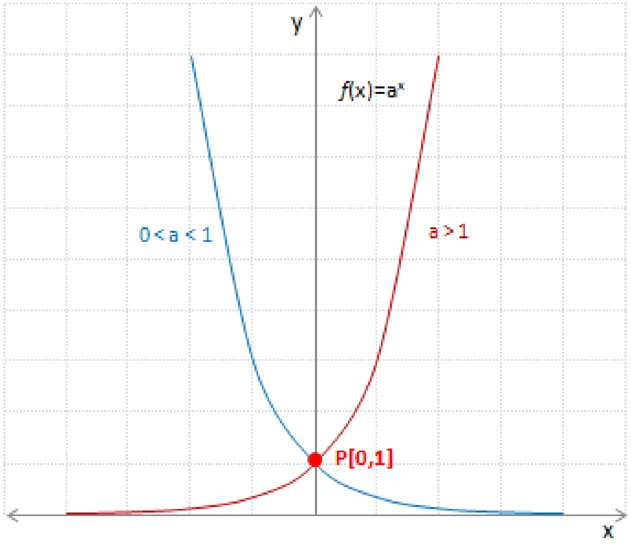
Rostoucí Klesající Konstantní



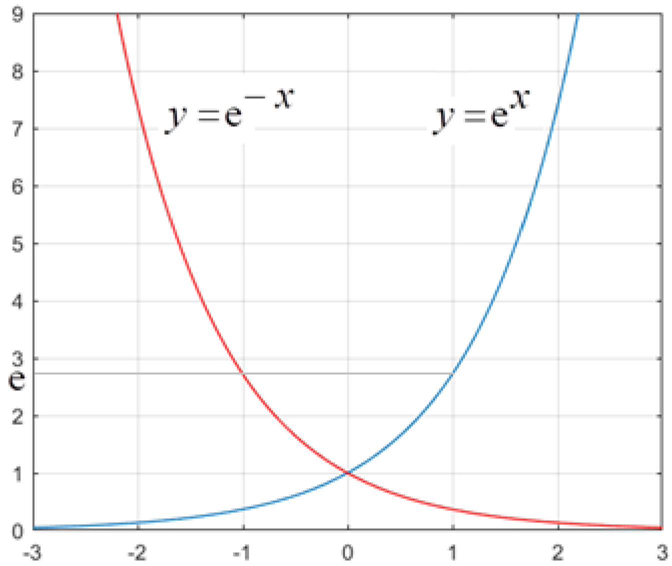
3.3 Exponenciální funkce

Exponenciální funkcí (exponenciálou) je každá funkce tvaru $y = a^x$, kde $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Číslo a je tzv. základ, x je exponent.



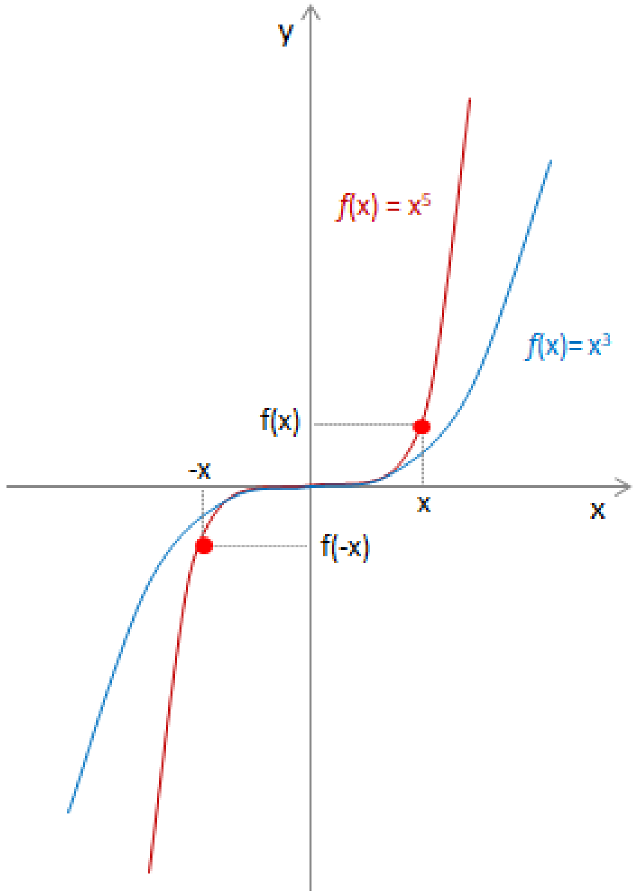
Zvláštní význam má exponenciální funkce o přirozeném základu $e = 2{,}71828\,18284\ldots$ (Eulerovo číslo): $y = a\,\mathrm{e}^{bx}$, $y = a\exp(bx)$



