FYZIKÁLNÍ VELIČINY A JEDNOTKY.

KINEMATIKA A DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU.

NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY.

PRÁCE, ENERGIE, VÝKON.

1. Fyzika

Fyzika z řeckého φυσικός (*fysikos*) znamená přírodní (ze základu φύσις – *fysis*: *příroda*).

Fyzika je věda, která zkoumá a popisuje přírodní jevy. Je založena na experimentálním studiu různých jevů a jejím úkolem je formulovat zákony, které tyto jevy vysvětlují.

Fyzika se zaměřuje jednak na studium základních a nejjednodušších jevů (jakými pravidly a zákony se řídí pohyb objektů, jak objekty na sebe vzájemně působí atd.), jednak vysvětluje složitější vlastnosti a zákony (z čeho se skládá hmota a jak na sebe částice hmoty vzájemně působí).

Obecně můžeme říci, že fyzika je věda o hmotě, jejích vlastnostech a pohybu.

Fyzikální pojmy a zákony jsou základem všech přírodních věd. Pro popis fyzikálních zákonů se obvykle používají matematické prostředky.

Důležitou roli ve fyzice hrají experimenty. Během měření pozorovatel porovnává vlastnosti zkoumaných jevů s určitými standardy. Fyzika za tímto účelem vyvinula souhrn fyzikálních veličin a jednotek.

1.1 Fyzikální veličiny a jednotky

Fyzikální veličiny vyjadřují fyzikální vlastnosti objektů (kvalitativní × kvantitativní charakter). Fyzikální zákony pak vyjadřují objektivní závislost mezi fyzikálními veličinami.

Jednotka fyzikální veličiny je vhodně zvolená, stálá a přesně definovaná hodnota veličiny, se kterou měřenou veličinu srovnáváme.

Zápis fyzikální veličiny

$$X = \{X\}[X],$$

X – veličina,

$\{X\}$ – číselná hodnota veličiny,

$[X]$ – jednotka veličiny.

Dělení fyzikálních veličin podle charakteru:

- **Veličiny skalární** jsou určeny pouze velikostí ve zvolených jednotkách (hmotnost, práce, výkon, elektrické napětí, elektrický proud, magnetický indukční tok,…).
- **Veličiny vektorové** se vyznačují velikostí a orientovaným směrem v prostoru (rychlost, zrychlení, síla, intenzita elektrického pole, magnetická indukce,…).

1.2 Zákonné měřicí jednotky

V současné době je v ČR (a ve většině států světa) zákonem předepsáno užívání mezinárodní měrné soustavy jednotek SI (Systeme International d´ Unites). Zákonné jednotky fyzikálních veličin jsou stanoveny normou ČSN 01 1300 − Zákonné měřicí jednotky. Podle této normy jsou zákonnými jednotkami

a) Základní jednotky

- **Metr**, **m** (délka)
- **Kilogram**, **kg** (hmotnost)
- **Sekunda**, **s** (čas)
- **Ampér**, **A** (elektrický proud)
- **Kelvin**, **K** (termodynamická teplota)
- **Mol**, **mol** (látkové množství)
- **Kandela**, **cd** (svítivost)

b) Doplňkové jednotky

- **Radián**, **rad** (rovinný úhel)
- **Steradián**, **sr** (prostorový úhel)

c) Odvozené jednotky

Odvozené jednotky jsou odvozené pomocí definičních jednotkových rovnic ze základních nebo již odvozených jednotek, případně též pomocí doplňkových jednotek.

Příklad

Pro sílu působící na hmotný bod platí $\vec{F} = m\vec{a}$, kde m je hmotnost hmotného bodu, $\vec{a}$ je jeho zrychlení. Potom jednotka síly $[F] = [m]\,[a] = \text{kg.m.s}^{-2}$.

V součinech značek jednotek užíváme mezi jednotkami násobící tečku, např. kg.m.s^{-2}.

Z praktických důvodů dáváme některým odvozeným jednotkám zvláštní názvy a značky.

Veličina	Značka	Název jednotky	Značka jednotky
síla	F	newton	$\text{N} = \text{kg.m.s}^{-2}$
tlak	p	pascal	$\text{Pa} = \text{N.m}^{-2}$
práce	W	joule	$\text{J} = \text{N.m}$
výkon	P	watt	$\text{W} = \text{J.s}^{-1}$
kmitočet	f	hertz	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$

d) Násobky a díly jednotek

Protože některé jednotky jsou pro praktické účely příliš velké a jiné příliš malé, tvoříme násobky a díly jednotek násobením nebo dělením vhodnou mocninou deseti.

Násobky a díly jednotek se tvoří zejména v řadě s koeficientem 10^3.

Název	**Značka**	**Násobek**	**Název**	**Značka**	**Násobek**
kilo	k	10^3	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^6	mikro	μ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
tera	T	10^{12}	piko	p	10^{-12}
peta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}

Jiné předpony:

Název	**Značka**	**Násobek**	**Název**	**Značka**	**Násobek**
deka	da	10^1	deci	d	10^{-1}
hekto	h	10^2	centi	c	10^{-2}

e) Vedlejší jednotky

- minuta (min),
- hodina (h),
- den (d),
- úhlový stupeň (°),
- úhlová minuta (′),
- vteřina (″),
- hektar (ha),
- litr (l),
- tuna (t),
- dioptrie (D, 1 m^{-1}),
- elektronvolt (eV, 1,60219.10^{-19} J),
- Celsiův stupeň (°C).

Je možné také používat jednotek kombinovaných z jednotek SI a jednotek vedlejších.

Příklad

Vyjádříme jednotky následujících veličin pomocí základních jednotek soustavy SI: a) rychlost, b) zrychlení, c) síla, d) práce, e) výkon.

a) $v = s/t \Rightarrow \mathrm{m.s^{-1}} = \mathrm{m/s}$

b) $\mathrm{a} = v/t \Rightarrow \mathrm{m.s^{-2}} = \mathrm{m.\ s^{-1}/s}$

c) $F = ma \Rightarrow \mathrm{N} = \mathrm{kg.m.s^{-2}}$

d) $W = Fs \Rightarrow \mathrm{J} = \mathrm{N.m} = \mathrm{kg.m.s^{-2}.m} = \mathrm{kg.m^{2}.s^{-2}}$

e) $P = W/t \Rightarrow \mathrm{W} = \mathrm{J.s^{-1}} = \mathrm{kg.m^{2}.s^{-2}.\ s^{-1}} = \mathrm{kg.m^{2}.s^{-3}}$

Fyzika je obecný název mnoha oborů a podoborů. Jedním ze způsobu dělení je rozdělení podle velikosti objektů. Klasická fyzika zkoumá a popisuje objekty hmotnosti mnohem větší než klidová hmotnost elektronu $m_0 \approx 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. Jestliže hmotnost objektu můžeme porovnat s m_0, té části fyziky říkáme kvantová.

Pokud je výzkum zaměřen na objekty, které se pohybují rychlostí blízké rychlosti světla ve vakuu, což je $c \approx 3 \cdot 10^{8}$ m.s $^{-1}$, v takovém případě mluvíme o relativistické fyzice.

Klasická fyzika se zabývá objekty, jejichž rychlosti jsou mnohem menší než rychlost světla ve vakuu.

Fyzika	klasická	kvantová
hmotnost / rychlost	$m \gg m_0$	$m \approx m_0$
$v \ll c$	mechanika, elektřina a magnetismus, termika, akustika	kvantová mechanika, kvantová statistická fyzika
$v \cong c, v \leq c$	speciální a obecná teorie relativity	relativistická kvantová mechanika

Důležitým objektem výzkumu je elektron, proto musíme umět popsat jeho vlastnosti, pohyb a chování v určitých podmínkách. To všechno probereme v kapitolách mechanika, elektřina a magnetismus.

Mechanika

Předmětem mechaniky je matematický popis mechanického pohybu a jeho příčiny. **Mechanickým pohybem** nazýváme změnu vzájemné polohy těles v prostoru a čase. Pohyb je relativní, proto je nutno stanovit vztažnou soustavu nebo vztažné těleso. Nejčastěji se používá tzv. laboratorní soustava – pravotočivá kartézská soustava pevně spojená se Zemí (pravotočivý směr je proti směru hodinových ručiček).

MECHANIKA

KINEMATIKA
popis pohybu v prostoru a čase bez uvažování příčin pohybu

DYNAMIKA
studium příčin pohybu a jeho změn

STATIKA
zvláštní část mechaniky, pohyb nenastává

Klasická mechanika se zabývá objekty, jejichž rychlosti jsou mnohem menší než rychlost světla ve vakuu $c \approx 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m.s}^{-1}$. Jedním z takových objektů, kvůli němuž se začínáme zabývat mechanikou, je elektron a musíme umět popsat jeho pohyb.

2. Kinematika hmotného bodu

2.1 Základní pojmy kinematiky

Kinematika studuje pohyb těles v prostoru a čase bez ohledu na příčiny tohoto pohybu.

Při řešení některých mechanických úloh nemusíme brát v úvahu velikost tělesa a jeho tvar. Potom můžeme dané těleso nahradit **hmotným bodem** (**HB**).

Abychom mohli jednoznačně určit polohu tělesa a změnu této polohy, musíme znát v každém okamžiku základní kinematické veličiny:

- polohu, tj. polohový vektor $\vec{r}$,
- rychlost $\vec{v}$,
- zrychlení $\vec{a}$.

