

Vlny - 4

Rychlost šíření vlny na struně a v plynu.

Vlastní kmity na struně a v trubici. Zvukové vlny.

Princip strunných a dechových nástrojů.

Rychlost šíření vln na struně a v plynu

Rychlost šíření mechanické vlny je závislá na **elastických** (pružnost) a **setrvačných** vlastnostech prostředí

Struna:

Napětí struny – charakterizuje pružnost systému

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (\text{rychlost vlny na struně}),$$

$$[\tau] = \text{N}$$

$$[\mu] = \text{kg m}^{-1}$$

Lineární hustota $\mu = m/L$ – charakterizuje setrvačnost systému

Plyn - vzduch (případně pevná látka):

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (\text{rychlost zvuku})$$

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (\text{definice } K) \quad [K] = \text{Pa}$$

modul objemové pružnosti

ρ ..objemová hustota; $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$

Vlastní kmity

Stojaté vlny v ohraničeném prostředí (upevněná struna, vzduchový sloupec v píšťale, membrána bubnu,...) se vytvoří pouze pro určité frekvence - **rezonance**

Vlastní kmity struny délky L – vznikne stojatá vlna popsaná rovnicí

$$y'(x, t) = (2y_m \sin kx) \cos \omega t$$

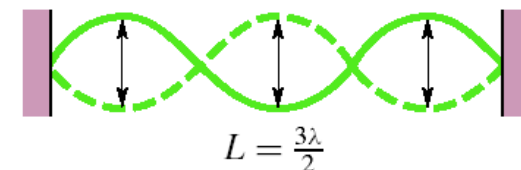
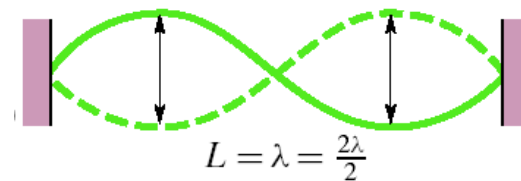
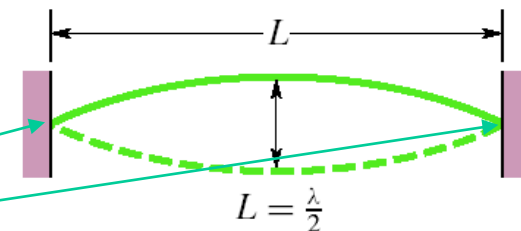
Amplituda kmitů závisí na souřadnici:

$$A(x) = 2y_m \sin kx$$

Stále nulová výchylka \rightarrow uzly $\rightarrow \sin(kx) = 0$

$$kx = n\pi \Rightarrow x_n = n \frac{\lambda}{2}$$

($n = 1, 2, 3..$) vzdálenost uzlů



Vlastní kmity

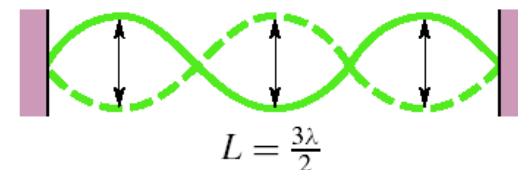
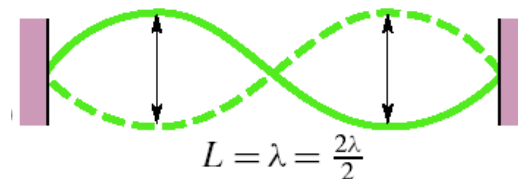
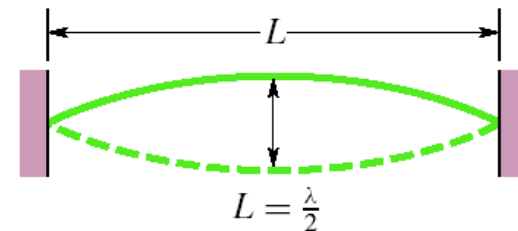
Stojaté vlny v ohraničeném prostředí (upevněná struna, vzduchový sloupec v píšťale, membrána bubnu,...) se vytvoří pouze pro určité frekvence - **rezonance**