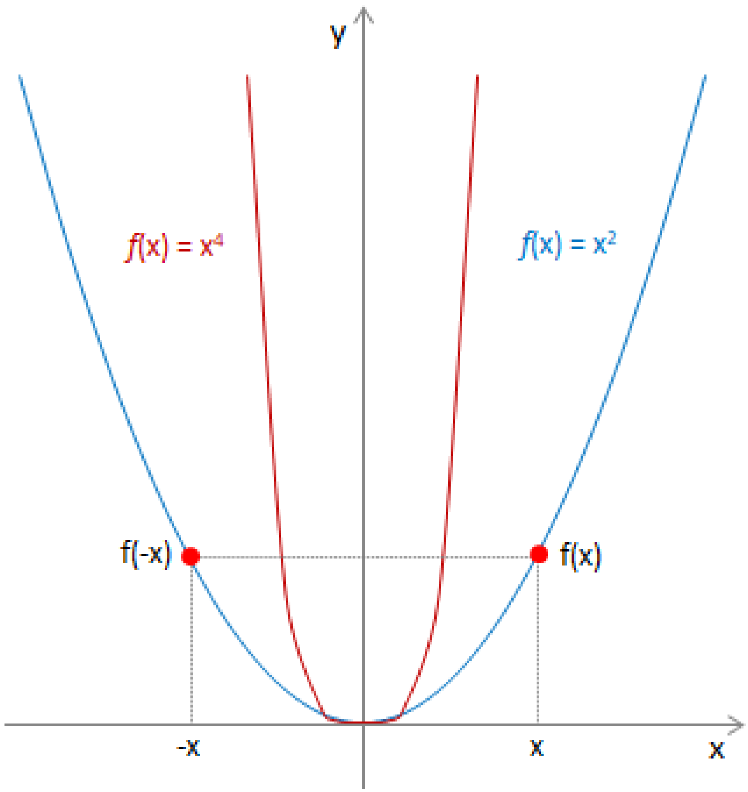
3.4 Mocninné funkce

$$y = ax^r$$

Mocninná funkce s lichým r

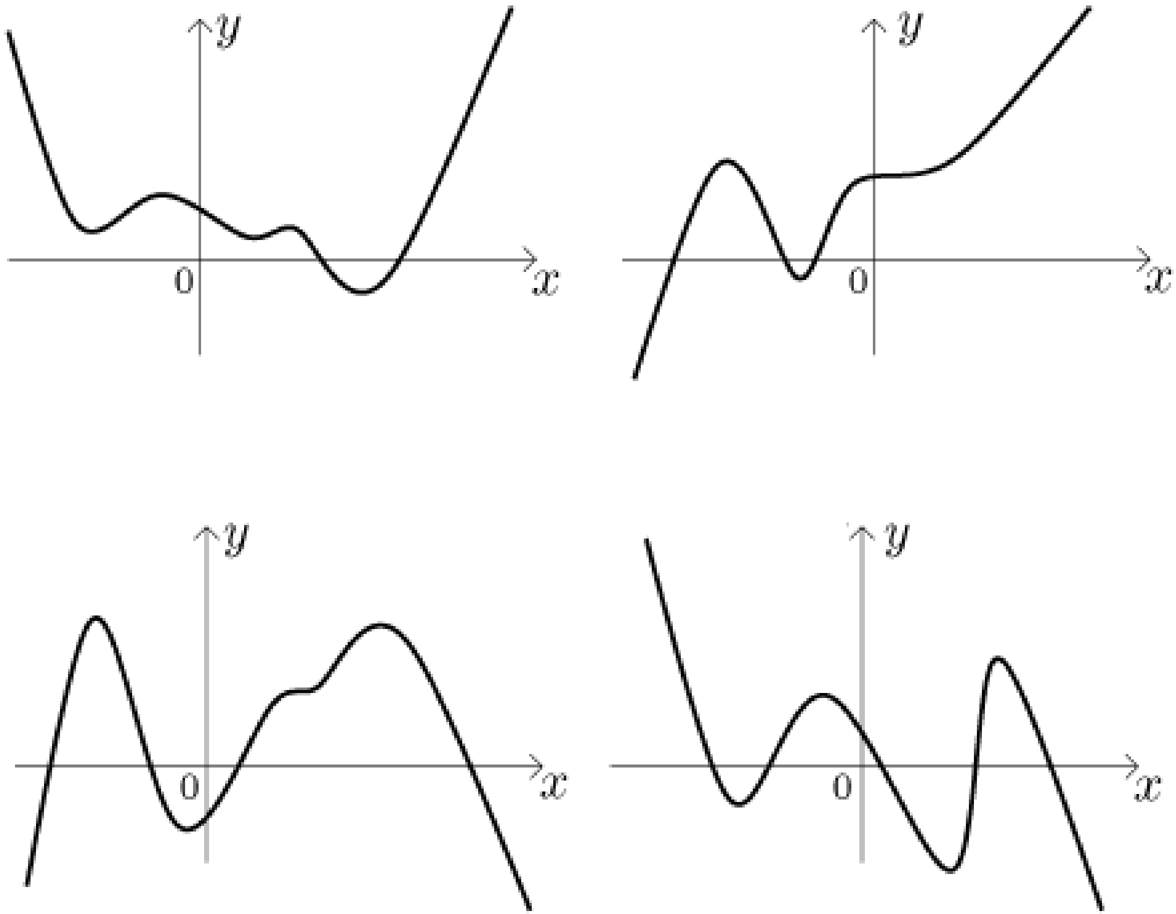


Mocninná funkce se sudým r



3.5 Polynomické funkce

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

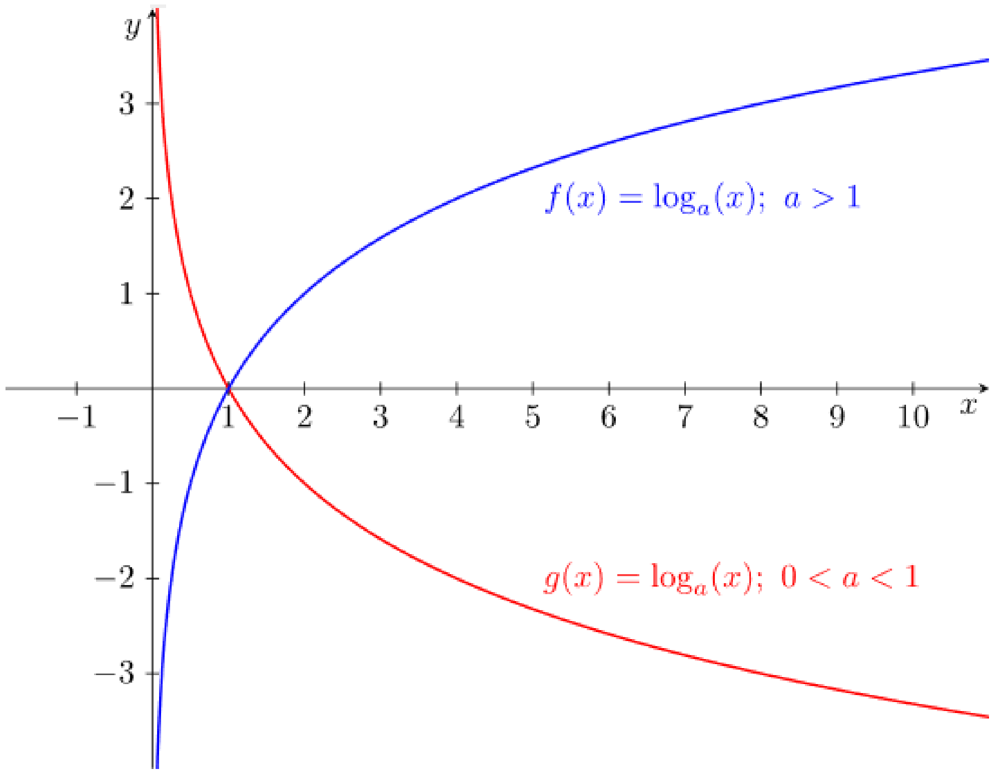


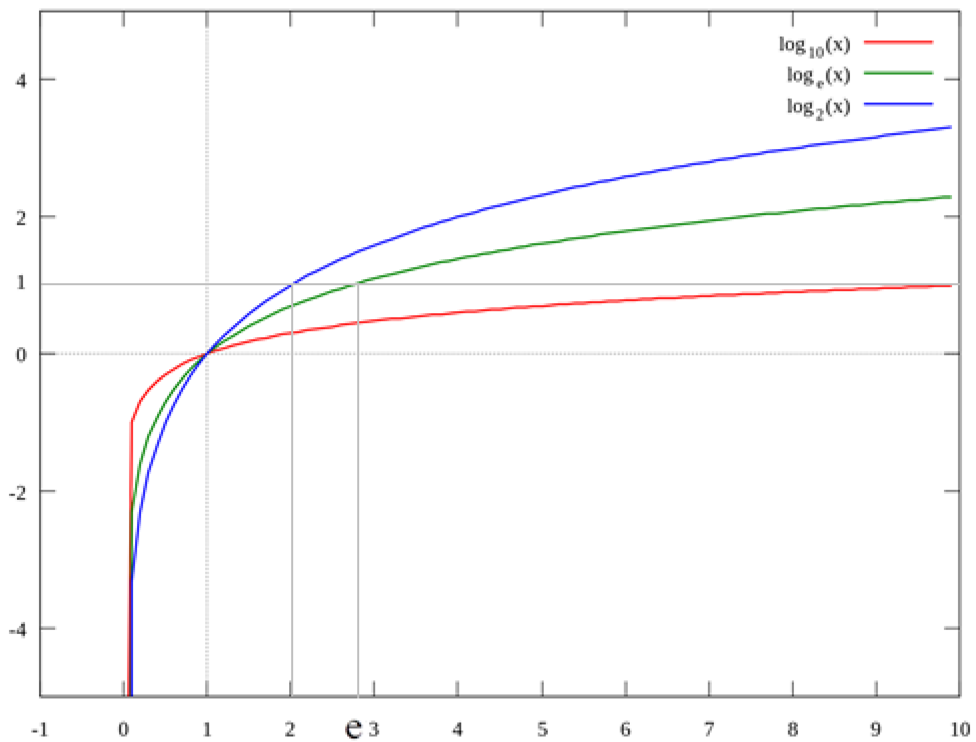
3.6 Logaritmické funkce

Logaritmická funkce je matematická funkce, která je inverzní k exponenciální funkci. **Logaritmus** kladného reálného čísla x při základu a ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) je takové reálné číslo $y = \log_a x$, pro které platí $a^y = x$. V tomto vztahu a označuje základ logaritmu.

Dekadický logaritmus o základu 10: $y = \log x$, $y = \lg x$.

