Vlny – 3

Superpozice a interference vln.

Stojaté vlny. Zázněje – rázy.

Fourierova řada, Fourierova transformace.

Dopplerův jev.

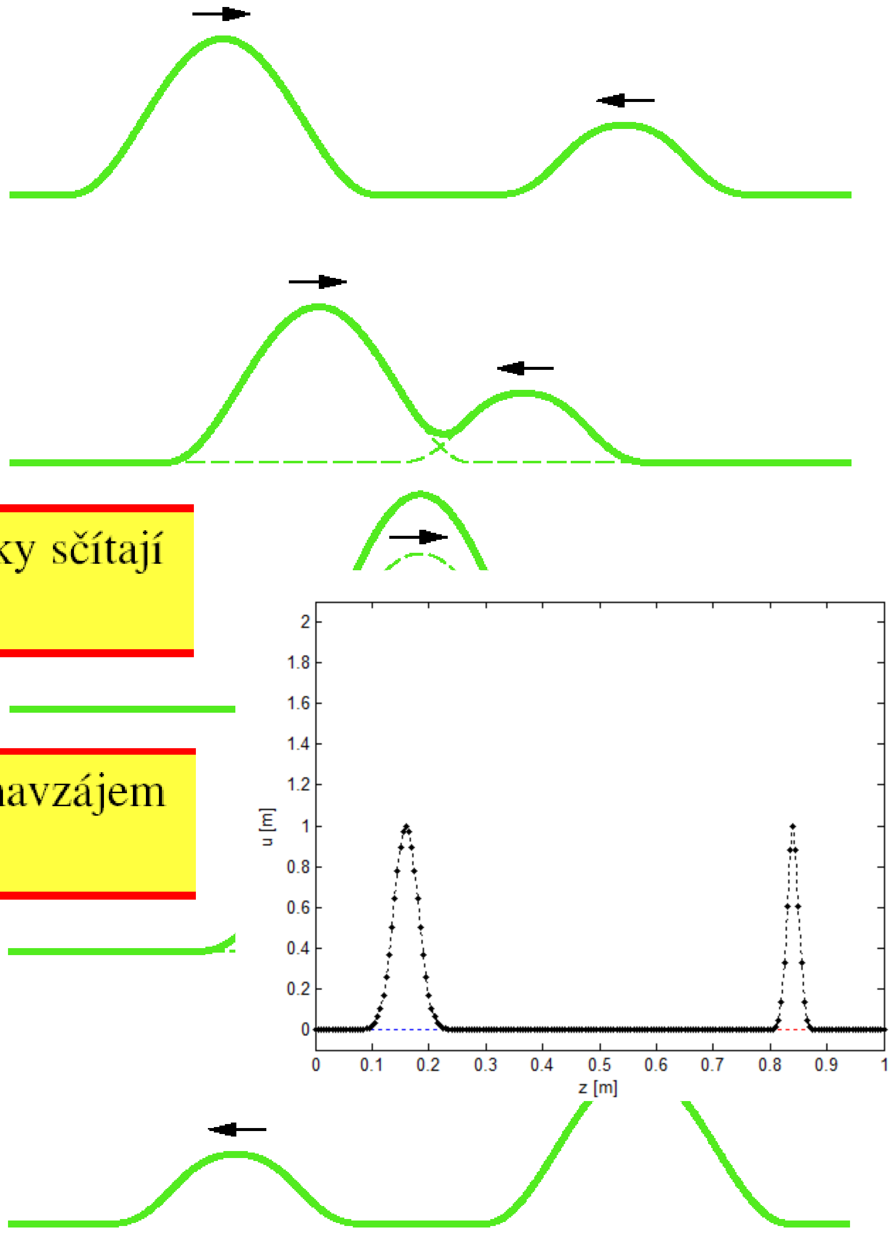
Princip superpozice

Prostředím postupují současně dvě (nebo více) různé vlny.

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t).$$

U překrývajících se vln se výchylky algebraicky sčítají a vytvářejí jednu výslednou vlnu.

Překrývající se vlny se při svém postupu navzájem neovlivňují.



Interference vln

Dvě harmonické vlny o stejné amplitudě, stejné frekvenci a stejné vlnové délce vzájemně fázově posunuté o φ **postupující ve stejném směru**:

$$y_1(x,t) = y_m \sin(\omega t - kx) \qquad y_2(x,t) = y_m \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

Výsledná vlna se vypočítá jako součet výchylek vstupních vln:

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = y_m \sin(\omega t - kx) + y_m \sin(\omega t - kx + \varphi) = \left(2 y_m \cos \frac{1}{2}\varphi\right) \sin\left(\omega t - kx + \frac{1}{2}\varphi\right)}$$

(užije se vzorec pro součet dvou funkcí sinus)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

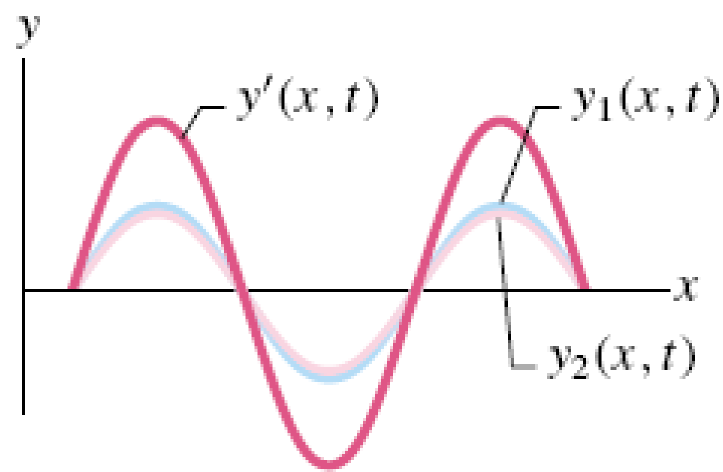
Vzniká sinusová vlna stejné frekvence (stejné ω) a vlnové délky (stejné k) postupující ve směru původních vln

Amplituda výsledné vlny: $\boxed{y'_m = 2 y_m \cos\frac{1}{2}\varphi}$

Závisí na vzájemném **fázovém posuvu** původních vln

Interference vln

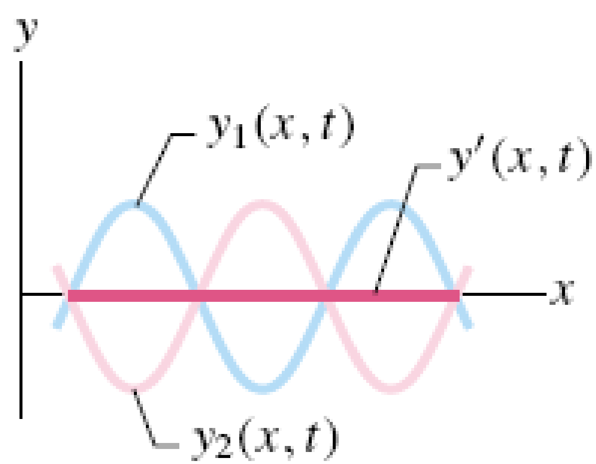
Pro $\boxed{\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$ (**vlny ve fázi**) je $y_m{}' = 2y_m \cos 0 = 2y_m$



(maximální zesílení)

Konstruktivní interference

Pro $\boxed{\varphi = \pi(2m+1), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$ (**vlny v opačné fázi**) je



$$y_m{}' = 2y_m \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

(maximální zeslabení)

Destruktivní interference

HRW 17.38

38Ú. Na struně se šíří souhlasným směrem dvě stejné sinusové vlny a interferují. Výsledná vlna má rovnici

$$y'(x,t) = \\ = (3{,}0\,\mathrm{mm})\sin(20\,\mathrm{rad{\cdot}m^{-1}}\,x - 4{,}0\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,t + 0{,}820\,\mathrm{rad}).$$

(a) Jaká je společná vlnová délka λ obou výchozích vln? (b) Jaký je mezi nimi fázový rozdíl? (c) Jaká je jejich společná amplituda y_m?