U struny délky L se vytvoří stojatá vlna s největší vlnovou délkou $\lambda = 2L \rightarrow$ **vlastní vlnové délky**:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$



$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$



Vlastní (harmonické) frekvence:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$n = 1$.. první (základní) harmonická frekvence

$n = 2, 3 \dots$ vyšší harmonické frekvence příslušné dané struně

HRW 17.45

45C. Ve struně vyvoláme jisté napětí τ_a a vybudíme v ní třetí harmonický kmit. Jemu odpovídá vlastní frekvence f_3 a vlnová délka λ_3 . Poté zvýšíme napětí ve struně na hodnotu $\tau_b = 4\tau_a$ a opět v ní vyvoláme třetí harmonický kmit. (a) Vyjádřete novou hodnotu třetí vlastní frekvence pomocí původní hodnoty f_3 . (b) Vyjádřete novou vlnovou délku odpovídající stojaté vlny pomocí původní vlnové délky λ_3 .

- a) $f_3' = 2f_3$;
b) $\lambda_3' = \lambda_3$

Návod: délka struny se nemění \rightarrow nemění se ani vlnová délka pro třetí vlastní frekvenci.

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}, \text{ kde } n = 3. \text{ Potom vlnová délka pro } f_3 \text{ je } \lambda_3 = \frac{2}{3}L \text{ a } v = \sqrt{\frac{\tau_a}{\mu}};$$

$$\text{potom } f_3 = \frac{v}{\lambda_3}; \tau_b = 4\tau_a \Rightarrow v' = \sqrt{\frac{\tau_b}{\mu}} = 2\sqrt{\frac{\tau_a}{\mu}} \Rightarrow f_3' = \frac{v'}{\lambda_3'}, \text{ kde } \lambda_3' = \lambda_3$$

Vlastní kmity



pišťal

Dva konce volné:
všechny harmonické frekvence

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$n = 1; 2; 3; \dots$

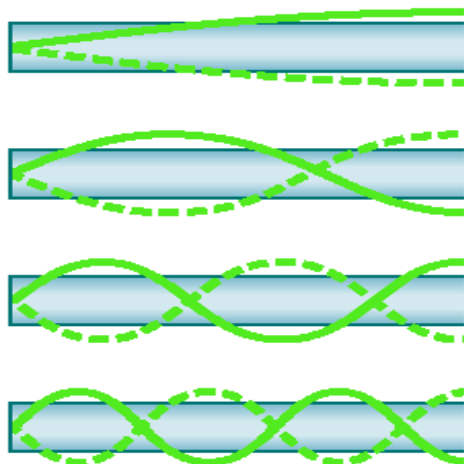
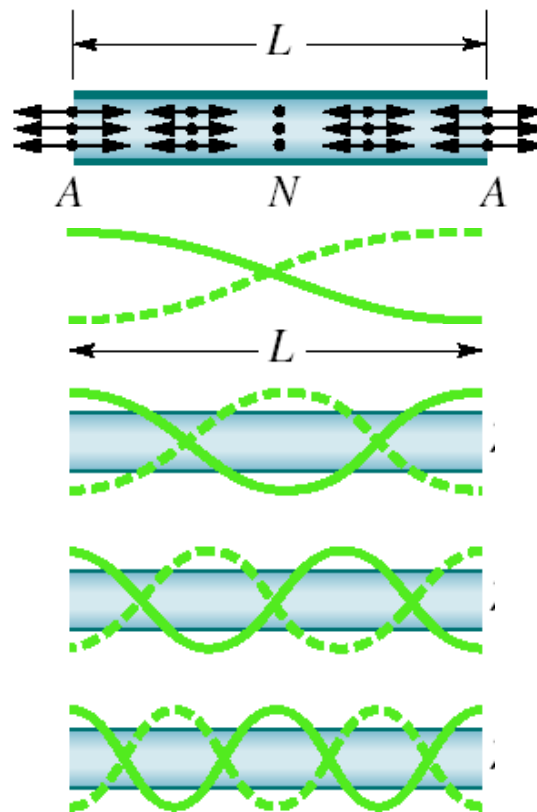
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}$$