Přirozený logaritmus o základu $\mathrm{e} = 2{,}71828\,18284\ldots$ (Eulerovo číslo): $y = \ln x$.





Vlastnosti logaritmů

$a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$

$\log_b b = 1$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$ (Logaritmus součinu je součet logaritmů)

$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$ (Logaritmus podílu je rozdíl logaritmů)

$\log_b a^r = r\log_b a$, tzn. $\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log_b a$ (Logaritmus mocniny je násobek logaritmu)

$\log_{(b^r)} a = \frac{1}{r}\log_b a = \frac{\log_b a}{r}$, tzn. $\log_{\sqrt[n]{b}} a = n\log_b a \Longrightarrow \log_{(b^r)} a^n = \frac{n}{r}\log_b a$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \log_b x$ nebo $\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

3.7 Goniometrické funkce

Sinus: $y = \sin x$

Kosinus: $y = \cos x$

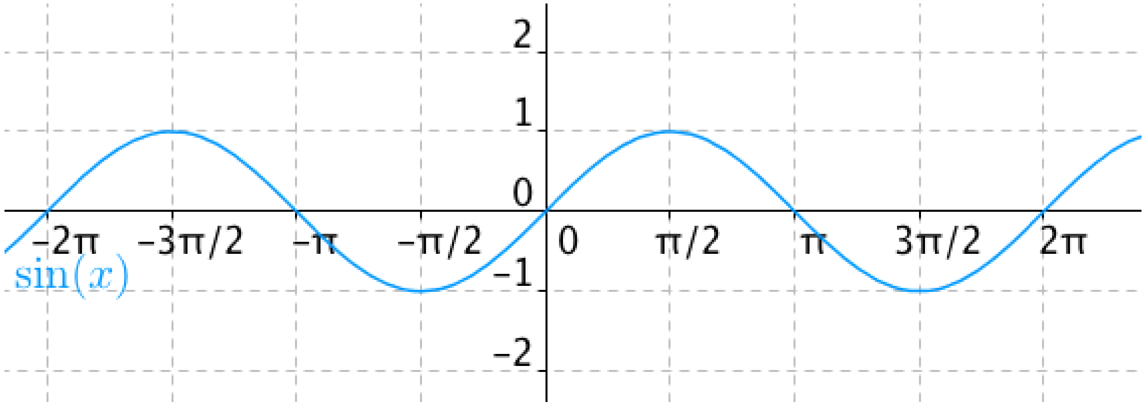
Tangens: $y = \operatorname{tg} x,\ y = \tan x,\ \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Kotangens: $y = \operatorname{cotg} x,\ y = \cot x$

Tabulkové hodnoty

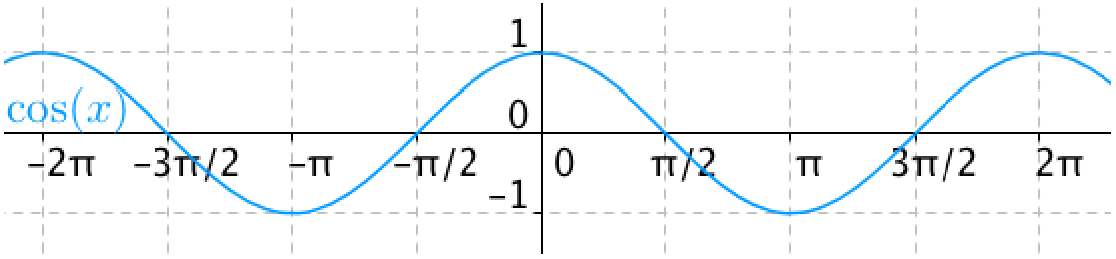
x	$0°$	$30°,\ \frac{\pi}{6}$	$45°,\ \frac{\pi}{4}$	$60°,\ \frac{\pi}{3}$	$90°,\ \frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Grafy $f(x) = \sin(x)$ a $f(x) = \cos(x)$