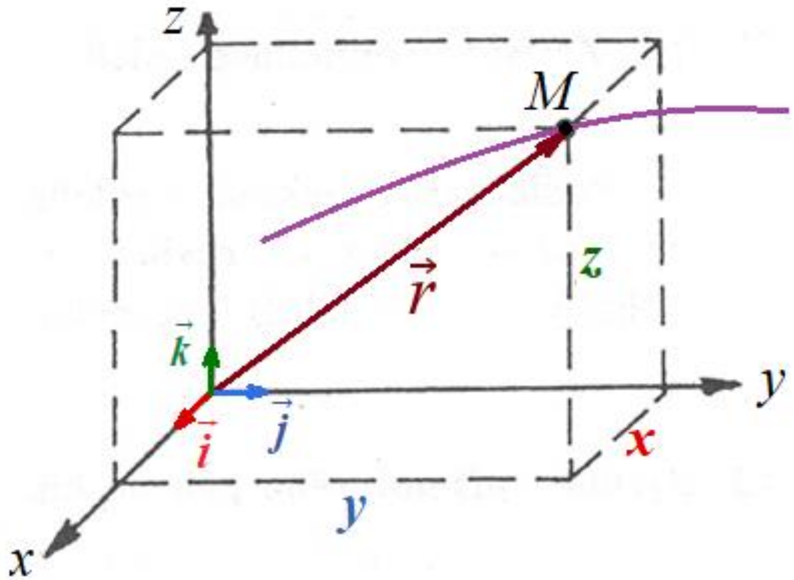
Polohový vektor $\vec{r}$ definujeme jako vektor, jehož počátek je v počátku souřadné soustavy a jeho koncový bod je v místě, kde se nachází bod, jehož polohu určujeme.

Souřadnice polohového vektoru jsou shodné se souřadnicemi daného bodu.

2.2 Pohyb hmotného bodu

Pohyb hmotného bodu v prostoru můžeme určit **parametrickými rovnicemi**,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \ .$$



Vektorová rovnice pro **polohový vektor**

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \, .$$

Poloha hmotného bodu je funkcí času.

Velikost polohového vektoru je

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, .$$

Příklad

Poloha hmotného bodu v prostoru je popsána vektorovou rovnicí

$\vec{r}(t) = 2t^2\,\vec{i} + 3t\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$ nebo parametrickými rovnicemi

$x = 2t^2, \quad y = 3t, \quad z = 4.$

Trajektorie pohybu (dráha pohybu) je spojitá křivka popsaná uvedenými parametrickými rovnicemi (parametrem je čas t).

Délku trajektorie, kterou hmotný bod opisuje při svém pohybu z počátečního bodu trajektorie, nazýváme **délkou dráhy** s.

Délka dráhy $s = s(t)$ je neklesající funkcí času (nezaměňovat s přímočarou souřadnicí x).

Jednotkou velikosti polohového vektoru a dráhy je metr $[r] = \mathrm{m}$.

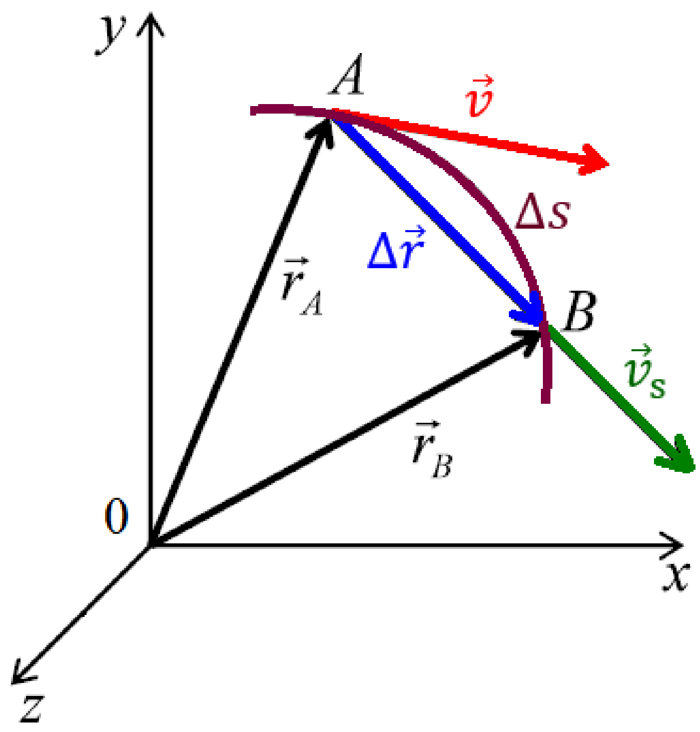
Podle tvaru trajektorie dělíme pohyby na

- **přímočaré,**
- **křivočaré** (rovinné, prostorové).

Důležitým případem křivočarého rovinného pohybu je **pohyb hmotného bodu po kružnici**.

2.3 Rychlost a zrychlení hmotného bodu

K názornému popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádíme fyzikální veličiny **rychlost** a **zrychlení**.



Předpokládáme, že v časovém okamžiku t se pohybující HB nachází v bodě A a v časovém okamžiku $t+\Delta t$ v bodě B. Potom přírůstek polohového vektoru je $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$.

Vektor střední rychlosti křivočarého pohybu je definován

$$\vec{v}_s = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Jestliže se časový interval bude zmenšovat k nule, bod B se bude blížit k bodu A a vektor $\vec{v}_s$ se bude blížit vektoru okamžité rychlosti $\vec{v}$ pro který platí

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Vektor okamžité rychlosti je určen derivací polohového vektoru podle času, má směr tečny k trajektorii a jeho orientace odpovídá rostoucím hodnotám času t.

Popisuje, jak se mění polohový vektor v čase.

Jestliže vyjádříme polohový vektor pomocí jeho složek, dostaneme **vektor okamžité rychlosti** $\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},$$

kde veličiny v_x,v_y, v_z jsou **souřadnice vektoru rychlosti**.

Okamžitou rychlost nazýváme obyčejně **rychlostí**. Rychlost je obecně funkcí času.

Vektor rychlosti je tečna k trajektorii pohybu v určitém bodě.

Pro jednotku rychlosti platí $[v] = \frac{[\mathrm{d}r]}{[\mathrm{d}t]} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m.s}^{-1}$.

Velikost rychlosti je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}.$$

Velikost rychlosti má význam dráhy uražené za jednotku času.

Určení souřadnic z časového průběhu rychlosti $\vec{v} = \vec{v}(t)$

Z definice okamžité rychlosti vyplývá pro závislost souřadnic x, y, z na čase t

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}x = v_x\,\mathrm{d}t \Rightarrow x = \int v_x\,\mathrm{d}t,$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}y = v_y\,\mathrm{d}t \Rightarrow y = \int v_y\,\mathrm{d}t,$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}z = v_z\,\mathrm{d}t \Rightarrow z = \int v_z\,\mathrm{d}t.$$

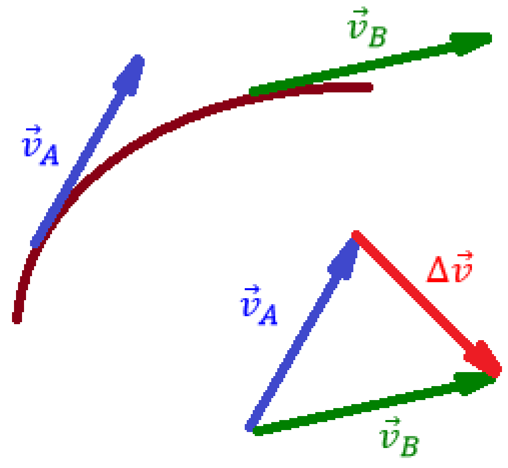
Délku dráhy, kterou urazí hmotný bod v časovém intervalu <t_1, t_2> můžeme určit vztahem

$$s = \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} |v|\,\mathrm{d}t.$$

Mění-li rychlost při pohybu hmotného bodu buď velikost nebo směr (případně velikost i směr současně), potom se hmotný bod pohybuje se zrychlením.

V časovém intervalu Δt se vektor $\vec{v}_A$ změní na $\vec{v}_B$. Jestliže přírůstek rychlosti $\Delta\vec{v}$ dělíme časem Δt, v němž změna rychlosti nastala, dostaneme střední zrychlení

$$\vec{a}_{\mathrm{s}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$



Okamžité zrychlení $\vec{a}$ potom představuje mezní hodnotu (limitu) středního zrychlení, jestliže se časový interval Δt blíží nule

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Vektor okamžitého zrychlení je určen derivací vektoru rychlosti podle času nebo druhou derivací polohového vektoru podle času.

Popisuje změnu vektoru rychlosti v čase.

Okamžité zrychlení $\vec{a}$ můžeme vyjádřit ve složkovém tvaru

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

kde veličiny a_x, a_y, a_z jsou **souřadnice vektoru zrychlení**.

Zrychlení je obecně funkcí času.

Jednotkou zrychlení je

$$[a] = \frac{[\mathrm{d}v]}{[\mathrm{d}t]} = \frac{\mathrm{m.s^{-1}}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m.s^{-2}}.$$

Velikost zrychlení je

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Vektor zrychlení má obecně jiný směr než vektor rychlosti. Pouze při přímočarém pohybu leží oba vektory v jedné přímce.

Určení rychlosti z časového průběhu zrychlení $\vec{a} = \vec{a}(t)$

Z definice okamžitého zrychlení vyplývá

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{x}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}v_x = a_x\,\mathrm{d}t \Rightarrow v_x = \int a_x\,\mathrm{d}t,$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{y}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}v_y = a_y\,\mathrm{d}t \Rightarrow v_y = \int a_y\,\mathrm{d}t,$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{z}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}v_z = a_z\,\mathrm{d}t \Rightarrow v_z = \int a_z\,\mathrm{d}t.$$

Příklad

Poloha elektronu je dána vztahem $\vec{r} = -4{,}5\,t^2\,\vec{i} + 2{,}1\,t\,\vec{j} - 3{,}0\,\vec{k}$.

Čas t je měřen v sekundách a poloha $\vec{r}$ je v metrech.

a) Určete časové závislosti rychlosti $\vec{v}(t)$ a zrychlení $\vec{a}(t)$ elektronu.

b) Jakou rychlost a jaké zrychlení má elektron v okamžiku t = 1,5 s? Výsledek zapište pomocí jednotkových vektorů.

c) Určete velikost rychlosti a velikost zrychlení elektronu v tomto okamžiku.