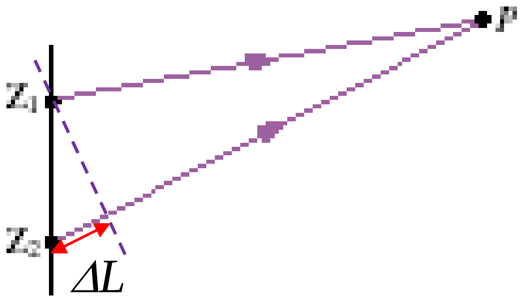
Návod: Odvodit obecnou rovnici pro interferenci dvou vln, které jsou navzájem posunuty o φ.
Výsledek porovnat se zadanou rovnicí.

a) $\lambda = 0{,}314$ m
b) $\varphi = 1{,}64$ rad
c) $y_m = 2{,}2$ mm

Interference vln

Fázový rozdíl může vzniknout i tak, že se **dvě vlny šíří po různě dlouhých drahách**.

Příklad – dva bodové zdroje Z_1, Z_2 zvukového vlnění o vlnové délce λ a frekvenci ω, které jsou ve fázi.



V bodě P dochází k interferenci vlnění

Platí

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda}$$

ΔL je **dráhový rozdíl vln**, φ je jejich fázový rozdíl v bodě P

Konstruktivní interference

$$\boxed{\varphi = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta L = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

Destruktivní interference

$$\boxed{\varphi = \pi(2m+1), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta L = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

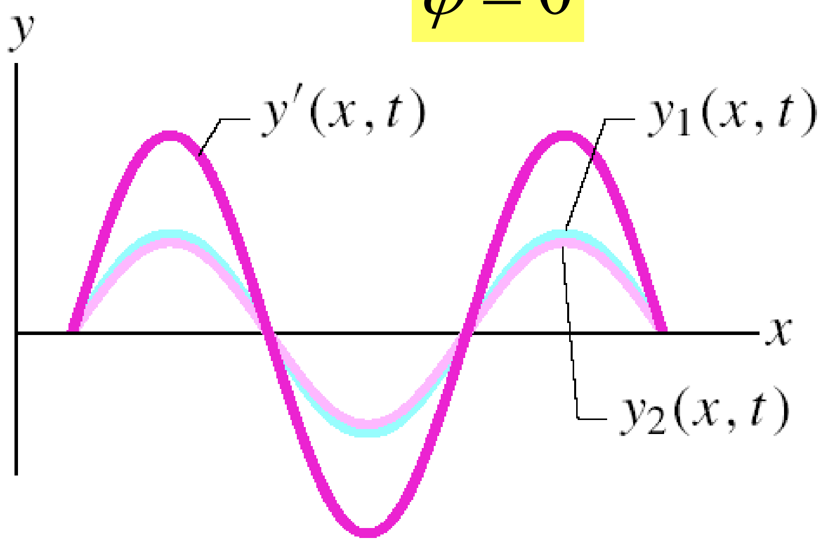
Interference vln

Tabulka 17.1 **Fázové rozdíly a jim odpovídající druh interference**[a]

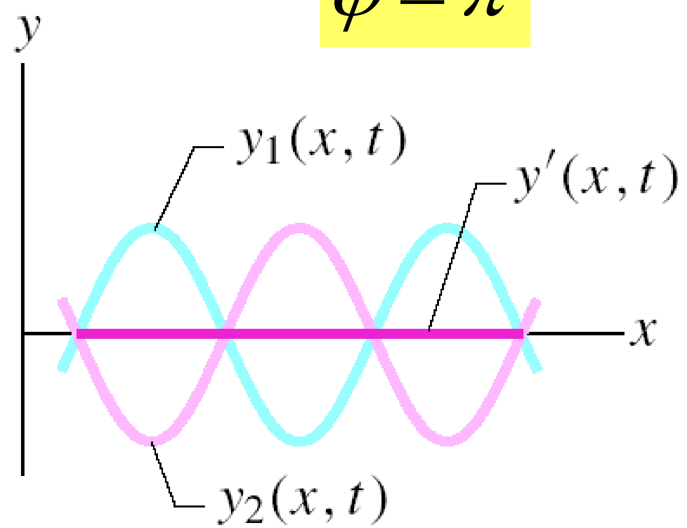
Fázový rozdíl ve stupních	Fázový rozdíl v radiánech	Dráhový rozdíl ve vln. délkách	Amplituda výsledné vlny	Druh interference
0	0	0	$2y_m$	úplně konstruktivní
120	$2\pi/3$	0,33	y_m	částečná
180	π	0,50	0	úplně destruktivní
240	$4\pi/3$	0,67	y_m	částečná
360	2π	1,00	$2y_m$	úplně konstruktivní
865	15,1	2,40	$0,60y_m$	částečná

$$y'(x,t) = [2y_m \cos(\varphi/2)] \sin(kx - \omega t + \varphi/2)$$

$\varphi = 0$



$\varphi = \pi$



2 identické harmonické vlny postupují souhlasným směrem

KONTROLA 4: Vyjděte ze znění př. 17.5 a uvažte následující čtyři dráhové rozdíly mezi oběma výchozími vlnami: $0{,}20\lambda$, $0{,}45\lambda$, $0{,}60\lambda$ a $0{,}80\lambda$. Uspořádejte je sestupně podle velikosti amplitudy výsledné vlny.

Návod: Platí $\Delta L = \lambda \Rightarrow \varphi = 2\pi$

$1) \Delta L = 0{,}2\lambda \Rightarrow \varphi = 0{,}2 \cdot 2\pi = 0{,}4\pi$

$2)\ \varphi = 0{,}45 \cdot 2\pi = 0{,}9\pi$

$3)\ \varphi = 0{,}6 \cdot 2\pi = 1{,}2\pi$

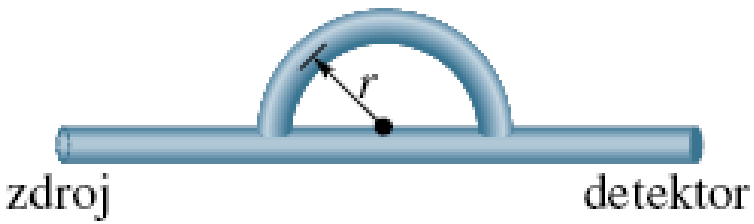
$4)\ \varphi = 0{,}8 \cdot 2\pi = 1{,}6\pi$

Amplituda výsledné vlny : $y_m' = y_m \cos\frac{\varphi}{2}$

$$\cos\frac{0{,}4\pi}{2} = \cos\frac{1{,}6\pi}{2} > \cos\frac{1{,}2\pi}{2} > \cos\frac{0{,}9\pi}{2}$$

HRW 18.24

24Ú. Zvuková vlna o vlnové délce 40,0 cm vstupuje do trubice nakreslené na obr. 18.33 koncem, na němž je připojen zdroj. Jaký musí být nejmenší poloměr r, aby detektor na druhém konci zachytil nejslabší signál?