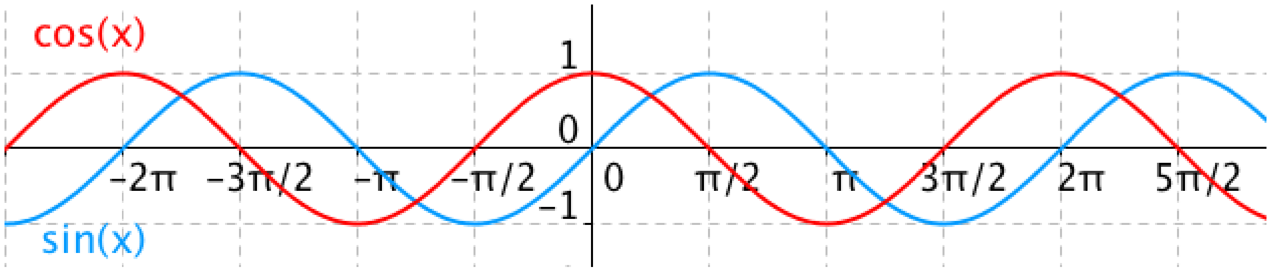
lichá

$$\sin(-x) = -\sin x$$



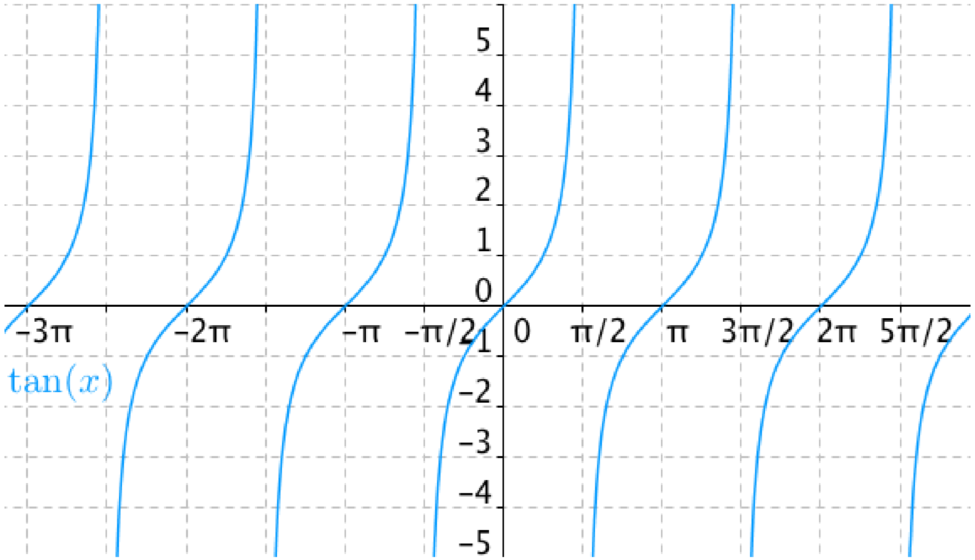
sudá

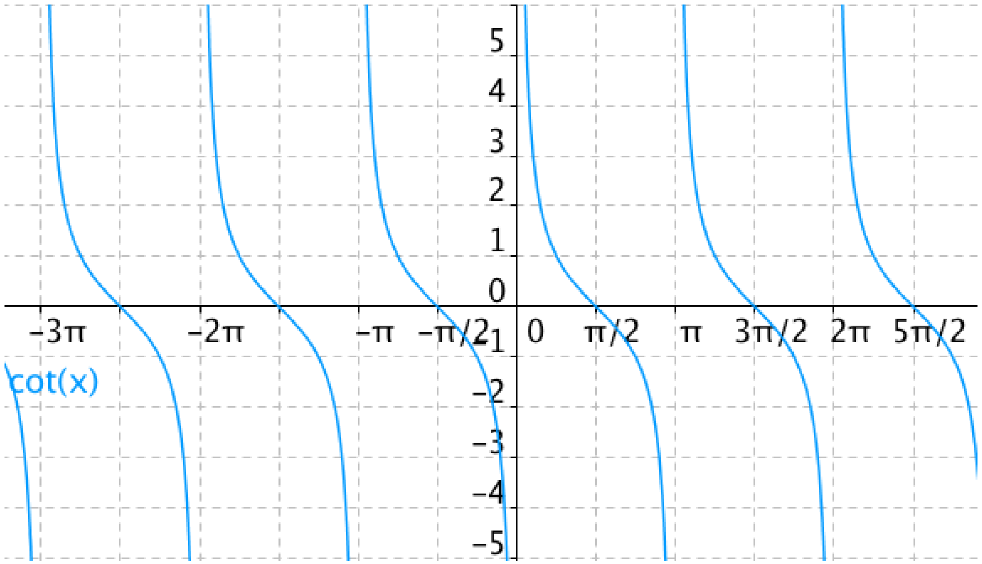
$$\cos(-x) = \cos x$$

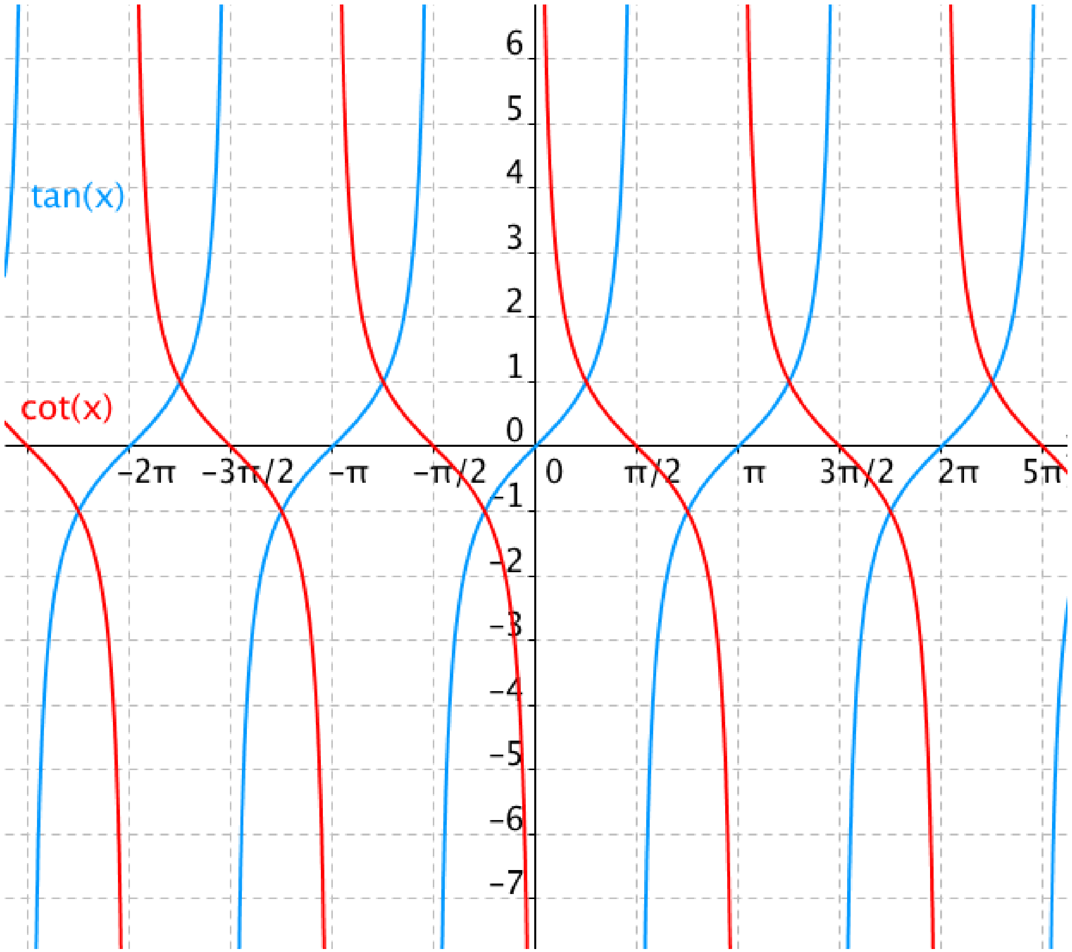


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$$

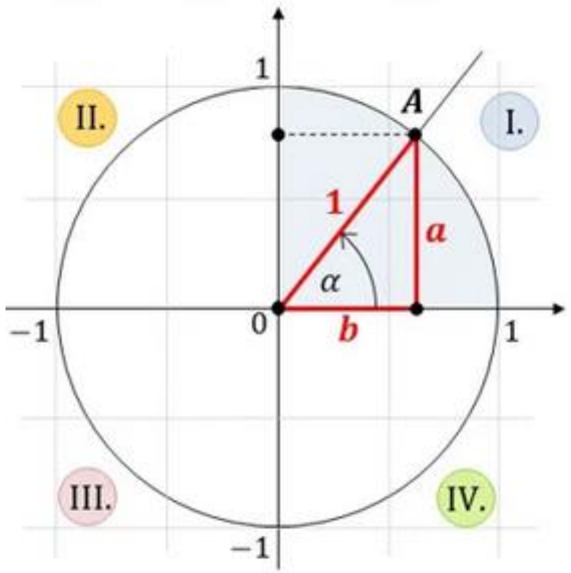
Grafy $f(x)$ = tg(x) a $f(x)$ = cotg(x)







Jednotková kružnice



$$\sin\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{a}{1} = a$$

y-ová souřadnice bodu A

$$\cos\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{b}{1} = b$$

x-ová souřadnice bodu A

Kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+

Příklady goniometrických funkcí ve fyzice:

$$x = x_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Vybrané vzorce z oblasti goniometrie

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

4. Derivace funkce

4.1 Problém tečny a definice derivace

Derivaci funkce lze definovat jako změnu (růst nebo pokles) grafu funkce, a to za předpokladu možnosti nekonečně malých změn.

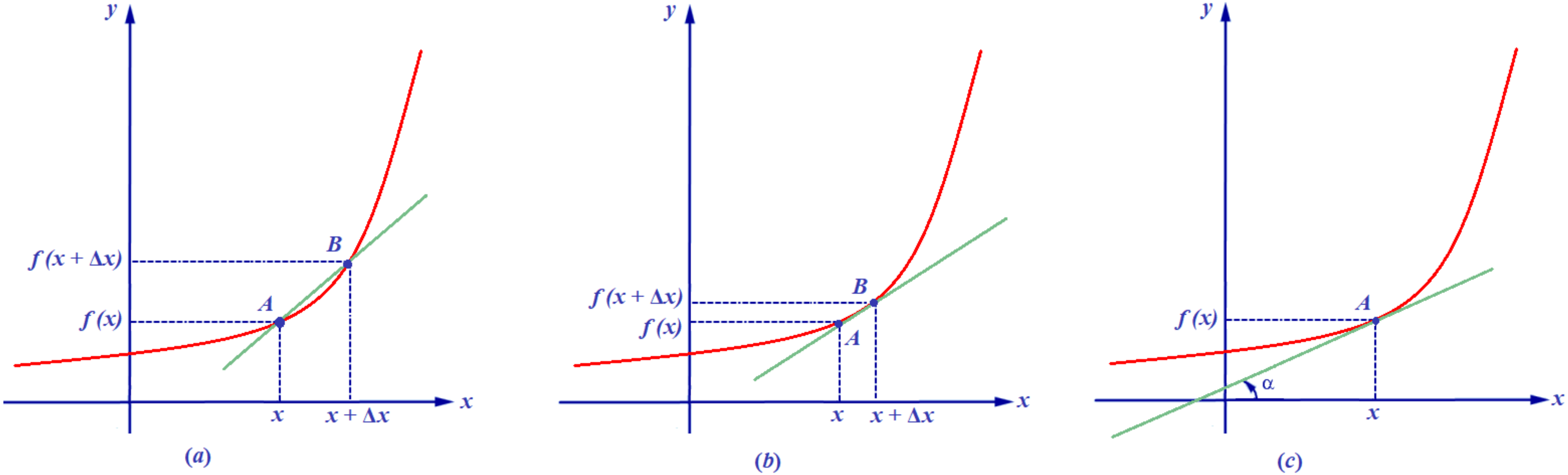
Derivování je proces výpočtu derivace zadané funkce.