Řešení

a) Podle definic okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení vypočteme

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-4{,}5t^2)\,\vec{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2{,}1t)\,\vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-3{,}0)\,\vec{k} = (-4{,}5\cdot 2t)\,\vec{i} + (2{,}1\cdot 1)\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = -9t\,\vec{i} + 2{,}1\,\vec{j},$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-9t)\,\vec{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2{,}1)\,\vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0)\,\vec{k} = (-9\cdot 1)\vec{i} + 0\vec{j} + 0\,\vec{k} = -9\,\vec{i}\,.$$

b) Vektory rychlosti a zrychlení v okamžiku t = 1,5 s jsou

$$\vec{v}(t = 1{,}5) = (-9\cdot 1{,}5)\,\vec{i} + (2{,}1)\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = -13{,}5\vec{i} + 2{,}1\,\vec{j}\,,$$

$$\vec{a}(t = 1{,}5) = (-9)\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = -9\vec{i}\,.$$

Velikost rychlosti, kterou má elektron v čase t = 1,5 s, je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-13{,}5)^2 + (2{,}1)^2 + (0)^2} \approx 13{,}7.$$

Velikost zrychlení přitom je

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-9)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 9.$$

Jednotkou rychlosti je $\mathrm{m.s}^{-1}$ a jednotkou zrychlení je $\mathrm{m.s}^{-2}$.

Příklad

Zrychlení tělesa, které se pohybuje v ose x, je dáno vztahem $a = 8\ \mathrm{m.s^{-2}} + 12\ \mathrm{m.s^{-4}}\ t^2$.

V čase $t = 3$ s se nachází těleso 150 m vpravo od počátku a jeho rychlost je 100 m.s^{-1}.

a) Najděte vztahy pro rychlost a polohu tělesa v libovolném čase t.

b) Jaká je jeho počáteční rychlost?

c) Jaká je jeho počáteční poloha?

Řešení

Pohyb je pouze v ose x, proto jak rychlost, tak zrychlení mají jen jednu složku, a to ve směru osy x. Zápis tedy můžeme zjednodušit jako $v_x = v,\ a_x = a$.

a) Pro rychlost v platí

$$v = \int a\,\mathrm{d}t = \int (8\,\mathrm{m.s^{-2}} + 12\,\mathrm{m.s^{-4}}\,t^2)\mathrm{d}t = 8\,\mathrm{m.s^{-2}}\,t + 4\,\mathrm{m.s^{-4}}\,t^3 + C_1,$$

kde C_1 je integrační konstanta, jejíž hodnotu určíme z podmínky: pro čas $t = 3$ s je rychlost $v(3\ \mathrm{s}) = 100\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Platí tedy

$$v(3\,\mathrm{s}) = 8\,\mathrm{m.s^{-2}} \cdot 3\,\mathrm{s} + 4\,\mathrm{m.s^{-4}} \cdot (3\,\mathrm{s})^3 + C_1 = 132\,\mathrm{m.s^{-1}} + C_1 = 100\,\mathrm{m.s^{-1}}.$$

Odtud vyplývá, že

$$C_1 = -32\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

Rychlost v libovolném čase t se potom rovná

$v = 4\,\mathrm{m.s^{-4}}\,t^3 + 8\,\mathrm{m.s^{-2}}\,t - 32\,\mathrm{m.s^{-1}}.$

Souřadnici x určíme z integrálu rychlosti podle času

$x = \int v\mathrm{d}t = \int (4\,\mathrm{m.s^{-4}}\,t^3 + 8\,\mathrm{m.s^{-2}}\,t - 32\,\mathrm{m.s^{-1}})\mathrm{d}t = 1\,\mathrm{m.s^{-4}}\,t^4 + 4\,\mathrm{m.s^{-2}}\,t^2 - 32\,\mathrm{m.s^{-1}}\,t + C_2.$

Integrační konstantu C_2 určíme z podmínky $x(3\ \mathrm{s}) = 150\ \mathrm{m}$.

$x(3\,\mathrm{s}) = 1\,\mathrm{m.s^{-4}} \cdot (3\,\mathrm{s})^4 + 4\,\mathrm{m.s^{-2}} \cdot (3\,\mathrm{s})^2 - 32\,\mathrm{m.s^{-1}} \cdot 3\,\mathrm{s} + C_2 = 21\,\mathrm{m} + C_2 = 150\,\mathrm{m}.$

Odtud vyplývá, že

$$C_2 = 129\ \mathrm{m}.$$

Pro souřadnici x v libovolném čase t platí vztah

$x = 1\,\mathrm{m.s^{-4}}\,t^4 + 4\,\mathrm{m.s^{-2}}\,t^2 - 32\,\mathrm{m.s^{-1}}\,t + 129\,\mathrm{m}.$

b) Počáteční rychlost je

$$v_0 = v(0) = -32\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

c) Počáteční poloha tělesa je

$$x_0 = x(0) = 129\ \mathrm{m}.$$

DVĚ ÚLOHY KINEMATIKY

- **1. úloha:**

Máme dán polohový vektor $\vec{r}(t)$, odtud

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \xrightarrow{\text{derivace}} \vec{v} = \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{derivace}} \vec{a} = \vec{a}(t)$$

Úloha je triviální a jednoznačná.

- **2. úloha:**

Známe vektor zrychlení $\vec{a}(t)$, odtud

$$\vec{a} = \vec{a}(t) \xrightarrow{\text{integrace}} \vec{v} = \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{integrace}} \vec{r} = \vec{r}(t)$$

Musíme znát počáteční (okrajové) podmínky.

2.4 Speciální případy přímočarého pohybu hmotného bodu

Rovnoměrný přímočarý pohyb

Je-li zrychlení přímočarého pohybu hmotného bodu nulové, $a = 0$, nazýváme tento pohyb přímočarým pohybem **rovnoměrným**.

Pro rychlost v a souřadnici x platí

$$v = \text{konst.},$$

$$x = \int v \, \mathrm{d}t = vt + x_0,$$

kde $x_0 = x(0)$ je integrační konstanta, která se nazývá **počáteční souřadnicí**.

Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Je-li zrychlení hmotného bodu *a* konstantní, nazýváme tento pohyb **rovnoměrně zrychleným**.

Pro rychlost *v* a souřadnici *x* platí

$$v = \int a\,\mathrm{d}t = at + v_0,$$

$$x = \int v\,\mathrm{d}t = \int (at + v_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0,$$

kde $v_0 = v(0)$ a $x_0 = x(0)$ jsou integrační konstanty.

Veličina v_0 se nazývá **počáteční rychlostí**.

Příklad

Vlak má rychlost 72 km.h^{-1}. Použitím brzd je možno vlak zastavit za 2 min. Určete vzdálenost místa od stanice, kde je třeba začít brzdit. Předpokládejte rovnoměrně zpomalený pohyb.

Řešení

Čas počítáme od okamžiku, kdy vlak začne brzdit. V tomto okamžiku je začátek vlaku v bodě $x = 0$. Počáteční rychlost je potom v_0 = 72 km.h^{-1} = 20 m.s^{-1}. Pro souřadnici x začátku vlaku platí

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Zrychlení a určíme z podmínky $v = v_0 + a t_1 = 0$,

kde t_1 = 2 min = 120 s je čas od okamžiku začátku brzdění do zastavení vlaku. Platí

$$a = -\frac{v_0}{t_1} = -\frac{20\ \mathrm{m.s^{-1}}}{120\ \mathrm{s}} = -\frac{1}{6}\ \mathrm{m.s^{-2}}.$$

Potom lze určit brzdnou dráhu vlaku

$$x(t_1) = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = 20\ \mathrm{m.s^{-1}} \cdot 120\ \mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\ \mathrm{m.s^{-2}}\right) \cdot (120\ \mathrm{s})^2 = 1\,200\ \mathrm{m}.$$

2.5 Přímočarý pohyb v zemském tíhovém poli

Tíhovým polem Země rozumíme silové pole v okolí Země, ve kterém působí na hmotný bod o hmotnosti m tíhová síla $\vec{G} = m\vec{g}$, kde $\vec{g}$ je **vektor tíhového zrychlení**.

Předpokládáme, že je vektor $\vec{g}$ v uvažované oblasti konstantní.

Přímočarý pohyb musí probíhat v kladném nebo záporném smyslu vektoru $\vec{g}$.

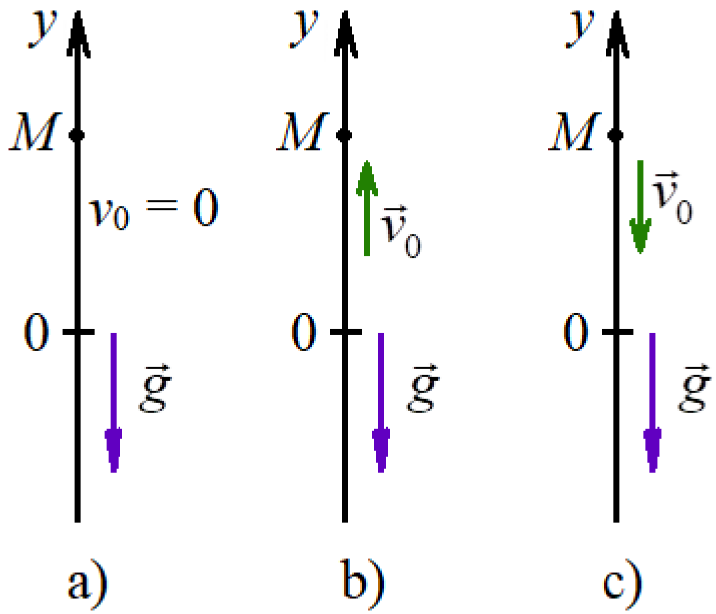
Obvykle uvažujeme hodnotu **normálního tíhového zrychlení** g = 9,80665 m.s^{-2}.

Rozdělení pohybů podle vektoru počátečního zrychlení:

a) volný pád ($v_0 = 0$, $a = -g$),

b) vrh svislý vzhůru ($v_0 > 0$, $a = -g$),

c) vrh svislý dolů ($v_0 < 0$, $a = -g$).



2.6 Princip superpozice pohybů

V klasické mechanice platí pro pohyb hmotného bodu **princip superpozice pohybů**.

Má-li hmotný bod konat dva nebo více pohybů současně, zaujme takovou výslednou polohu, jako by vykonal všechny pohyby postupně a v jakémkoliv pořadí.