Jeden konec volný:
pouze **liché harmonické frekvence**

$$L = n \frac{\lambda_n}{4} \rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{n}$$

$n = 1; 3; 5; \dots$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{4L}$$



Liché násobky
čtvrtiny vlnové
délky

Násobky
poloviny
vlnové délky

Př. HRW 18.50

Varhanní píšťala A je na obou koncích otevřena a má základní frekvenci 300 Hz.

Píšťala B je otevřena na jednom konci a její třetí harmonická frekvence je stejná jako druhá harmonická píšťaly A. Jaká je délka (a) píšťaly A a (b) píšťaly B?

$$\text{A: } L = n \frac{\lambda_n}{2} \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$
$$n = 1; 2; 3; ..$$

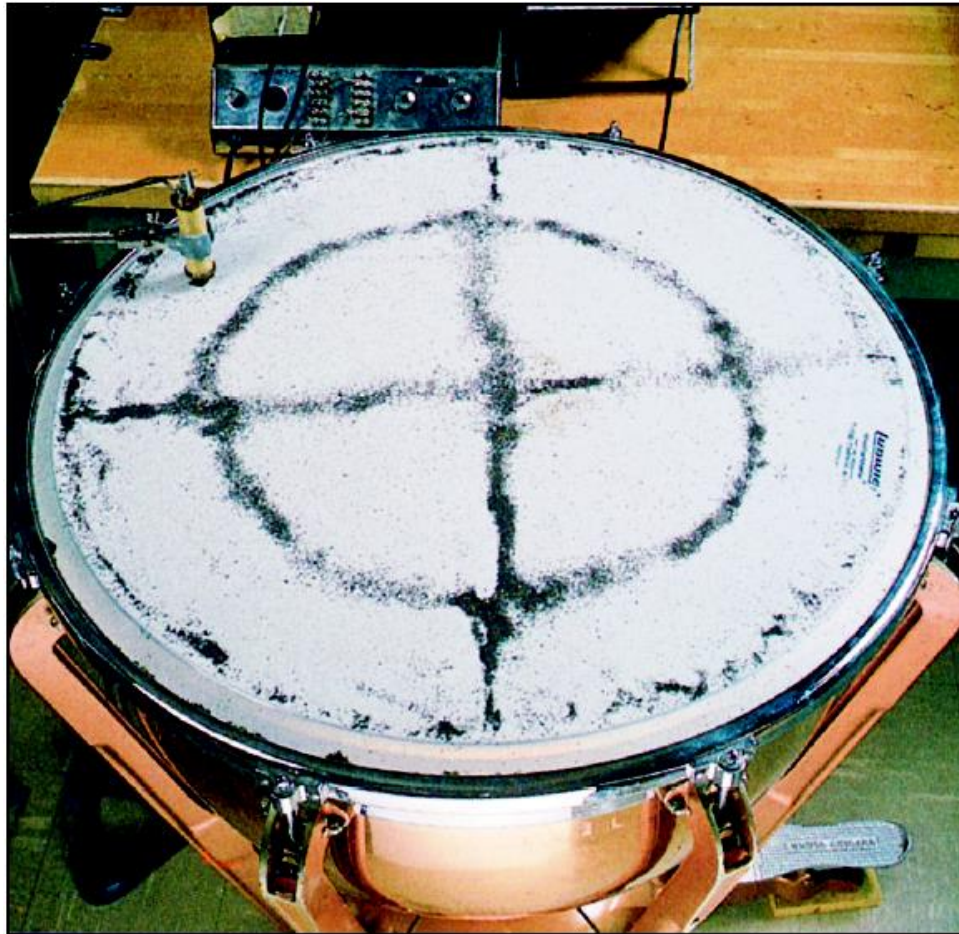
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}$$

$$\text{B: } L = n \frac{\lambda_n}{4} \rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{n}$$
$$n = 1; 3; 5; ..$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{4L}$$