Fyzikální význam derivace

Derivace vyjadřuje, jak závisí změna jedné veličiny (závislá veličina) na veličině druhé (nezávislá veličina).

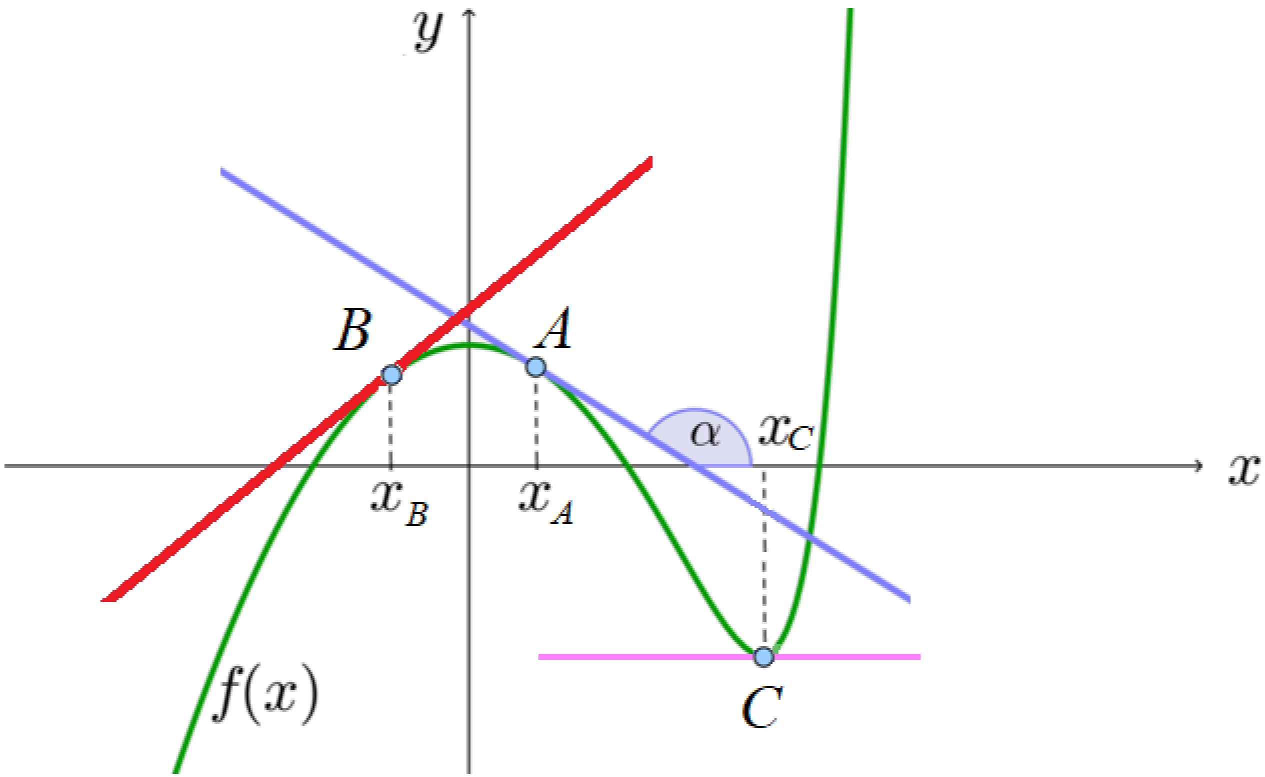
Pokud se jedná o funkci času, pak vyjadřuje „rychlost“ změny dané veličiny (např. rychlost *v* vyjadřuje „rychlost“ změny polohy, zrychlení *a* vyjadřuje „rychlost“ změny rychlosti).

Na obrázku je graf funkce, která má v bodě x hodnotu $f(x)$ a v bodě $x+\Delta x$ má hodnotu $f(x+\Delta x)$. Body jsou vyznačeny jako A a B (obr. *a*). Spojnice obou bodů tvoří sečnu křivky. Její směrnici (sklon) lze vyjádřit jako poměr změny hodnoty funkce ke změně argumentu, tzn. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-(x)} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ (poměr přírůstků).

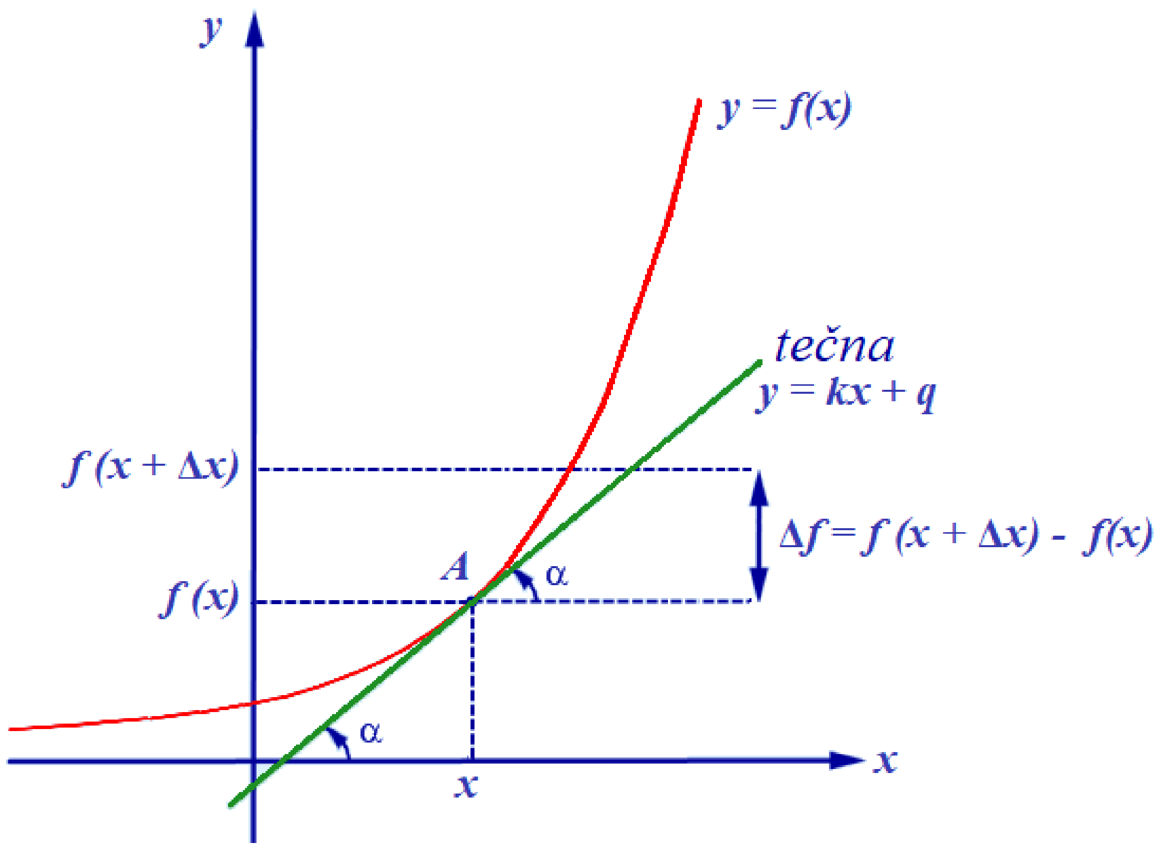


Pokud budeme body A a B přibližovat (obr. *b*), tj. zmenšovat diferenci Δx až k nule, přejde sečna nakonec v tečnu (obr. *c*). Tečna svírá úhel s osou x a tangens tohoto úhlu nazýváme směrnicí tečny. Derivaci funkce v bodě lze s dostatečnou přesností aproximovat touto směrnicí tečny.