Návod: Na kruhové části trubice dojde k dráhovému rozdílu $\Delta L = \lambda/2$ vůči signálu postupujícímu rovnou částí trubice $\rightarrow$ destruktivní interference $\rightarrow$ detektor zachytí nejslabší signál

r = 17,5 cm

Interference vln

POZNÁMKA !!

Aby **interference** vlnění byla **pozorovatelná**, je nutné, aby **rozdíl fází** interferujících vlnění byl v každém bodě interferenčního pole **konstantní,** na čase nezávislý**.**
Vlnění, která tuto podmínku splňují, nazýváme **koherentní.**

Poznámka 2:

Dojde-li k **interferenci aniž dojde k odchylce od přímočarého šíření** vlnění (v homogenním a izotropním prostředí), pak takový jev nazýváme **jevem ryze interferenčním** (světlo – interference na tenké vrstvě)

Dojde –li (v prostředí homogenním a izotropním) k **interferenci v prostoru přímočarému šíření vlnění nepřístupném** (v tzv. geometrickém stínu), nazýváme takový jev **jevem ohybovým (difrakčním)** (světlo – průchod štěrbinou).

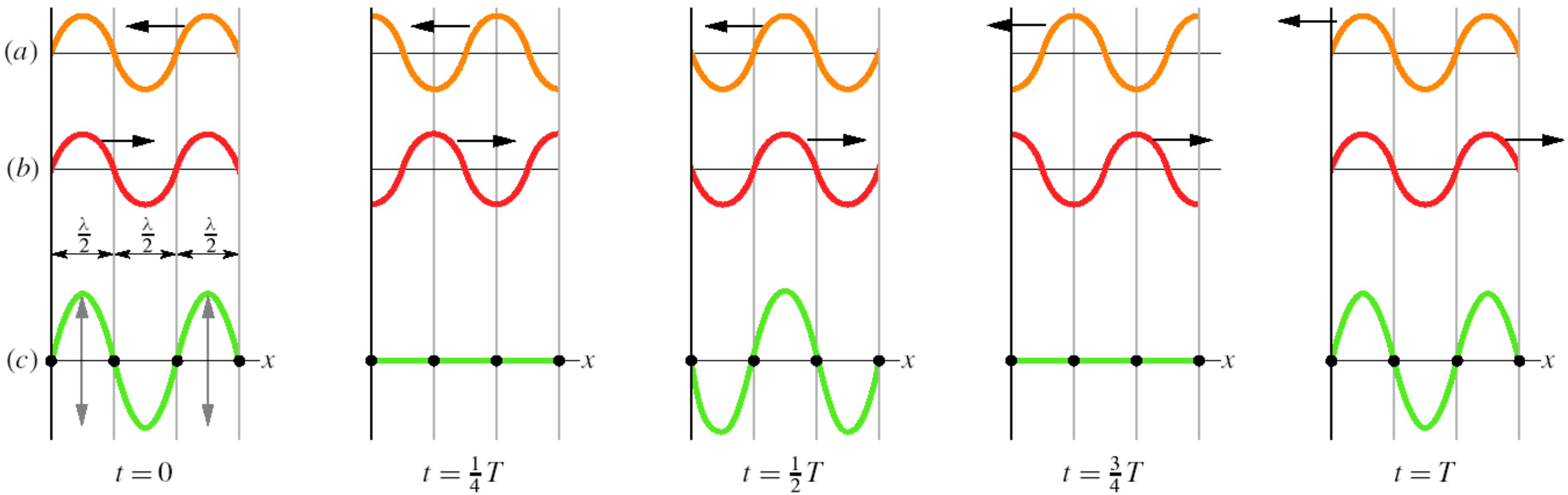
Stojaté vlny

Jestliže dvě sinusové vlny o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou postupují v napnuté struně *opačným* směrem, vzniká jejich interferencí stojatá vlna.

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$$

$$= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y'(x,t) = (2y_m \sin kx)\cos \omega t$$



Stojaté vlny

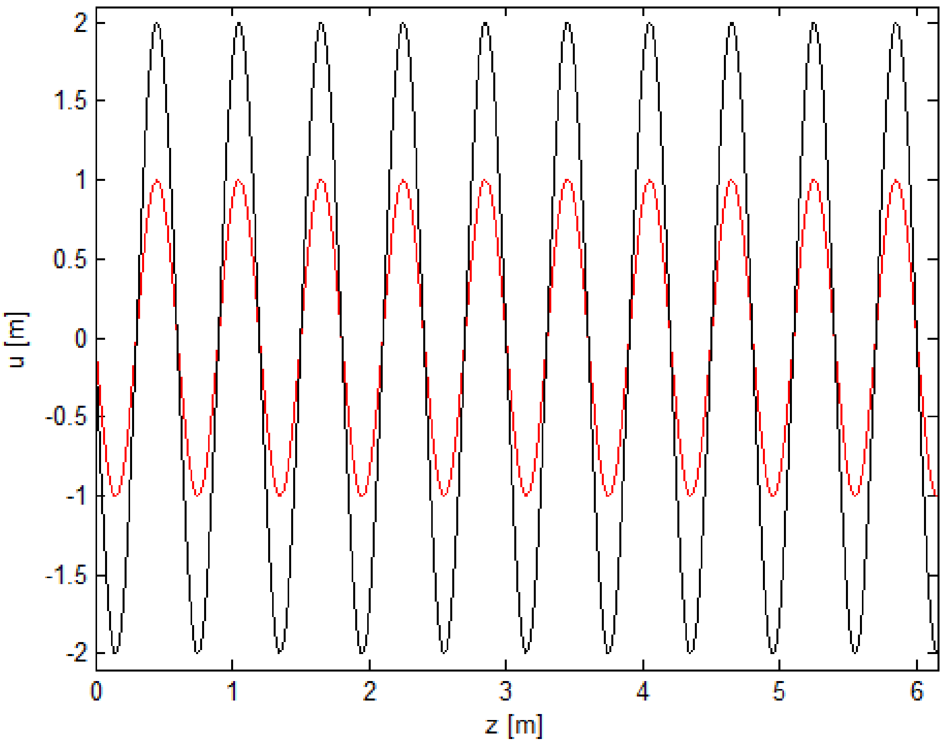
Jestliže dvě sinusové vlny o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou postupují v napnuté struně *opačným* směrem, vzniká jejich interferencí stojatá vlna.