Má-li např. hmotný bod konat současně dva pohyby, z nichž první by způsobil jeho posunutí za velmi malý přírůstek času Δt o $\Delta \vec{r}_1$ a druhý o $\Delta \vec{r}_2$, je **výsledné posunutí**

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_2 .$$

Vydělením uvedené rovnice přírůstkem času Δt dostaneme výslednou **rychlost pohybu**

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 ,$$

kde $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ jsou rychlosti dílčích pohybů.

Odsud vyplývá, že **vektor rychlosti výsledného pohybu** je dán v každém čase vektorovým součtem rychlostí dílčích pohybů.
Podobně **zrychlení** $\vec{a}$ **výsledného pohybu** je dáno součtem vektorů zrychlení dílčích (skládaných) pohybů $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$,

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 .$$

2.7 Křivočarý pohyb v zemském tíhovém poli

Šikmý vrh – počáteční rychlost, elevační úhel.

Neuvažujeme odpor prostředí.

Výsledkem je křivočará trajektorie – **parabola**.

Platí princip superpozice:

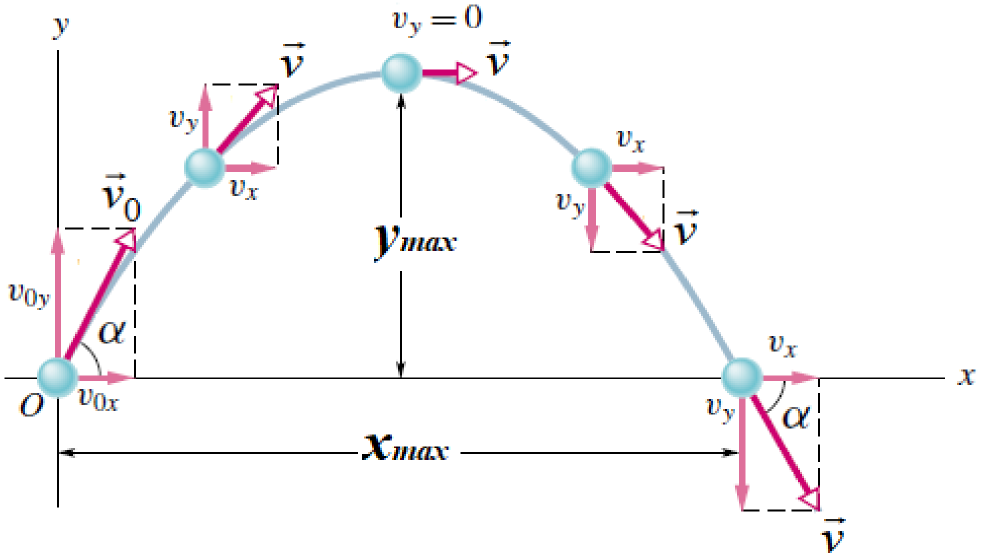
- osa x: rovnoměrný pohyb s konstantní rychlostí $v_x = v_{0x}$,
- osa y: rovnoměrně zrychlený pohyb s počáteční rychlostí v_{0y} a zrychlením $a_y = -g$.

Rovnice pro šikmý vrh mají tedy tvar

$$a_x = 0, \qquad a_y = -g.$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

$$x = x_0 + v_0 \cos\alpha\, t, \qquad y = y_0 + v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$



Vodorovný vrh – řeší se stejně jako šikmý vrh s elevačním úhlem 0. Někdy je výhodně orientovat svislou osu y dolů.

Souhrnná tabulka

Pohyb	Zrychlení	Rychlost	Poloha
Rovnoměrný přímočarý	$a = 0$	$v_0 =$ konst.	$x = x_0 + v_0 t$
Rovnoměrně zrychlený přímočarý	$a =$ konst., $a > 0$	$v = v_0 + at$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
Rovnoměrně zpomalený přímočarý	$a =$ konst., $a < 0$	$v = v_0 - at$	$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2$
Volný pád	$a = -g =$ konst.	$v_0 = 0,\ v = -gt$	$y = -\frac{1}{2}gt^2$
Vrh svislý vzhůru	$a = -g =$ konst.	$v_0 > 0,$ $v = v_0 - gt$	$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$
Vrh svislý dolů	$a = -g =$ konst.	$v_0 < 0,$ $v = -v_0 - gt$	$y = y_0 - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$
Vodorovný vrh	$a_x = 0,$ $a_y = -g$	$v_x = v_0,$ $v_y = -gt$	$x = x_0 + v_0 t,$ $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$
Šikmý vrh	$a_x = 0,$ $a_y = -g$	$v_x = v_0 \cos\theta,$ $v_y = v_0 \sin\theta - gt$	$x = x_0 + v_0 t \cos\theta,$ $y = y_0 + v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$

Shrnutí

- Poloha hmotného bodu v prostoru je zadána pomocí polohového vektoru
  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

- Okamžitá rychlost je derivace polohového vektoru podle času. Popisuje, jak se mění polohový vektor v čase.
  $$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$$
  Vektor rychlosti má směr tečny k trajektorii a jeho orientace odpovídá rostoucím hodnotám času t.

- Okamžité zrychlení je derivace vektoru rychlosti podle času. Popisuje, jak se mění v čase velikost nebo směr (popřípadě obojí) vektoru rychlosti.
  $$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$

- Opačnou operací (integrováním) lze určit rychlost a polohu pokud známe zrychlení a počáteční podmínky.

3. Dynamika hmotného bodu

3.1 Základní pojmy dynamiky

Studiem souvislostí mezi vzájemným působením těles a změnami jejich pohybového stavu se zabývá **dynamika**.

Hmotné objekty na sebe navzájem působí různým způsobem, říkáme, že jsou ve vzájemné interakci. V klasické mechanice se touto interakcí rozumí vzájemné působení těles, které vede ke změně jejich pohybového stavu nebo k jejich deformaci , případně k oběma jevům současně.

Vzájemné působení těles se může realizovat v podstatě buď při vzájemném dotyku těles, nebo prostřednictvím fyzikálních polí.

Vzájemnou interakci hmotných objektů hodnotíme fyzikální veličinou nazvanou **síla**. Síla tedy nemůže existovat samostatně, nezávisle na hmotných objektech.

Dynamika tedy studuje souvislosti mezi pohybem a silami, které jej způsobují.

3.2 Základní veličiny dynamiky

Základními pojmy dynamiky jsou jednak pojmy kinematické, tj. **polohový vektor**, **rychlost** a **zrychlení**, jednak pojmy **hmotnost**, **hybnost** a **síla**.

Hmotnost

Hmotnost je mírou setrvačných a tíhových vlastností tělesa.

Je základní vlastností všech látkových objektů. Hmotnost je kladná skalární veličina. Jednotkou hmotnosti je kilogram – $[m]$ = kg.

Hybnost

Okamžitý pohybový stav hmotného bodu je z kinematického hlediska určen polohou a rychlostí.

Z dynamického hlediska jsou účinky pohybu, např. při nárazu na stěnu určeny hmotností a rychlostí. Jako dynamickou míru pohybu proto zavádíme veličinu **hybnost** $\vec{p}$,

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Hybnost je vektorová veličina. Jednotkou hybnosti je $[p] = \text{kg.m.s}^{-1}$.

Síla

Síla je mírou vzájemného působení mezi hmotnými objekty.

Toto působení může mít za následek **změnu pohybového stavu**, **deformaci** nebo obojí.

Všechny síly působící na hmotný objekt můžeme rozdělit na

- síly vznikající při přímém kontaktu těles (síly tlakové, tahové, síly tření),
- síly vyvolané fyzikálním polem (síly gravitační, síly elektrické, síly magnetické).

Síla je vektorová fyzikální veličina. Jednotkou síly je $[F]$ = N (Newton).

Působí-li na hmotný bod více sil, je výsledná síla $\vec{F}$ dána podle **principu superpozice** jejich vektorovým součtem

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,.$$

3.3 Newtonovy pohybové zákony

Dynamika je založena na třech základních zákonech, které uveřejnil v roce 1687 Isaac Newton (1642–1727):

Zákon setrvačnosti

1. Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, pokud není nuceno vnějšími silami tento stav měnit.

Zákon síly

2. Časová změna hybnosti je úměrná vnější síle a má s ní stejný směr.

Zákon akce – reakce

3. Každá akce způsobuje vždy stejně velikou reakci opačného směru, čili vzájemná působení dvou těles jsou stejně veliká a opačného směru.

3.4 Inerciální a neinerciální vztažné soustavy

První Newtonův zákon (Zákon setrvačnosti) zaručuje existenci preferovaných vztažných soustav, soustav inerciálních. **Inerciální vztažné soustavy** (inerciální soustavy) jsou takové, ve kterých platí první Newtonův zákon.

Jestliže je soustava vůči jiné inerciální soustavě **v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu**, je tato soustava také **inerciální**.

Jestliže se soustava vůči jiné inerciální soustavě například urychluje, zpomaluje, zatáčí nebo se otáčí, jedná se o neinerciální vztažnou soustavu.

Poznámka. Důkaz zákona setrvačnosti nemůžeme provést – nelze realizovat stav tělesa, kdy na něj nepůsobí žádné síly. V přírodě neexistuje ani absolutní klid ani absolutní rovnoměrný přímočarý pohyb.

Klid a rovnoměrný přímočarý pohyb jsou relativní a závisejí na volbě souřadné soustavy, která je spojena s určitým vztažným tělesem. Vztažné těleso (nejčastěji Země) se může pohybovat.

Z hlediska popisu pohybu jsou klid a rovnoměrný pohyb ekvivalentní (člověk ve vlaku, ve výtahu).

První Newtonův zákon také lze vyjádřit jako: je-li těleso v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře, je výslednice všech vnějších sil, které působí na těleso, rovna nule.

Druhý pohybový zákon (Zákon síly) v inerciálních vztažných soustavách

Vzájemný vztah mezi příčinou (tj. působící silou) a účinkem (tj. změnou pohybového stavu hmotného bodu) udává **druhý Newtonův pohybový zákon**

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t}.$$

Zde hybnost HB $\vec{p} = m\vec{v}$ a $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ vektorový součet všech sil na něj působících.