Poznámka: Je-li v bodě dotyku křivka rostoucí, bude její derivace >0 a je-li klesající, bude derivace <0. Pokud křivka v bodě dotyku dosahuje maxima nebo minima a tečna je tedy rovnoběžná s osou *x*, bude derivace rovna nule.



Geometrický význam derivace



Derivace funkce v bodě x je směrnice tečny ke grafu funkce v bodě $[x, f(x)]$. Tečnu lze popsat pomocí obecné rovnice přímky $y = kx + q$.

Pro výpočet derivace je potřeba zjistit jak rychle se mění graf funkce v bodě dotyku. Za tímto účelem vypočítáme směrnici tečny, která se rovná tangens uhlu α:

$$k = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

tj. změna hodnoty funkce Δf v poměru ke změně argumentu Δx pro velmi malé změny argumentu.

Derivaci lze také zapsat jako

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Způsoby zápisu derivace

- matematika: $f'(x), y'(x), f', y'$
- fyzika: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, pro derivaci podle času se používá také symbol tečky, např. $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

Diferenciál funkce vyjadřuje závislost změny hodnoty funkce na malé změně jejího argumentu. Tuto závislost aproximuje jako přímou úměrnost v okolí zvoleného bodu.

Diferenciál dy funkce $y = f(x)$ v bodě x při změně argumentu dx je součin

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$$

Derivace vyšších řádů

$$\text{funkce} \rightarrow 1.\ \text{derivace} \rightarrow 2.\ \text{derivace} \rightarrow \text{atd.}$$

Zápis 2. derivace: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = y'' = f''(x)$, pro funkce času, např. $x = x(t)$, lze $\ddot{x}$.

4.2 Derivace elementárních funkcí

$y = \text{konst.}$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$
$y = x$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$
$y = x^n$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x$
$y = \cos x$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin x$
$y = \mathrm{e}^x$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$
$y = \ln x$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$

4.3 Základní pravidla pro počítání s derivacemi

$$(u+v)' = u' + v',$$

$$(u-v)' = u' - v',$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ pro } v \neq 0,$$

$$(c \cdot u)' = cu', \text{ kde } c \text{ je konstanta.}$$

Derivace **složené funkce** $y = f[\varphi(x)]$, tj. $y = f(u)$ a $u = \varphi(x)$:

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

4.4 Parciální derivace: pro funkce více proměnných

$$u = f(x, y, z, t).$$

Pak derivace

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}$$

provádíme tak, že derivujeme funkci vždy podle příslušné proměnné (x, y, z nebo t), k ostatním proměnným se přitom chováme jako ke konstantám.

Příklad 1

Vypočítáme derivaci následujících funkcí:

a) $y = 5 \implies y' = 0$

b) $f(x) = x^2 + x + 3 \implies f'(x) = 2x + 1$

c) $f(t) = 2\sin t \implies f'(t) = 2\cos t$

d) $f(z) = \cos z + 1 \implies f'(z) = -\sin z$

e) $y(t) = \sin t + \cos t \implies y'(t) = \cos t - \sin t$

f) $y = e^{2x} \implies y' = (e^{2x})'(2x)' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

g) $y(x) = \ln(x^2 + 1) \implies y'(x) = (\ln(x^2 + 1))'(x^2 + 1)' = \frac{1}{(x^2+1)}(2x)$

h) $y(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+2} \Longrightarrow y'(x) = \frac{\left(x^2+2x+1\right)'(x+2)-\left(x^2+2x+1\right)(x+2)'}{(x+2)^2} =$

$$= \frac{(2x+2)(x+2)-(x^2+2x+1)(1)}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+2x+4x+4-x^2-2x-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

i) $f(x) = e^x \sin x \Longrightarrow f'(x) = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' =$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

j) $y(t) = \ln t \cos t \Longrightarrow y'(t) = (\ln t)' \cos t + \ln t\ (\cos t)' = \frac{1}{t}\cos t + \ln t\ (-\sin t) =$

$$= \frac{\cos t}{t} - \ln t \sin t$$

Příklad 2

Určete první a druhé derivace funkcí:

a) $y = 3 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$

b) $y(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x - 1 + 0 = 6x^2 - 8x - 1,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 6 \cdot 2x - 8 - 0 = 12x - 8$$

c) $f(t) = 3\sin t$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 3\cos t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2} = 3 \cdot (-\sin t) = -3\sin t$$

d) $f(x) = \sin(2x)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = (\sin 2x)' \cdot (2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = (2\cos\ 2x)' \cdot (2x)' = -2\sin 2x \cdot 2 = -4\sin 2x$$

e) $u(x) = \ e^{3x} + e^{-x} - e^2$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (e^{3x})' \cdot (3x)' + (e^{-x})' \cdot (-x)' - (e^2)' = \ e^{3x} \cdot 3 + e^{-x} \cdot (-1) - 0 =$$

$$= 3e^{3x} - e^{-x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = (3e^{3x})' \cdot (3x)' - (e^{-x})' \cdot (-x)' = 3e^{3x} \cdot 3 - e^{-x} \cdot (-1) = 9e^{3x} + e^{-x}$$

Příklad 3

Určete parciální derivace 1. řádu funkce $f(x, y, z, t)$ podle jednotlivých proměnných.

$$f\ (x, y, z, t) = 3x^2 - 2y^2 + 4xy - 5yz^2 + xt^2 - t + 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 0 + 4y - 0 + t^2 - 0 + 0 = 6x + 4y + t^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 4y + 4x - 5z^2 + 0 - 0 + 0 = -4y + 4x - 5z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 - 0 + 0 - 10yz + 0 - 0 + 0 = -10yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 - 0 + 0 - 0 + 2xt - 1 + 0 = 2xt - 1$$

4.5 Derivace vektorové funkce skalární proměnné podle skaláru

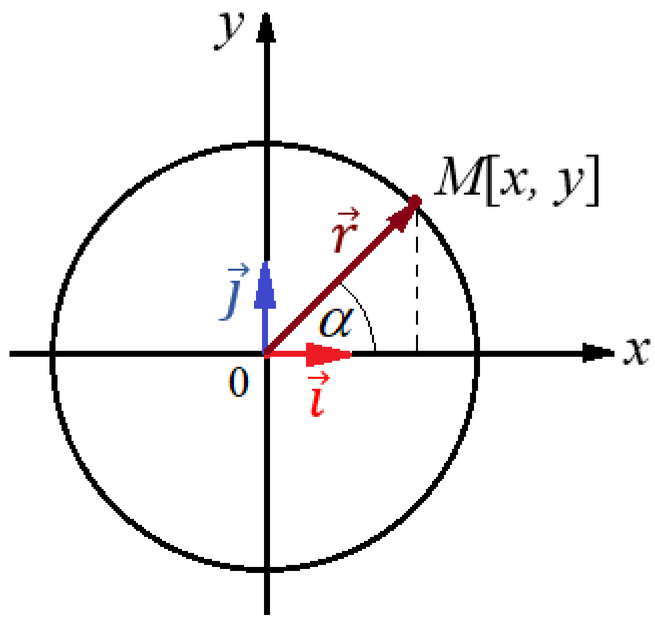
Vektory mohou být závislé na proměnných skalárních veličinách (čas, úhel, souřadnice bodu atd.).