Vlastní kmity

Rezonance (vlastní kmity) na membráně (dvojrozměrné těleso)



Vznikají tzv. Chladniho obrazce

<https://www.youtube.com/watch?v=OLNFRxgMJ6E>

Zvukové vlnění

zvuk ve vzduchu:

podélná vlna s rychlostí

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

zvuk v krystalech:

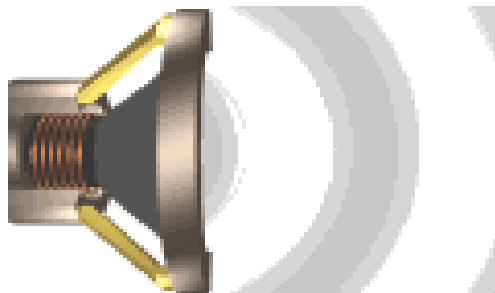
směsice podélných a příčných vln. Energie se mění skokem, který si můžeme představit jako kvazičástici, tzv. fonon.

infrazvuk:

zvuk nezaznamatelný sluchem s frekvencí nižší než 20 Hz. Přirozeně vzniká při pádech lavin, zemětřesení, sopečné činnosti a průletu meteoru.

magnetoakustická vlna:

silně anizotropní komplex zvukových vln šířících se plazmatem v přítomnosti magnetického pole. Skládá se z Alfvénovy vlny, rychlé a pomalé vlny.



seismická vlna:

směsice podélných a příčných vln šířících se jak po povrchu (S a P vlna) tak v hloubce (Rayleighova a Loveho vlna).

ultrazvuk:

zvuk nezaznamatelný sluchem s frekvencí vyšší než 20 kHz. Využitelný v lékařské diagnostice a k čištění nástrojů, čoček, klenotů...

Zvukové vlnění

Zvuková vlna se ve vzduchu šíří jako **podélná vlna**. Skládá se z **pohybujících se a periodicky se opakujících oblastí s nízkým a vysokým tlakem**.

Změna tlaku Δp je popsána harmonickou funkcí s **amplitudou Δp_m** .

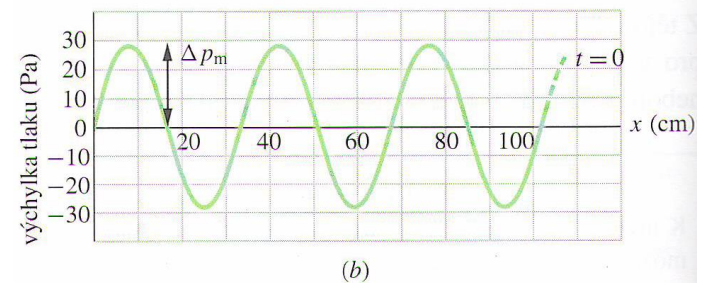
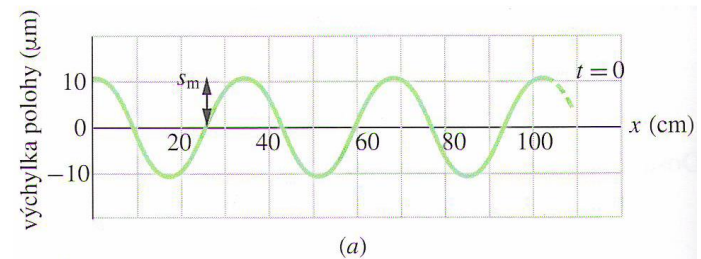
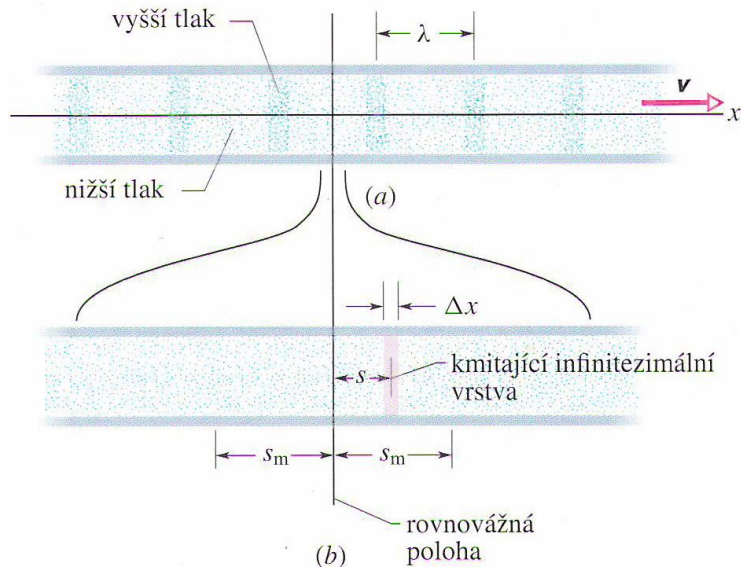
Amplituda výchylek s_m jednotlivých bodů je o hodně menší než vlnová délka.