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$$
$$= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y'(x,t) = \underbrace{(2y_m \sin kx)}\cos \omega t$$

Amplituda výchylky bodu se souřadnicí x

Všechny body prostředí kmitají se stejnou úhlovou frekvencí ω



Stojaté vlny

Odvození:

Užijeme

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) =$$
$$= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$2\sin\frac{kx - \omega t + kx + \omega t}{2}\cos\frac{kx - \omega t - kx - \omega t}{2} =$$
$$= 2\sin kx\cos(-\omega t) = 2\sin kx\cos\omega t$$

Stojaté vlny

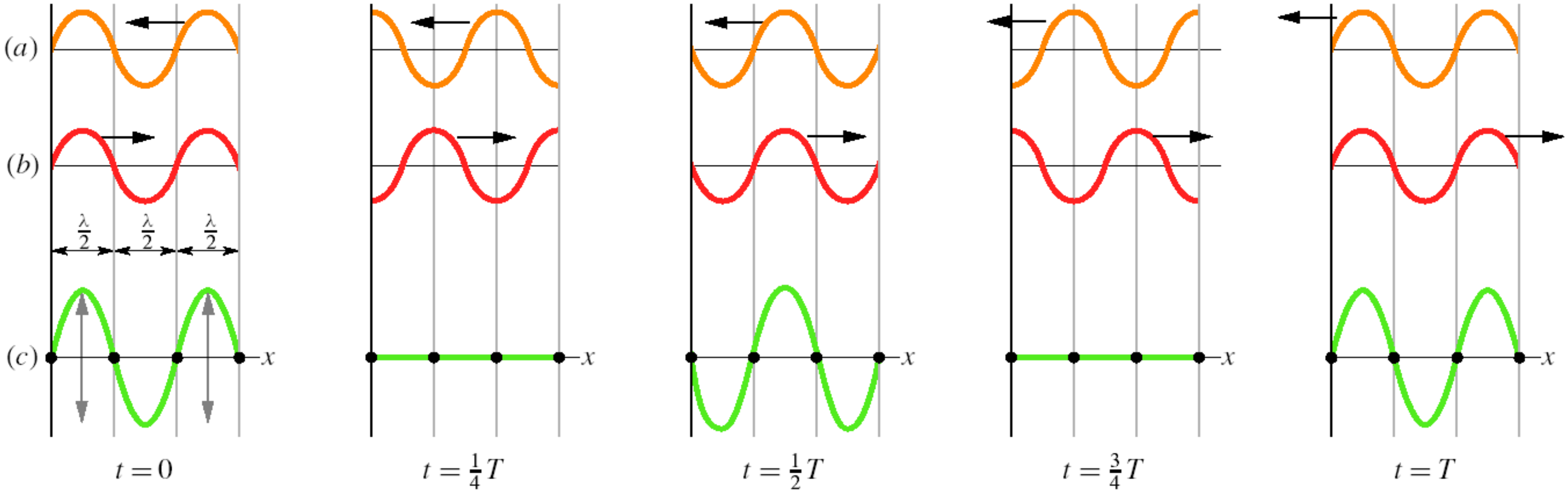
Všechny **částice** prostředí **kmitají se stejnou fází** ωt

ale **s různou amplitudou výchylky**, která závisí na *x*-ové souřadnici kmitající částice

$$\boxed{A(x) = 2y_m \sin kx}$$

$\sin(kx) = 0 \rightarrow$ uzly

$\sin(kx) = 1 \rightarrow$ kmitny



Stojaté vlny

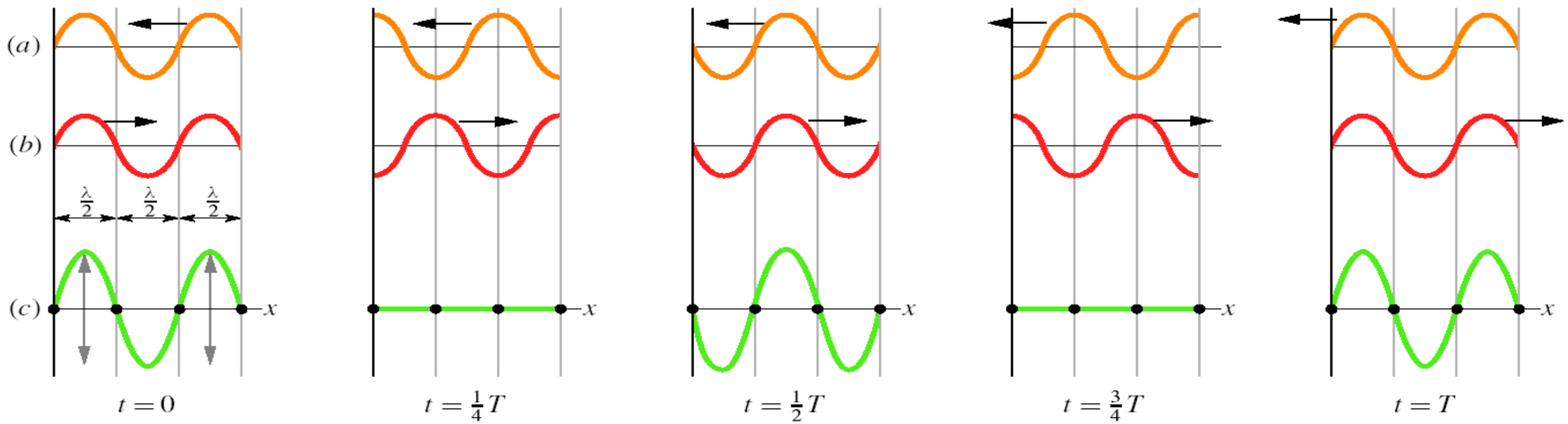
Místa se stále nulovou výchylkou – **uzly.** Jejich souřadnice x_n určíme následovně:

$$kx = n\pi \Longrightarrow x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} \rightarrow x_n = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad \text{uzly}$$

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{k} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} =$$

$$= \frac{2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{2\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{(2n+1)\pi}{\frac{4\pi}{\lambda}} \rightarrow x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad \text{kmitny}$$