Například polohový vektor při pohybu hmotného bodu po kružnici o poloměru r zapíšeme jako

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = r\cos\alpha\,\vec{i} + r\sin\alpha\,\vec{j},$$

kde $\alpha = \alpha(t)$ je úhlová souřadnice hmotného bodu v polárních souřadnicích.

Uvedená vektorová funkce vyjadřuje závislost polohového vektoru $\vec{r}$ na úhlu α, resp. na skalárním argumentu t podle vztahu $\alpha = \alpha(t)$.



Je-li vektorová funkce $\vec{u}(t)$ zadána pomocí souřadnic u_x, u_y, u_z, tj. $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ a souřadnice jsou funkcemi skalární proměnné t, je derivace

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}.$$

4.6 Pravidla pro derivaci vektorových funkcí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{a})=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{a}+m\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}.$$

5. Integrální počet

5.1 Základní pojmy a definice

Integrování funkce je proces opačný k derivování.

Primitivní funkce k dané funkci $f(x)$ je taková funkce $F(x)$, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$.

Je to tedy funkce, jejíž derivací je funkce $f(x)$.

Neurčitým integrálem funkce $f(x)$ nazýváme výraz $F(x) + C$, kde $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ a C je konstanta. Neurčitý integrál je tedy funkce

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

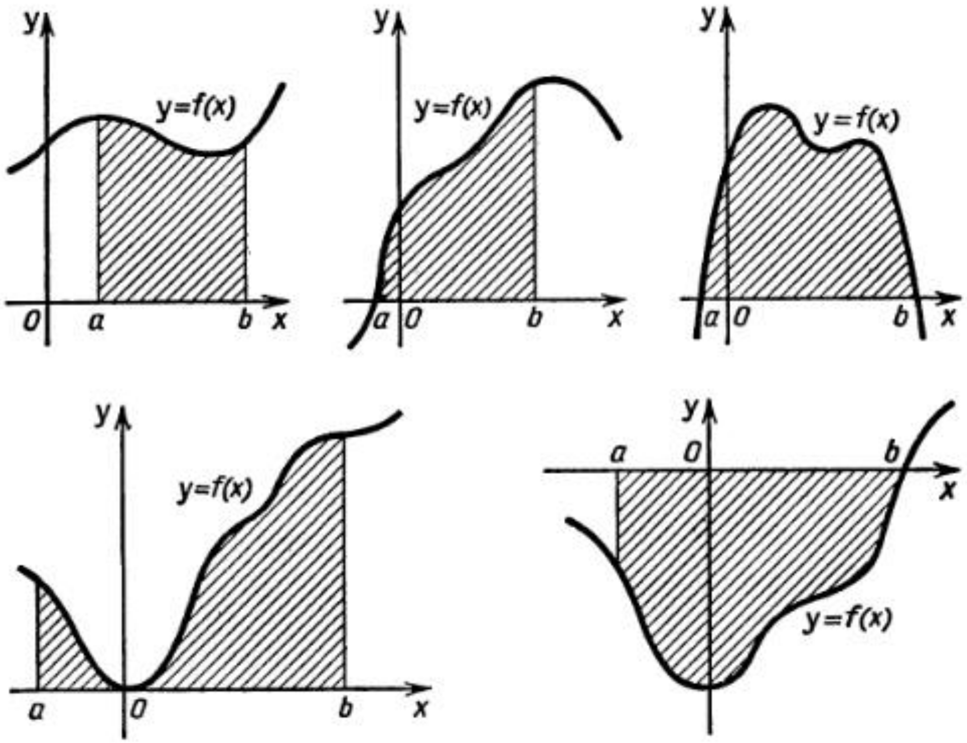
Neurčitý integrál úzce souvisí s derivací (pozor na konstantu).

Určitým integrálem funkce $f(x)$ v mezích od a do b (uzavřený interval $\langle a, b \rangle$) je číslo

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Geometrický význam určitého integrálu

Určitý integrál se číselně rovná plošnému obsahu určenému částí grafu funkce $y = f(x)$ v mezích od a do b a osou x.



Podle pořadí mezí se mění znaménko výsledku

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

5.2 Integrace elementárních funkcí

$$\int \mathrm{d}x = x + C$$

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x| + C$$

5.3 Základní pravidla pro počítání s integrály

$$\int k\, f(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{kde } k \text{ je konstanta}$$

$$\int (u+v)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}x + \int v\mathrm{d}x, \quad \text{kde } u = u(x),\ v = v(x)$$

$$\int (u-v)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}x - \int v\mathrm{d}x, \quad \text{kde } u = u(x),\ v = v(x)$$

Další metody integrace: **per partes**, **substituce**.

Integrace per partes (integrace po částech) se používá pro integrování součinu funkcí.

$$\int u\, \mathrm{d}v = uv - \int v\, \mathrm{d}u$$

Příklad 1

Vypočítáme následující integrály:

a) $\int 2 \, \mathrm{d}t = 2t + C$

b) $\int (3t^3 + 2t^2 - 4t + 1)\mathrm{d}t = \int 3t^3 \mathrm{d}t + \int 2t^2 \mathrm{d}t - \int 4t\mathrm{d}t + \int 1\mathrm{d}t =$

$$= \frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} - \frac{4t^2}{2} + t + C = \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + t + C$$

c) $\int 5 \sin x \, \mathrm{d}x = 5 \int \sin x \, \mathrm{d}x = 5\,(-\cos x) + C = -5 \cos x + C$

d) $\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

e) $\int (e^x - 1)\mathrm{d}x = \int e^x \mathrm{d}x - \int 1\mathrm{d}x = e^x - x + C$

Příklad 2

Vypočítáme určitý integrál:

a) $$\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot(1^5-(-1)^5) = \frac{1}{10}\cdot(1+1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

b) $$\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{64} - \sqrt{1}\right) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3}$$

c) $$\int_1^3 (3t^2 - 2t + 1)\mathrm{d}t = \left[\frac{3t^3}{3} - \frac{2t^2}{2} + t\right]_1^3 = [t^3 - t^2 + t]_1^3 =$$

$$= (3^3 - 3^2 + 3 - 1^3 + 1^2 - 1) = 27 - 9 + 3 - 1 + 1 - 1 = 20$$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

e) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2e^x\right) \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 2e^x \mathrm{d}x = [\ln|x|]_1^2 + [2e^x]_1^2 =$

$$= \ln 2 - \ln 1 + 2(e^2 - 2e^1) = \ln 2 + 2e^2 - 2e = 10{,}035$$

Příklad 3

Vypočítáme integrál

$$\int (-2x+3)\cos 3x \,\mathrm{d}x$$

Aplikujeme metodu per partes

$$\int u \,\mathrm{d}v = uv - \int v \,\mathrm{d}u$$

$$u = -2x+3 \qquad \mathrm{d}v = \cos 3x \,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}u = -2 \,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{1}{3}\sin 3x$$

$$\int (-2x+3)\cos 3x \,\mathrm{d}x = (-2x+3)\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x \cdot(-2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{-2x+3}{3}\cdot\sin 3x + \frac{2}{3}\int \sin 3x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{-2x+3}{3}\cdot\sin 3x + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) + C =$$

$$= \frac{-2x+3}{3}\cdot\sin 3x - \frac{2}{9}\cos 3x + C$$

Příklad 4

Vypočítáme určitý integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{(5x+1)^3}\,\mathrm{d}x$$

Použijeme substituci

$(5x+1) = t$

$5\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \implies \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{5}$

Přepočítáme integrační meze

$t_1 = 5 \cdot 0 + 1 = 1$

$t_2 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$

$$\int_0^1 \frac{1}{(5x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^6 \frac{1}{t^3}\,\frac{\mathrm{d}t}{5} = \frac{1}{5}\int_1^6 t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^6 = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{t^2}\right]_1^6 =$$

$$= -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{1^2}\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36}-1\right) = -\frac{1}{10}\cdot\frac{1-36}{36} = -\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{35}{36}\right) = \frac{35}{360} = \frac{7}{72}$$

5.4 Integrace vektorové funkce skalární proměnné podle skaláru

Nechť $\vec{b}(t)$, $\vec{a}(t)$ jsou vektorové funkce skalárního argumentu t definované v otevřeném intervalu t. Jestliže pro všechna t tohoto intervalu platí

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}\,,$$

říkáme, že funkce $\vec{b}$ je v tomto intervalu **primitivní funkcí** k funkci $\vec{a}$.