Kladná hodnota výchylky tlaku odpovídá zmenšení objemu (zhuštění) vrstvy.

Záporná hodnota výchylky tlaku odpovídá zvětšení objemu (zředění) vrstvy

Platí vztah mezi **amplitudou tlaku a amplitudou výchylky**:

$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m$, kde v je fázová rychlost vlny; ρ je hustota prostředí, ω je úhlová frekvence vlny



Zvukové vlnění

Zdroje hudebního zvuku

- Kmity strun (kytary, housle, klavír, cimbál,...)
- Kmity membrán (buben,...)
- Kmity vzduchového sloupce (flétna, hoboje, varhany,...)
- Kmity kovových tyčí (xylofon,...)

Většina nástrojů obsahuje víc než jednu kmitající část – např. vedle strun může kmitat i korpus nástroje.

Velikost hudebního **nástroje** je dána **rozsahem frekvencí**, pro které byl stavěn.

Menší nástroj → vyšší frekvence; větší nástroj → nižší frekvence

Basa – violoncello – viola – housle

nižší frekvence → vyšší frekvence / frekvenční rozsahy se překrývají

Základní frekvence – výška tónu, vyšší harmonické – barva tónu

Vyšší harmonické o různé intenzitě = důvod, proč různé nástroje mají různé zabarvení téhož tónu