Místa, která kmitají s maximální amplitudou $2y_m$ - **kmitny**

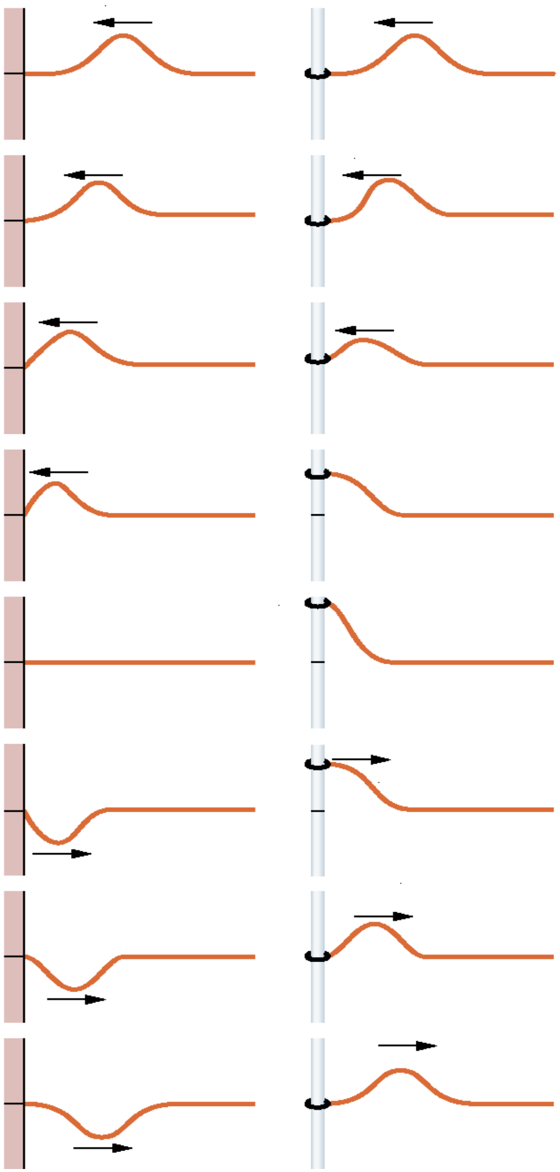


Stojaté vlny

Vznik stojaté vlny odrazem

- pevný konec - uzel - odražená vlna má opačnou fázi

- volný konec - kmitna - odražená vlna má stejnou fázi



KONTROLA 5: Uvažme interferenci dvou vln stejné amplitudy a vlnové délky. Výsledná vlna má rovnici (1) $y'(x,t) = 4\sin(5x - 4t)$, (2) $y'(x,t) = 4\sin(5x)\cos(4t)$ a (3) $y'(x,t) = 4\sin(5x + 4t)$. Která z těchto rovnic popisuje výslednou vlnu v situaci, kdy se výchozí vlny šíří (a) obě ve směru osy x, (b) obě proti směru osy x a (c) v opačných směrech?

HRW 17.58

58Ú. Kmitání struny je popsáno rovnicí

$$y' = (0{,}50\,\mathrm{cm})\sin\left[\left(\frac{\pi}{3}\,\mathrm{cm}^{-1}\right)x\right]\cos\left[\left(40\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)t\right].$$

(a) Uvedené kmitání vzniklo superpozicí dvou stejných vln (až na směr šíření). Jaká byla jejich amplituda a rychlost? (b) Jaká je vzdálenost mezi sousedními uzly stojaté vlny? (c) Jak velkou příčnou rychlost má částice struny o souřadnici $x = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ v čase $t = \frac{9}{8}\,\mathrm{s}$?

a) $y_m = 0{,}25$ cm; $v = 1{,}2$ m/s; b) $\Delta x = 3$ cm; c) $v_p = 0$ m/s

Návod: a) odvodit obecnou rovnici pro stojatou vlnu pro $y' = y_1 + y_2$, kde $y_1 = y_m\sin(kx-\omega t)$ a $y_2 = y_m\sin(kx+\omega t)$. Z toho $2\,y_m = 0{,}5$ cm. Fázová rychlost vlny je $v = \omega/k$.

b) Pro uzly platí: $\sin(kx) = 0 \rightarrow kx = m\pi$; řešíme pro $m = 0$ a $m = 1 \rightarrow \Delta x$

c) Příčná rychlost je změna výchylky y‘ v čase $\frac{\partial y'}{\partial t}$. Vyjádříme obecnou rovnici a dosadíme hodnoty x a t ze zadání.

Skládání kmitů - rázy

Prostředím postupují současně dvě zvukové vlny, které mají různou frekvenci f_1 a f_2. V místě pozorovatele (detektoru) se skládají výchylky/kmity – důsledek dvou postupných vln, které dospěly do bodu se souřadnicí x.
Hledáme výslednou výchylku:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y_1(t) = y_m \sin(\omega_1 t) \qquad y_2(t) = y_m \sin(\omega_2 t)$$

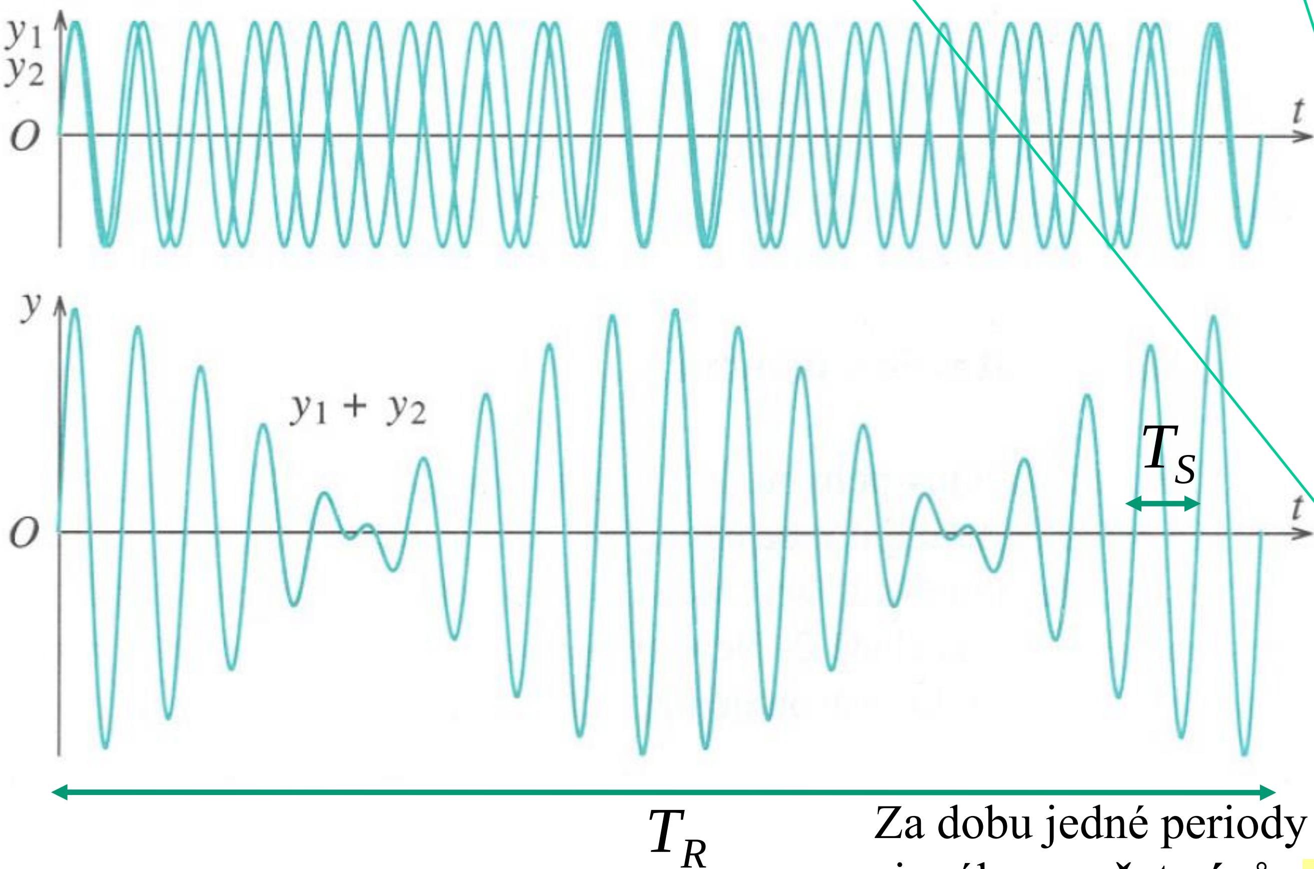
V případě, že frekvence f_1 a f_2 jsou různé, ale blízké, tj. $f_1 \neq f_2$ ale $f_1 \rightarrow f_2$ (mají „skoro“ stejnou hodnotu, neliší se o víc než 20 Hz) může dojít ke vzniku **rázů** – slyšíme **zesilování a zeslabování výsledného signálu**.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = y_m \left(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)\right)$$

$$y(t) = 2y_m \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}_{\omega_R} t\right) \sin\left(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\omega_S} t\right)$$