Jestliže je $\vec{b}(t)$ primitivní funkcí k funkci $\vec{a}(t)$, je k funkci $\vec{a}(t)$ primitivní každá funkce $\vec{b}(t)+\vec{c}$, kde $\vec{c}$ je konstantní vektor. Platí totiž

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Primitivní funkce k dané vektorové funkci $\vec{a}(t)$ se nazývá jejím **neurčitým integrálem** a označuje se $\int \vec{a}(t)\mathrm{d}t$.

Pro $\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$ platí

$$\int \vec{a}(t)\mathrm{d}t = \vec{i}\int a_x(t)\mathrm{d}t + \vec{j}\int a_y(t)\mathrm{d}t + \vec{k}\int a_z(t)\mathrm{d}t.$$

Určitým integrálem vektorové funkce $\vec{a}(t)$ v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ je výraz

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\mathrm{d}t = \vec{b}(t_2) - \vec{b}(t_1),$$

kde $\vec{b}(t)$ je primitivní funkce k funkci $\vec{a}(t)$.

6. Komplexní čísla

Komplexní číslo je uspořádaná dvojice reálných čísel.

Algebraický tvar komplexního čísla

$$a = a_1 + a_2 \mathrm{i}$$

Pro **imaginární jednotku** platí

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Někdy je označována imaginární jednotka jako j.

Části komplexního čísla:

- reálná – Re $(a) = a_1$,
- imaginární – Im $(a) = a_2$.

Reálná čísla jsou speciálním případem čísel komplexních.

6.1 Operace s komplexními čísly

Komplexní čísla násobíme jako dvojčleny s využitím vztahu $\mathrm{i}^2 = -1$.

Součet

$$a + b = (a_1 + a_2\mathrm{i}) + (b_1 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\mathrm{i}$$

Rozdíl

$$a - b = (a_1 + a_2\mathrm{i}) - (b_1 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)\mathrm{i}$$

Součin

$$a \cdot b = (a_1 + a_2\mathrm{i}) \cdot (b_1 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\mathrm{i}$$

Podíl (pro $b \neq 0$)

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1 + a_2\mathrm{i}}{b_1 + b_2\mathrm{i}} = \frac{(a_1 + a_2\mathrm{i}) \cdot (b_1 - b_2\mathrm{i})}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\mathrm{i}}{b_1^2 + b_2^2}$$

Komplexně sdružené číslo (označuje se symbolem * nebo pruhem)

$$a^* = \bar{a} = \overline{(a_1 + a_2\mathrm{i})} = a_1 - a_2\mathrm{i}$$

Absolutní hodnota (modul)

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{a \cdot a^*},$$

tedy

$$|a|^2 = a \cdot a^*.$$

Absolutní hodnota je vždy nezáporné číslo.

Komplexní čísla nelze uspořádat, lze ale uspořádat jejich absolutní hodnoty.

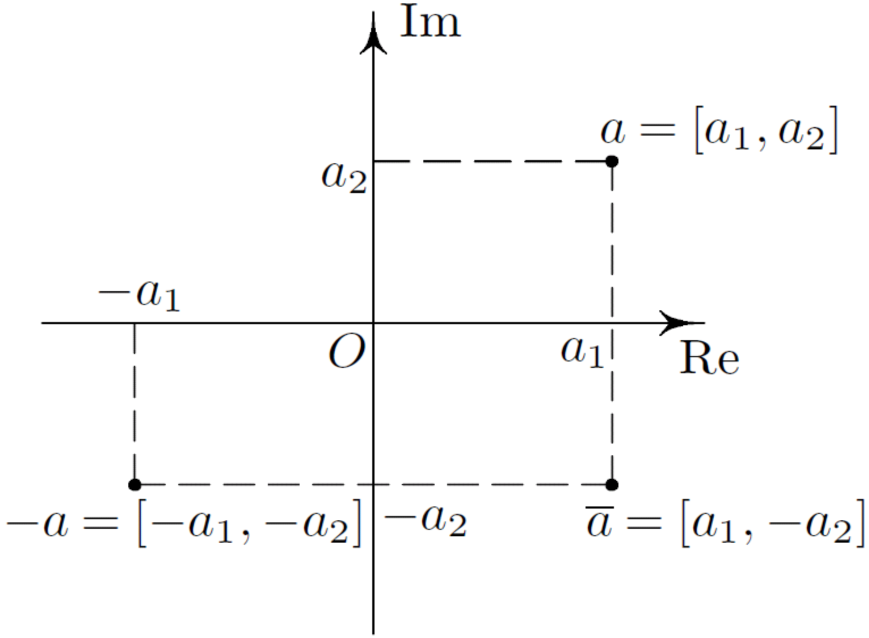
Pravidla pro počítání s absolutní hodnotou:

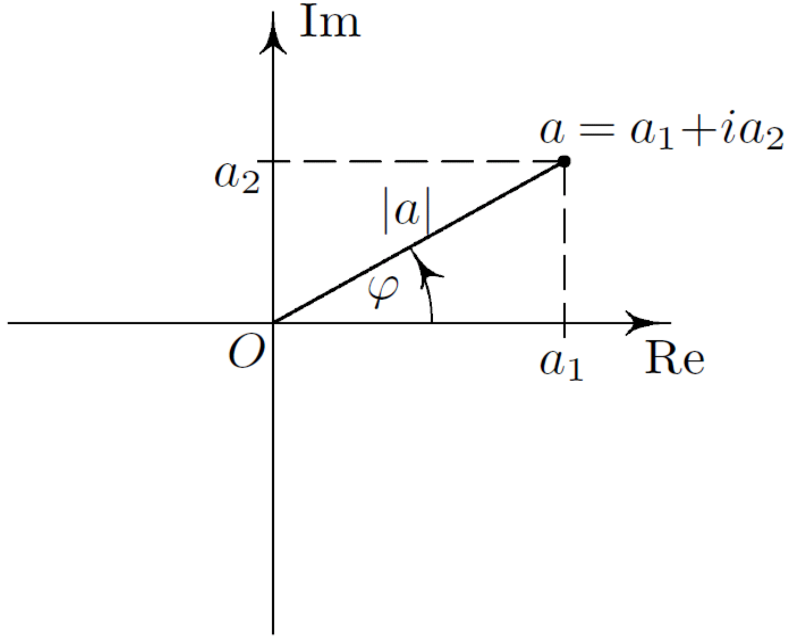
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ (pro } b \neq 0\text{).}$$

6.2 Grafické znázornění komplexních čísel

Komplexní číslo je možné znázornit jako bod v rovině (**Gaussova rovina** – reálná a imaginární osa).





Komplexně sdružená čísla jsou osově souměrná podle reálné (vodorovné) osy.

Argument komplexního čísla

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1}.$$

6.3 Goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla

Goniometrický tvar

$$a = |a|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Eulerův vztah

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Exponenciální tvar

$$a = |a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$