Dosazením dostáváme

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\vec{a},$$

kde $\vec{a}$ je zrychlení hmotného bodu, vyvolané působící silou $\vec{F}$.

Je-li hmotnost m nezávislá na čase, je její derivace podle času nulová a platí

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ resp. } \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Tato rovnice se nazývá **první pohybovou rovnicí**. Tato rovnice platí jen v **inerciálních vztažných soustavách**.

Rovnice $\vec{F} = m\vec{a}$ slouží též jako definiční rovnice pro definici veličiny síla a je z ní tedy vyjádřena i definiční rovnice pro jednotku síly – [F] = [m] . [a] = kg.m.s^{-2} = Newton = N.

3.5 Některé druhy sil

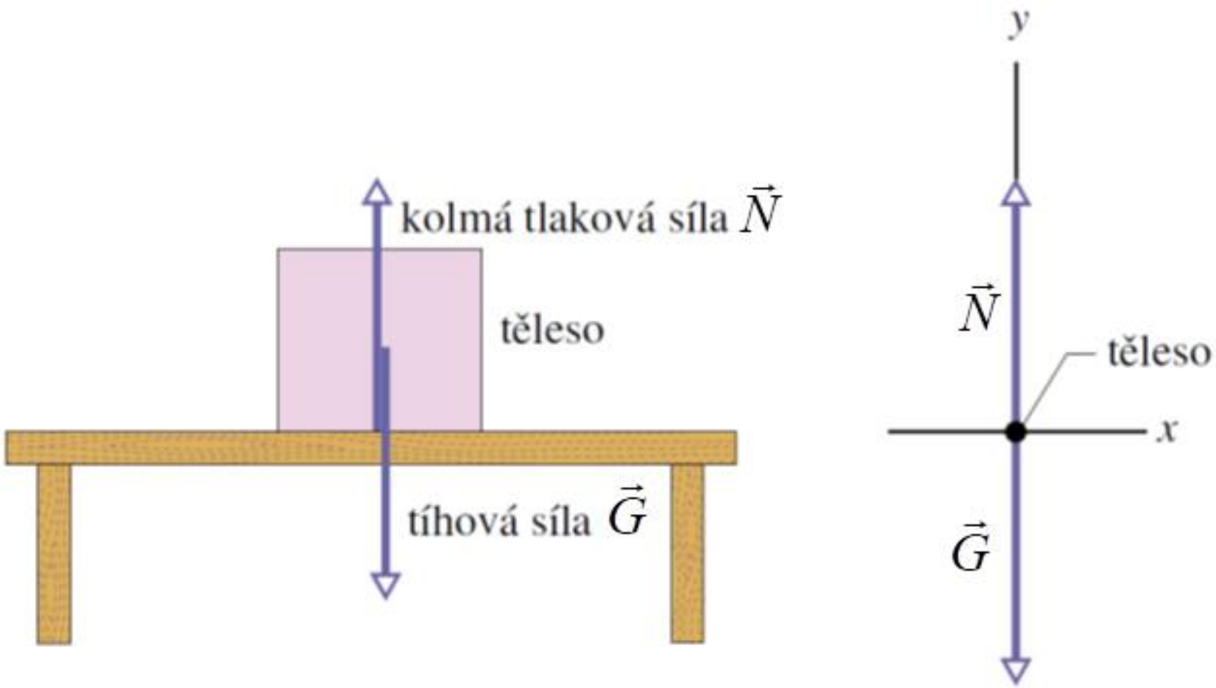
Tíhová síla

Tíhová síla $\vec{G}$ je výslednicí gravitační a odstředivé síly → tíhové zrychlení $\vec{g}$.

$$\vec{G} = m\vec{g}.$$

Kolmá tlaková síla

Existuje pouze v případě, že se těleso nachází na podložce. Podložka působí na těleso tlakovou (normálovou) sílou $\vec{N}$. Tato síla je **vždy kolmá k povrchu podložky**.

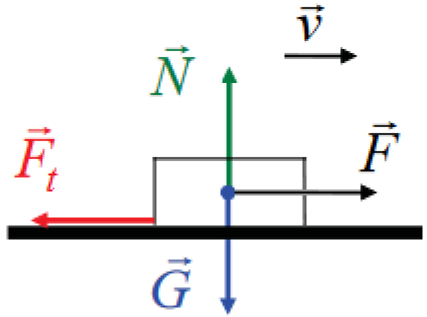


(a) (b)

Tření

Třecí síla působí proti směru pohybu a je rovnoběžná s podložkou.

Existují statické × kinetické tření, smykové × valivé tření.



Statické (klidové) tření – těleso je v klidu, statická třecí síla tření přesně vykompenzuje příslušnou složku vnější síly, která se ho snaží uvést do pohybu.

Kinetické tření – při pohybu.

Smykové (vlečné) tření – maximální hodnota statické třecí síly pro těleso v klidu je

$$F_{\mathrm{t}0} = \mu_0 N,$$

kde μ_0 je **statický součinitel smykového tření**. Pokud je příslušná složka vnější síly větší než tato hodnota $F_{\mathrm{t}0}$, těleso je uvedeno do pohybu a platí

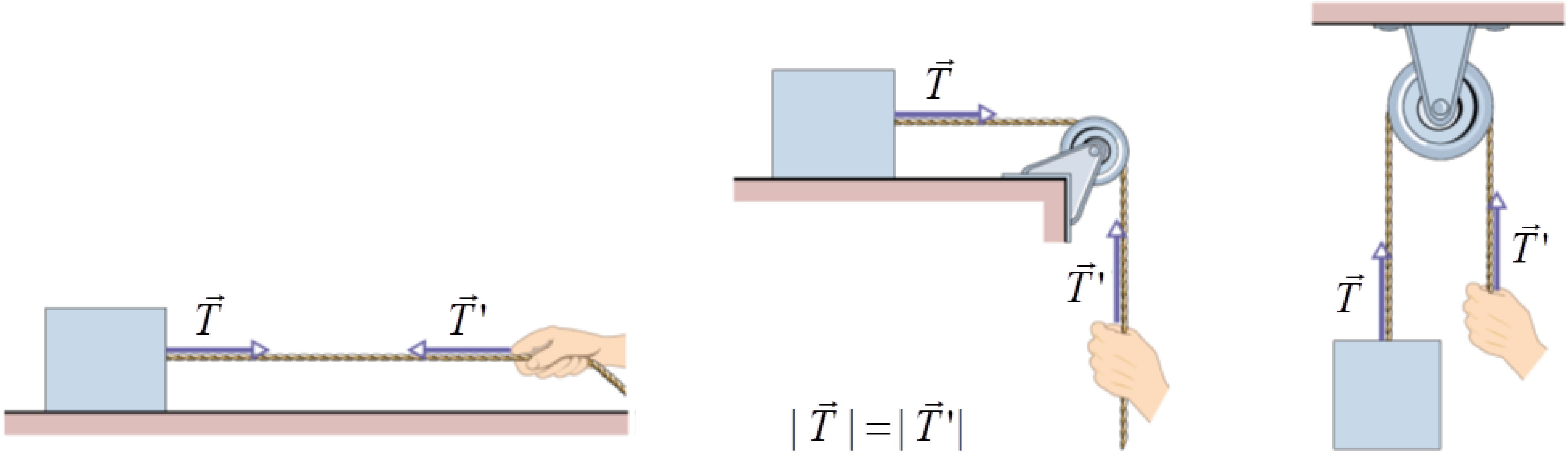
$$F_{\mathrm{t}} = \mu N,$$

kde μ je **součinitel smykového tření**.

Statický součinitel smykového tření bývá pro stejná tělesa větší než součinitel smykového tření.

Tahová síla

Tahová síla $\vec{T}$ je síla, kterou působí lanko na těleso při jeho tažení.



Odpor prostředí

Vzniká při pohybu tělesa v kapalině nebo plynu. Působí proti směru pohybu.

Velikost síly odporu prostředí je

$$F_o = av + bv^2,$$

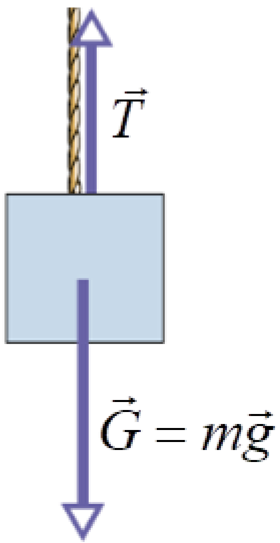
kde a, b jsou veličiny závislé na tvaru a velikosti tělesa a vlastnostech prostředí. Při malých rychlostech převažuje první člen, při vyšších rychlostech druhý.

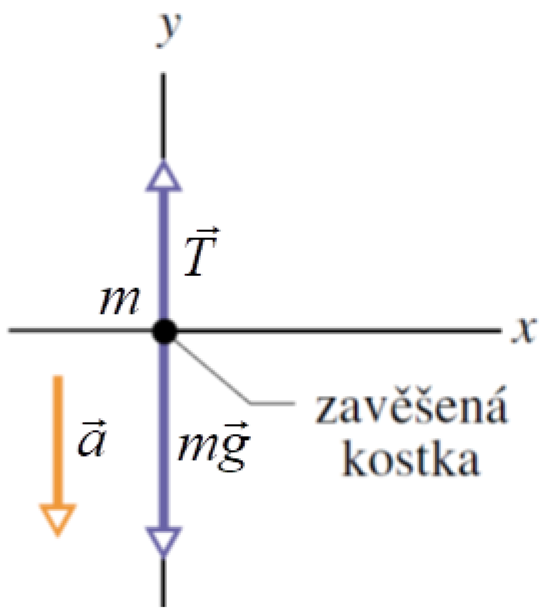
Odporová síla může mít i jiný směr než rychlost (letadlo).