Skládání kmitů - rázy

$$y(t) = 2y_m \cos\Bigg(\underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}_{\omega_R} t\Bigg) \sin\Bigg(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\omega_S} t\Bigg)$$



$\omega_1 = 2\pi f_1$

$\omega_2 = 2\pi f_2$

Frekvence výsledného signálu f_S:

$\omega_S = (\omega_1 + \omega_2)/2$

$f_S = (f_1 + f_2)/2 = 1/T_S$

Amplituda výsledného signálu kolísá s frekvencí f_R:

$\omega_R = (\omega_1 - \omega_2)/2$

$f_R = (f_1 - f_2)/2 = 1/T_R$

Za dobu jedné periody T_R slyšíme 2x nejsilnější signál → **počet rázů**: $N = 2f_R = (f_1 - f_2)$

Princip superpozice

Fourierova transformace

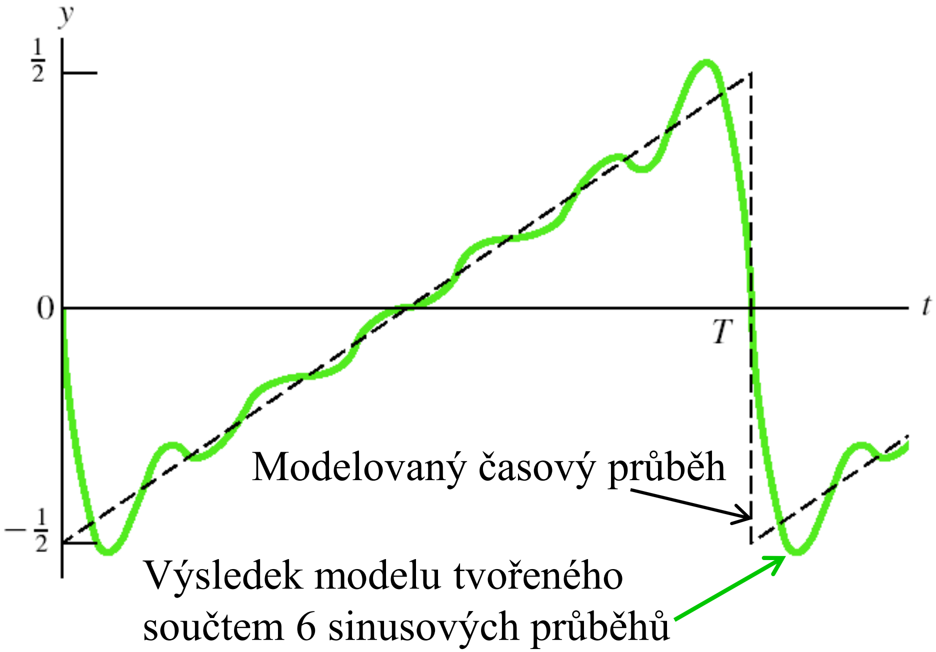
Joseph Fourier (1768-1830)

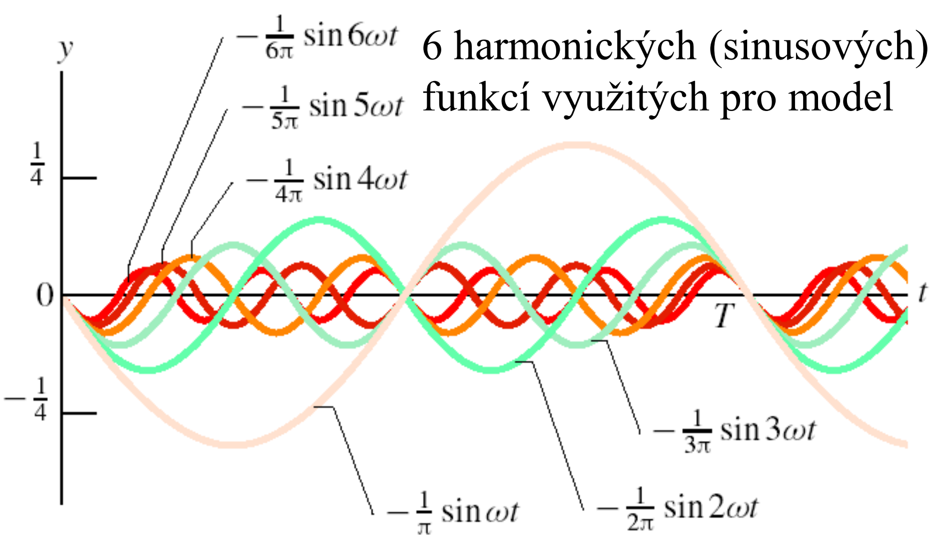
Francouzský matematik, který přišel na to, že jakýkoli impuls může být složen ze sinusových a kosinusových impulsů. Položil tak základy teorie trigonometrických řad. Nezanedbatelný byl také jeho přínos k teorii funkcí reálné proměnné. Studoval podrobně problémy matematické fyziky. V roce 1822 vytvořil matematickou teorii, která řešila diferenciální rovnice. Théorie Analytique de la Chaleur (Analytic Theory of Heat).

Fourier věřil, že mu při nějaké nemoci pomůže bylinkový zábal a takto zabalen spadl dolů ze schodů a zabil se...

Princip superpozice

Fourierova analýza





Vlnu libovolného tvaru lze vyjádřit ve tvaru **součtu velkého počtu sinusových vln**.