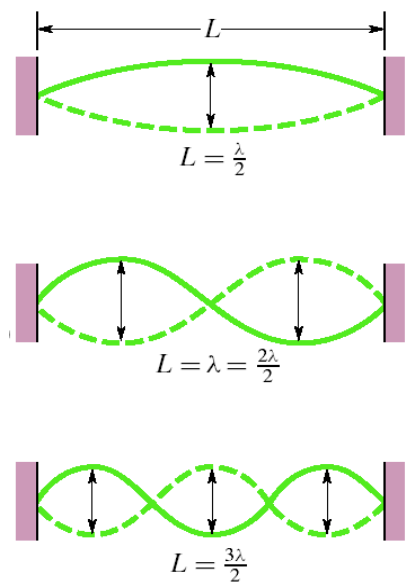
Zvukové vlnění

Zdroje hudebního zvuku

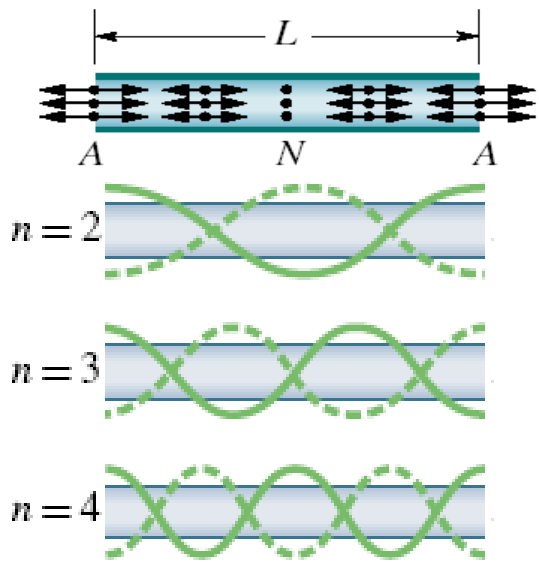
Struna/membrána/sloupec/kovová tyč se rozkmitá na vlastní frekvenci $f_n \rightarrow$ dojde k rozkmitání vrstvy vzduchu s frekvencí rovnou vlastní frekvenci \rightarrow vzniká **zvuková vlna šířící se vzduchem rychlostí v_z s vlnovou délkou λ_z**

$$\lambda_z = \frac{v_z}{f_n}$$

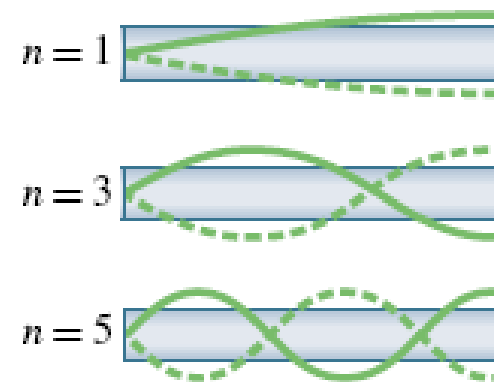
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$



$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$



$$\lambda_n = \frac{4L}{n}$$



$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{4L}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ všechny harmonické

$n = 1, 3, 5, \dots$ pouze liché harmonické



KONTROLA 4: Trubice A délky L a trubice B délky $2L$ mají každá oba konce otevřené. Kolikátá harmonická, příslušná trubici B, má stejnou frekvenci jako základní tón trubice A?

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Druhá harmonická

HRW 18.49

49C. Houslová struna kmitá v základním módu, přičemž vznikají zvukové vlny o vlnové délce λ . Kolikrát musíme zvýšit napětí ve struně, aby se při stejném způsobu kmitání vlnová délka zvuku zmenšila na polovinu?

Řešení: 4x

$$\lambda_z = \frac{v_z}{f_n}$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}$$

HRW 18.49

49C. Houslová struna kmitá v základním módu, přičemž vznikají zvukové vlny o vlnové délce λ . Kolikrát musíme zvýšit napětí ve struně, aby se při stejném způsobu kmitání vlnová délka zvuku zmenšila na polovinu?

$$\lambda_z = \frac{v_z}{f_n}$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}$$

Řešení: 4x

Návod: Vlna ve struně se šíří rychlostí v danou parametry struny. Vlnová délka vlny na struně je $\lambda = 2L$ (L je délka struny). Struna kmitá s frekvencí $f \rightarrow$ vznikne zvuková vlna se stejnou frekvencí šířící se rychlostí v_z (zvuk ve vzduchu) se zadanou vlnovou délkou λ_z . Při změně napětí ve struně \rightarrow kmity s frekvencí $f' \rightarrow$ zvuková vlna s frekvencí $\lambda_z' = \lambda_z/2$.

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}; f = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}{2L}; \text{zvuková vlna } f = \frac{v_z}{\lambda_z} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}{2L} \Rightarrow \lambda_z = \frac{2Lv_z}{\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}$$

$$\lambda_z' = \frac{2Lv_z}{\sqrt{\frac{\tau'}{\mu}}} = \frac{\lambda_z}{2} = \frac{2Lv_z}{2\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}} \Rightarrow \sqrt{\tau'} = 2\sqrt{\tau} \Rightarrow \tau' = 4\tau$$