Příklady užití Newtonových zákonů

Všechny dále uvedené příklady mohou být řešeny i se započítáním třecích sil $\vec{F}_t$, resp. odporových sil $\vec{F}_o$. Tíhová síla $\vec{G} = m\vec{g}$.

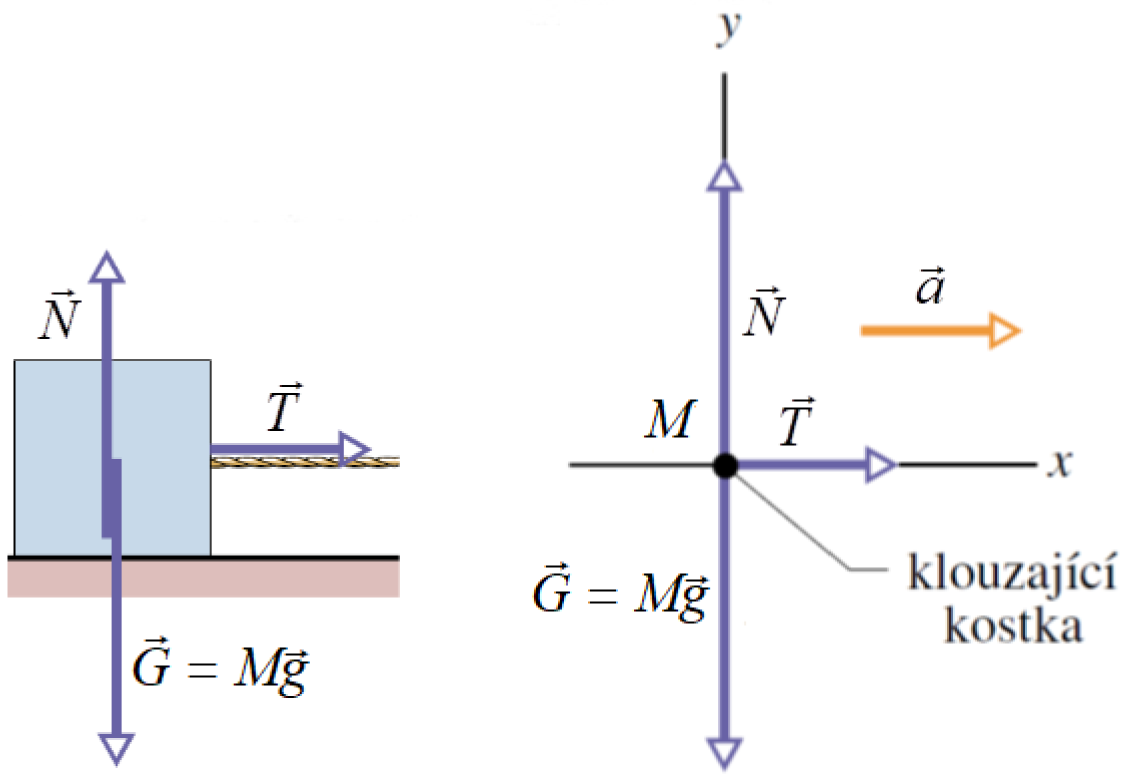
Zavěšené těleso





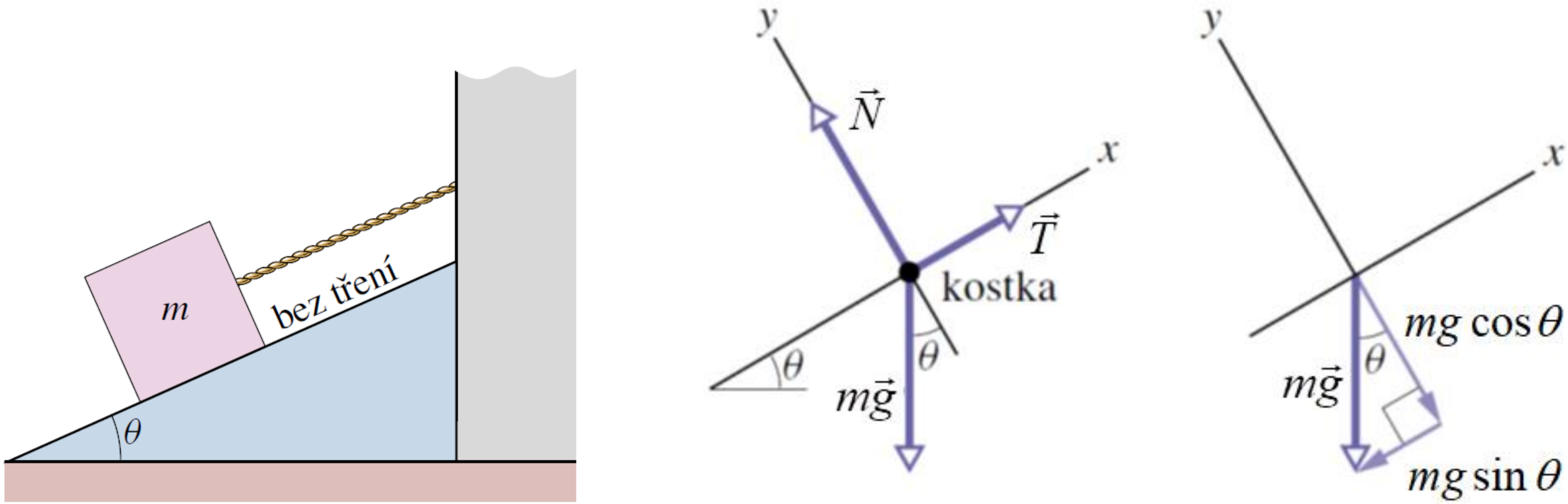
$$\vec{G} + \vec{T} = m\vec{a}, \qquad \text{resp.} \qquad \vec{G} + \vec{T} + \vec{F}_o = m\vec{a}$$

Klouzající těleso



$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{T} = M\vec{a}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \vec{G} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{t} = M\vec{a}$$

Nakloněná rovina



$$\vec{G}+\vec{N}+\vec{T}=m\vec{a}, \qquad \text{resp.} \qquad \vec{G}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{F}_{\mathrm{t}}=m\vec{a}$$

3.6 Řešení pohybové rovnice

Pohybová rovnice má tvar

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ resp. } \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

kde síla $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ a pravá strana $m\vec{a} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k}$.

Složkové rovnice jsou

$$F_x = ma_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

$$F_y = ma_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},$$

$$F_z = ma_z = m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2},$$

kde rychlost $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ a souřadnice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, polohový vektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

DVĚ ÚLOHY DYNAMIKY

Základní úloha dynamiky

Tuto úlohu řešíme tehdy, pokud je zadána některá ze tří kinematických veličin $\vec{a}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{r}(t)$.

Pak můžeme určit vektor síly $\vec{F} = \vec{F}(t)$ pomocí derivace zadaných veličin.

Obrácená úloha dynamiky

Jsou-li zadány síly (výslednice sil $\vec{F} = \vec{F}(t)$) působící na hmotný bod, získáme veličiny $\vec{a}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{r}(t)$ integrací složkových rovnic (řešení diferenciální rovnice).

K tomu je třeba znát **počáteční podmínky** $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$, $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ v čase t_0.

3.7 Mechanická práce (dráhový účinek síly)

Působením síly na hmotný bod se změní obecně jeho pohybový stav.

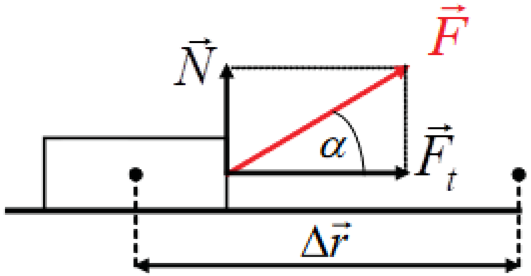
Skalární veličinu, která vyjadřuje dráhový účinek síly, nazýváme **práce** W.

Práce konstantní síly

Působí-li na hmotný bod konstantní síla $\vec{F}$, nemění se její velikost a směr v prostoru. Síla $\vec{F}$ způsobí přímočaré posunutí hmotného bodu o vektor $\Delta\vec{r}$ (**posunutí**).

Práci W konstantní síly $\vec{F}$ definujeme jako součin velikosti tečné složky síly $F_t = F\cos\alpha$ (tj. složky síly $\vec{F}$ do směru posunutí) a velikosti posunutí Δr

$$W = F_\mathrm{t}\Delta r = F\cos\alpha\,\Delta r = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}\,.$$



Práce konstantní síly

Jednotkou práce je $[W]$ = N.m = joule = J.

Uvedené vztahy neplatí v obecném případě, kdy na hmotný bod pohybující se po křivočaré trajektorii působí síla s proměnnou velikostí tečné složky F_t (funkce polohy, resp. času).

Celková práce, kterou koná síla $\vec{F}$ při posuvu hmotného bodu po křivočaré trajektorii je

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

kde $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ jsou polohové vektory počátečního a koncového bodu trajektorie.

Je-li $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, je $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$, platí

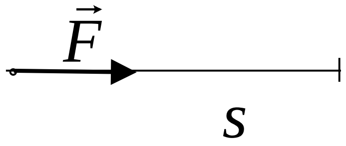
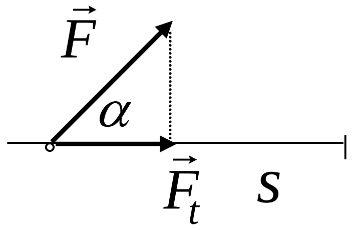
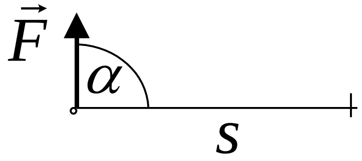
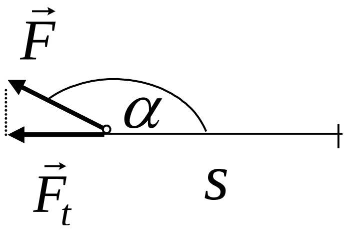
$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) \cdot (\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\,\vec{j} + \mathrm{d}z\,\vec{k}) = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z\,.$$

Práce po dané trajektorii mezi počátečním a koncovým bodem trajektorie je potom rovna

$$W = \int_{[x_1, y_1, z_1]}^{[x_2, y_2, z_2]} (F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z).$$

Práce síly $\vec{F}$ je dána součtem prací jejich jednotlivých složek ve směru příslušných os.