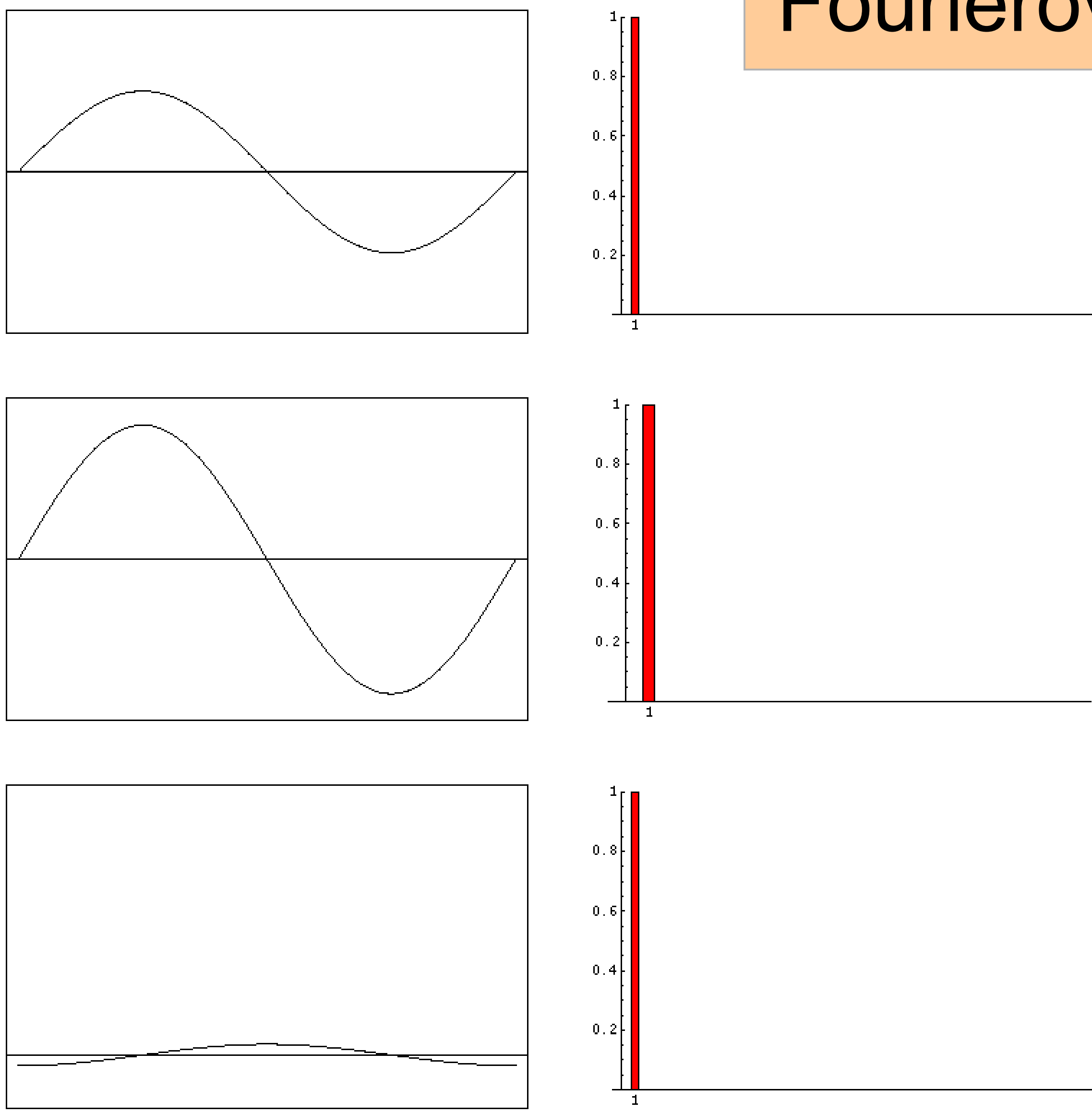
$$\omega = 2\pi / T$$

$$y = -\frac{1}{\pi} \sum_{n} \frac{1}{n} \sin(n\omega t)$$

Potřebujeme najít vhodnou kombinaci jejich amplitud a frekvencí. Potom dovedeme namodelovat libovolný časový průběh. Čím větší bude počet harmonických funkcí v modelu, tím přesnější výsledek dostaneme.

Princip superpozice

Fourierova analýza



Princip superpozice

Fourierova řada a transformace

řada: na konečném intervalu (sumace)
transformace: v neomezeném prostředí (integrace)

Fourierova transformace je složení obecné vlny z rovinných vln

Fourierova řada je složení konečného pulsu ze sinů a kosinů

$$f(t) = \sum_n c_n \mathrm{e}^{i\omega_n t}$$

$$f(x) = \sum_n c_n \mathrm{e}^{i k_n x}$$

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\mathrm{e}^{ikx}\, dk$$

$$\psi(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}\, dk\, d\omega$$

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\, d^3k\, d\omega$$

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\mathrm{e}^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega(\mathbf{k})t]}\, d^3k$$

Mocninné řady funkcí e, sin, cos $\Rightarrow$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Dopplerův jev

- **Dopplerův jev**
- **využití v praxi**
- **rázová vlna**

Christian Andreas Doppler (1803-1853)

Rakouský matematik a fyzik, část svého krátkého života strávil jako profesor ČVUT v Praze, později přednášel na Vídeňské polytechnice. Ve známost vešel především **objevem změny frekvence vlnění při vzájemném pohybu zdroje a pozorovatele** (Dopplerův princip). Publikoval také práce o elektřině a magnetismu, zabýval se časovou proměnností magnetické deklinace, napsal několik článků z optiky a astronomie.

Dopplerův jev

zdroj i pozorovatel v klidu

$$f = f_0 = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$$

f – detekovaná frekvence
f_0 –frekvence zdroje
v – rychlost zvuku

Dopplerův jev

pozorovatel se hýbe

f – detekovaná frekvence
f_0 –frekvence zdroje
v – rychlost zvuku
v_D – rychlost detektoru

$$\boxed{f = \frac{v \pm v_D}{\lambda}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = f_0 \frac{v \pm v_D}{v}}$$

Dopplerův jev

zdroj se hýbe

f – detekovaná frekvence
f_0 –frekvence zdroje
v – rychlost zvuku
v_z – rychlost zdroje

$$f = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v \mp v_z)T} \Longrightarrow f = f_0 \frac{v}{v \mp v_z}$$

Dopplerův jev

zdroj i pozorovatel se hýbe

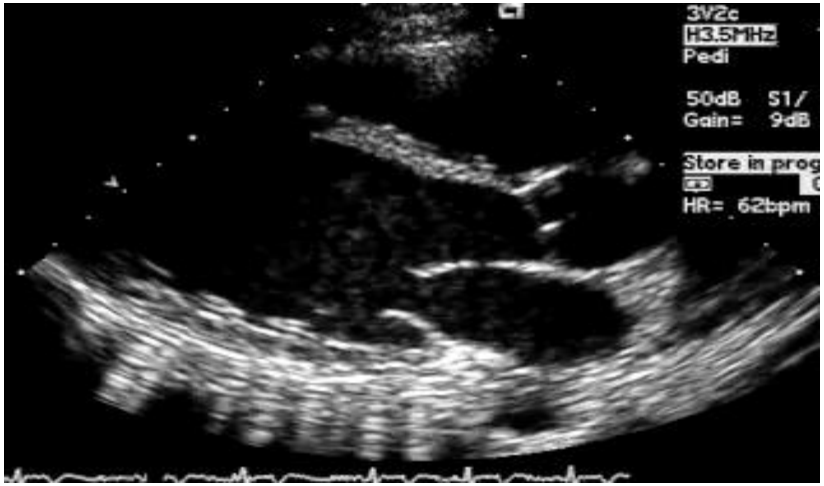
f – detekovaná frekvence
f_0 –frekvence zdroje
v – rychlost zvuku
v_D – rychlost detektoru
v_Z – rychlost zdroje

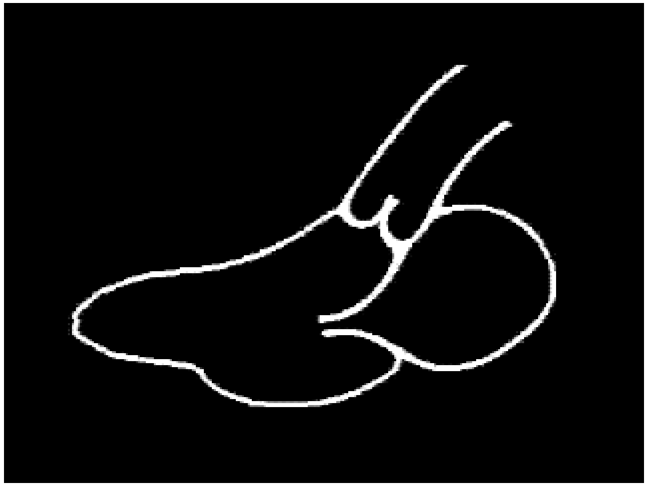
$$f = \frac{v \pm v_D}{(v \mp v_z)T} \Longrightarrow f = f_0 \frac{v \pm v_D}{v \mp v_z}$$

Dopplerův jev

využití v praxi

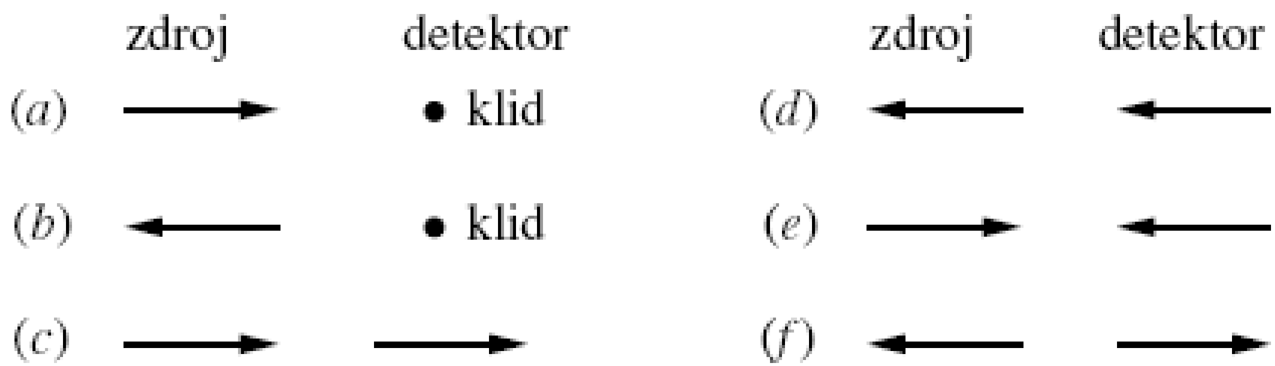
- **měření rychlosti radarem**
- **echokardiografie**
- **určování vzdáleností v astronomii**





University of Yale

KONTROLA 6: Obrázek znázorňuje pohyb detektoru a zdroje zvuku pro šest situací v klidném vzduchu.



Pro každou situaci rozhodněte, jestli bude změřena frekvence vyšší, nebo nižší než vyslaná frekvence, nebo zda to nemůžeme určit bez dalších informací.

HRW II – 18.79 Ú

Siréna vydávající zvuk frekvence 1 000 Hz se pohybuje směrem od nás ke stěně skalního útesu rychlostí 10 m.s^{-1}. Rychlost zvuku ve vzduchu je 330 m.s^{-1}.

a) Jaká je frekvence zvuku, který slyšíme přímo od sirény?

b) Jaká je frekvence zvuku odraženého od útesu?

c) Jaká je frekvence záznějů (rázů)? Může lidské ucho tyto zázněje rozeznat (jejich frekvence musí být nižší než 20 Hz)?

Návod k řešení:

a) Zdroj se pohybuje směrem od nás, my jsme v klidu, výsledná frekvence f_1:

$$f_1 = f_0 \frac{v}{v+v_z} = 1000 \frac{330}{340} Hz = 971 Hz$$

b) Siréna = zdroj se pohybuje směrem k útesu $\rightarrow$ na útes dopadají vlny s frekvencí f_2 (přibližující se zdroj). Útes se nehýbe $\rightarrow$ odráží vlny s frekvencí f_2 beze změny.

$$f_2 = f_0 \frac{v}{v-v_z} = 1000 \frac{330}{320} Hz = 1031 Hz$$

c) Zázněje vznikají, pokud k nám dospějí dvě vlny s různou, ale blízkou frekvencí. Projevují se periodickým zesilováním/zeslabováním signálu. Počet záznějů (odvozeno v rámci PC) vypočítáme jako rozdíl frekvencí obou dopadajících vln. Lidské ucho registruje max. 20 zesílení/zeslabení za 1 sekundu. Vyšší počet změn už není schopno vyhodnotit. V našem případě: $N = |f_2 - f_1| = 60 Hz \rightarrow \text{nelze rozeznat}$

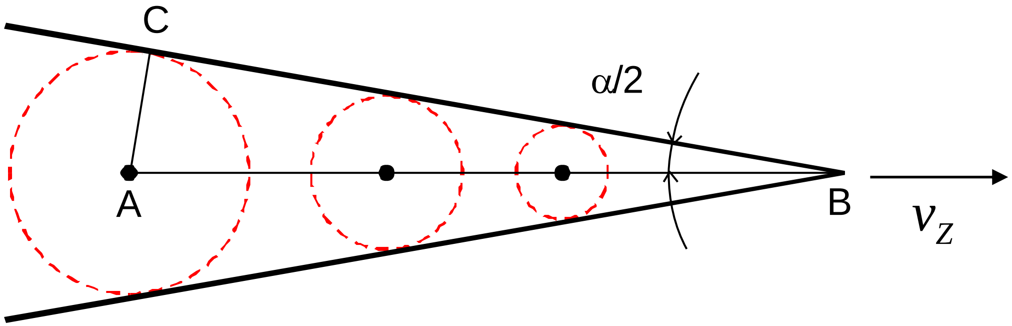
Dopplerův jev

Rázová vlna

v .. rychlost zvuku
v_Z .. rychlost zdroje

$v_z = v$

Machův kužel



$v_z > v$

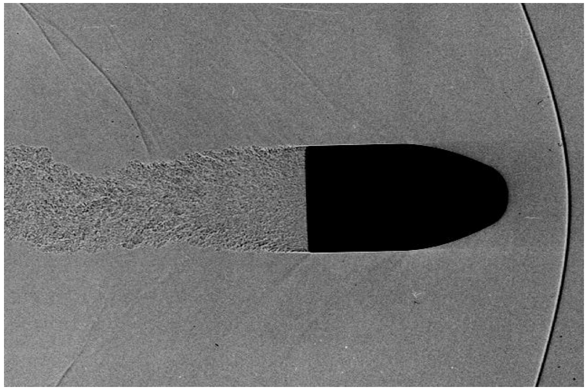
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{AB} = \frac{vt}{v_z t} = \frac{v}{v_z}$$

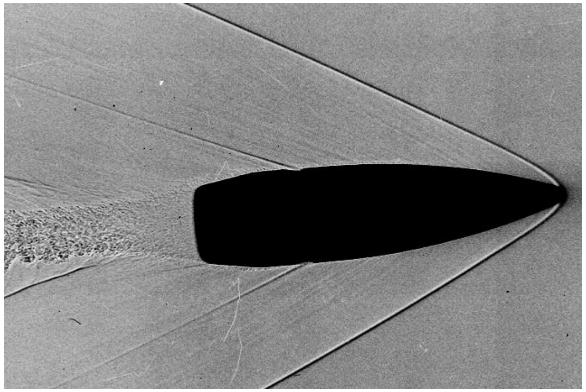
(Machův úhel)

Dopplerův jev

Rázová vlna

Podzvuková a nadzvuková rychlost střely.





$$\frac{v_Z}{v} = \text{Machovo číslo}$$

Stíhačka F/A-18C Hornet při překročení zvukové bariery

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:FA-8_Hornet_breaking_sound_barrier_%287_July_1999%29.jpg