Tabulka výpočtu práce při pohybu tělesa po přímce (směrem doprava)

	$W = F \cdot s > 0$	síla práci koná
	$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha > 0$	síla práci koná
	$W = 0$	síla práci nekoná
	$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha < 0$	síla práci spotřebuje

3.8 Mechanický výkon

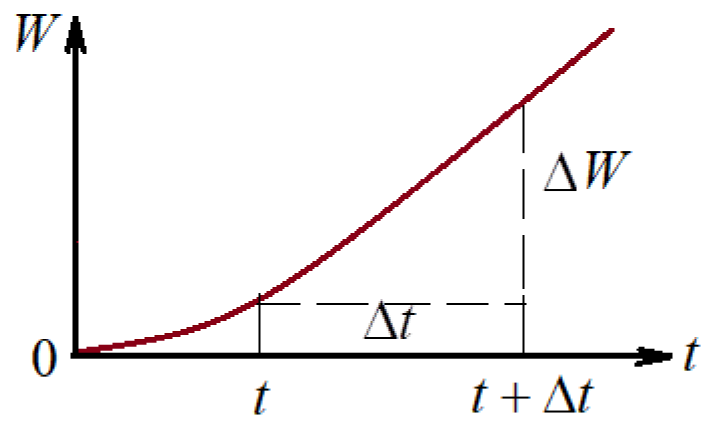
Stejně velká práce vyvolá vždy stejně velký účinek bez ohledu na dobu, po kterou byla konána. Přesto je důležitou charakteristikou též doba, za kterou byla daná práce vykonána.

Výkon je skalární veličina, která charakterizuje, jak rychle se koná mechanická práce.

Výkon P je přímo úměrný práci a nepřímo úměrný době, za kterou byla tato práce vykonána.

Vykonala-li daná síla $\vec{F}$ v časovém intervalu $\langle t, t+\Delta t\rangle$ práci ΔW, je **střední hodnota výkonu** v tomto intervalu rovna

$$P_s = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$



Definujeme **okamžitou hodnotu výkonu** P jako limitu středního výkonu pro $\Delta t \to 0$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$

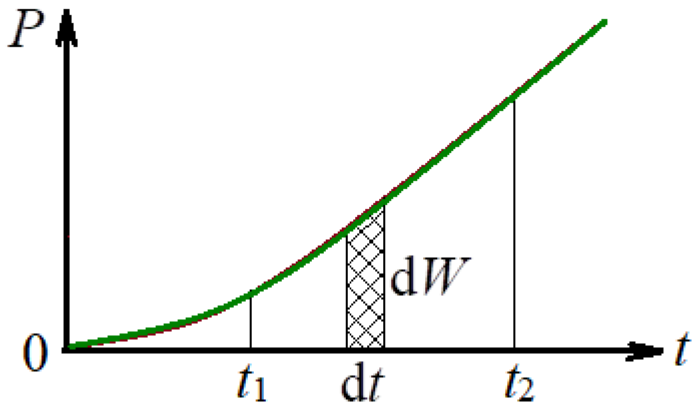
Jednotkou je $[P] = \mathrm{J.s^{-1}}$ = watt = W.

Jestliže je v určitém časovém intervalu síla F konstantní, výkon lze vypočítat

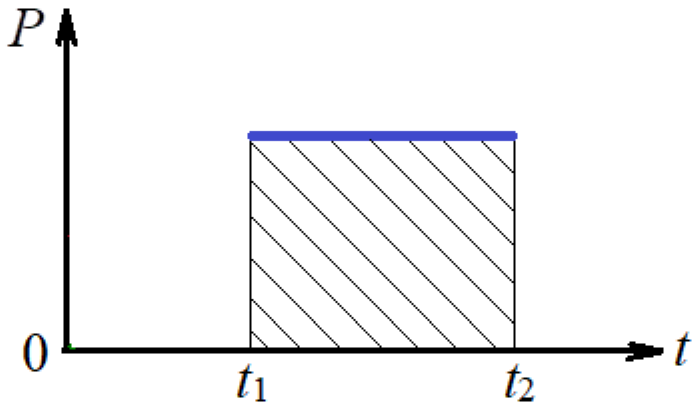
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Známe-li časový průběh výkonu $P = P(t)$, můžeme stanovit práci, která je vykonána v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Platí

$$\mathrm{d}W = P\mathrm{d}t, \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P\mathrm{d}t.$$



Velikost této práce je vyjádřena v příslušném měřítku plochou pod grafem funkce $P = P(t)$ v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.



V případě konstantního výkonu P = konst. dostaneme

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P\mathrm{d}t = P(t_2 - t_1).$$

3.9 Mechanická energie

Energie je skalární fyzikální veličina, která vyjadřuje schopnost těles konat práci.

Jednotkou energie je [E] = [W] = joule = J.

Předpokládáme, že vnější těleso může působením silou $\vec{F}_{\mathrm{v}}$ na hmotný bod měnit jeho polohu a rychlost. Přitom vykonává práci.

Přírůstek energie E soustavy je definován pomocí práce W jako,

$$\Delta E = E - E_0 = W ,$$

kde E_0 je energie soustavy na počátku působení síly $\vec{F}_{\mathrm{v}}$, E je konečná hodnota energie. Definiční rovnicí je určen pouze přírůstek energie. Pro **energii** platí

$$E = E_0 + \Delta E = E_0 + W .$$

Počáteční hodnota energie E_0 není definicí určena, můžeme ji volit libovolně.

Energii ostatních stavů potom určujeme vzhledem k tomuto základnímu stavu.

Kinetická energie

Kinetickou nebo také pohybovou energií nazveme dynamickou skalární veličinu, která souvisí s pohybem tělesa a která se mění, vykonáme-li na tělese práci.

Zvolíme stav, v němž má hmotný bod v dané souřadnicové soustavě rychlost $v = 0$ za základní a přiřadíme mu hodnotu kinetické energie $E_{k0} = 0$.

Kinetická energie stavu s rychlostí v je pak dána prací **výsledné síly** $\vec{F}$ působící na HB,

$$E_k = W = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kinetická energie tělesa závisí na volbě vztažné souřadnicové soustavy (různé rychlosti).

Potenciální energie

Potenciální (polohová) energie je skalární veličina, která charakterizuje schopnost tělesa vykonat práci při změně své polohy.

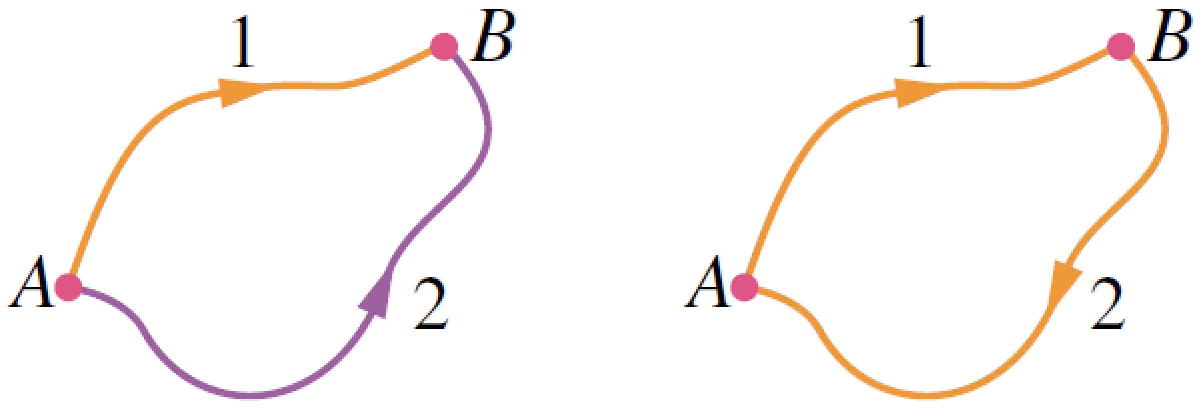
Jestliže práci konají síly tíhového pole při povrchu Země, mluvíme o potenciální energii tíhové. V homogenním tíhovém poli je potenciální energie

$$E_p = mgh,$$

kde m je hmotnost hmotného bodu, g je tíhové zrychlení a h je jeho výška nad nulovou hladinou potenciální energie (tj. obvykle nad zemí, nad podložkou atd.).

Potenciální energie je definována pouze v poli konzervativních sil.

Síly konzervativní: práce vykonaná při přemístění tělesa mezi dvěma zadanými body nezávisí na trajektorii, po které se těleso pohybovalo (např. tíhová síla, pružná síla, elektrostatická síla).



(a) (b)

Práce vykonaná konzervativní silou působící na částici pohybující se po libovolné uzavřené trajektorii je nulová.

Mechanická energie

Pro gravitační silová pole a pole pružných sil je přírůstek energie soustavy roven **přírůstku mechanické energie soustavy**.

Koná-li vnější síla $\vec{F}_{\mathrm{v}} = \vec{F} + (-\vec{F}_{\mathrm{i}})$ působící na hmotný bod práci, dochází

- ke změně rychlosti hmotného bodu – část práce tvoří přírůstek **kinetické energie** ΔE_{k} hmotného bodu (odpovídá práci výsledné síly $\vec{F}$),
- ke změně polohy hmotného bodu v silovém poli tělesa – část práce tvoří přírůstek **potenciální energie** ΔE_{p} hmotného bodu (odpovídá práci výsledné síly $-\vec{F}_{\mathrm{i}}$).

Potom platí

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}}.$$

3.10 Zákon zachování mechanické energie

Pro konzervativní silová pole $\vec{F}_{\mathrm{i}}$ platí **zákon zachování mechanické energie** pro **izolované soustavy** (soustava si nevyměňuje s okolím ani energii ani látku – idealizace).

Pro izolovanou soustavu platí $\vec{F}_{\mathrm{v}} = 0$. Potom je práce vnější síly nulová, pak $\Delta E = 0$ a platí

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = 0.$$

Působí-li v soustavě pouze vnitřní síly, je přírůstek kinetické energie hmotného bodu v důsledku práce těchto vnitřních sil roven úbytku jeho potenciální energie a naopak.

Z předchozí rovnice vyplývá zákon zachování mechanické energie pro izolované soustavy

$$E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \mathrm{konst}.$$

Celková mechanická energie izolované soustavy je konstantní.

Zákon zachování mechanické energie je zvláštním případem **zákona zachování energie**.

Energie se nemůže nikde ztrácet, pouze se mění jedna forma energie na druhou.

Příklad

Kostku o hmotnosti M, která byla zpočátku v klidu, spouštíme na laně svisle dolů se zrychlením $g/4$.

a) Jaká je při popsaném ději tahová síla lana?

Zaměřme se nyní na okamžik, kdy kostka poklesla o vzdálenost d.

Určete:

b) jakou práci vykonala do tohoto okamžiku tahová síla lana,

c) jakou práci vykonala tíhová síla,

d) jaká je v tomto okamžiku kinetická energie kostky,

e) rychlost kostky.

Nakreslete obrázek znázorňující popsanou situaci. Zakreslete do něj působící síly, znázorněte směr zrychlení a sestavte pohybovou rovnici vektorově i ve složkách. Odpovědi zapište včetně znamének a znaménka zdůvodněte.

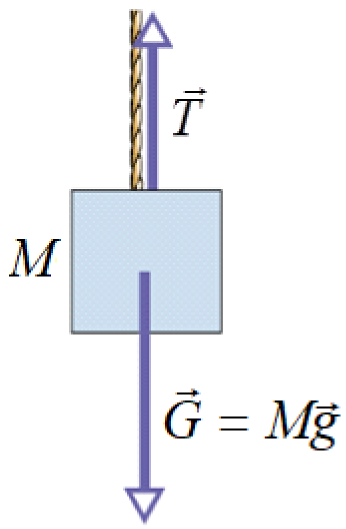
Řešení

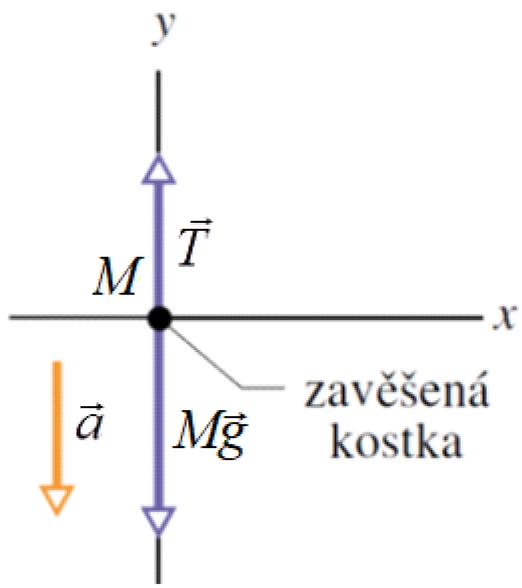
M

$a = g/4$

$v_0 = 0\ \mathrm{m.s^{-1}}$

d





Podle druhého Newtonova pohybového zákona sestavíme pohybovou rovnici vektorově

$\vec{T} + \vec{G} = M\vec{a}$, resp. $\vec{T} + M\vec{g} = M\vec{a}$

a) Protože všechny vektory leží ve stejné přímce lze psát pohybovou rovnici ve složkách:

v ose *y*: $T - Mg = -Ma$.

Vypočítáme tahovou sílu lana

$T = Mg - Ma = M(g - a) = M(g - g/4) = \frac{3}{4}\,Mg$ N.

Po uplynutí nějaké doby kostka poklesla o vzdálenost *d*.

Síly působící na kostku jsou konstantní, proto pro výpočet práce můžeme použít zjednodušený vztah: $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cos\alpha \, \Delta r$.

b) Práce, kterou vykonala do tohoto okamžiku tahová síla lana je

$$W_T = T \cdot \cos(180°) \cdot d = T \cdot (-1) \cdot d = -Td = -\frac{3}{4} Mgd \text{ J.}$$

c) Práce, kterou vykonala do tohoto okamžiku tíhová síla je

$$W_G = G \cdot \cos(0°) \cdot d = G \cdot (1) \cdot d = Mgd \text{ J.}$$

d) Kinetickou energii získala kostka tím, že byla vykonána práce obou působících sil:

$$E_k = W_T + W_G = -\frac{3}{4} Mgd + Mgd = \frac{1}{4} Mgd \text{ J.}$$

e) Rychlost kostky vypočítáme z definičního vztahu kinetické energie

$$E_k = \frac{1}{2} Mv^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2E_k}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{4} Mgd}{M}} = \sqrt{\frac{gd}{2}} \text{ m.s}^{-1}.$$

Poznámka: Rychlost lze určit také integrováním zrychlení.

Příklad

Těleso o hmotnosti 20 kg se nachází v klidu na vodorovné rovině. V čase 0 začne na těleso působit stálá vnější síla o velikosti 90 N směrem šikmo vzhůru, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 30°. Touto silou je těleso uvedeno do pohybu. Součinitel smykového tření mezi tělesem a rovinou je 0,3.

Určete:

a) velikost a směr normálové síly, kterou působí rovina na těleso,

b) zrychlení tělesa.

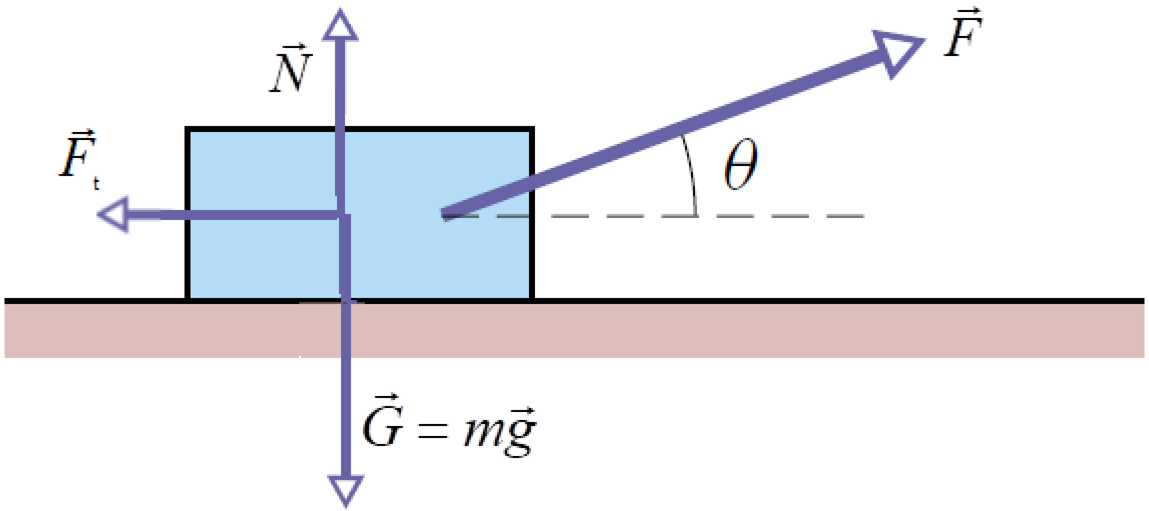
Řešení

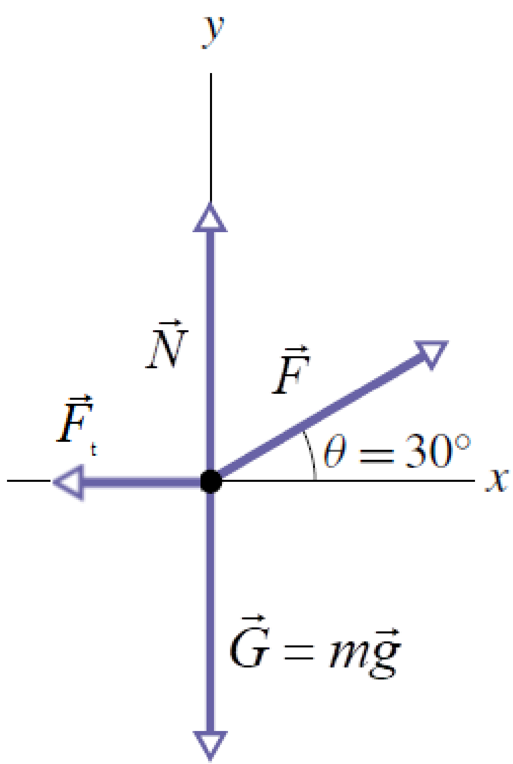
m = 20 kg

F = 90 N

θ = 30°

μ = 0,3





Podle druhého Newtonova pohybového zákona sestavíme pohybovou rovnici vektorově

$\vec{N} + \vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_t = m\vec{a}$, resp. $\vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_t = m\vec{a}$

Sestavíme pohybovou rovnici ve složkách

v ose x: $F_x - F_t = ma_x$,

v ose y: $N + F_y - G = ma_y$.

Těleso se pohybuje podél vodorovné roviny, proto má zrychlení pouze v ose x.

Můžeme upravit rovnice

v ose x: $F \cdot \cos\theta - F_t = ma$,

v ose y: $N + F \cdot \sin\theta - mg = 0$.

a) Normálová síla, kterou působí rovina na těleso je

$N = mg - F \cdot \sin\theta = 20\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}} - 90\ \mathrm{N} \cdot \sin(30°) = 151{,}2\ \mathrm{N}$.

b) Zrychlení vypočítáme z pohybové rovnice v ose x

$$a = \frac{F\cos\theta - F_t}{m} = \frac{F\cos\theta - \mu N}{m} = \frac{F\cos\theta - \mu(mg - F\sin\theta)}{m} =$$

$$= \frac{90\,\mathrm{N} \cdot \cos 30° - 0{,}3 \cdot (20\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}} - 90\,\mathrm{N} \cdot \sin 30°)}{20\,\mathrm{kg}} = 1{,}63\,\mathrm{m.s^{-2}}.$$